

Stefan Dudenhausen

Normalkraft- und Knicklängenbestimmung  
von Druckstäben über die Ermittlung  
von modalen Parametern

2023

# **Normalkraft- und Knicklängenbestimmung von Druckstäben über die Ermittlung von modalen Parametern**

am Fachbereich Bauingenieurwesen  
der Rheinland-Pfälzischen  
Technischen Universität Kaiserslautern-Landau  
zur Verleihung des akademischen Grades

**DOKTOR-INGENIEUR (Dr.-Ing.)**

genehmigte

**Dissertation**

von

**Stefan Dudenhausen  
geb. Oertker**

aus Warendorf

Dekan:	Prof. Dr.-Ing. Karsten Körkemeyer
1. Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Kurz
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. Markus Waltering
3. Berichterstatter:	Prof. Dr. sc. techn. habil. Markus Knobloch

Tag der mündlichen Prüfung: 10.05.2024

Kaiserslautern 2023

(D386)

*Now is no time to think of what you do not have.  
Think of what you can do with what there is.*

The old man and the sea (1952)  
Ernest Hemingway

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit wurde während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich Bauingenieurwesen der FH Münster angefertigt. Dabei gilt mein Dank dem Fachbereich Bauingenieurwesen der Rheinland-Pfälzischen Technischen Universität Kaiserslautern-Landau für die Unterstützung meines Promotionsvorhabens.

Bei Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Kurz möchte ich mich in besonderem Maße für die Betreuung der Arbeit, die fachliche Diskussion und die Erstellung des Erstgutachtens bedanken. Ein ausgesprochener Dank gilt außerdem meinem Zweitgutachter und Betreuer in Münster Prof. Dr. Markus Waltering. Für das große Vertrauen in meine Person und die Möglichkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter an unserem Fachbereich tätig zu sein, bin ich sehr dankbar. Unsere vielen fachlichen und außerfachlichen Gespräche haben diese Zeit maßgeblich geprägt. Darüber hinaus möchte ich mich für die Übernahme des Drittgutachtens und das Interesse an dem in dieser Arbeit behandelten Themengebiet bei Prof. Dr. sc. techn. habil. Markus Knobloch von der Ruhr-Universität Bochum herzlich bedanken. Mein Dank gilt zudem Prof. Dr.-Ing. Matthias Pahn für die Übernahme des Vorsitzes der Promotionskommission.

Ohne die Unterstützung meiner Kolleginnen und Kollegen am Fachbereich Bauingenieurwesen der FH Münster wäre die Erstellung dieser Arbeit kaum möglich gewesen. Insbesondere gilt mein Dank Frank Weisleder, der mich seit meinem ersten Tag am Fachbereich begleitet und mir einen reibungslosen Einstieg ermöglicht hat. Er war immer zu einer intensiven fachlichen Diskussion bereit und hat mich zu jeder Zeit unaufgefordert unterstützt. Ebenfalls möchte ich mich bei Ingo Fenneker für seine Unterstützung in der Planung und Durchführung der laborexperimentellen Versuchsreihe bedanken. Ein Dank gilt darüber hinaus meiner Kollegin Lianne Banning für die wertvolle Hilfe in arbeitsintensiven Phasen.

Weiterhin gilt mein Dank Esther, Fabian, Lena und Lisanne für das intensive Korrekturlesen in der Endphase dieser Arbeit.

Ausgesprochen dankbar bin ich für die Unterstützung meiner Familie, die mich zu jeder Zeit in meinen Vorstellungen und Wünschen gestärkt hat. Für die vielen fachlichen Diskussionen und ermutigenden Worte möchte ich mich insbesondere bei meinem Schwiegervater Wolfgang bedanken.

Ein ganz besonderer Dank gilt meiner Frau Anna, die mich zu jeder Zeit bedingungslos unterstützt. Ich denke immer gerne an die vielen Gespräche zwischen einer Doktorandin und einem Doktoranden zurück, in denen wir uns gegenseitig immer wieder Motivation zugesprochen haben. Ohne ihren großen Rückhalt wäre der Weg dieser Arbeit weitaus mühevoller gewesen.

Kaiserslautern, 2023

Stefan Dudenhausen

# Kurzfassung

Das Bauwesen trägt erheblich zu den weltweiten Emissionen von Treibhausgasen bei und steht in einer führenden Rolle, einen geeigneten Beitrag zum Klimaschutz zu leisten. Dazu gehört nicht nur die energetische Sanierung vorhandener Bausubstanz, sondern ebenso die Entwicklung qualifizierter Bewertungs- und Analyseverfahren existierender Tragstrukturen. Diese Arbeit stellt ein dynamisches Verfahren zur Systemidentifikation vor, das Aussagen über die während der Messung vorhandenen Normalkräfte und Lagerungsbedingungen von Druckstäben ermöglicht. Grundlage des Verfahrens ist ein durch vier unabhängige Dreh- und Wegfedern gelagerter Euler-Bernoulli-Balken mit Normalkraftbeanspruchung. Auf Basis einer experimentellen Ermittlung der ersten Eigenkreisfrequenz und Eigenform definiert das vorgestellte Verfahren die Normalkraft und Federsteifigkeiten, welche fortan für einen experimentellen Stabilitätsnachweis herangezogen werden können. Für die Definition der Systemeigenschaften optimiert ein Partikelschwarmalgorithmus die gesuchten Parameter des Grundstabs so lange bis eine bestmögliche Übereinstimmung zwischen den messtechnisch ermittelten und theoretisch errechneten modalen Eigenschaften besteht.

Das vorgestellte dynamische Verfahren zur Systemidentifikation wurde anhand von 20 Prüfkörpern der Systemlängen zwischen 2,3975 m und 2,545 m untersucht. Die Proben wurden senkrecht in einen vorhandenen Prüfraumen eingebaut. Die untersuchten Prüfkörper bestanden aus fünf unterschiedlichen Stahlprofilen in Kombination mit vier verschiedenen oberen Anschlusstypen. Die Lasteinleitung erfolgte über eine vertikal verschiebbliche Führung unterhalb des gelenkig angeschlossenen Prüfkörpers. Für den oberen Anschluss standen ebenfalls ein Gelenkanschluss sowie drei Anschlussprofile unterschiedlicher Biegesteifigkeiten zur Verfügung. Die Untersuchung umfasste über alle Druckstäbe hinweg 117 Belastungsversuche mit Normalkräften zwischen 8,36 kN und

178,29 kN. Dabei wurden für die Modalanalyse und anschließende Systemidentifikation je nach Anschlussstyp zwölf oder dreizehn gleichmäßig über den Prüfkörper verteilte Messstellen herangezogen.

Die Ergebnisse des Identifikationsverfahrens ergeben für die optimierte Druckkraft bei 59 Untersuchungen, also etwa der Hälfte aller Proben, eine Abweichung von unter 10 % gegenüber dem mit einer Kraftmessdose ermittelten Vergleichswert. 38 Versuche zeigen Abweichungen von weniger als 5,0 %, wobei die geringste Differenz aller Versuche einen Wert von 0,1 % demonstriert. Je näher die tatsächliche Last an der Eulerschen Knicklast des Prüfkörpers liegt, desto niedriger werden die messbaren Differenzen. Für Prüfkörper mit einer in den Laborversuchen besonders starken Auslastung der Eulerschen Knicklast zwischen 40 % und 45 % können die Abweichungen auf eine mittlere Differenz von 5,4 % bei einer Standardabweichung von 2,9 % reduziert werden.

Für die Auswertung der Lagerungsbedingungen wurden die optimierten Federsteifigkeiten in dimensionslose Knicklängenbeiwerte überführt und mithilfe eines statischen Vergleichsverfahrens auf Basis einer experimentellen Verformungsfigur validiert. Grundlage der Auswertung sind die optimierten Drehfedersteifigkeiten des in dieser Arbeit planmäßig variierten oberen Profilanschlusses, wobei auf den Auswertungen der Prüfkörper mit einem Gelenkanschluss am oberen Ende verzichtet wird. Die statistische Auswertung, zusammenfassend je Prüfkörper, ergibt für den Knicklängenbeiwert der dynamischen Untersuchung eine durchschnittliche Abweichung von minimal 0,06 % und maximal 5,09 % gegenüber dem Wert der statischen Vergleichsuntersuchung. Über alle 15 Druckstäbe hinweg kann eine mittlere Abweichung von 1,56 % und dazu korrespondierende Veränderung der Eulerschen Knicklast von  $-3,05\%$  bis  $+3,19\%$  ermittelt werden.

Abschließend wurden mit dem dynamischen Verfahren fünf ca. 2,20 m lange Stützen auf dem Betriebsgelände eines Industrieunternehmens untersucht. Die Stützen sind Elemente einhüftiger Rahmen und dienen zur Abstützung eines Lüftungsrohrs und dem dazugehörigen Laufsteg. Sie werden in der statischen Berechnung als beidseitig gelenkig gelagerte Pendelstäbe idealisiert und besitzen aufgrund vorhandener Einspannungen Lastreserven unklarer Größe. Durch die Anwendung des dynamischen Verfahrens zur Systemidentifikation und dem Ansatz von Drehfedersteifigkeiten konnte die ursprüngliche Grenzlast über alle Stützen hinweg um mindestens 7,1 % gesteigert werden.

# Abstract

The building industry's contribution to greenhouse gas emissions is significant, and it has the potential to play a key role in climate protection. One approach to reducing greenhouse gas emissions from the building industry is through the energetic renovation of old buildings. Another critical aspect is the development of qualified evaluation and analysis methods for existing load-bearing structures. This work presents a dynamic procedure for system identification that allows accurate measurement and evaluation of normal forces and bearing conditions in compression members. The basis of the developed method is an Euler-Bernoulli beam supported by four independent torsion and displacement springs with normal force loading. The method is based on the experimental determination of the first natural frequency and corresponding eigenform, which defines the system properties for subsequent stability analysis. A particle swarm algorithm optimises the basic bar, resulting in the best possible digital twin.

To validate the method, laboratory tests were conducted on 20 test specimens with a system length between 2.3975m and 2.545m and varying connection types. The specimens were installed vertically in an existing test frame and consisted of five different column profiles with varying connection types at the upper end. A movable sledge was used to insert the compression force by a hydraulic press underneath a jointed connection of the test specimen. For the upper end, four different connection types were used for validation testing: one joint connection and three profil connections with different bending stiffnesses. The experiment involved 117 load tests with normal forces ranging from 8.36kN to 178.29kN. The optimization process used twelve or thirteen measuring points evenly distributed over the test specimen. The method was validated by comparative measurements of the calculated system properties.

The investigations revealed that, over all attempts, 59 tests, i.e. about half of all load tests, showed a deviation of less than 10% between the optimised compressive force and the comparison value measured by the load cell. 38 tests even showed deviations of less than 5.0%, with the smallest difference of all tests demonstrating a value of 0.1%. The closer the actual inserted load was to the Euler buckling load of the test specimen, the lower the measurable differences became. For test specimens with a particularly high utilisation of the Euler buckling load between 40% and 45%, the deviations could be reduced to a mean difference of 5.4% with a standard deviation of 2.9%.

To evaluate the bearing conditions, the optimised spring stiffnesses were converted into dimensionless buckling length coefficients and validated with an comparative static examination based on a deflection curve. The evaluation included all torsional spring stiffnesses of the upper connection from the 15 test specimens with a profile connection. The results of the test specimens with a joint connection at the upper end were excluded due to reasons of insufficient comparability with the static investigations. The statistical evaluation, summarised for each test specimen, resulted in an average deviation of a minimum of 0.06% and a maximum of 5.09% for the buckling length coefficient of the dynamic examination compared to the value of the static comparative examination. Across all 15 test specimens, an average deviation of 1.56% and a corresponding change in the Euler buckling load of  $-3.05\%$  to  $+3.19\%$  could be determined.

Finally, the method was used to examine five about 2.20m long columns on the premises of an unspecified industrial company. The columns were installed to support a ventilation pipe and the associated walkway. In the static calculation, they are idealised with joint connections on both ends, so that they have load reserves of unclear size due to unplanned clamping effects. By using the dynamic method for system identification and the approach of torsional spring stiffnesses on both ends, the original limit load could be increased by at least 7.1% across all columns.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>V</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>IX</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>XI</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Forschungsrelevanz . . . . .	2
1.2 Forschungsinteresse . . . . .	4
1.3 Forschungsrahmen . . . . .	7
1.4 Forschungsziel . . . . .	9
1.5 Aufbau der Arbeit . . . . .	10
<b>2 Stand der Wissenschaft</b>	<b>13</b>
2.1 Strukturdynamische Systemidentifikation . . . . .	13
2.1.1 Seiltragwerke . . . . .	14
2.1.2 Zugstäbe . . . . .	19
2.1.3 Druckstäbe . . . . .	23
2.2 Nicht-dynamische Methoden zur Bestimmung des Belastungszustands . .	25
2.2.1 Magnetische Verfahren . . . . .	26
2.2.2 Ultraschallverfahren . . . . .	27
2.2.3 Optische Verfahren (Faser-Brigg-Gitter-Sensoren) . . . . .	28
2.2.4 Elektrische Verfahren . . . . .	28
2.3 Zusammenfassung und Motivation . . . . .	30

<b>3</b>	<b>Systemidentifikation von Druckstäben auf Basis der modalen Schwingungseigenschaften</b>	<b>33</b>
3.1	Arbeitshypothesen . . . . .	34
3.2	Methodisches Vorgehen in drei Phasen . . . . .	35
3.3	Grundlagen der mathematischen Optimierung . . . . .	39
3.3.1	Grundprinzip der Optimierung . . . . .	39
3.3.2	Zielfunktion . . . . .	42
3.3.3	Lösungsverfahren . . . . .	44
3.4	Grundlagen der Modalanalyse . . . . .	49
3.4.1	Theoretische Modalanalyse . . . . .	49
3.4.1.1	Einmassenschwinger . . . . .	50
3.4.1.2	Mehrmassenschwinger . . . . .	60
3.4.2	Experimentelle Modalanalyse . . . . .	66
3.5	Programmiersprache . . . . .	74
<b>4</b>	<b>Phase I: Programmentwicklung</b>	<b>76</b>
4.1	Programmentwicklung eines dynamischen Verfahrens zur Systemidentifikation . . . . .	76
4.1.1	Dynamisches Basismodell . . . . .	77
4.1.1.1	Theoretische Grundlagen . . . . .	77
4.1.1.2	Überführung in das Programm <i>DynamBasic</i> . . . . .	88
4.1.1.3	Eigenformen von Systemen mit Standardlagerungen . . . . .	91
4.1.1.4	Einfluss der Normalkraft auf die Eigenwerte und Eigenkreisfrequenzen . . . . .	93
4.1.2	Dynamisches Verfahren zur Systemidentifikation . . . . .	95
4.1.2.1	Formale Beschreibung der Zielfunktion . . . . .	96
4.1.2.2	Wahl des Lösungsalgorithmus . . . . .	97
4.1.2.3	Überführung in das Programm <i>DynamOpti</i> . . . . .	101
4.2	Programmentwicklung eines statischen Verfahrens zur Systemidentifikation	103
4.2.1	Statisches Basismodell . . . . .	103
4.2.1.1	Theoretische Grundlagen . . . . .	103
4.2.1.2	Überführung in das Programm <i>StaticBasic</i> . . . . .	107

4.2.2	Statisches Verfahren zur Systemidentifikation . . . . .	107
4.2.2.1	Formale Beschreibung der Zielfunktion . . . . .	107
4.2.2.2	Wahl des Lösungsalgorithmus . . . . .	108
4.2.2.3	Überführung in das Programm <i>StaticOpti</i> . . . . .	108
4.3	Bestimmung des Knicklängenbeiwerts . . . . .	109
<b>5</b>	<b>Phase II: Validierung anhand einer experimentellen Laborversuchsreihe</b>	<b>111</b>
5.1	Experimentelles Konzept . . . . .	111
5.1.1	Versuchsstand . . . . .	113
5.1.2	Prüfkörper . . . . .	115
5.1.2.1	Stützenprofile und Anschlusstypen . . . . .	115
5.1.2.2	Berechnung theoretischer Lagersteifigkeiten . . . . .	117
5.1.3	Statische Versuchsreihe . . . . .	121
5.1.3.1	Statisches Grundmodell . . . . .	121
5.1.3.2	Geräte und Equipment . . . . .	121
5.1.3.3	Durchführung der statischen Versuchsreihe . . . . .	125
5.1.3.4	Stabilität des Lösungsalgorithmus gegenüber einer Platz- zierungsabweichung der Seilwegaufnehmer . . . . .	127
5.1.4	Dynamische Versuchsreihe . . . . .	131
5.1.4.1	Dynamisches Grundmodell . . . . .	131
5.1.4.2	Geräte und Equipment . . . . .	131
5.1.4.3	Durchführung der dynamischen Versuchsreihe . . . . .	135
5.1.4.4	Einfluss der Normalkraft auf die Systemlänge . . . . .	136
5.1.4.5	Einfluss einer örtlich begrenzten Eigenformmessung . . . . .	138
5.2	Ergebnisse . . . . .	143
5.2.1	Statische Versuchsreihe . . . . .	143
5.2.1.1	Ermittlung diskreter Verformungsfiguren auf Basis von Zeitverläufen . . . . .	143
5.2.1.2	Statischer Optimierungsprozess . . . . .	145
5.2.2	Dynamische Versuchsreihe . . . . .	149
5.2.2.1	Laststufen . . . . .	150
5.2.2.2	Modale Parameter (Impulshammer) . . . . .	151

5.2.2.3	Dynamischer Optimierungsprozess . . . . .	155
5.3	Analyse und Diskussion . . . . .	161
5.3.1	Optimierung der Normalkraft . . . . .	161
5.3.2	Optimierung der Lagerungsbedingungen . . . . .	169
5.3.3	Einfluss der Normalkraft auf die Eigenfrequenzen . . . . .	175
5.4	Ergänzende Untersuchung mit einem elektrodynamischen Schwingungs- erreger . . . . .	177
<b>6</b>	<b>Phase III: Anwendung anhand einer realen Tragwerkskonstruktion</b>	<b>182</b>
6.1	Messobjekt . . . . .	182
6.2	Ergebnisse . . . . .	187
6.3	Analyse und Diskussion . . . . .	190
<b>7</b>	<b>Schlussbemerkungen</b>	<b>194</b>
7.1	Zusammenfassung . . . . .	194
7.2	Fazit . . . . .	198
7.3	Vorgehensweise an einem realen Tragwerk . . . . .	200
7.4	Forschungsdesiderate . . . . .	202
<b>A</b>	<b>Biegelinie zur Berechnung theoretischer Lagersteifigkeiten</b>	<b>216</b>
<b>B</b>	<b>Einzelergebnisse der statischen Versuchsreihe</b>	<b>220</b>
<b>C</b>	<b>Einzelergebnisse der dynamischen Versuchsreihe</b>	<b>226</b>

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Harfenbrücke über den Langen See in Böblingen/ Sindelfingen . . . . .	5
1.2	Müngstener Brücke über die Wupper in Solingen . . . . .	7
1.3	Kapitelstruktur der Dissertation . . . . .	12
2.1	Modell zur Normalkraftbestimmung nach Xue und Shen (2020, S. 2) . . . .	18
2.2	Modell zur Systemidentifikation nach Amabili et al. (2010, S. 2059) . . . .	21
2.3	Modell zur Systemidentifikation nach Livingston et al. (1995, S. 900) . . .	23
3.1	Methodisches Vorgehen in drei Phasen . . . . .	35
3.2	Basisstab für das dynamische Verfahren zur Systemidentifikation . . . . .	36
3.3	Basisstab für das statische Verfahren zur Systemidentifikation . . . . .	37
3.4	Schematischer Ablaufplan einer iterativen Prozessoptimierung in Anlehnung an Schumacher (2020, S. 3) . . . . .	40
3.5	Beispiel einer Zielfunktion mit zwei Minima und einem Maximum . . . . .	45
3.6	Darstellung eines Einmassenschwingers ohne äußere Lastbeanspruchung . . . .	50
3.7	Darstellung der komplexen Zahlenebene in einem S-Plan nach Avitabile (2018, S. 40) . . . . .	54
3.8	Darstellung eines Einmassenschwingers mit äußerer Lastbeanspruchung . . . .	55
3.9	Amplitudenfrequenzgang $V$ in Abhängigkeit des Frequenzverhältnisses $\eta$ unter Berücksichtigung verschiedener Dämpfungsmaße $\xi$ . . . . .	57
3.10	Phasenfrequenzgang $\zeta$ in Abhängigkeit des Frequenzverhältnisses $\eta$ unter Berücksichtigung verschiedener Dämpfungsmaße $\xi$ . . . . .	59
3.11	Darstellung eines Mehrmassenschwingers mit Lastbeanspruchung . . . . .	60
3.12	Beispiel der Magnitude einer Übertragungsfunktion . . . . .	67
3.13	Beispiel eines Tiefpassfilters nach Kuttner (2015, S. 289) . . . . .	69

3.14	Umwandlung eines analogen Signals mit Tiefpassfilterung in ein digitales Signal in Anlehnung an Meyer (2017, S. 152 f.) . . . . .	70
3.15	Beispiel einer optimierten Übertragungsfunktion . . . . .	73
4.1	Dynamisches Kräftesystem an einem Euler-Bernoulli-Balken . . . . .	78
4.2	Basisstab für das dynamische Analysemodell . . . . .	83
4.3	Einspanngrad $\beta_r$ in Abhängigkeit der Drehfedersteifigkeit $k_r$ für eine Biegesteifigkeit $EI$ von $0,926 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$ unter verschiedenen Systemlängen $L$ . . . . .	87
4.4	Schematischer Ablaufplan des Programms <i>DynamBasic</i> . . . . .	89
4.5	Darstellung eines exemplarischen Determinantenverlaufs . . . . .	90
4.6	Die ersten drei Eigenformen der idealisierten Auflagersituation Fall 1 . . . . .	92
4.7	Die ersten drei Eigenformen der idealisierten Auflagersituation Fall 2 . . . . .	92
4.8	Die ersten drei Eigenformen der idealisierten Auflagersituation Fall 3 . . . . .	92
4.9	Die ersten drei Eigenformen der idealisierten Auflagersituation Fall 4 . . . . .	92
4.10	Zusammenhang zwischen den ersten zwei Eigenwerten und der Normalkraft für den Euler-Fall 2 nach Petersen und Werkle (2017, S. 688) . . . . .	94
4.11	Schematischer Ablaufplan eines Optimierungsprozesses . . . . .	97
4.12	Basisstab für das statische Analysemodell . . . . .	104
5.1	Laborexperimenteller Prozessablauf für einen Prüfkörper in Phase II . . . . .	112
5.2	Übersichtszeichnung des Versuchsstands . . . . .	114
5.3	Basismodell (links) und Ausgangssituation (rechts) für alle Prüfkörper mit einem Gelenkanschluss C1 am Stützenkopfende . . . . .	118
5.4	Basismodell (l), Ausgangsmodell (m) und Ausgangssituation (r) für alle Prüfkörper mit einem Profilananschluss C2 bis C4 am Stützenkopfende . . . . .	119
5.5	Basismodelle der statischen Versuchsreihe: Prüfkörper mit dem Anschlusstyp C1, Gelenkanschluss (l) bzw. mit den Anschlusstypen C2 bis C4, Profilananschluss (r) . . . . .	122
5.6	Anordnung und Darstellung der Messtechnik im Zuge des statischen Belastungsversuchs, hier am Beispiel der Prüfkörper mit Gelenkanschluss am Stützenkopf (Ausschluss von SWA-1 für alle Prüfkörper mit einem Profilananschluss C2, C3 oder C4, s. Abschnitt 5.1.2.2) . . . . .	123

5.7	Detailansichten des statischen Belastungsversuchs . . . . .	124
5.8	Stellen der Zielparameter der statischen Versuchsreihe (in rot) . . . . .	125
5.9	Berechnungsszenarien der Platzierungsabweichung der Magnethaken . . . . .	127
5.10	Platzierungsabweichung $x_{8,Shift}$ des Prüfkörpers P4C4 (Versatzfall B) . . . . .	129
5.11	Varianzkoeffizient $V_{EI}$ aller Prüfkörper . . . . .	130
5.12	Varianzkoeffizient $V_{\beta}$ aller Prüfkörper . . . . .	130
5.13	Basismodelle der dynamischen Versuchsreihe: Prüfkörper mit dem Anschlussstyp C1, Gelenkanschluss (l) bzw. mit den Anschlussstypen C2 bis C4, Profilanschluss (r) . . . . .	132
5.14	Anordnung und Darstellung der Messtechnik im Zuge des dynamischen Versuchsstands, hier am Beispiel der Prüfkörper mit Gelenkanschluss am Stützenkopf (Ausschluss von BA-1 für alle Prüfkörper mit einem Profilanschluss C2, C3 oder C4, s. Abschnitt 5.1.2.2) . . . . .	133
5.15	Detailansichten Modalanalyse . . . . .	134
5.16	Reduzierte Systemlänge infolge einer Drucknormalkraft $D$ . . . . .	136
5.17	Eigenformen von Stäben mit unterschiedlichen Lagersituationen . . . . .	138
5.18	Eigenformen von Stäben mit unterschiedlichen Lagersituationen (Ergänzende Darstellung von Eigenformabschnitten) . . . . .	139
5.19	MAC in Abhängigkeit des Anteils der messbaren Länge des Eigenformabschnitts an der Gesamtlänge der Eigenform (in Ergänzung an die Darstellung der Eigenformen in Abbildung 5.17 bzw. 5.18) . . . . .	140
5.20	Kraft-Verformungs-Wolke ausgewählter Seilwegaufnehmer (P2C1a) . . . . .	144
5.21	Lineare Regressionen ausgewählter Seilwegaufnehmer (P2C1a) . . . . .	144
5.22	Experimentell ermittelte und rechnerisch optimierte Verformungsfiguren der Prüfkörper P3C1a, P3C2a, P3C3a und P3C4a . . . . .	147
5.23	Experimentelle Eigenfrequenzen $f_{ex,1}$ in Abhängigkeit der Normalkraftbeanspruchung $D_{real}$ je Prüfkörper und Laststufe . . . . .	152
5.24	Ausgewählte experimentelle Eigenformen des Prüfkörpers P3C4 . . . . .	153
5.25	Detaillierte Ansicht ausgewählter experimenteller Eigenformen des Prüfkörpers P3C4 . . . . .	154

5.26	Optimierte und experimentelle Eigenformen von P3C1, P3C2, P3C3 und P3C4 jeweils bei Laststufe LS 1 (18,34 kN) . . . . .	157
5.27	Werte der rechnerisch optimierten und experimentell gemessenen Normalkraftbeanspruchung $D$ des Prüfkörpers P3C4 . . . . .	162
5.28	Konvergenz der prozentualen Abweichung in Abhängigkeit der anteiligen ideellen Knicklast nach Euler . . . . .	164
5.29	Federsteifigkeit $k_{opt}$ in Abhängigkeit der Normalkraft $D_{real}$ des Prüfkörpers P3C2 . . . . .	169
5.30	Darstellung von Reibungskräften im Gelenkanschluss C1 . . . . .	170
5.31	Angepasstes Modell zur Analyse des Knicklängenbeiwerts . . . . .	171
5.32	Abweichung $\gamma_{Euler}$ in Abhängigkeit der Abweichung $\gamma_{\beta}$ . . . . .	174
5.33	Versuchsaufbau mit elektrodynamischem Schwingungserreger . . . . .	177
5.34	Ansichten Versuchsbau mit elektrodynamischem Schwingungserreger . . . . .	178
5.35	Übertragungsfunktionen an Stelle 8 (P3C4-LS 3) . . . . .	179
5.36	Übertragungsfunktionen an Stelle 8 (P3C4-LS 7) . . . . .	179
6.1	Stützenreihe zur Aufnahme der Lasten aus dem Lüftungsrohr . . . . .	183
6.2	Detailansichten der Stützenanschlüsse . . . . .	184
6.3	Konstruktionszeichnung der Lüftungsrohranlage im Kesselhaus . . . . .	185
6.4	Statisches System der Lüftungsrohranlage im Kesselhaus . . . . .	186
6.5	Eigenformen der ersten Mode von Stütze 1 . . . . .	188
A.1	Ausgangsmodell zur rechnerischen Bestimmung der Lagersteifigkeiten (oben) und das zur Vordimensionierung verwendete Zielmodell (unten) . . . . .	216
A.2	Ausgangsmodell zur Bestimmung der Biegelinie . . . . .	217

# Tabellenverzeichnis

3.1	Ausgewählte Dämpfungsmaße für Baustoffe im elastischen Materialbereich (Albert, 2018, S. 4.73) . . . . .	54
3.2	Verschiedene Definitionen der Übertragungsfunktion $H(\omega)$ . . . . .	59
4.1	Definitionen idealisierter Auflagersituationen nach Euler . . . . .	91
4.2	Standardeinstellungen des Pakets <i>pso</i> (Bendtsen, 2012) . . . . .	101
5.1	Querschnittswerte der Stützenprofile . . . . .	115
5.2	Querschnittswerte der Anschlussprofile . . . . .	116
5.3	Drehfedersteifigkeit $k_{ri}$ [ $\frac{\text{kNm}}{\text{rad}}$ ] (Einspanngrad $\beta_{ri}$ [%]) . . . . .	120
5.4	Wegfedersteifigkeit $k_{ti}$ [ $\frac{\text{kN}}{\text{m}}$ ] (Einspanngrad $\beta_{ti}$ [%]) . . . . .	120
5.5	Zielparameter der statischen Versuchsreihe . . . . .	126
5.6	Statistische Auswertung des Prüfkörpers P4C4 für den Versatzfall B . . . . .	129
5.7	Varianzkoeffizient $V_D$ [–] der optimierten Drucknormalkräfte $D_{opt}$ für unterschiedliche Kräfte $D_{real}$ und variierende Reduktionsfaktoren . . . . .	141
5.8	Varianzkoeffizient $V_\beta$ [–] der optimierte Knicklängenbeiwerte $\beta$ für unterschiedliche Kräfte $D_{real}$ und variierende Reduktionsfaktoren . . . . .	142
5.9	System- und Berechnungseigenschaften aus dem Optimierungsprozess für alle Verformungskurven der Prüfkörper P3C1, P3C2, P3C3 und P3C4 . . . . .	146
5.10	Gemittelte optimierte Systemeigenschaften einschließlich Angaben zur axialen Belastungsgrenze für alle untersuchten Prüfkörper . . . . .	148
5.11	Vergleich zwischen theoretischen und experimentellen Querschnittswerten . . . . .	149
5.12	Normalkraft $D_{real}$ [kN] je Prüfkörper und Laststufe (LS) . . . . .	150
5.13	Experimentelles Dämpfungsmaß [%] je Prüfkörper und Laststufe (LS) . . . . .	155

5.14 System- und Berechnungseigenschaften aus dem Optimierungsprozess für die Prüfkörper P3C1, P3C2, P3C3 und P3C4 . . . . .	156
5.15 Normalkräfte $D_{opt}$ [kN] aus dem Optimierungsprozess . . . . .	158
5.16 Drehfedersteifigkeiten $k_{ri,opt}$ [ $\frac{\text{kNm}}{\text{rad}}$ ] aus dem Optimierungsprozess . . . . .	159
5.17 Drehfedersteifigkeiten $k_{rj,opt}$ [ $\frac{\text{kNm}}{\text{rad}}$ ] aus Optimierungsprozess . . . . .	160
5.18 Abweichung $\gamma_D$ [%] zwischen der rechnerisch optimierten und experimentell gemessenen Normalkraftbeanspruchung . . . . .	163
5.19 Bereichsweise Auswertung der Normalkraftabweichung hinsichtlich der Auslastung der Eulerschen Knicklast . . . . .	165
5.20 Statistische Auswertung der statisch und dynamisch optimierten Knicklängenbeiwerte $\beta$ anhand des Systemmodells nach Abbildung 5.31 . . . . .	172
5.21 Auswertung der ersten Eigenfrequenzen des Prüfkörpers P3C2 . . . . .	175
5.22 Maximaler Abfall der Eigenfrequenzen $u_{f,max}$ [%] für jeden Prüfkörper . . . . .	176
5.23 System- und Berechnungseigenschaften aus dem Optimierungsprozess . . . . .	180
5.24 Auswertung der optimierten Druckkraft $D_{opt}$ . . . . .	181
5.25 Auswertung des experimentellen Knicklängenbeiwerts $\beta$ . . . . .	181
6.1 Eigenfrequenzen $f_{ex,1}$ [Hz] der Stützen im Kesselhaus . . . . .	188
6.2 System- und Berechnungseigenschaften aus dem Optimierungsprozess . . . . .	189
6.3 Vergleich zwischen den experimentell ermittelten und rechnerisch angesetzten Knicklängenbeiwerten $\beta$ . . . . .	192
B.1 System- und Berechnungseigenschaften aus dem Optimierungsprozess für alle Verformungskurven der Prüfkörper P1C1, P1C2, P1C3 und P1C4 . . . . .	221
B.2 System- und Berechnungseigenschaften aus dem Optimierungsprozess für alle Verformungskurven der Prüfkörper P2C1, P2C2, P2C3 und P2C4 . . . . .	222
B.3 System- und Berechnungseigenschaften aus dem Optimierungsprozess für alle Verformungskurven der Prüfkörper P3C1, P3C2, P3C3 und P3C4 . . . . .	223
B.4 System- und Berechnungseigenschaften aus dem Optimierungsprozess für alle Verformungskurven der Prüfkörper P4C1, P4C2, P4C3 und P4C4 . . . . .	224
B.5 System- und Berechnungseigenschaften aus dem Optimierungsprozess für alle Verformungskurven der Prüfkörper P5C1, P5C2, P5C3 und P5C4 . . . . .	225

C.1	System- und Berechnungseigenschaften aus dem Optimierungsprozess für die Prüfkörper P1C1, P1C2, P1C3 und P1C4 . . . . .	227
C.2	System- und Berechnungseigenschaften aus dem Optimierungsprozess für die Prüfkörper P2C1, P2C2, P2C3 und P2C4 . . . . .	228
C.3	System- und Berechnungseigenschaften aus dem Optimierungsprozess für die Prüfkörper P3C1, P3C2, P3C3 und P3C4 . . . . .	229
C.4	System- und Berechnungseigenschaften aus dem Optimierungsprozess für die Prüfkörper P4C1, P4C2, P4C3 und P4C4 . . . . .	230
C.5	System- und Berechnungseigenschaften aus dem Optimierungsprozess für die Prüfkörper P5C1, P5C2 und P5C3 (für P5C4 s. Tabelle C.6) . . . . .	231
C.6	System- und Berechnungseigenschaften aus dem Optimierungsprozess für den Prüfkörper P5C4 . . . . .	232

# 1 Einleitung

Anfänglich dienten rudimentäre Bauwerke dazu, existenzielle Grundbedürfnisse, wie zum Beispiel den Schutz vor Kälte, Regen oder Hitze, zu ermöglichen. Heute sind die statisch berechneten Strukturen nicht selten aufwendig konstruierte Elemente ganzheitlicher Stadtkonzepte. Mit unterschiedlichen Aufgaben leisten Bauwerke, wie Wohngebäude, Krankenhäuser und Brücken, einen wesentlichen sozialen, kulturellen und infrastrukturellen Beitrag für das Wohlergehen und die Entwicklung einer modernen Gesellschaft. Die Anforderungen verschiedener Tragwerke unterscheiden sich dabei in Abhängigkeit von Lage, Funktion und Nutzung. Eine Gemeinsamkeit der allermeisten Konstruktionen ist das Bestreben nach einer langen Nutzungsdauer zur Vermeidung von energie- und ressourcenintensiven Neubaumaßnahmen.

Diese Dissertation stellt ein dynamisches Verfahren vor, das mithilfe messtechnisch erfasster Modalparameter statische Systemeigenschaften und Lasteinwirkungen von bereits existierenden druckbeanspruchten Tragelementen experimentell ermittelt und die gemessenen Eigenschaften für die Nachweisführung im Stabilitätsfall heranzieht. Durch das vorgestellte Verfahren wird die Bestimmung konstruktiver Tragreserven ermöglicht, wodurch bestehende Konstruktionen auch bei Umnutzung und erhöhten Lastanforderungen den hiesigen Sicherheitskonzepten standhalten können.

Abschnitt 1.1 vertieft die Bedeutung der Bauwerksanierung und Bauwerkerhaltung im Zuge einer umweltbewussten und nachhaltigen Gebäudewirtschaft. Das spezifische Forschungsinteresse an den in dieser Dissertation angewandten Methoden wird in Abschnitt 1.2 dargelegt. Anschließend stellt Abschnitt 1.3 den Forschungsrahmen bereit, während die Forschungsfragen in Abschnitt 1.4 gestellt werden. Abschnitt 1.5 schließt mit einer Übersicht zu dem strukturellen Aufbau der Dissertation ab.

## 1.1 Forschungsrelevanz

Die DIN EN 1990 stellt Anhaltswerte für die geplante Nutzungsdauer üblicher Hoch- und Ingenieurbauwerke bereit. Dabei wird je nach Tragwerk ein Mindestalter zwischen 50 und 100 Jahren bei der Planung von Neubauten für die gesamte Nutzungsdauer angesetzt (DIN e.V., 2021-10, S. 30). Beispiele aus den vergangenen Jahrzehnten belegen jedoch, dass Tragwerke aufgrund steigender Lastanforderungen und veränderter Nutzungsansprüche häufig vor Ablauf der angesetzten Frist abgerissen und ersetzt werden. Die Situation der maroden Autobahnbrücken in Deutschland zeigt dabei besonders eindringlich, dass die ursprünglich nach Norm angesetzten 100 Jahre nur in Ausnahmefällen erreicht werden. Autobahnbrücken sind oftmals deutlich vor dem Ende der angestrebten Nutzungsjahre stark beschädigt, sodass sie für die Nutzung eingeschränkt oder stillgelegt werden müssen, wie das Beispiel der Talbrücke Rahmede bei Lüdenscheid im Sauerland aus dem Jahr 1968 demonstriert (Die Autobahn GmbH des Bundes, 2023). Der über die Jahre zunehmende Straßenverkehr, vor allem im Schwerlastbereich, trägt zu Schädigungen und hohen Tragwerksbelastungen bei (vgl. Albert, 2018; Bargmann, 2008). In Einzelfällen können Ergänzungsbauten zum Erhalt der alten Bausubstanz beitragen, solange das vorhandene Tragwerk eine ausreichende bauliche Qualität aufweist und einer entsprechenden Nachberechnung standhält (vgl. Hamme et al., 2006).

Heutige Lastanforderungen übersteigen häufig die zum Baujahr angesetzten Lasten, sodass Bauwerke vor Ende ihrer geplanten Lebensdauer abgerissen werden. Nicht nur Autobahnbrücken sind von dieser Entwicklung betroffen, sondern genauso Bürogebäude, Wohnhäuser und Produktionsstätten. Aufstockungen, Anbauten, der Verbau schwerer Gebäudeinstallationen und der zusätzlich aufkommende Verkehr erzeugen eine massive Lasterhöhung verglichen zu den ursprünglichen Einwirkungen. Bei der Erstellung des Tragwerks wird aus wirtschaftlichen Gesichtspunkten die Konstruktion rechnerisch hinsichtlich ihrer Belastungsgrenze dimensioniert, ohne dass ausreichende Reserven für statische oder dynamische Mehrbelasten vorhanden sind. All dies führt dazu, dass die ursprünglichen statischen Nachweise den größeren Lastbeanspruchungen von heute nicht standhalten. Entsteht zudem der Wunsch nach einer Neugestaltung der vorhandenen räumlichen Zwänge, sinkt das Interesse an der Sanierung vorhandener Bausubstanz.

Dabei ist ein langlebiges Bauwerksmanagement mit nachhaltigen Umnutzungskonzepten Grundlage für den Schutz von Natur, Umwelt und der Menschheit. Die Bauindustrie verursacht mit dem Bau und der anschließenden Bewirtschaftung einen großen Anteil an umweltschädlichen Emissionen. Laut dem Global Status Report for Buildings and Constructions der Vereinten Nationen, trug die Bauwirtschaft im Jahr 2020 37 % des weltweiten  $CO_2$ -Ausstoßes bei (United Nations Environment Programme, 2021, S. 15). Alleine auf die Zementherstellung fallen deutschlandweit etwa 2 % aller Treibhausgasemissionen (WWF Deutschland, 2019, S. 8); weltweit betrachtet sind es ca. 8 % (Beyond Zero Emissions, 2017, S. 12). Auch die Eisen- und Stahlwirtschaft machte 2020 mit einem Wert von etwa 28 % einen erheblichen Anteil der Industrie-Emissionen in Deutschland aus (Deutsche Emissionshandelsstelle (DEHSt) im Umweltbundesamt, 2021, S. 4). Der Bausektor trägt mit seinem Energie- und Materialbedarf wesentlich dazu bei, die nicht-erneuerbaren Ressourcen zu verbrauchen und klimaschädliche Emissionen zu verursachen.

Die Bauindustrie steht in einer führenden Rolle, den vorhandenen Bauwerksbestand energieeffizient zu nutzen und Verantwortung für einen nachhaltigen Klimaschutz zu übernehmen. Dazu zählt nicht nur die ganzheitliche Lebenszyklusbetrachtung eines Bauvorhabens zu Planungsbeginn; entscheidend ist vor allem der akute Umgang mit dem bereits vorhandenen Bauwerksbestand. Der Begriff *Graue Energie*, in der Literatur auch als *Graue Emission* bekannt, beschreibt den Primärenergiebedarf, der für die reine Gebäudesubstanz definiert werden kann. Dazu gehören nach Zimmermann und Reiser (2021, S. 120) Herstellungsprozesse, Instandsetzungsmaßnahmen sowie Entsorgungsvorgänge (vgl. Bundesstiftung Baukultur, 2022, S. 26). Kommt es zum Abriss und Neubau eines Tragwerks, muss der bereits investierte Energieaufwand zur Herstellung von Werkstoffen und des Bauwerks selber durch neue Primärenergie ersetzt werden.

Eine Studie des Baukultur Berichts 2022/2023 demonstriert anhand der energetischen Vergleichsberechnung eines Einfamilienhauses die Bedeutung der *Grauen Emissionen*. Verglichen werden die Emissionen aus Nutzungsphase (30 Jahre) und Baumaßnahmen eines Ersatzneubaus in Effizienzhaus(EH)-Stufe 40 und jeweils einer Sanierung des vorhandenen Bestandsbauwerks auf EH-Stufe 40 bzw. EH-Stufe 85. Die Auswertung zeigt, dass alleine der Neubau des Einfamilienhauses mit 135,9 t  $CO_2e$ , den Energieaufwand aus baulichen Maßnahmen und Nutzungsphase der sanierten Häuser weit übersteigt

(EH-Stufe 40: 48,7 t; EH-Stufe 85: 60,4 t). Bereits bei einer EH-Stufe 85 ergibt sich ein Gesamteinsparpotential von umgerechnet 60 % gegenüber dem Neubau mit 146,9 t. Die  $CO_2$ -Äquivalenten  $CO_2e$  stellen nicht nur den Fußabdruck des klimaschädlichen Gases  $CO_2$ , sondern die Summe der Auswirkungen unterschiedlicher für das Klima schädlicher Treibhausgase dar (LUBW Landesanstalt für Umwelt Baden-Württemberg, 2023).

Eine lange Nutzungsdauer vermeidet nicht nur den während der Herstellung eines Neubaus erzeugten Energiebedarf einschließlich umweltschädlicher Emissionen, sondern reduziert ebenso den Bedarf an nicht-erneuerbaren Rohstoffen zur Erzeugung der Baumaterialien wie Kalkstein für Zement oder Eisenerz für Stahl. Neben dem reinen Materialabbau und den Verarbeitungsprozessen wird die Flächenversiegelung ein immer bedeutender Aspekt im Hinblick auf leerstehenden Altbestand. Der Anteil an versiegelten und unversiegelten Siedlungs- und Verkehrsflächen stieg innerhalb Deutschlands zwischen 1992 und 2018 um etwa 25 % auf einen Anteil von 14,4 % der Gesamtfläche (Schafferus, 2021).

Der Umgang mit veränderten Lasteinwirkungen, angepasster Gebäudenutzung und alternder Bausubstanz ist von zentraler Bedeutung für einen nachhaltigen Umweltschutz. Dabei sind sichere Methoden zur Analyse der vorhandenen Gebäudesubstanz ein wichtiges Instrument, nicht nur zur generellen Definition vorhandener statischer Systeme, sondern gleichermaßen zur Klärung von konstruktiven Lastreserven. Strukturelle Tragreserven auf Basis einfach gehaltener Modellidealisationen in der ursprünglichen statischen Berechnung können für heutige Nachweise entscheidend sein. Es ist Aufgabe der Wissenschaft, leistungsstarke Methoden zur Bewertung des Gebäudebestands zu entwickeln, Tragreserven zu klären und eine sichere Weiternutzung der Bausubstanz zu gewährleisten.

## 1.2 Forschungsinteresse

Instandsetzungs- und Verstärkungsmaßnahmen können unterstützen, die Stabilität und Tragfähigkeit von Bauwerken trotz erhöhter Lastansätze oder sanierungsbedürftiger Tragstruktur rechnerisch nachzuweisen. Diese Instrumente sind jedoch häufig kostspielig, aufwendig und bedürfen großer Fachkompetenz bei der Auswahl, Planung und Durchführung. Dabei könnte zum Teil darauf verzichtet werden, wenn die strukturellen Reserven der bestehenden Konstruktion rechnerisch ausgenutzt würden.

Die rechnerische Beschreibung von Baukonstruktionen ist der Versuch, einen natürlichen Zusammenhang aus realen Gegebenheiten mit den Methoden der Physik und Mathematik zu erklären. Die theoretischen Baukonstruktionen setzen sich aus individuellen Einzelgliedern in einem komplexen Verbund zusammen. Unterschiedliche Materialien, Querschnittsprofile, Systemgeometrien, Lagerungsbedingungen, Lastansätze, Umwelteinflüsse und ein natürlicher Alterungsprozess resultieren in einem mehrdimensionalen, beziehungsreichen Zusammenspiel. Für das Bauwesen entscheidend ist dabei die sinnvolle Annahme von Querschnittssteifigkeiten, Materialfestigkeiten und Lastansätzen. Eine messtechnische Ermittlung der Systemeigenschaften und Beanspruchungsgrößen wird während des Betriebszustandes meistens nicht durchgeführt. In der Planungsphase müssen die Systeme und Belastungen für einen langfristigen Zeitraum idealisiert werden.

Die rechnerischen Annahmen einer statischen Berechnung gehen, im Bestreben nach einem sicheren Lastabtrag, oft einher mit einer großzügigen Modellbildung des Tragsystems. Abbildung 1.1 zeigt Bilder der Harfenbrücke über den Langen See im Übergangsbereich der beiden Städte Böblingen und Sindelfingen. Der doppelt gekrümmt aufgelöste Pylon der Schrägseilbrücke verfügt über ein nahezu ideales Momentengelenk im Übergangsbereich zum Fundament. Ebenso verdrehweich stellen sich die Verbindungen der Seile an dem Pylon sowie an dem Überbau dar. Die Fußgänger- und Radwegbrücke demonstriert Bauteilübergänge, welche während der Planungsphase als nahezu ideal verdrehweich angesetzt werden können. Die hier dargestellten Momentengelenke sind jedoch



(a) Übersicht



(b) Anschlusskonstruktion

Abbildung 1.1: Harfenbrücke über den Langen See in Böblingen/ Sindelfingen

keineswegs Standard im klassischen Stahlbau. Üblicherweise werden Bauteile mithilfe von biegesteifen Schrauben- oder Schweißverbindungen aneinander gefügt. Übergangsteifigkeiten können aufgrund der verschiedensten Einflüsse, wie Geometrie und Steifigkeit einzelner Komponenten oder Fertigungsgenauigkeiten eingeschränkt theoretisch bestimmt werden. Lediglich in Ausnahmefällen unterstützen experimentelle Untersuchungen dabei, die realen Systemeigenschaften, unter anderem von Bauteilübergängen, zu definieren. Aus diesem Grund werden Modelle gewählt, bei denen davon auszugehen ist, dass die Idealisierung das ungünstigste Tragverhalten abbildet. Bauteilübergänge werden häufig als ideal gelenkig oder voll eingespannt berechnet, um eine Grenzwertbetrachtung durchzuführen. Das Verfahren wird als *Wahl der sicheren Seite* bezeichnet und bietet, neben dem normgebundenen Sicherheitskonzept, zusätzlich strukturelle Tragreserven. Wären Informationen zu den tatsächlichen Steifigkeitsverhältnissen an Bauteilübergängen bekannt, könnten reale Systeme rechnerisch erfasst und nachgewiesen werden.

Neben einer Modellbildung der reinen Tragelemente, spielen Lasteinwirkungen die zweite wesentliche Rolle in der Nachweisführung. Der Ansatz genormter Kräfte in Abhängigkeit einer bestimmten Nutzungsanforderung ist häufig großzügig. So werden Flächenlasten auf Deckenkonstruktionen zwar in begrenzten Bereichen erreicht, treten üblicherweise aber nicht vollflächig auf. Wären reale Informationen des Kraftflusses bekannt, könnten die Sicherheitskonzepte angepasst und Tragreserven aufgezeigt werden. Dabei spielt die intelligente Ausstattung stabilitätsgefährdeter Elemente mit Monitoring-Systemen eine zukunftsorientierte Rolle zur Kontrolle, Analyse und Bewertung.

Die Vorteile der Kenntnis realer Tragsysteme im Bestandsbau, einschließlich Stab- und Lagersteifigkeiten sowie Kraftflüsse sind vielfältig. Neben der Identifikation von Tragreserven, können statische Berechnungen im Allgemeinen verifiziert werden. Ein ganzheitliches Monitoring ermöglicht darüber hinaus die Beobachtung struktureller Veränderungen sowie das Erkennen maximal zulässiger Einwirkungen. Moderne prestige-trächtige Brückentragwerke werden bereits beim Bau mit Monitoringsystemen ausgestattet, um Informationen hinsichtlich des realen und eines veränderten Tragverhaltens zu erhalten und diese bewerten zu können (vgl. Mack et al., 2016). Es ist eine wichtige Herausforderung, die realen Steifigkeitsverhältnisse an Bestandsbauwerken zu klären, Kraftflüsse sichtbar zu machen und beides für eine Nachweisführung heranzuziehen.

## 1.3 Forschungsrahmen

Für die Nachweisführung eines Tragwerks wird dieses als idealisiertes Modell abgebildet, mit den erforderlichen Lasten berechnet und nach dem hiesigen Sicherheitskonzept nachgewiesen. Die ingenieurmäßigen Annahmen des Tragsystems können allerdings nur in Sonderfällen die tatsächlichen Gegebenheiten widerspiegeln. Abbildung 1.2 zeigt die Müngstener Talbrücke aus dem Jahr 1897 in Solingen. Die Fachwerkbogenkonstruktion mit einer maximalen Höhe von 107 m oberhalb der Wupper stellt eine direkte Zugverbindung zwischen den Städten Solingen und Remscheid bereit. Die Eisenbahnbrücke besitzt eine Gesamtlänge von 465 m, wobei der reine Fachwerkbogen eine Spannweite von 170 m aufweist (Kalameya et al., 2017, S. 619). Nach mehrjährigen Sanierungsmaßnahmen ist die Brücke seit dem Jahr 2021 wieder für den Zugverkehr freigegeben. Die in Abbildung 1.2 dargestellten Fachwerkkonstruktionen zeigen, auch bei biegesteifen Bauteilübergängen, ein überwiegend auf Druck- und Zugkräften basierendes Tragverhalten. Da Übergangsteifigkeiten zwischen den einzelnen Elementen häufig nur abgeschätzt werden können und dadurch unzureichende Informationen für einen genauen Nachweis existieren, werden Druckstäbe als Pendelstäbe mit beidseitig gelenkiger Lagerung idealisiert. Während vorhandene Übergangsteifigkeiten keinen Einfluss auf den Nachweis eines reinen Zugstabes haben, entstehen für Druckstäbe Reserven unklarer Größenordnung. Annähernd frei verdrehbare Gelenke existieren im klassischen Bauwesen



Abbildung 1.2: Müngstener Brücke über die Wupper in Solingen

nur in Ausnahmefällen, dennoch werden druckbeanspruchte Tragelemente zur Erhöhung der Standsicherheit häufig als Pendelstäbe mit ideal verdrehweicher Lagerung berechnet. Diese Erhöhung der Modellsicherheit führt bei Neubauwerken zu einer statisch konstruktiven Tragreserve. Bei Bestandskonstruktionen sind diese zusätzlichen Lastkapazitäten wichtige Bausteine, auch bei steigenden Lastanforderungen die Nachweise nach hiesigen Standards zu erfüllen. Experimentelle Untersuchungen sind Hilfsmittel, diese Tragreserven direkt am realen Bauwerk zu messen und unsichere Materialeigenschaften sowie Übergangsteifigkeiten einer rein theoretischen Berechnung zu umgehen.

Die Bewertung der Standsicherheit schlanker Tragglieder mit Drucklasten besitzt eine besondere Bedeutung hinsichtlich der Tragwerkssicherheit. Im Stabilitätsversagen ist das plötzliche Ausknicken des Druckglieds vorab nicht erkennbar und kann große materielle und personelle Schäden verursachen. Während für Deckenkonstruktionen experimentelle Traglastversuche unklare Steifigkeitsverhältnisse und Materialeigenschaften klären, gibt es für Druckstäbe im Bauwesen keine vergleichbar angewandten Verfahren (vgl. Neubauer und Gutsch, 2003, Gutermann et al., 2018, Schacht et al., 2016).

Innovative, einfache und zerstörungsfreie Messtechniken sowie Analysemethoden aus dem Bereich der Baudynamik ermöglichen effiziente Verfahren, bestehende Systeme und Belastungen zu identifizieren. Durch fortschreitende technische Möglichkeiten finden dynamische Methoden immer stärker Einsatz in unterschiedlichsten Anwendungsgebieten, wie der Schadensidentifikation von Betontragwerken (vgl. Waltering et al., 2009) oder der Analyse von Stahlbetondeckenbalken hinsichtlich etwaiger in der Statik unberücksichtigter Randeinspannungen. Experimentelle Untersuchungen konnten mithilfe der Messung von Eigenformen zusätzliche Tragreserven durch Einspannungseffekte des aufgehenden Mauerwerks identifizieren (Waltering et al., 2019).

Vielfach bereits in der Praxis angewendet wird darüber hinaus die Abhängigkeit zwischen Normalkraft und Eigenkreisfrequenz. Aus der Musik ist allgemein bekannt, dass ein Ton die aerodynamische Übertragung eines wellenförmigen Signals bestimmter Frequenz ist. Je größer die Spannung auf die Saite eines Instruments wirkt, desto höher sind die Frequenzen und hörbaren Töne. Nach einem ähnlichen Prinzip können nach heutigem Stand die Zugkräfte von Schrägseilen über die Ermittlung der Schwingungsparameter bis zu 1 % genau bestimmt werden (Geier und Petz, 2004, S. 987). Vergleichbare Verfahren

zur Ermittlung von Kräften externer Spannglieder stehen für die Bauwerksbewertung zur Verfügung (vgl. Stadler et al., 2007). Wird diese Erkenntnis auf Bauteile mit Druckkräften übertragen, stellen sich äquivalente Verhältnisse ein. Somit besitzen gedrückte Bauteile infolge höherer Druckkräfte niedrigere Eigenkreisfrequenzen. Während sich die Zugkraftbestimmung von Schrägseilen mittels baodynamischen Methoden als gängige Praxis herausstellt, ist die dynamische Betrachtung von knickgefährdeten Traggliedern ein weiterer Schritt mit zahlreichen Anwendungspotentialen im Bereich bestehender Tragwerke.

## 1.4 Forschungsziel

Das Ziel dieser Dissertation ist die Entwicklung einer Methode zur experimentellen Ermittlung von realen Lagerungsbedingungen und der tatsächlich einwirkenden Normalkraft von Druckstäben. Der daraus ableitbare Nachweis der Knicksicherheit ist dafür vorgesehen, real vorhandene Auslastungen bestehender druckbeanspruchter Stäbe aus Stahl zu ermitteln. Daraus ergeben sich die folgenden Forschungsfragen:

- F1: Ist die Bestimmung der Lagersteifigkeiten eines Druckstabs aus Stahl zur Ermittlung der wahren Knicklänge durch die experimentelle Messung der strukturdynamischen Systemparameter Eigenkreisfrequenz und Eigenform möglich?
- F2: Ist die Bestimmung der statischen Normalkraft eines Druckstabs aus Stahl durch die experimentelle Messung der strukturdynamischen Systemparameter Eigenkreisfrequenz und Eigenform möglich?

Es wird ein Verfahren zur Systemidentifikation auf Basis einer Modelloptimierung vorgestellt, welches die Lagerungsbedingungen sowie die Normalkraftbeanspruchung eines Druckstabs auf Basis der experimentell ermittelten Eigenkreisfrequenz und Eigenform bestimmt. Dabei werden die genannten Systemeigenschaften eines rechnerischen Basismodells soweit angepasst, bis eine bestmögliche Übereinstimmung zwischen den messtechnisch und durch das Basismodell theoretisch ermittelten dynamischen Systemparametern erzielt wird. Eine numerische Abweichungsfunktion zwischen den real erfassten strukturdynamischen Systemeigenschaften Eigenkreisfrequenz bzw. Eigenform und der korrespondierenden theoretischen Werte ist Grundlage zur Optimierung und Identifikati-

on der gesuchten Systemeigenschaften. Der in dieser Arbeit entwickelte Algorithmus wird mithilfe numerischer Simulationen und experimenteller Laboruntersuchungen verifiziert. Der Einsatz des Verfahrens erfolgt anschließend an einem realen Tragwerk, wodurch anhand der ursprünglichen statischen Berechnung Tragreserven aufgezeigt werden.

## 1.5 Aufbau der Arbeit

Die Dissertation umfasst sieben Kapitel, deren Zusammenhänge in Abbildung 1.3 dargestellt sind. Die einzelnen Kapitel werden im Folgenden in Grundzügen definiert.

**Kapitel 1** ordnet die gesamtgesellschaftliche Relevanz des Forschungsprojekts ein, klärt das konkrete Forschungsinteresse und definiert den spezifischen Forschungsrahmen. Anschließend folgt das Forschungsziel mit Beschreibung der wesentlichen Forschungsfragen sowie einer abschließenden Kapitelübersicht.

**Kapitel 2** beschreibt den Stand der Wissenschaft und fasst die bisherigen Erkenntnisse hinsichtlich des Themengebiets zusammen. Es beinhaltet die Darstellung wesentlicher Methoden der strukturdynamischen Systemidentifikation verschiedener Längskraft beanspruchter Bauteile, wie Seiltragwerke sowie Zug- und Druckstäbe. Ergänzend werden nicht-strukturdynamische Methoden vorgestellt, mit denen die alternative Ermittlung des inneren Beanspruchungszustands ermöglicht wird. Eine abschließende Zusammenfassung demonstriert die Forschungslücken, welche in dieser Arbeit behandelt werden.

**Kapitel 3** stellt das methodische Vorgehen der Dissertation dar. Nach Definition der Arbeitshypothesen, werden die drei wesentlichen Arbeitsphasen I bis III vorgestellt. Darunter fällt die theoretische Entwicklung, laborexperimentelle Validierung und praktische Anwendung des dynamischen Verfahrens zur Systemidentifikation. Anschließend erfolgen grundlegende Informationen der mathematischen Optimierung sowie der theoretischen und experimentellen Modalanalyse. Letztere sind für das Verständnis dynamischen Tragverhaltens und zur Messung dynamischer Systemparameter von wesentlicher Bedeutung.

**Kapitel 4** beschreibt die theoretische Entwicklung des dynamischen Verfahrens zur Systemidentifikation in Arbeitsphase I. Dabei wird in Abschnitt 4.1 ein analytisches Basismodell auf Grundlage eines Euler-Bernoulli-Stabs vorgestellt, welches anhand definierter Systemparameter die modalen Eigenschaften Eigenkreisfrequenz und Eigenform ermittelt. Auf Basis eines rechnerischen Optimierungsprozesses werden die gesuchten Systemeigenschaften so lange angepasst, bis eine bestmögliche Übereinstimmung zu den messtechnisch erfassten dynamischen Eigenschaften gefunden ist. Das Optimierungsverfahren basiert auf einem evolutionären Algorithmus und wird mit der Programmiersprache R (s. R Core Team, 2020) in ein Computerprogramm überführt, welches die Bestimmung der Normalkraft und der Lagersteifigkeiten ermöglicht. Ergänzend wird in Abschnitt 4.2 ein statisches Verfahren zur Systemidentifikation für vergleichende Untersuchungen vorgestellt.

**Kapitel 5** stellt die experimentellen Laboruntersuchungen in Arbeitsphase II dar und validiert das aus Kapitel 4 erarbeitete dynamische Verfahren zur Systemidentifikation. Es werden fünf unterschiedliche Stahlprofile mit vier verschiedenen Lagerungsbedingungen kombiniert, woraus insgesamt 20 Prüfkörper resultieren. Unter dem Einfluss variierender Normalkraftbeanspruchungen werden die modalen Parameter bestimmt und mit dem Optimierungsprozess analysiert. Die auf Basis des dynamischen Identifikationsverfahrens optimierten Lagerungsbedingungen werden anhand eines statischen Vergleichsverfahrens, die optimierten Normalkräfte mit einer Kraftmessdose validiert.

**Kapitel 6** wendet das in Kapitel 4 entwickelte und Kapitel 5 validierte dynamische Verfahren auf ein reales Tragwerk in Arbeitsphase III an. Dabei dient eine übliche statische Berechnung, auf der sicheren Seite, als Grundlage für die Bestimmung der Auslastung. Nach Messung und Auswertung der strukturdynamischen Systemeigenschaften werden wesentliche Differenzen zur ursprünglichen statischen Berechnung herausgearbeitet und die ermittelten Tragreserven aufgezeigt.

**Kapitel 7** fasst die Dissertation mit den Forschungsergebnissen des theoretischen Modells, der experimentellen Validierung und der praktischen Anwendung zusammen. Abschließend werden Fragestellungen für zukünftige Forschungsarbeiten aufgezeigt.

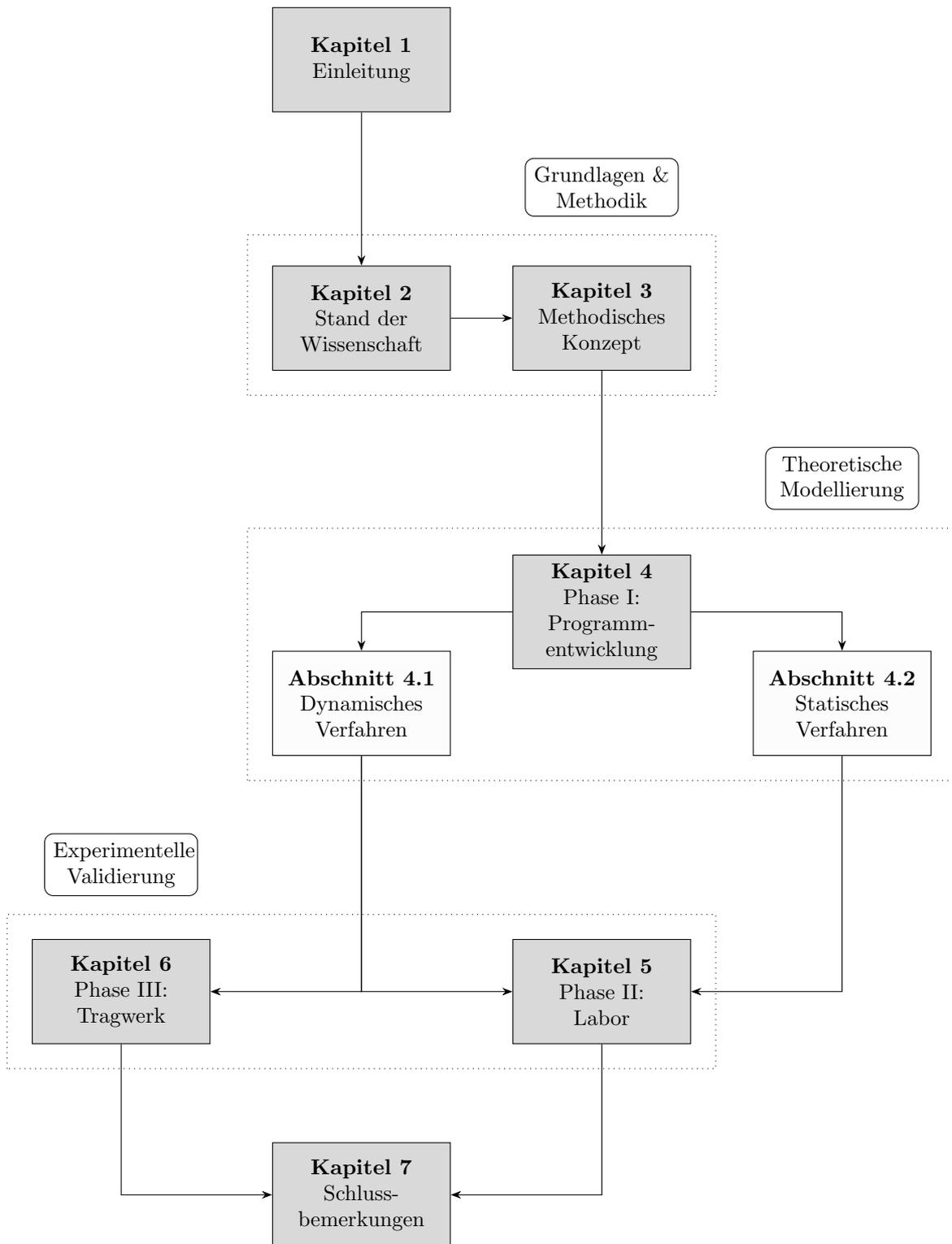


Abbildung 1.3: Kapitelstruktur der Dissertation

## 2 Stand der Wissenschaft

Die Überführung realer Strukturen in geeignete rechnerische Modelle ist das Bindeglied zwischen dem sicheren Lastabtrag, der Wirtschaftlichkeit und dem umweltbewussten Ressourcenschutz. Die Vorteile einer detaillierten Bauwerkskenntnis werden in Abschnitt 1.1 aufgezeigt und eröffnen der Tragwerksplanung die Möglichkeit, effizient mit den bestehenden Konstruktionen umzugehen. Auf Basis der Auswertung von strukturdynamischen Systemeigenschaften wurden verschiedene Verfahren entwickelt, um tatsächliche Systemsteifigkeiten und reale Normalkraftbeanspruchungen zu definieren. Abschnitt 2.1 stellt bisherige Arbeiten strukturdynamischer Systemidentifikation vor. Ergänzend erörtert Abschnitt 2.2 alternative Methoden der Spannungsermittlung. Abschnitt 2.3 schließt mit einer Zusammenfassung und der Motivation dieser Arbeit ab.

### 2.1 Strukturdynamische Systemidentifikation

Die Ermittlung statischer Systemparameter über die experimentelle Messung der strukturdynamischen Systemeigenschaften Eigenkreisfrequenz und Eigenform erfolgt üblicherweise über die Optimierung theoretischer Ausgangsmodelle. Im Bauwesen wird dieser Prozess ebenfalls als Model Updating bezeichnet. Vereinzelt führen auch direkte Berechnungsmethoden zu sinnvollen, mindestens überschlägig nützlichen Ergebnissen. Dabei ist bei der rechnerischen Auswertung eines dynamischen Schwingungsverhaltens die Kenntnis diverser statischer Systemparameter, wie Querschnittssteifigkeiten, Lagerungsbedingungen und Normalkraftbeanspruchungen, erforderlich. Die Auswirkungen einzelner statischer Systemparameter auf die strukturdynamischen Stabeigenschaften lassen sich häufig nicht von einander trennen, sodass die Methoden zur Systemidentifikation das Wissen oder die Ermittlung aller wesentlichen Parameter erfordern.

Abschnitt 2.1.1 stellt einen Überblick wesentlicher Verfahren zur Systemidentifikation von Seilkonstruktionen dar. Auf Zug beanspruchte Elemente werden in Abschnitt 2.1.2 aufgezeigt. Abschnitt 2.1.3 beinhaltet Verfahren zu druckbeanspruchten Traggliedern.

### **2.1.1 Seiltragwerke**

Die Verwendung stählerner Seilkonstruktionen findet seit vielen Jahrzehnten breite Anwendung in der Baupraxis. Typische Konstruktionen sind Schrägseile und Hänger von Brückentragwerken, Abspannungen von Dachkonstruktionen sowie Spannglieder vorgespannter Stahlbetonbalken. Besonders in der Öffentlichkeit bekannte Beispiele sind die längsgespannten Haupttragseile der Golden Gate Bridge in San Francisco aus dem Jahr 1937 und die Überdachung des Olympiaparks in München von 1972 (Schwartz, 2015, S. 4, Schwartz, 2015, S. 41). Die schlanken Kabel von Seilkonstruktionen weisen eine hohe Zugfestigkeit, jedoch nur eine geringe Biegesteifigkeit auf. Sie besitzen die Aufgabe, die im Bauwerk auftretenden Lasten über Zugkräfte effizient zu übertragen, benötigen jedoch in der Praxis das Zusammenspiel mit Druckstäben, Druckbögen oder Pylonkonstruktionen.

Zugglieder von Schrägseilbrücken werden aufgrund ihrer exponierten Lage zur Aufrechterhaltung eines sicheren Lastabtrags regelmäßig kontrolliert. Neben einer klassischen visuellen bzw. haptischen Inspektion stehen dem Bauwerksprüfenden verschiedene neuartige Möglichkeiten der Bestandsbewertung zur Verfügung. So können magnetinduktive Verfahren und hochauflösende Kamerabefahrungen zur Lokalisierung von Schwachstellen und lokalen Brüchen nicht nur detaillierte Informationen über den Ort der Schwachstelle aufzeigen, sondern ebenfalls eine einwandfreie Dokumentation für zukünftige Begutachtungen gewährleisten (Gläser et al., 2014, S. 463). Im Zuge steigender Digitalisierungsmaßnahmen besitzt ein ganzheitliches Monitoring die Aufgabe, Veränderungen des Tragverhaltens zu erkennen, bevor Mängel und kostspielige Sanierungsmaßnahmen folgen (vgl. Mack et al., 2016).

Neben der Schadensidentifikation zählt ebenso die Ermittlung des Beanspruchungszustandes von Zugseilen durch geeignete und zuverlässige Methoden zu den wichtigen Aufgaben der Bestandsbewertung. Ein etabliertes Instrument sind schwingungsbasierte Messverfahren, wie sie etwa seit 1950 regelmäßig zum Einsatz kommen (Geier und Petz, 2004, S. 985). Nach B. H. Kim und Park (2007, S. 660 f.) lassen sich Schwingungsmetho-

den zur Identifikation von Seilkräften allgemein in vier Kategorien unterteilen, welche die Komplexität der Modellidealisation beschreiben. Dabei ist entscheidend, ob das theoretische Ausgangsmodell einerseits die Biegesteifigkeit des Seils bzw. andererseits den vor allem für längere Seile charakteristischen Durchhang berücksichtigt. Kategorie 1 bezeichnet die Verwendung der klassischen Seiltheorie ohne Berücksichtigung von Querschnitts- sowie Lagersteifigkeiten und stellt die Idealisation mit den in dieser Übersicht einfachsten Modellannahmen ohne Durchhang dar. Die Erweiterung dieser Theorie erfolgt mit Berücksichtigung des Durchhangs in Kategorie 2, bei der zusätzliche Informationen über den unbelasteten Seilzustand erforderlich sind. Die Biegesteifigkeit des Seils, jedoch ohne Ansatz des Durchhangs, wird in Kategorie 3 verwendet. In Kategorie 4 werden dagegen sowohl die Biegesteifigkeit des Seils als auch der Durchhang in das theoretische Modell eingeschlossen. Für die unterschiedlichen Modellansätze existieren sinnvolle Anwendungsbereiche. So kann zum Beispiel die Normalkraft eines verhältnismäßig langen Kabels ohne Durchhang mit dem übersichtlichsten Modell nach Kategorie 1 durchaus sinnvoll bestimmt werden (vgl. B. H. Kim und Park, 2007, S. 666).

Das Modell der Kategorie 1 nach B. H. Kim und Park (2007, S. 660 f.) beschreibt die Biegeschwingung einer gespannten Saite ohne Durchhang unter der Voraussetzung, dass die Biegesteifigkeit der Saite vernachlässigbar klein ist. Handelt es sich zudem um kleine Schwingungen, welche durch ihre Seitwärtsbewegung keine nennenswerte Normalkraftdifferenzen verursachen, kann die Eigenfrequenz einer schwingenden Saite nach Gleichung 2.1 formuliert werden (Petersen und Werkle, 2017, S. 563):

$$f_n = \frac{n}{2 \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{N}{\mu}} \quad (2.1)$$

Die Gleichung beinhaltet die Systemlänge  $L$ , die Massenverteilung  $\mu$ , die Normalkraft  $N$  sowie die Ordnungszahl der verwendeten Mode  $n$ . Für Bauteile, wie Schrägseile von Brückenkonstruktionen, führt dieser lineare Zusammenhang zwischen der Ordnung  $n$  und der Eigenfrequenz  $f_n$  üblicherweise zu ungenauen Ergebnissen. Die zunächst übersichtliche Funktion aus Gleichung 2.1 wird daher in eine aufwendigere Struktur überführt. Geier und Petz (2004, S. 985 ff.) beschreiben ein umfassenderes Verfahren, welches neben der Zugkraft  $N$ , auch die Biegesteifigkeit  $EI$  des Seils berücksichtigt. Dabei wird zur

theoretischen Ermittlung der Eigenfrequenz  $f_n$  ein Näherungsmodell nach Gleichung 2.2 formuliert, welches eine verdrehsteife Endverankerung voraussetzt:

$$f_n = \frac{n}{2 \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{N}{\mu}} \cdot \left(1 + 2 \cdot \sqrt{\frac{EI}{N \cdot L^2}} + \left(4 + \frac{n^2 \pi^2}{2}\right) \cdot \frac{EI}{N \cdot L^2}\right) \quad (2.2)$$

Anhand mehrerer gemessener Eigenfrequenzen  $f_n$  ermöglicht ein Optimierungsprozess, die Anpassung der Zugkraft  $N$  sowie der Biegesteifigkeit  $EI$  des Seils nach einem Gradientenverfahren bis die Abweichung aus Theorie und Messung minimal wird. Für die Anwendung des vorgestellten Verfahrens muss die Massenverteilung  $\mu$  und die Seillänge  $L$  bekannt sein. Sowohl Geier und Petz (2004, S. 985 ff.), als auch Gläser et al. (2014, S. 467) schlagen vor, die ersten 10 bis 15 Eigenfrequenzen für eine Analyse heranzuziehen. Beide führen Untersuchungen durch, bei denen der Beschleunigungsaufnehmer mittels eines Aluminiumprofils in Form einer U-Schale und einem Spanngurt an den Kabeln befestigt wird. Die Abhandlung von Geier (2004, S. 987) weist eine Genauigkeit der aus den Schwingungseigenschaften abgeleiteten Kraft von bis zu 1 % auf. Es wird allerdings darauf verwiesen, dass die Näherungsgleichung 2.2 für Seilkonstruktionen mit eindeutig ersichtlichem Durchhang nicht angewendet werden kann.

Aufgrund der Anwendungsgrenzen unterschiedlicher Verfahren, führen B. H. Kim und Park (2007, S. 660 ff.) ein Modell basierend auf der Finite-Elemente-Methode (FEM) ein. Die Autoren ergänzen die bisherigen Ansichten der Seiltheorie nicht nur mit Berücksichtigung der Biegesteifigkeit  $EI$ , sondern ebenfalls mit der Einbeziehung des Durchhangs sowie der Dehnsteifigkeit  $EA$  des Seilquerschnitts. Kim und Park entwickeln ein iteratives Verfahren auf Grundlage von 20 messtechnisch erfasster Eigenfrequenzen zur Identifikation von Normalkräften sowie Biege- und Dehnsteifigkeiten eines Seilquerschnitts. Eine anschließende experimentelle Studie vergleicht die vorgestellte Methode mit bisher gängigen Verfahren. Dabei wird ein Litzenbündelseil mit einem Nenndurchmesser von 4,76 mm mit einem Impulshammers und Beschleunigungsaufnehmer untersucht. Sechs unterschiedliche Beanspruchungszustände zwischen 18 N und 498 N werden betrachtet. Während bislang häufig angewendete Verfahren teilweise Lastabweichungen zur tatsächlichen Kraft von über 40 % aufzeigen, weist das auf FE basierende Verfahren von Kim und Park eine maximale Abweichung der Krafteinwirkung von 3,3 % auf (B. H. Kim und Park, 2007,

S. 671). Biege- und Dehnsteifigkeit zeigen größere Streuungen und können daher nicht eindeutig definiert werden.

Für eine optimale Erfassung der Eigenfrequenzen ist es sinnvoll neben den Schwingungen des Bauteils, auch die schwingerregenden Kräfte messtechnisch zu erfassen (vgl. Abschnitt 3.4.2). Bei der Analyse von Seilkonstruktionen werden häufig händische, windböen- oder verkehrserzeugende Kräfte herangezogen, die keine messtechnische Erfassung ermöglichen. Zwar regen diese willkürlich auftretenden Kräfte durch ihr impulsartiges Anregungsverhalten häufig alle relevanten Eigenfrequenzen an, kommen jedoch mit einer Vielzahl von Untergrundgeräuschen aus dem Fahrbahnverkehr oder den äußeren Umwelteinflüssen einher. Um die störenden Schwingungen, welche auch als Rauschen bezeichnet werden, bei der Analyse des Beschleunigungszeitverlaufs zu minimieren und das Analyseergebnis zu glätten, wenden Kangas et al. (2010) den Multiple Signal Classification (MUSIC) Algorithmus an. Dieser ermöglicht eine störungsreduzierte Analyseumgebung und wird anhand der Seilkraftbestimmung einer Schrägseilbrücke in den USA ausgewertet. Dazu wird ein auf Optimierung basierendes FE-Modell in Anlehnung an Mehrabi und Tabatabai (1998) verwendet. Die mithilfe dieser Methode über die dynamischen Messungen ermittelten Normalkräfte weichen bei 32 untersuchten Kabeln mit Längen zwischen 60 m und 142,3 m im Durchschnitt  $\pm 3\%$  gegenüber vergleichenden Abhebekontrollen ab. Die Unterschiede zwischen der dynamischen Lastermittlung und den rechnerisch auftretenden Seilkräften belaufen sich auf  $\pm 6\%$  (Kangas et al., 2010, S. 967).

Seilkonstruktionen erhalten durch Wind- und Verkehrsbelastungen häufig wechselnde Beanspruchungen, die zum Teil größer sind als das Eigengewicht und so erheblich zu Ermüdungsproblemen führen. Das von Xue und Shen (2020) erarbeitete Modell dient dazu, die Entwicklung der Seilkräfte über einen bestimmten Zeitraum aufzuzeichnen und Informationen hinsichtlich der Größe und Form auftretender Spannungswechsel zu generieren. Das Verfahren basiert auf der Analyse von Halbwellen höherfrequenter Moden und stützt sich auf der klassischen Seiltheorie nach Gleichung 2.1. Für die Anwendung des Verfahrens wird die Frequenz einer höher geordneten Mode nach Abbildung 2.1 verwendet. Die in der Eigenform hervortretenden Halbwellen entwickeln ein gewisses Maß an Unabhängigkeit hinsichtlich der Lagerungsbedingungen und werden als neue Systemlänge

herangezogen. Die Seilkraft kann entsprechend Gleichung 2.3 ermittelt werden:

$$N \approx 4\mu \cdot f_n^2 \cdot \left(\frac{L}{n}\right)^2 \quad (2.3)$$

Experimentell untersucht wird das Verfahren anhand eines 4,1 m langen Hängers der über 250 m langen Jinsha River Railway Suspension Bridge in China. Innerhalb eines Zeitraums von 20 Sekunden schwankt die rechnerische Seilkraft des Hängers infolge freier Anregung in einem Bereich von 2,1 kN bis 3,3 kN. Die Frequenzen der analysierten vierten Mode liegen zwischen 31 Hz und 44 Hz. Der Abgleich mit der tatsächlich gemessenen Kraft mithilfe von Faser-Brigg-Gitter-Sensoren (vgl. Abschnitt 2.2.3) ergibt eine maximale Abweichung von 3,6% ohne Berücksichtigung etwaiger Systemsteifigkeiten (Xue und Shen, 2020, S. 3).

Die rechnerische Berücksichtigung der Seillänge ist auch ohne detaillierte Messungen vor Ort ausreichend genau. Kleinere Ungenauigkeiten führen aufgrund der Länge zu häufig geringfügigen Rechenfehlern. Bei kürzeren außenliegenden Spanngliedern von

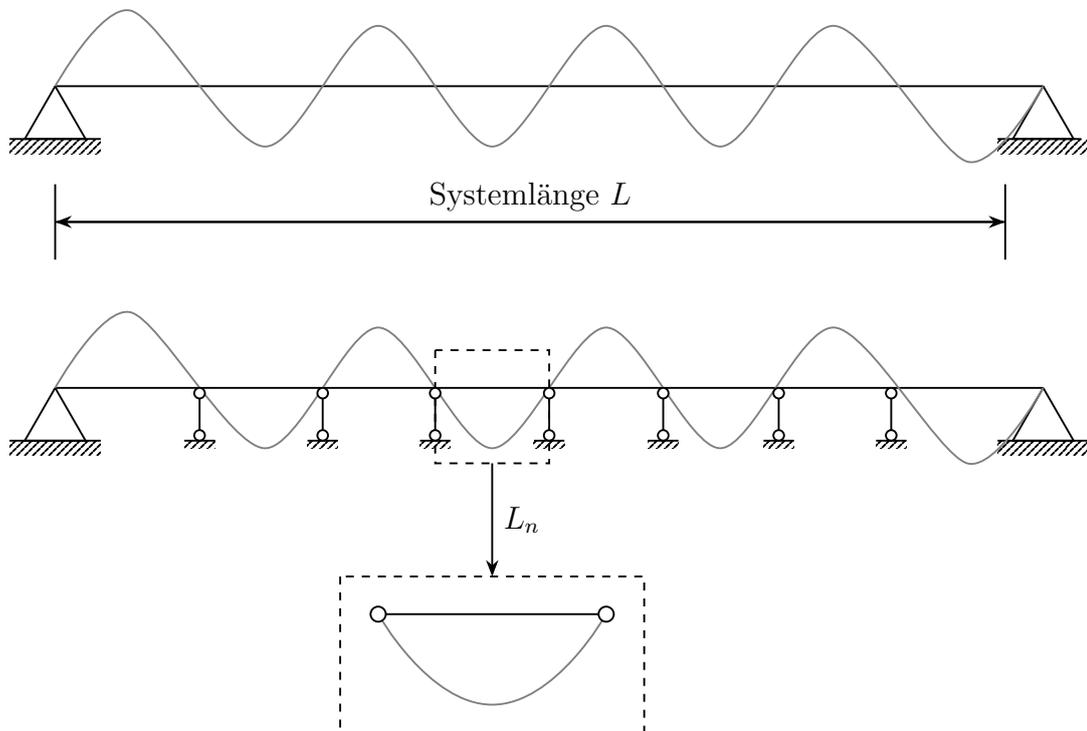


Abbildung 2.1: Modell zur Normalkraftbestimmung nach Xue und Shen (2020, S. 2)

Spann betonbrücken ist eine genauere Ermittlung der Systemlänge wünschenswert, da Anschlusspunkte oft nicht frei zugänglich und dadurch Schwingungsnullpunkte nicht ersichtlich sind (Stadler et al., 2007, S. 25 f.). Stadler et al. (2007, S. 25) erweitern methodisch die Näherungsberechnung aus Gleichung 2.2 durch die messtechnische Ermittlung freier Schwingungslängen von externen Spanngliedern. Die Autoren berücksichtigen für ihre Methode neben den Eigenfrequenzen auch die erste Schwingungseigenform des Spannglieds. Das Verfahren basiert auf der Annahme, dass die Auflagerrandeinspannungen lediglich in einem begrenzten auflagernahen Bereich Einfluss auf die Eigenform nehmen. Durch die geringe Biegesteifigkeit des Vorspannglieds im Vergleich zu den angrenzenden Bauteilen, geht die Eigenform auch bei beidseitiger Volleinspannung schnell in eine sinusförmigen Kurve über (vgl. Xue und Shen, 2020). Anhand dieser verkürzten sinusförmigen Eigenform, wird ein Rückschluss auf die freie Schwingungslänge getroffen.

Riad (2006) stellt ein FEM basiertes Modellkorrekturverfahren vor, welches ebenfalls mit den Eigenfrequenzen und Eigenformen die Berechnung der Schwingungslänge, der effektiven Biegesteifigkeit und der Spanngliedkraft ermöglicht. Ferner erlaubt das Verfahren die Berücksichtigung veränderlicher Querschnitte. Die vorgestellte Methode wird an sechs Brücken mit vier unterschiedlichen Spannverfahren und insgesamt 340 Spanngliedern angewendet. Hinsichtlich der tatsächlichen Spannkräfte, ermittelt über Abhebekontrollen, erreicht das Verfahren eine maximale Abweichung bei drei der vier Spannverfahren von unter 3% (Riad, 2006, S. 111 f.).

Ergänzende theoretische Grundlagen von Seilkonstruktionen können Wagner (2016) entnommen werden. Siegel (2018) bietet einen weitreichenden Überblick der Schadensüberprüfung von Seilkonstruktionen mithilfe der experimentellen Modalanalyse. Darüber hinaus beschäftigt sich Treysède (2009) mit den Auswirkungen von Temperaturänderungen auf die Schwingungseigenschaften von Seilen. Feng et al. (2017) demonstrieren ein Verfahren, Seilschwingungen kontaktlos über ein Kamerasystem zu messen, um Kontrollmechanismen während des Bauablaufs zu beschleunigen.

### **2.1.2 Zugstäbe**

Kann ein Bauteil, neben einer axialen Lastabtragung, ebenfalls auf ein gewisses Maß an Biegesteifigkeit zurückgreifen, wird im Zuge der Idealisierung von Stäben oder Balken ge-

sprochen. Überwiegend mit positiven Normalkräften beanspruchte Tragelemente werden als Zugstäbe oder Zugbänder bezeichnet. Sie treten unter anderem als vertikale Hänger in Stabbogenbrücken, zur Kopplung von nach außen gerichteten Bogenkräften, in Fachwerkkonstruktionen oder als Auskreuzung auf. Im Vergleich zu den angrenzenden Bauteilen sind diese Stabelemente üblicherweise schlank und fügen sich architektonisch unauffällig in ihre Umgebung ein. Ähnlich wie Seilkonstruktionen sind Zugstäbe aufgrund ihres sensiblen Schwingungsverhaltens prädestiniert für die Auswertung ihrer strukturdynamischen Systemparameter zur Systemidentifikation, obliegen jedoch aufgrund ihrer Biegesteifigkeit abweichenden rechnerischen Grundlagen. Während zum Beispiel die Auflagerrandbedingungen bei Seilkonstruktionen je nach Systemeigenschaften einen geringen bis bedeutungslosen Einfluss haben (vgl. Xue und Shen, 2020), können diese bei Stabelementen nur in Ausnahmefällen vernachlässigt werden.

Eine häufige Anwendung dynamischer Untersuchungen bei zugbeanspruchten Tragelementen ist die Identifikation der Kräfte in Zugbändern historischer Gewölbekonstruktionen. Die früher verwendeten Eisenprofile wurden häufig händisch hergestellt und unterliegen üblicherweise stark schwankende Materialeigenschaften. Aufgrund der unbekanntes Gewölbesetzungen, des hohen Alters der Konstruktionen und der variierenden Materialkennwerte lassen sich die tatsächlichen Normalkräfte anhand eines rein theoretischen Ansatzes kaum bestimmen. Die Zugkraftermittlung mithilfe zerstörungsfreier Prüfmethode kann eine Standsicherheitsbewertung ermöglichen.

Lagomarsino und Calderini (2005) stellen für diesen Anwendungsfall ein Verfahren zur Systemidentifikation auf Basis der Optimierung eines kontinuierlichen Eulerstabs zur Ermittlung von Zugkräften und Auflagerbedingungen in Form von beidseitig identischen Drehfederkonstanten vor. Für die Anwendung des Verfahrens werden eine kontinuierliche Massenverteilung, Systemlänge sowie drei messtechnisch ermittelte Eigenfrequenzen benötigt. Mit einer Abweichungsfunktion aus den gemessenen und den theoretisch mit dem Basismodell ermittelten Eigenfrequenzen wird iterativ die Kombination aus Drehfedersteifigkeit, Querschnittsteifigkeit und Zugkraft ermittelt, die bestmöglich ein rechnerisches Ebenbild darstellt. Eine numerische Vergleichsuntersuchung mit einem FEM-Programm ergibt für baupraktisch relevante Bereiche der Drehfedersteifigkeit Abweichungen der Normalkraft von bis zu 15 % (Lagomarsino und Calderini, 2005, S. 853).

Amabili et al. (2010) erweitern die klassische Theorie des Eulerstabs mit dem Ansatz des Timoschenko-Balkens für die zusätzliche Berücksichtigung von Schubsteifigkeiten. Ergänzend ermöglicht das vorgestellte Verfahren die Eingabe über die Systemlänge veränderlicher Stabgeometrien. Der Ausgangsstab nach Abbildung 2.2 besitzt neben den klassischen Auflagern eines einfach gestützten Balkens einen beidseitigen Bettungsbereich mit linear elastischer Bettungsziffer  $k_f$ . Dadurch entsteht eine Rotationssteifigkeit an den Trägerenden, wodurch eine Bettung des Zugbands im angrenzenden Mauerwerk modelliert wird. Auf Basis von bekannten Querschnittseigenschaften sowie von mindestens der ersten beiden Eigenfrequenzen, ergeben sich aus der Minimierung einer gewichteten Fehlerfunktion die Normalkraft  $N$  sowie die Steifigkeit der beidseitig identischen Bettungsziffer  $k_f$ . Die Methode wird an fünf ca. 2 m langen Zugbändern historischer Gewölbe einer italienischen Wasserburg in der Provinz Parma getestet. Der Optimierungsprozess wird zur Identifikation möglicher Differenzen mit einer unterschiedlichen Anzahl an ermittelten Moden wiederholt. Dabei werden jeweils fünf Optimierungen mit den Eigenfrequenzen der ersten zwei bis sechs Moden in schwacher Querschnittsrichtung der rechteckigen Eisenprofile durchgeführt. Die Anzahl der verwendeten Eigenfrequenzen besitzt einen erheblichen Einfluss auf die optimierte Normalkraft  $N$ . Bei dem geringst belasteten Stab schwankt die optimierte Zugkraft zwischen 2700 N und 5500 N bei der Verwendung von zwei bzw. sechs Moden. Bei dem Stab mit der größten optimierten Zugkraft liegen die Werte zwischen 16 500 N (zwei Moden) und 19 600 N (vier Moden). Aus der Differenz zwischen der experimentell ermittelten und theoretisch optimierten Eigenfrequenz ergeben sich maximale Abweichungen der Zugkräfte zwischen 5,8 % und 30,4 %

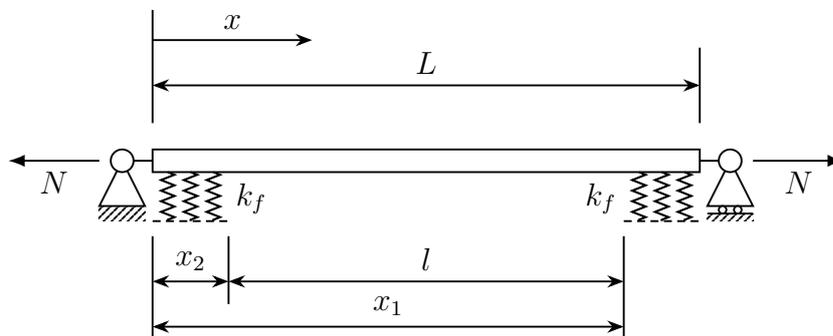


Abbildung 2.2: Modell zur Systemidentifikation nach Amabili et al. (2010, S. 2059)

(Amabili et al., 2010, S. 2066). Zugstäbe historischer Gewölbekonstruktionen werden ebenfalls von Sorace (1996) und Resta et al. (2020) untersucht.

Die zuvor beschriebenen Methoden sind nicht nur zur Kraftermittlung von historischen Zugbändern geeignet. Sie können auch auf andere Systeme übertragen werden, wobei der Ansatz einer beidseitig identischen Anschlusssteifigkeit nur in Ausnahmefällen anderen Tragwerken gerecht wird. Tullini und Laudiero (2008) präsentieren, anstelle eines Optimierungsverfahrens, eine analytische Methode zur Systemidentifikation von Stäben mit zwei getrennt idealisierten Rotationsfedersteifigkeiten. Basierend auf der Auswertung eines kontinuierlichen Eulerstabs werden für die Anwendung Informationen einer Eigenfrequenz und der entsprechenden Eigenform an drei Stellen benötigt. Über ein Gleichungssystem, basierend auf der allgemeinen Eigenformlösung, werden anschließend die Normalkraftbeanspruchung und die beiden Rotationsfedersteifigkeiten berechnet. Die Kraftermittlung eines 3,625 m langen teileingespannten Stahlstabs ergibt eine sinnvolle Übereinstimmung mit den tatsächlich aufgebrauchten Zugkräften. Die höchste reale gemessene Lastaufbringung von 50 kN zeigt eine Abweichung von umgerechnet 1,7 % (Tullini und Laudiero, 2008, S. 141). Hinsichtlich der Bestimmung der Rotationsfedersteifigkeiten zwischen den einzelnen Laststufen, ergeben sich Schwankungen unklarer Herkunft.

Rebecchi et al. (2013) verallgemeinern die Methode von Tullini und Laudiero (2008). Das erweiterte Verfahren ermöglicht eine Normalkraftidentifikation ohne Kenntnis der tatsächlichen Systemlänge. Für die Anwendung sind Informationen über die Eigenform an fünf Stellen sowie der dazugehörigen Eigenfrequenz notwendig. Das vorgestellte Verfahren umgeht das Eigenwertproblem, sodass keine detaillierten Angaben der Randeinspannungen möglich sind. Experimentelle Untersuchungen mit drei teilweise eingespannten Zugstäben eines Durchmessers von 20 mm und einer freien Stablänge von 3 m validieren das Verfahren. Die Versuchskörper werden in 10 Laststufen mit maximal 40 kN Zugkraft belastet. Die rechnerische Analyse zeigt auf Basis unterschiedlicher Moden signifikante Unterschiede zwischen den tatsächlichen und messtechnisch ermittelten Kräften. Die maximale Abweichung aller Auswertungen liegt bei 81 % für niedrige Lasten (0,88 kN) und bei 37 % für höhere Kräfte (40,98 kN) (Rebecchi et al., 2013, S. 4132).

Die überwiegende Anzahl an bekannten Verfahren berücksichtigt eine Teileinspannung an den Auflagern in Form von Drehfederkonstanten. Vergleichsweise wenige Methoden

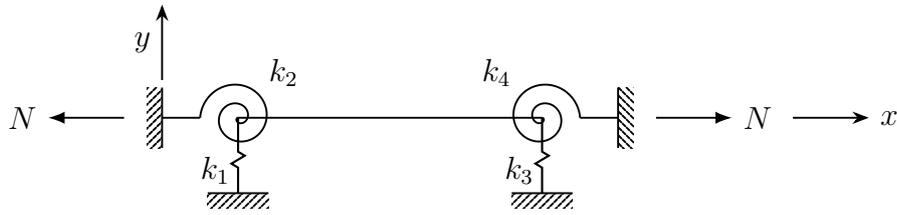


Abbildung 2.3: Modell zur Systemidentifikation nach Livingston et al. (1995, S. 900)

idealisieren für die vertikale Verschiebung zusätzliche Wegfedern. Livingston et al. (1995) demonstrieren ein Optimierungsverfahren, dessen Ausgangsbasis ein allgemein gehaltenes FE-Modell mit Dreh- und Wegfedern nach Abbildung 2.3 darstellt. Anhand eines ca. 1,3 m langen Rechteckstabs aus Stahl wird das Verfahren mit Zugkräften validiert, wobei die experimentellen Versuche keine Berücksichtigung der Wegfedern beinhalten. Für die höheren Lastbereiche von ca. 10 kN wird eine Lastabweichung von weniger als 5 %, verglichen zum Realwert, erreicht (Livingston et al., 1995, S. 907).

Die Ergebnisse aus Optimierungsprozessen ergeben Näherungen auf Grundlage eines Basismodells, bei dem die gesuchten Parameter soweit optimiert werden bis eine bestmögliche Übereinstimmung mit den experimentell ermittelten dynamischen Systemparametern gefunden wird. Mess- und Modellungenauigkeiten spiegeln sich in den optimierten Systemparametern häufig nicht wieder (vgl. Amabili et al., 2010), sodass die Aussagekraft einzelner Parameter kritisch betrachtet werden muss. Kernicky et al. (2018) stellen ein Verfahren auf Basis eines kontinuierlichen Biegeschwingers vor, welches den Ansatz einer probabilistischen Wahrscheinlichkeitsverteilung der gesuchten Parameter ermöglicht. Das Grundmodell beinhaltet Dreh- und Wegfedern an beiden Stabenden. Zudem werden auflagernah zwei zusätzlich bekannte Massen- und Steifigkeitsanteile berücksichtigt. Das Ergebnis stellt eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der zu erwartenden Kräfte und Lagersteifigkeiten dar. Ein Modellansatz auf Basis von Weg- und Drehfederkonstanten wird außerdem von Ding et al. (2020) und T. M. H. Luong (2018) vorgestellt.

### 2.1.3 Druckstäbe

Treten im Bauteil überwiegend Normalkraftbeanspruchungen auf, welche negative Materialspannungen erzeugen, handelt es sich um einen Druckstab. Zu den Druck beanspruch-

ten Bauteilen gehören unter anderem Hochbaustützen, Brückenpylone, Fachwerkstäbe und Steher von Bogenbrücken. Auch wenn die aus dem vorherigen Abschnitt 2.1.2 für Zugstäbe angewandten Theorien ebenfalls für Druckkräfte gelten, gibt es im Gegensatz zu zugbeanspruchten Tragelementen weniger Ausarbeitungen, die sich sowohl numerisch als auch laborexperimentell mit Druckstäben auseinander setzen. Unter anderem wenden Tullini und Laudiero (2008) ihr bereits im vorherigen Abschnitt beschriebenes Verfahren ebenfalls zur Ermittlung von Drucknormalkräften an. Dafür untersuchen sie ein Hohlkastenprofil ( $80 \times 30 \times 3$  mm) mit einer Systemlänge von 2,38 m. Anhand von sieben Laststufen wird bei maximal angesetzten 60 kN Drucklast ein Frequenzabfall von 35 % ermittelt. Die Genauigkeit der analytischen Normalkraftermittlung verglichen zu den Ergebnissen einer Kraftmessdose liegt bei umgerechnet 1,3 % im hohen Lastbereich mit real 60 kN (Tullini und Laudiero, 2008, S. 143).

Ding et al. (2020) verwenden zur Systemidentifikation einen genetischen Optimierungsprozess auf Basis eines kontinuierlichen Euler-Balkens. Die Methode erfordert den Ansatz von fünf Eigenfrequenzen zur Ermittlung der Normalkraft und Lagerungsbedingungen, bestehend aus jeweils zwei Dreh- und Wegfedern. Laboruntersuchungen anhand von drei runden Hohlprofilen und verschiedenen Auflagerrandbedingungen validieren das Verfahren. Die untersuchten Systemlängen liegen für die Zugversuche bei 80 cm und für die Druckversuche bei 100 cm. Insgesamt werden 90 Zug- und 60 Druckversuche mit Lastwirkungen bis ca. 10 kN beschrieben. Die Normalkräfte aus dem Optimierungsprozess weisen, verglichen zu den angebrachten Dehnungsmessstreifen, eine mittlere Fehlerabweichung von 8,3 % und eine Standardabweichung von 6,4 % auf. Auch die Lagerungsbedingungen werden anhand alternativer Messverfahren validiert. Die mittlere Abweichung liegt bei 11,1 % mit einer Standardabweichung von 7,5 % (Ding et al., 2020, S. 7, 9).

Bayón et al. (2012) stellen ein Verfahren mit der Ritz Methode vor, welches das Eigenwertproblem iterativ löst. Die Autoren präsentieren keine Methode zur Systemidentifikation, untersuchen jedoch allgemein die Abhängigkeit zwischen Eigenfrequenz und Druckkraft anhand verschiedener Zylinderproben aus Stahl, Messing und Aluminium. Bauteilschwingungen werden ohne Messsensoren auf der Oberfläche direkt mit einem Laserinterferometer gemessen. Bei allen 150 mm bis 200 mm langen massiven Versuchskörpern mit Durchmessern von 10 mm bis 15 mm zeigt sich ein Abfall der Eigenfrequenzen erst

nach einer Steigungsphase. Die Grenzfälle der simulierten Auflagerbedingungen frei-frei bis eingespannt-eingespannt weisen darauf hin, dass die gelenkigen Auflagerungen durch Erhöhung der Druckkraft eine gesteigerte Klemmwirkung erfahren.

Im Gegensatz zu rein auf Zug beanspruchten Bauteilen besitzen Druckstäbe die Gefahr des Stabilitätsversagens. Die rechnerische Ermittlung der Knicklast auf Basis einer detaillierten Kenntnis des Systems ist wesentlich für einen sicheren Lastabtrag. Neben Verfahren zur Systemidentifikation existieren verschiedene Ansätze, über die modalen Parameter direkt auf eine experimentelle Knicklast des zu untersuchenden Stabs zu schließen. Go et al. (1997) stellen ein Verfahren zur experimentellen Knicklastermittlung ohne Berücksichtigung der aktiven Normalkraftbeanspruchung vor. Ausgehend von der Eigenform und Eigenfrequenzbewertung des Druckstabs, wird über die Ermittlung der Flexibilitätsmatrix die experimentelle Knicklast von Stäben verschiedener Auflagerrandbedingungen ermittelt. Anhand einer numerischen Auswertung werden gleichmäßig und ungleichmäßig verteilte Messstellen der Eigenform validiert. Ein verengtes Messraster in Auflagernähe ergibt niedrigere Abweichungen zu den tatsächlich erreichten Knicklasten.

Arbelo et al. (2015) ermitteln experimentell die Knicklast von dünnwandigen Zylindern aus einem mehrschichtigen Verbundwerkstoff, wie sie im Bereich der Luft- und Raumfahrt verwendet werden. Für die Auswertung auf Basis der Vibration Correlation Technique (VCT) werden die erste Eigenfrequenz, sowie Eigenform verwendet. Die Nutzung der ersten Mode verschiedener Laststufen zeigt von einander abweichende Knicklasten. Generell ergeben sich die geringsten Abweichungen hinsichtlich der tatsächlich erreichten Knicklast, wenn ein Lastzustand für die Analyse verwendet wird, der mindestens 50% von der tatsächlichen Knicklast erreicht.

## **2.2 Nicht-dynamische Methoden zur Bestimmung des Belastungszustands**

Die im Zuge äußerer Lasteinwirkung resultierenden inneren Stabschnittgrößen beeinflussen neben den dynamischen Systemeigenschaften, wesentlich den statischen Spannungs- und Verformungszustand eines Bauteils. Verschiedene Verfahren nutzen diese Wechselwirkung zur Bestimmung des inneren Beanspruchungszustands, welcher sowohl die Re-

aktionen auf äußere Einwirkungen, als auch die unter anderem herstellungsbedingten Eigenspannungen beinhalten kann. Weitestgehend zerstörungsfreie Methoden stammen unter anderem aus den folgenden Kategorien (vgl. Rohrbach, 1989):

- Magnetische Verfahren
- Elektrische Verfahren
- Ultraschallverfahren
- Fluidische Verfahren
- Optische Verfahren
- Röntgengraphische Verfahren

Entscheidend für die Auswahl des Verfahrens sind unter anderem die Art des Werkstoffs, die Zugänglichkeit des Bauteils und die Verfügbarkeit erforderlicher Messgeräte. Wesentlich ist auch, ob tatsächliche Beanspruchungsgrößen gefordert oder die Unterschiede zu einer Ausgangssituation gefragt sind (Rohrbach, 1989, S. 40). So kann die Anwendung von Dehnungsmessstreifen (elektrisches Verfahren) zur Differenzmessung hinsichtlich einer definierten Ausgangssituation führen, während Ultraschallverfahren ergänzende Informationen des Eigenspannungszustands aufzeigen können.

Ausführliche Beschreibungen üblicher und spezieller Methoden sowie Informationen zur Auswahl geeigneter Verfahren können Hauk (1997), Lu (1996) und Heymann und Lingner (1986) entnommen werden. Im Folgenden werden vier Methoden basierend auf den Kategorien Magnetismus, Ultraschall, Optik und Elektrizität als wichtige Anwendungs- und Forschungsbereiche in ihren Grundzügen dargestellt. Auf die Beschreibung sonstiger weitestgehend zerstörungsfreier Methoden und der heutzutage immer weniger angewendeten zerstörenden Verfahren wird verzichtet und ausschließlich auf die bereits genannte Fachliteratur verwiesen.

### **2.2.1 Magnetische Verfahren**

Ferromagnetische Materialien wie Baustähle, Bewehrungseisen oder Spannglieder weisen im Zuge einer Spannungsbelastung ein verändertes und der Beanspruchung angepasstes magnetoelastisches Verhalten auf. Diese Wechselwirkung, auch Villari-Effekt genannt, ermöglicht es, auf Grundlage magnetischer Materialeigenschaften, Aussagen über den tatsächlichen Spannungsverlauf zu treffen (vgl. Williams, 1925, S. 244). Zur Messung magnetischer Eigenschaften von Bewehrungseisen muss das Zielobjekt freigelegt und die

Oberfläche für das Messgerät vorbereitet werden. Die Messdaten stellen immer die Summe aus sowohl den herstellungsbedingten Eigenspannungen, als auch den von außen aufgebracht Systemspannungen dar. Um den Einfluss der störenden Eigenspannungen zu minimieren, kann ein Teil des äußeren Querschnitts der Bewehrungsseisen abgefräst werden (Schneider et al., 2012, S. 249). Über die Anwendung verschiedener Analyseverfahren, unter anderem des Barkhausen-Rauschens, der Überlagerungspermeabilität oder des Mehrfrequenz-Wirbelstrom-Signals, können unterschiedliche magnetische Materialparameter eines Probekörpers bestimmt werden (Gundelwein und Zellweger, 2013, S. 249). Auf Grundlage bereits eingespeister Messdaten bekannter Materialprüfungen ist es über eine Kalibrierfunktion möglich, Aussagen hinsichtlich der gesuchten Spannung zu erhalten (Schneider et al., 2012, S. 246). Gundelwein und Zellweger (2013) verwenden zur Kalibrierung ihres Messgeräts über 120 Untersuchungen eines Stahlprobekörpers. Die Messgenauigkeit ihrer Methode liegt bei der laborexperimentellen Analyse unbekannter Bewehrungsseisen bei  $\pm 100 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ . In der Kalibrierung enthaltene Proben erreichen eine Genauigkeit von  $\pm 50 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  (Gundelwein und Zellweger, 2013, S. 840). Elastomagnetische Sensoren finden darüber hinaus Anwendung bei vorgespannten Konstruktionen (J. Kim und Park, 2020) und Schrägseilen von Brückenbauwerken (Cappello et al., 2018).

## 2.2.2 Ultraschallverfahren

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Ultraschallwelle ist abhängig von den Eigenschaften des umgebenden Mediums. Dabei führt der akusto-elastische Effekt in Form eines veränderten Dehnungszustands des umliegenden Materials zu einer angepassten Ausbreitungsgeschwindigkeit (Fox et al., 2016, S. 4). Allerdings lassen sich Spannungsunterschiede über die Laufzeitdifferenzen nur feststellen, wenn das Wissen über die Ausbreitungsgeschwindigkeit in einem ursprünglich unbelasteten Zustand bekannt ist. Diese wird als Nulllastgeschwindigkeit bezeichnet und kann durch ein hier nicht näher beschriebenes Verfahren auch anhand des belasteten Systems bestimmt werden (Doktor et al., 2018, S. 2 f.). Für die Spannungsermittlung selber sind Messungen der Longitudinal- sowie der Transversalwelle des Ultraschalls an einer Stelle erforderlich. Während die Longitudinalwelle Teilchen in der Ausbreitungsrichtung bewegt, ist bei einer Transversalwelle die Schwingungsrichtung senkrecht zur Ausbreitungsorientierung (Boller et al.,

2017, S. 718). Wird dieses Verfahren auf die Spannungsermittlung von Bewehrungseisen angewendet, muss die Bewehrung zuvor freigelegt werden, sodass das Verfahren nicht vollständig zerstörungsfrei bleibt (Schneider et al., 2012).

### **2.2.3 Optische Verfahren (Faser-Brigg-Gitter-Sensoren)**

Glasfasertechnologie findet unter anderem wegen sinkender Kosten im Zuge steigender Nachfrage innerhalb der Telekommunikation vermehrt Anwendung in der Sensortechnologie (Chan et al., 2006, S. 648). So werden auch größere Brückenbauwerke verstärkt mit auf Glasfaser basierenden Faser-Brigg-Gitter-Sensoren ausgerüstet, um zeitlich kontinuierliche Informationen über Dehnungs- und Temperaturänderungen eines Bauteilquerschnitts zu erfassen. Dabei werden mithilfe von UV-Strahlung Veränderungen des Brechungsindex in einem definierten Bereich des Glasfaserkerns vorgenommen. Mit diesem Verfahren können mehrere Faser-Brigg-Gitter-Sensoren innerhalb eines Glasfaserkerns eingepreßt werden. Nach Einbau und Kalibrierung der Glasfaserleitung wird ein Eingangssignal entsandt. Der Großteil des Signals wird an den Faser-Brigg-Gitter-Sensoren transmittiert, während ein bestimmtes Spektrum des Signals reflektiert wird. Aus den für jede Messstelle individuellen Signalantworten lassen sich unter anderem die Dehnungen und daraus die Spannungen des Bauteils ableiten (Chan et al., 2006, S. 649 f.). Anwendung in der Bauindustrie finden die Faser-Brigg-Gitter-Sensoren unter anderem als Einzelglied von Seilen bei Brückentragwerken (vgl. Li et al., 2009) oder eingearbeitet in Bewehrungseisen innerhalb von Betontragwerken (vgl. Y. B. Lin et al., 2005). Da die Faser-Brigg-Gitter-Sensoren bei der Anwendung bereits während der Planung des Bauvorhabens berücksichtigt werden müssen, haben sie im Bestand eine geringe Bedeutung.

### **2.2.4 Elektrische Verfahren**

Elektrische Verfahren, wie Dehnungsmessstreifen oder induktive Wegaufnehmer, werden vielfach in der Praxis angewendet, um Dehnungen oder Verformungen von Bauteilen zu bestimmen. Die Methoden sind, wie auch die Faser-Brigg-Gitter-Sensoren aus Abschnitt 2.2.3, im Allgemeinen als Einzelstellenverfahren einzuordnen, da sie nur die Bauteilzustände einer lokalen Messstelle erfassen können. Ist genaueres Wissen über einen

größeren Bauteilbereich erforderlich, müssen mehrere Messelemente angeordnet werden oder die Messung ist mit einer neuen Anordnung der Elemente zu wiederholen. Generell lassen sich elektrische Verfahren bezüglich einer Verformungsänderung nach ihrer Wirkungsweise den folgenden drei Gruppen zuordnen (Rohrbach, 1989, S. 484 f.):

- Änderung elektrischer Schaltelemente                      z. B. Dehnungsmessstreifen
- Änderung mechanischer Bauteile                              z. B. Vibrationsaufnehmer
- Generierung elektrischer Energie                              z. B. piezoelektrische Aufnehmer

Die Änderung von elektrischen Schaltelementen erfolgt bei Verwendung von Dehnungsmessstreifen beispielshalber durch die Abhängigkeit zwischen Dehnung des Messelements und seines elektrischen Widerstands. Vibrationsaufnehmer reagieren dagegen mit der Längenänderungen einer integrierten Saite und piezoelektrische Aufnehmer generieren eine Spannung im Zuge von Verformungen. Dehnungsmessstreifen zählen zu den beliebtesten Verfahren, den Verformungszustand eines Bauteils zu bewerten und werden nicht nur unter Laborbedingungen, sondern unter bestimmten Voraussetzungen und ausgewählten Schutzmaßnahmen ebenso für ein längerfristiges Monitoring eingesetzt (vgl. Anderegg et al., 2018; Herrmann et al., 2015). Zentrales Element des Dehnungsmessstreifens ist ein Messgitter, welches durch eine nichtleitende Träger- und Abdeckungsfolie geschützt ist. Wird das Messgitter gedehnt, verändert sich sein elektrischer Widerstand  $R$  proportional zur Dehnung  $\varepsilon$  mit Berücksichtigung eines für jeden Dehnungsmessstreifens definierten Kalibrierfaktor  $k_{DMS}$  (Kuttner, 2015, S. 141 f.).

$$\frac{\Delta R}{R} = k_{DMS} \cdot \varepsilon \quad (2.4)$$

Dehnungsmessstreifen sind in verschiedensten Formen und für unterschiedlichste Oberflächen und Umweltbedingungen verfügbar. Neben der vielseitigen Verwendbarkeit, profitiert der Anwendende von dem geringen Platzbedarf, der kleinen Masse sowie einer hohen Genauigkeit (Rohrbach, 1989, S. 485). Im Zuge der Forschungsarbeit werden Dehnungsmessstreifen zur laborexperimentellen Verifikation der Normalkraftzustände verwendet (vgl. Kapitel 5).

## 2.3 Zusammenfassung und Motivation

Unterschiedliche Methoden existieren, Seil- und Stabelemente hinsichtlich ihrer Lagerungsbedingungen, Steifigkeiten und Einwirkungen experimentell zu definieren. Dabei unterscheiden sich die Instrumente maßgeblich in ihrer Anwendbarkeit. Für einen Teil der Verfahren müssen die Messinstrumente bereits während der Bauphase berücksichtigt werden, wie unter anderem Faser-Brigg-Gitter-Sensoren und Dehnungsmessstreifen. Beide Verfahren sind indirekte Methoden der Spannungs- und Normalkraftermittlung basierend auf der Dehnung einer Ausgangssituation. Auch wenn diese Verfahren meistens genaue Ergebnisse erzielen, haben die Methoden aufgrund der fehlenden Kenntnis gegenüber der Nulllastsituation im Wesentlichen keine Bedeutung für Bestandsbauwerke. Nichtsdestotrotz können vor allem Dehnungsmessstreifen für eine längerfristige Beobachtung im Bestandsbau eingesetzt werden, um relative Veränderungen der Bausubstanz bzw. des Tragverhaltens messtechnisch zu erfassen. Alternative Methoden zur Spannungsmessung, wie ultraschallbasierte und magnetische Verfahren, führen aufgrund von anstehenden Eigenspannungen und Texturen zu größeren Abweichungen, verglichen zu den tatsächlichen Spannungen (vgl. Gundelwein und Zellweger, 2013).

Strukturdynamische Methoden zur Identifikation von Kräften in Seilkonstruktionen werden dagegen seit vielen Jahrzehnten angewendet und können heute Messgenauigkeiten in einem Bereich von wenigen Prozent erzielen. Diese weitestgehend zerstörungsfreien und kostengünstigen Verfahren haben die Kontrolle und Inspektion von Seilkonstruktionen vereinfacht und sind regelmäßiger Bestandteil heutiger Seilprüfungen. Auch für Stabelemente größerer Querschnittssteifigkeit, wie Zug- und Druckstäbe, stehen verschiedene Verfahren zur Verfügung. Die methodischen Ansätze stellen häufig ein ganzheitliches Systemanalyseverfahren dar und ermitteln nicht nur Stabkräfte, sondern identifizieren ebenfalls Lager- bzw. Querschnittssteifigkeiten. Der Großteil bestehender Methoden basiert auf der Optimierung eines Ausgangsmodells durch nichtlineare bzw. genetische Algorithmen (vgl. Ding et al., 2020; Lagomarsino und Calderini, 2005). Vereinzelt werden aber auch analytische Lösungsverfahren zur direkten und isolierten Bestimmung einzelner Parameter vorgestellt (vgl. Rebecchi et al., 2013; Tullini und Laudiero, 2008). Ein wichtiger anwendungsbezogener Unterschied zwischen den einzelnen Verfahren besteht darin, welche modalen Eigenschaften für die Anwendung experimentell erfasst werden

müssen. Dies ist grundsätzlich abhängig von der Anzahl der zu optimierenden Systemparameter und unterscheidet sich maßgeblich von der Modellierung des Basismodells. Wird zum Beispiel ein Verfahren gewählt, bei dem die Auflager als beidseitig identische Drehfederkonstanten gewählt und die Querschnittssteifigkeit als bekannt vorausgesetzt wird, können zwei Eigenfrequenzen alleine ausreichen, um die zwei Unbekannten, bestehend aus der Drehfedersteifigkeit und der Normalkraftbeanspruchung, zu ermitteln (vgl. Livingston et al., 1995). Werden die Drehfederkonstanten dagegen getrennt betrachtet und zwei Wegfedern zur Idealisierung der Randbedingungen ergänzt, benötigt man in der Regel neben dem Eigenfrequenzverlauf zusätzliche Informationen über die Eigenformen, um alle Unbekannten zu definieren (vgl. H. T. Luong et al., 2017). Für die Unterscheidung der Verfahren ist wesentlich, inwiefern die Querschnittssteifigkeit als bekannt vorausgesetzt wird oder durch den Optimierungsprozess zusätzlich bestimmt werden soll.

Die Ergebnisse bisheriger Laboruntersuchungen zeigen gute Übereinstimmungen mit den tatsächlich aufgebrachten Normalkräften und demonstrieren das große Potential, die Methoden langfristig in der Baupraxis zu etablieren. Dennoch ist die Menge experimenteller Daten, speziell hinsichtlich auf Druck beanspruchter Stabelemente, weiterhin gering. Um den strukturdynamischen Verfahren einen Zugang zur realen Anwendung zu ermöglichen, sind zusätzliche Forschungsergebnisse hinsichtlich der großen Diversität an Profiltypen, Systemlängen und Auflagekonstruktionen zu erzielen. Dabei ist die realitätsnahe Auswertung von druckbeanspruchten Stäben durch das Auftreten eines möglichen Stabilitätsversagens von besonderem Interesse. Die Berechnung von Stabilitätseigenschaften durch den Ansatz experimenteller Messdaten bietet weitreichende Potentiale im Bereich der theoretischen Modellanpassung. Genaue Tragwerksinformationen im Zuge statischer Berechnungen sorgen dafür, unklare Tragwerkssteifigkeiten zu vermeiden, Tragwerksverhalten bei Umnutzungen detaillierter abschätzen zu können und rechnerische Tragfähigkeitsreserven ausfindig zu machen. Vor allem die Analyse und Bewertung von Anschluss- und Übergangsteifigkeiten hat einen erheblichen Einfluss auf die Stabilitätseigenschaften und muss wesentlich stärker in den Fokus moderner Forschungsarbeiten gerückt werden.

Diese Abhandlung stellt ein Verfahren zur Systemidentifikation vor, welches auf Grundlage der modalen Parameter Eigenfrequenz und Eigenform die Ermittlung sowohl der

Anschlusssteifigkeiten, bestehend aus beidseitig unabhängigen Weg- und Drehfedern, als auch der Normalkraftbeanspruchung ermöglicht. Dabei steht der Fokus des Verfahrens in der Anwendung auf druckbeanspruchte Stabelemente. Ein Großteil bisheriger Forschungsarbeiten beschäftigt sich mit der Auswertung vorwiegend schlanker massiver Stahlstäbe, welche bei druckbeanspruchten Tragelementen aufgrund der geringen Biegesteifigkeit üblicherweise nicht zum Einsatz kommen. Daher befasst sich diese Arbeit mit der Auswertung nicht-massiver Stahlprofile unterschiedlicher Schlankheiten. Bisherige Forschungen vergleichen die ermittelten Normalkräfte mit alternativen Verfahren, wie Kraftmessdosen oder Dehnungsmessstreifen. Ein Abgleich der optimierten Auflagersteifigkeiten erfolgt nur in Ausnahmefällen (vgl. Ding et al., 2020). Diese Forschungsarbeit vergleicht alle aus dem Identifikationsverfahren optimierten Systemparameter mit alternativen Methoden. Darüber hinaus werden die Ergebnisse der Systemidentifikation nicht ausschließlich mit den modalen Eigenschaften, erzeugt durch einen Impulshammer, sondern ebenso mit den Ergebnissen, ermittelt durch einen elektromagnetischen Schwingungserreger, verglichen. Dies ermöglicht eine Reliabilitätsprüfung des Impulshammers und erhöht die Sicherheit der laborexperimentellen Validierung.

Das in dieser Arbeit vorgestellte dynamische Verfahren zur Systemidentifikation definiert durch den Ansatz experimentell ermittelter modaler Parameter unbekannte Eigenschaften vorhandener statischer Systeme. Die Kenntnis über experimentelle Lagersteifigkeiten und Normalkrafteinwirkungen ermöglicht eine realitätsnahe Nachweisführung. Das Bestreben dieser Abhandlung liegt darin, konstruktive Tragreserven von bestehenden Druckstäben zu klären, die ursprünglich als Pendelstäbe mit beidseitig gelenkiger Lagerung idealisiert wurden. Die Aufstockung von Tragwerken und die Neuberechnung mit erhöhten Lastbeanspruchungen kann durch den Ansatz realer Stabilitätseigenschaften in Form von reduzierten Knicklängen ohne oder mit begrenzten Verstärkungsmaßnahmen realisiert werden. Darüber hinaus ermöglicht die Kenntnis tatsächlich einwirkender Normalkraftzustände, eine experimentell abgeleitete Analyse der real anstehenden Belastungen. Nicht nur die Information und Warnung bei Überschreitung kritischer Lasten, sondern ebenfalls die Kenntnis üblicher Lastansätze, kann zukünftig Tragfähigkeitsreserven hinsichtlich reduzierter Sicherheitsbeiwerte der Lastseite ermöglichen.

# **3 Systemidentifikation von Druckstäben auf Basis der modalen Schwingungseigenschaften**

Diese Arbeit befasst sich damit, die Systemeigenschaften eines druckbeanspruchten Stabs im Betriebszustand zu erfassen und die experimentellen Daten anschließend für die Nachweisführung heranzuziehen (s. Abschnitt 1.4). Es wird ein dynamisches Verfahren zur Systemidentifikation vorgestellt, welches auf Basis der messtechnischen Ermittlung der ersten Eigenkreisfrequenz und korrespondierenden Eigenform die Lagerungsbedingungen sowie die Normalkraftbeanspruchung eines Druckstabs definiert. Aus den Lagersteifigkeiten kann anschließend die Knicklänge abgeleitet und zusammen mit der Normalkraft für einen Stabilitätsnachweis nach dem Ersatzstabverfahren verwendet werden. Im Zuge der experimentellen Arbeit erfolgt die Untersuchung verschiedener Prüfkörper.

Abschnitt 3.1 stellt die Arbeitshypothesen vor. Anschließend beschreibt Abschnitt 3.2 das methodische Vorgehen, bestehend aus drei Phasen von der Entwicklung eines theoretischen Modells zur Systemoptimierung über die laborexperimentellen Untersuchungen bis hin zur Anwendung des vorgestellten Verfahrens an einem realen Tragwerk. Wesentliche Grundlagen der mathematischen Optimierung werden in Abschnitt 3.3 vorgestellt. Für die Anwendung des Verfahrens ist die fachgerechte Ermittlung der modalen Eigenschaften des Tragwerks von wesentlicher Bedeutung. Die Grundlagen der theoretischen und experimentellen Modalanalyse werden in Abschnitt 3.4 dargestellt. Abschließend stellt Abschnitt 3.5 grundlegende Informationen hinsichtlich der in dieser Forschungsarbeit angewandten Programmiersprache bereit.

## 3.1 Arbeitshypothesen

In Anlehnung an die Forschungsfragen aus Abschnitt 1.4 werden die Arbeitshypothesen für druckbeanspruchte Prüfkörper aus Stahl wie folgt definiert:

- Die modalen Parameter Eigenkreisfrequenz und Eigenform eines planmäßig geraden Stabs sind abhängig von
  - der Querschnittssteifigkeit eines Druckstabs.
  - der Massenverteilung eines Druckstabs.
  - den Lagerungsbedingungen eines Druckstabs.
  - der Normalkraftbeanspruchung eines Druckstabs.
- Das vorgestellte Verfahren zur Systemidentifikation auf Basis der modalen Parameter ermöglicht die Extraktion der Normalkraftbeanspruchung eines Druckstabs.
- Je näher die Druckkraft an der Eulerschen Knicklast eines Stabs liegt, desto genauer ist die Bestimmung der Normalkraftbeanspruchung.
- Das vorgestellte Verfahren zur Systemidentifikation auf Basis der modalen Parameter ermöglicht die Extraktion der Lagerungsbedingungen eines Druckstabs.
- Aus den dynamisch ermittelten Lagerungsbedingungen lässt sich die statische Knicklänge für den Stabilitätsnachweis ableiten.
- Die Werte der optimierten Lagerungsbedingungen und der optimierten Normalkraftbeanspruchung sind unabhängig von der Anregekraft im Zuge der Modalanalyse.
- Durch die Erfassung der realen Systemeigenschaften eines Druckstabs kann die Tragfähigkeit im Vergleich zu einem rein theoretisch geführten Nachweis erhöht werden, wenn der Druckstab in der ursprünglichen statischen Berechnung als Pendelstab mit beidseitig gelenkiger Lagerung idealisiert wurde.

Die Arbeitshypothesen werden im Verlauf der Abhandlung aufgegriffen und mit der Unterstützung theoretischer Betrachtungen oder laborexperimenteller Versuche erörtert.

## 3.2 Methodisches Vorgehen in drei Phasen

Das methodische Vorgehen zur Erarbeitung des dynamischen Verfahrens zur Systemidentifikation besteht aus drei wesentlichen Phasen von der theoretischen Entwicklung eines Identifikationsverfahrens (Phase I, Kapitel 4) über die laborexperimentelle Validierung (Phase II, Kapitel 5) bis hin zur Anwendung an einem realen Tragwerk (Phase III, Kapitel 6). Die Phasen und ihre Zusammenhänge sind in Abbildung 3.1 dargestellt und werden im Folgenden näher erläutert.

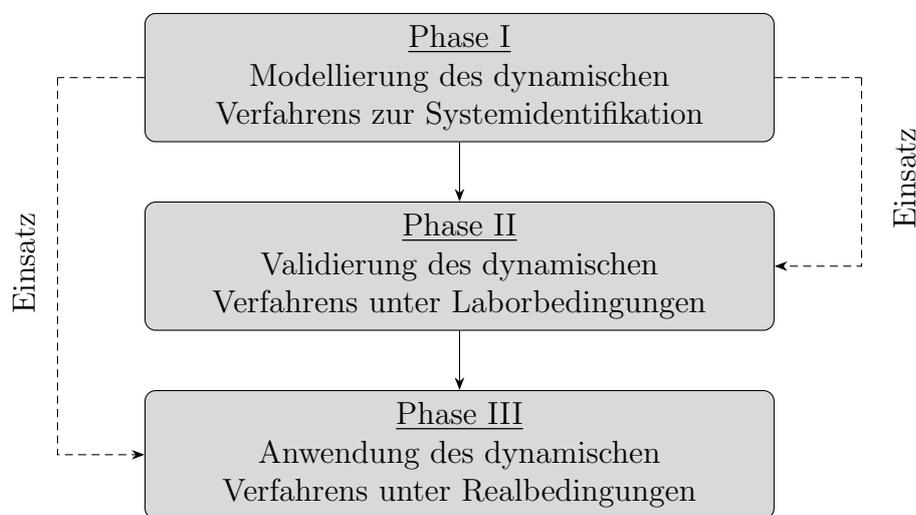


Abbildung 3.1: Methodisches Vorgehen in drei Phasen

**Phase I (Kapitel 4)** Grundlage dieser Arbeit ist die Erstellung eines programm-basierten Verfahrens zur Systemidentifikation in Phase I, welches nach experimenteller Ermittlung der modalen Parameter die Berechnung der Auflagersteifigkeiten sowie der Normalkraftbeanspruchung ermöglicht. Ausgang dieses Programms ist ein theoretischer Basisstab, der über die Eingabe verschiedener Systemeigenschaften, wie Systemlänge und Querschnitts- sowie Lagersteifigkeiten, die Berechnung der modalen Parameter des Stabs, bestehend aus der Eigenkreisfrequenz und Eigenform, ermöglicht. Verschiedene Ansätze für die Wahl eines Ausgangsmodells werden in Abschnitt 2.1 beschrieben und unterscheiden sich maßgeblich darin, ob die jeweiligen Stabenden ausschließlich mit Drehfedern oder ergänzend mit Wegfedern modelliert werden. Die vollständige Einspannung für transver-

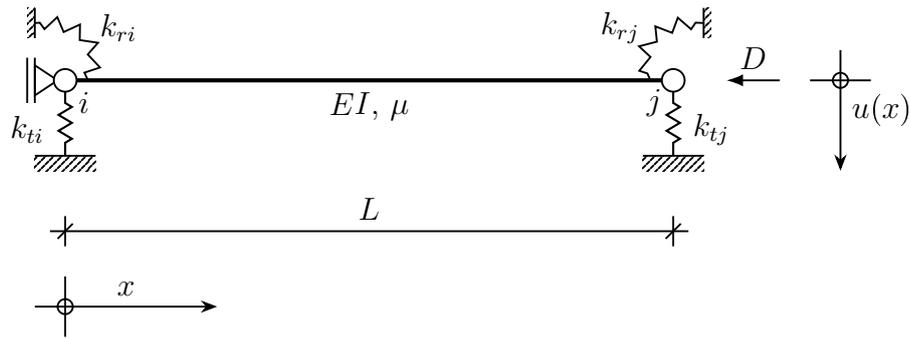


Abbildung 3.2: Basisstab für das dynamische Verfahren zur Systemidentifikation

sale Verschiebungen an den Stabenden ist ein rein theoretisches Modell, welches nur in speziellen Einzelfällen zu sinnvollen Ergebnissen führt. In dieser Arbeit wird ein ganzheitliches Verfahren zur Systemidentifikation angestrebt, das eine breite Anwendung der Methodik ermöglicht. Aus diesem Grund wird ein Basisstab mit beidseitig unabhängigen Weg- und Drehfederkonstanten nach Abbildung 3.2 gewählt. Grundlage des Modells ist der kontinuierliche Euler-Bernoulli-Balken ohne Berücksichtigung von Schubsteifigkeiten. Der Basisstab besteht aus der Systemlänge  $L$ , der konstanten Massenverteilung  $\mu$  und der Querschnittssteifigkeit  $EI$  sowie der über die gesamte Länge  $L$  konstanten Druckkraftbeanspruchung  $D$ . Die Lagerungsbedingungen vervollständigen mit den Wegfederkonstanten  $k_{ti}$  und  $k_{tj}$  sowie den Drehfederkonstanten  $k_{ri}$  und  $k_{rj}$  das theoretische Modell für die Berechnung der ersten Eigenkreisfrequenz  $\omega_1$  und Eigenform  $\Psi_1$ .

Das rechnerische Basismodell wird anschließend in einen Optimierungsprozess integriert, welcher durch Variation der gesuchten Eingangsparameter  $k_{ti}$ ,  $k_{tj}$ ,  $k_{ri}$ ,  $k_{rj}$  und  $D$  die bestmögliche Annäherung an die erste Eigenkreisfrequenz  $\omega_{ex,1}$  und Eigenform  $\Psi_{ex,1}$  einer experimentellen Modalanalyse ermittelt. Die Massenverteilung  $\mu$  sowie die Querschnittssteifigkeit  $EI$  sind nicht Teil der Optimierung und werden sinnvoll gewählt. Die Suche nach einem, zu den tatsächlich gemessenen modalen Parametern optimalen theoretischen Vergleichsmodell, ist bei fünf zu optimierenden Eingangsparametern händisch mit erheblichen Aufwand verbunden. Ein mathematischer Optimierungsalgorithmus wird definiert, der die Arbeit des Anpassungsprozesses beschleunigt. Dazu wird ein evolutionärer Algorithmus auf Basis der Partikelschwarm-Theorie in Kombination mit einer Abweichungsfunktion, bestehend aus rechnerischen und tatsächlichen Schwingungseigen-

schaften, verwendet. Zur Realisierung des Basisstabs und der anschließenden Systemidentifikation in einem computergestützten Programm wird die freie Programmiersprache R verwendet (s. R Core Team, 2020).

Für die laborexperimentelle Validierung des dynamischen Verfahrens zur Systemidentifikation werden die optimierten und gewählten Systemeigenschaften mit alternativen Methoden ermittelt und validiert. So hilft eine Kraftmessdose dabei, die tatsächlich aufgetragenen Normalkraftbeanspruchungen  $D$  zu bestimmen. Das Gewicht und die daraus abgeleitete Massenverteilung  $\mu$  wird mithilfe einer Waage messtechnisch ermittelt. Für den Vergleich der Weg- und Drehfedersteifigkeiten  $k$  sowie der Querschnittssteifigkeit  $EI$  wird ein zusätzlicher statischer Belastungsversuch durchgeführt. Dazu wird in Phase I neben dem dynamischen, ergänzend ein statisches Verfahren zur Systemidentifikation auf Grundlage einer messtechnisch ermittelten Kraft-Verformungs-Kurve entwickelt. Abbildung 3.3 illustriert den durchgeführten Drei-Punkt-Biegeversuch schematisch. Der abgebildete Euler-Bernoulli-Balken verfügt, wie bei dem dynamischen Verfahren, über insgesamt vier Dreh- und Wegfederungen  $k$  an beiden Enden. Die Angabe der Massenverteilung ist für die Auswertung der statischen Biegelinie nicht erforderlich. Das statische Verfahren zur Systemidentifikation wird ohne Normalkraftbeanspruchung durchgeführt und ermöglicht die Ermittlung der Auflagersteifigkeiten  $k$  sowie der Querschnittssteifigkeit  $EI$  in einem normalkraftfreien Zustand. Das statische Verfahren zur Systemidentifikation wird mit der Programmiersprache R (s. R Core Team, 2020) in ein Programm überführt.

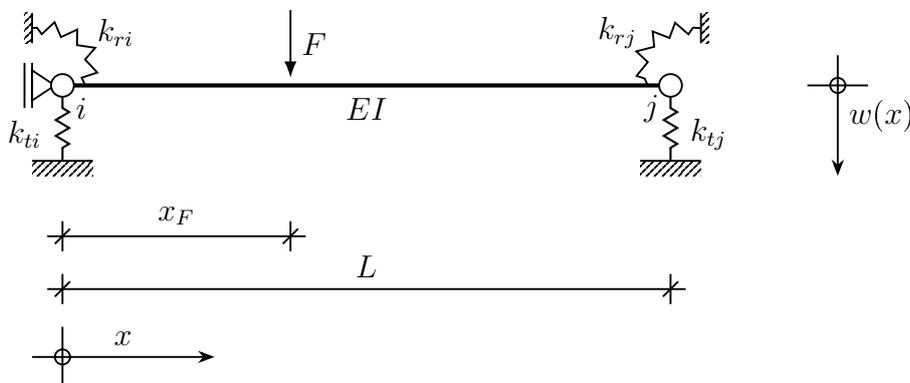


Abbildung 3.3: Basisstab für das statische Verfahren zur Systemidentifikation

**Phase II (Kapitel 5)** Das dynamische Verfahren zur Systemidentifikation aus Phase I wird in Phase II mithilfe experimenteller Laboruntersuchungen verifiziert. Anhand von Stahlprofilen üblicher Querschnitts- und Systemabmessungen wird die Aussagekraft der Methode geklärt. Es werden fünf Hohlprofile aus Stahl mit rechteckigem Querschnitt unterschiedlicher Nenngrößen und vier verschiedenen Auflagerbedingungen geprüft. Alle Profile werden ausschließlich in schwacher Querschnittsrichtung untersucht, um ein eindeutiges Knickverhalten für die Durchführung der Laborversuche zu gewährleisten. Insgesamt stehen aus den Profilen und Auflagerbedingungen 20 Prüfkörper zur Verfügung, die jeweils auf Basis der experimentell ermittelten Maximallast mit einer unterschiedlichen Anzahl von Laststufen beansprucht werden. Die Prüfkörper haben eine Systemlänge von maximal 2,545 m und werden mit bis zu 180 kN belastet. Um die dynamisch optimierten Lagerungsbedingungen  $k$  und die gewählte Querschnittssteifigkeit  $EI$  auf ihre Plausibilität hin zu überprüfen, wird zusätzlich ein statischer Drei-Punkt-Biegeversuch durchgeführt. Ohne Normkrafteinwirkung werden Vergleichswerte für die Federsteifigkeiten der Auflagerbedingungen ermittelt, welche auf Basis des Knicklängenbeiwerts die Werte aus dem dynamischen Versuch validieren. Während der Laborversuche werden die modalen Systemeigenschaften durch einen Impulshammer ermittelt. Zur Validierung der Ergebnisse werden vereinzelte Versuche mithilfe eines elektrodynamischen Schwingungserregers (Shaker) durchgeführt.

**Phase III (Kapitel 6)** Das entwickelte und im Labor experimentell verifizierte dynamische Verfahren zur Systemidentifikation soll in Phase III an einem realen Tragwerk angewendet werden. Anhand von ursprünglich als Pendelstab idealisierten Druckstäben wird die Anwendbarkeit und der Nutzen der Methode geprüft. Der Einsatz des Verfahrens erfolgt an fünf Stützen einer Reihe von einhüftigen Rahmen. Die Konstruktion dient der Unterstützung eines Abluftrohrs und einem daran angeschlossenen Laufsteg. Nach Ermittlung der Schwingungseigenschaften, erfolgt die Bestimmung der Knicklänge sowie der Normkraftbeanspruchung mit dem dynamischen Verfahren zur Systemidentifikation. Ein Vergleich zur ursprünglichen Nachweisführung deckt die Differenzen zwischen der statischen Berechnung einer klassischen Modellbildung und der entsprechenden Nachweisführung mit experimentell ermittelten Systemeigenschaften auf.

## 3.3 Grundlagen der mathematischen Optimierung

Die Idealisierung von Tragstrukturen dient dazu, statische und dynamische Systeme rechnerisch abzubilden und die inneren Reaktionen ermitteln zu können. Ziel ist es, dass die entsprechenden Systemreaktionen normgebundene bzw. individuell festgelegte Grenzwerte einhalten oder einen bestimmten Wert annehmen. Die Erfüllung dieser Kriterien ist häufig über eine Veränderung und die dahin gehende Optimierung der Eigenschaften eines statischen oder dynamischen Ausgangsmodells verbunden. Abschnitt 3.3.1 stellt das Grundprinzip eines allgemeinen Optimierungsprozesses vor. Anschließend wird in Abschnitt 3.3.2 die mathematische Zielfunktion näher beschrieben. In Abschnitt 3.3.3 werden ausgewählte analytische und numerische Lösungsansätze eingeführt.

### 3.3.1 Grundprinzip der Optimierung

Das rechnerische Modell eines realen oder zu planenden Tragwerks besteht aus einer Vielzahl von unterschiedlichen Parametern. Dazu zählen neben den Tragwerkeigenschaften, wie Systemlängen und Querschnittssteifigkeiten, auch die äußeren Einwirkungs- und Lastansätze. Sie alle dienen dazu, das Verhalten der Tragstruktur digital abzubilden, rechnerische Untersuchungen durchzuführen und, im Bauwesen ganz wesentlich, eine Nachweisführung der Tragfähigkeit wie auch der Gebrauchstauglichkeit zu ermöglichen. Die Systemparameter bilden ein theoretisches Tragwerksmodell, welches im Zuge von Einwirkungs- und Lastansätzen definierter Größe, Position und Form bestimmte Reaktionen, wie Verformungen, Materialspannungen oder Schwingungseigenschaften, erwidert. Diese Reaktionen obliegen planerischen Anforderungen; so sollen bestimmte Werte minimiert bzw. maximiert werden oder andere Reaktionen einen festgelegten Zielwert annehmen bzw. sich bestmöglich diesem Wert annähern.

Das Anpassen der Systemparameter eines Ausgangsmodells ermöglicht, die Zielvorgaben entweder vollständig oder mindestens für die Anwendung zufriedenstellend zu treffen. Dabei ist es nicht möglich, eine perfekte Lösung für jedes Einzelziel zu erfüllen, da Anpassungen für ein bestimmtes Kriterium eine gegensätzliche Wirkung auf ein anderes Ziel haben können. Führt die Stärkung der Profile zu einer höheren Steifigkeit und damit einer üblicherweise geringeren Verformung, kann sie gleichzeitig stärkere Zwängungen

und als Folge höhere Auslastungen verursachen. Alles in allem ist es die Intention der Optimierung, eine für jedes Einzelziel verträgliche und funktionstüchtige Lösung zu definieren. In der mathematischen Optimierung wird auch von dem Bestreben nach einer bestmöglichen Verbesserung, welche fortan als Optimum bzw. optimale Lösung bezeichnet wird, gesprochen (Dittes, 2015, S. 1; Pieper, 2017, S. 1). Zur Lösung eines Optimierungsproblems stehen direkte analytische Berechnungsmethoden oder numerisch iterative Algorithmen zur Verfügung (Kapitel 3.3.3). In der mathematischen Optimierung werden die Modellparameter als Entwurfsvariablen und die Reaktionen als Zustandsvariablen bezeichnet (Schumacher, 2020, S. 6). Der Ablaufplan eines iterativen Optimierungsprozesses ist schematisch in Abbildung 3.4 dargestellt. Grundlage ist ein Analysemodell, welches die Entwurfsvariablen als Eingangsparameter erfordert und Zustandsvariablen als Ausgabewerte definiert. Das theoretische Analysemodell kann sowohl aus der Auswertung eines analytischen Ansatzes, einer FE-Berechnung oder einer aus vorhandenen Datenpunkten erstellten Approximation entstehen. Wesentlich ist zu klären, welche Entwurfsvariablen, welche Auswirkungen auf das Analysemodell besitzen (Schumacher, 2020, S. 2). Der erste Schritt des in Abbildung 3.4 dargestellten iterativen Optimierungsprozesses

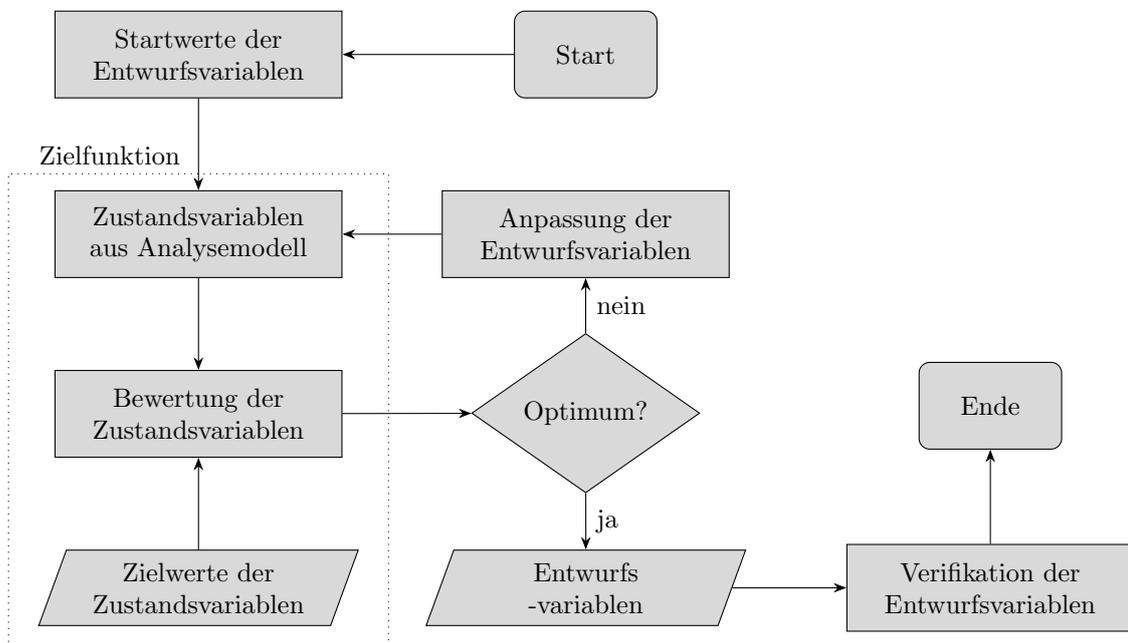


Abbildung 3.4: Schematischer Ablaufplan einer iterativen Prozessoptimierung in Anlehnung an Schumacher (2020, S. 3)

zesses definiert die Entwurfsvariablen als Startwerte, mit welchen das Analysemodell temporäre Zustandsvariablen ermittelt. Die Zustandsvariablen basieren auf dem rechnerischen Ansatz, und die zuvor als Zielwerte festgelegten Zustandsvariablen werden über einen numerischen Vergleich in Form einer Zielfunktion bewertet. Die Zielfunktion ist eingebettet in einen Optimierungsalgorithmus, welcher die Entwurfsvariablen so lange variiert, bis das bestmögliche Resultat, das globale Optimum, erzielt wird. Eine abschließende Plausibilitätskontrolle der ausgegebenen Entwurfsvariablen schließt den Optimierungsprozess ab. Im Bauwesen werden grundlegend zwei Optimierungsprobleme im Sinne der theoretischen Modellidealisation unterschieden:

- **Planung eines zu errichtenden Tragwerks**

Die Planung eines Bauvorhabens obliegt unterschiedlichen Zielvorgaben, wie eine materialsparende Bauweise, eine geringe Verformbarkeit oder das Erreichen einer bestimmten Geometrie (Zustandsvariablen). Die variablen Modelleigenschaften (Entwurfsvariablen) sind so zu optimieren, dass eine bestmögliche Lösung für alle Zustandsvariablen erreicht wird (vgl. Timár und Horváth, 2017; Baandrup et al., 2020). Während der Planung können die Ziele angepasst und gewichtet werden, sodass bestimmte Vorgaben einen höheren Stellenwert erlangen.

- **Systemidentifikation eines vorhandenen Tragwerks**

Im Bestandsbau können die Modelleigenschaften (Entwurfsvariablen) häufig nur unzulänglich idealisiert werden. Die Messung von tatsächlichen Zuständen wie Verformungen (Zustandsvariablen) kann eine inverse Ermittlung der realen Systemparameter (Entwurfsvariablen) ermöglichen. Die Differenz zwischen den Zustandsvariablen eines rechnerischen Analysemodells und der tatsächlichen Messung ist soweit zu reduzieren bis ein optimales digitales Ebenbild gefunden wird. Dies erlaubt neben der generellen Beurteilung des Tragwerks ebenso die Simulation bei anstehenden Strukturveränderungen. Die Optimierung von Entwurfsvariablen hin zu einer bestmöglichen Übereinstimmung der theoretischen und realen Zustandsvariablen, wird auch als Model Updating bezeichnet (vgl. Link, 1999; J. Lin et al., 2018). Das Model Updating ist wesentlicher Bestandteil der vorliegenden Arbeit.

### 3.3.2 Zielfunktion

Das theoretische Analysemodell umfasst alle für die Zustandsvariablen beeinflussenden Tragwerkseigenschaften sowie Einwirkungen und ist durch den konsequenten Aufruf in jedem Optimierungsschritt ein zentraler Baustein der Modellverbesserung. Ist eindeutig festzustellen, dass die Entwurfsvariablen jeweils unterschiedliche Einflüsse auf die Zustandsvariablen besitzen und eine ausreichend große Unabhängigkeit herrscht, können die rechnerischen Zustandsvariablen mit den gewünschten Zielvariablen mathematisch formal abgeglichen werden. Ein numerisches Bewertungskriterium zwischen den Zustandsvariablen, die vorgegeben bzw. rechnerisch erzielt werden, ist erforderlich, um den Einfluss einer Veränderung der Entwurfsvariablen rechnerisch abbilden zu können. Der Abgleich erfolgt meistens über eine Zielfunktion  $f$ , die den Unterschied zwischen gewünschten und errechneten Zustandsvariablen als Zahlenwert ausgibt und so eine numerische Bewertung ermöglicht. Dabei können die Entwurfsvariablen vordefinierten Randbedingungen unterliegen. So dürfen die Fachwerkträger einer Brückenkonstruktionen eine bestimmte Länge nicht unterschreiten, während die Materialspannungen einen festen Wert nicht überschreiten dürfen. Optimierungsprozesse mit bzw. ohne Randbedingungen werden auch als restringierte bzw. unrestringierte Optimierungsprobleme bezeichnet (Pieper, 2017, S. 12). Sowohl die Zielfunktion  $f(\vec{x})$ , die Gleichungsnebenbedingungen  $c_i(\vec{x})$  und die Ungleichungsnebenbedingungen  $h_j(\vec{x})$  sind abhängig von den Entwurfsvariablen ausgedrückt in dem Vektor  $\vec{x}$ . Das entsprechende Gleichungssystem kann allgemein formuliert werden durch (Papageorgiou et al., 2012, S. 11):

$$\text{Zielfunktion :} \quad f(\vec{x}) \quad \vec{x} \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

$$\text{Nebenbedingungen :} \quad c_i(\vec{x}) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, l \quad c \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

$$h_j(\vec{x}) \leq 0 \quad \forall j = 1, \dots, m \quad h \in \mathbb{R} \quad (3.3)$$

Der Optimierungsprozess kann sowohl auf die Maximierung, als auch auf die Minimierung des Funktionswerts der Zielfunktion angesetzt sein. Letzteres ist in der mathematischen Optimierung gängige Praxis (Pieper, 2017, S. 12), sodass zu maximierende Zielfunktionen mit dem Dualitätsprinzip häufig zu einem Minimierungsproblem transformiert werden

(Grimme und Bossek, 2018, S. 2 f.):

$$\max f(\vec{x}) = -\min(-f(\vec{x})) \quad (3.4)$$

Diese Arbeit befasst sich mit der Minimierung einer Zielfunktion (s. Abschnitt 4.1.2.1), sodass fortan ausschließlich Minimierungsprobleme thematisch angesprochen werden. Die Zielfunktion wird bezogen auf das Model Updating auch als Fehlerfunktion bzw. Abweichungsfunktion bezeichnet. Daraus abgeleitet ergibt sich der Funktionswert für  $f(\vec{x})$  zu dem Residuum des Optimierungsproblems (Magnus et al., 2016, S. 299).

Zur Ermittlung des Optimums einer Zielfunktion  $f(\vec{x})$  stehen diverse analytische Verfahren und näherungs-basierte Optimierungsalgorithmen zur Verfügung. Zur Wahl eines geeigneten Verfahrens ist die Kategorisierung zwischen linearen und nichtlinearen Optimierungsproblemen erforderlich. Ein lineares Problem liegt vor, wenn sämtliche Entwurfsvariablen als Summanden in der ersten Potenz auftreten:

$$f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (3.5)$$

Können die Entwurfsvariablen ausschließlich natürliche Zahlen annehmen, wird auch von einem ganzzahligen linearen Optimierungsproblem gesprochen. Zielfunktionen, die Entwurfsvariablen mit von eins abweichender Potenzen aufweisen bzw. mit anderen nichtlinearen Termen auftreten, werden als nichtlineare Optimierungsprobleme bezeichnet (Grimme und Bossek, 2018, S. 9 f.).

Zur Bearbeitung von Optimierungsproblemen können in der Praxis mehrere Ziele und daraus abgeleitet auch mehr als eine Zielfunktion definiert sein. So soll für ein zu errichtendes Tragwerk der Querschnitt des Bauteils möglichst gering, die Biegesteifigkeit aber möglichst groß sein. Ein häufig angewendetes Verfahren ist die Kombination beider Funktionen zu einer gewichteten Gesamtzielfunktion  $g$ . Die einzelnen Zielfunktionen  $f_i$  werden dabei mit abweichenden Wichtungen  $w_i$  gewertet:

$$g(\vec{x}) = \sum_{i=1}^k \omega_i f_i(\vec{x}) \quad (3.6)$$

Das Optimum dieser mehrkriteriellen Optimierung wird auch als Pareto-optimale Lösung

bezeichnet (Pieper, 2017, S. 45 f.). Aufwendigere Methoden, welche mehrere Zielfunktionen in einem Optimierungsprozess getrennt behandeln, ergeben die Paretomenge und können in diverser Fachliteratur eingehend studiert werden (vgl. Ehrgott, 2005; Eschenauer et al., 1990). Die Ausführungen dieser Abhandlung beziehen sich auf die Behandlung einer einzelnen Zielfunktion (vgl. Abschnitt 4.1.2.1 und Abschnitt 4.2.2.1).

### 3.3.3 Lösungsverfahren

Für die Ermittlung einer optimalen Lösung müssen die Extremwerte der Zielfunktion  $f$  bestimmt werden. Entscheidend ist dabei nicht nur die Ermittlung eines einzelnen lokalen Minimums, sondern die Suche nach dem globalen Minimum, wie es das Beispiel der Zielfunktion in Gleichung 3.7 demonstriert:

$$\min f(x) = (x - 5)^4 - 4(x - 5)^2 - x + 11 \quad (3.7)$$

Die hier nicht näher beschriebene Zielfunktion ist eindimensional und als Minimierungsproblem formuliert. Sie soll in einem Wertebereich von 2,5 bis 7,5 untersucht werden, sodass sich für die mathematische Darstellung des Optimierungsproblems zusätzlich zwei Ungleichungsnebenbedingungen nach der in Gleichung 3.3 dargestellten Form ergeben:

$$h_1(x) = -x + 2,5 \leq 0 \quad (3.8)$$

$$h_2(x) = x - 7,5 \leq 0 \quad (3.9)$$

Für ein- bzw. zweidimensionale Systeme ist eine graphische Darstellung hilfreich, um das Grundgerüst des Optimierungsproblems besser zu verstehen. Abbildung 3.5 illustriert den Verlauf der Zielfunktion  $f$  innerhalb der Randbedingungen  $h_1$  und  $h_2$ . Die Funktion weist in der Darstellung drei Extrempunkte auf, von denen zwei ein lokales Minimum darstellen. Das Optimum der Zielfunktion ergibt sich demzufolge erst aus einem Vergleich beider Minimalstellen (vgl. Pieper, 2017, S. 12 f.). Das dargestellte eindimensionale Beispiel ist trivial und auch über eine graphische Darstellung näherungsweise schnell zu lösen. Praxisrelevante Optimierungsprobleme weisen häufig mehrere Dimensionen und Randbedingungen auf, sodass weitergehende Analyseverfahren erforderlich werden.

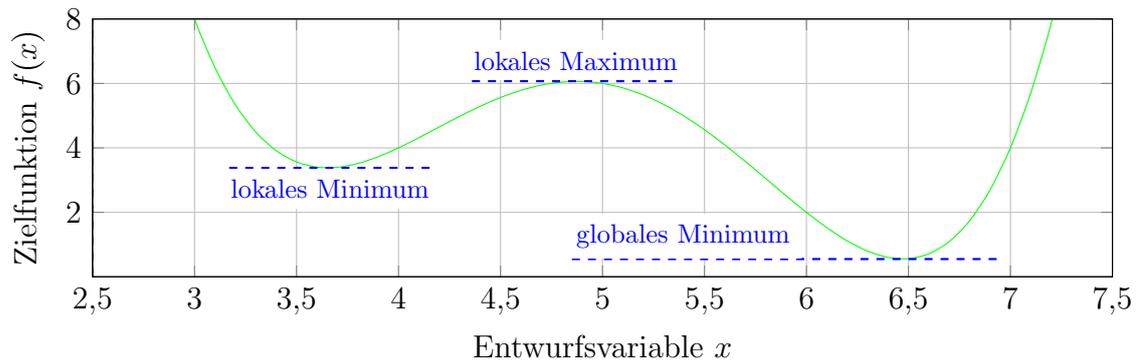


Abbildung 3.5: Beispiel einer Zielfunktion mit zwei Minima und einem Maximum

In Abhängigkeit der Optimierungsklasse und auftretender Restriktionen stehen unterschiedliche Methoden zur Verfügung, Optimierungsprobleme analytisch zu lösen. Vergleichbar zu der Suche von Extrema eindimensionaler Funktionen ohne Einschränkungen in der gebräuchlichen Kurvendiskussion, existieren Optimalitätskriterien analog zu notwendigen und hinreichenden Bedingungen, um mögliche Lösungskandidaten zu suchen und anschließend zu verifizieren. Die Darstellungen in dieser Arbeit konzentrieren sich auf die Beschreibung von notwendigen Optimalitätskriterien 1. Ordnung, welche die Berechnung kritischer Punkte  $x^*$  ermöglicht, in denen der Gradient der Zielfunktion den Wert 0 annimmt. Für Optimierungsprobleme ohne Restriktionen kann dies formal mithilfe der partiellen Ableitung beschrieben werden (Schumacher, 2020, S. 54):

$$\nabla f(x^*) = \nabla f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\delta f}{\delta x_1} \\ \frac{\delta f}{\delta x_2} \\ \vdots \\ \frac{\delta f}{\delta x_{n-1}} \\ \frac{\delta f}{\delta x_n} \end{pmatrix} = 0 \quad (3.10)$$

In der Praxis existieren selten unrestringierte Optimierungsprobleme, sodass zusätzliche Bedingungen einbezogen werden müssen. Handelt es sich dabei ausschließlich um Gleichungsnebenbedingungen nach Gleichung 3.2, ist es theoretisch möglich, diese nach einer der Variablen umzustellen und in die Zielfunktion einzusetzen. Dies ist je nach Anzahl bzw. Art der Nebenbedingungen jedoch häufig nicht möglich oder sehr anspruchsvoll. Auch führt die Behandlung einer verschachtelten Zielfunktion zu der aufwendigen Er-

mittlung notwendiger Ableitungen (Papula, 2015, S. 253 ff.). Handelt es sich um ein Optimierungsproblem mit Gleichungsnebenbedingungen bietet die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren eine alternative Lösung. Grundlage ist die Bildung der Lagrange-Funktion  $L$  bestehend aus der Zielfunktion  $f$  und den Gleichungsnebenbedingungen  $c_i$  mit ergänzenden Lagrangeschen Multiplikatoren  $\lambda$  (Papula, 2017, S. 255 f.):

$$L(\vec{x}, \lambda_i) = f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^l \lambda_i \cdot c_i(\vec{x}) \quad (3.11)$$

Zur Ermittlung der kritischen Punkte  $x^*$  lässt sich der Gradient von  $L$  über die partielle Ableitung der Lagrange-Funktion wie folgt ausdrücken und das notwendige Optimalitätskriterium 1. Ordnung angeben:

$$\nabla L(x^*, \lambda^*) = \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^l \lambda_i \nabla c_i(x^*) = 0 \quad (3.12)$$

Mit der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren können nun kritische Punkt  $x^*$  restringierter Optimierungsprobleme mit Gleichungsnebenbedingungen gelöst werden. Dadurch lassen sich wesentliche Bereiche in der mathematischen Optimierung mit einem übersichtlichen Verfahren abdecken.

Allerdings ist die Behandlung restringierter Optimierungsprobleme mit Ungleichungsnebenbedingungen ebenso wichtig und eine gängige Fragestellung. Ein Beispiel ist die Optimierung einer Druckstütze, welche aus konstruktiven Gründen eine gewisse Schlankheit nicht unterschreiten darf. Die Karush-Kuhn-Tucker(KKT)-Bedingungen stellen ein notwendiges Optimalitätskriterium dar, mögliche Lösungskandidaten für Optimierungsprobleme mit Gleichungs- und Ungleichungsnebenbedingungen zu ermitteln. Grundlage ist die Erweiterung der Lagrangesche-Funktion mit den Ungleichungsnebenbedingungen  $h_j$  einschließlich ergänzender Karush-Kuhn-Tucker-Multiplikatoren  $\mu_j$ :

$$L(\vec{x}, \vec{\lambda}, \vec{\mu}) = f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^l \lambda_i c_i(\vec{x}) + \sum_{j=1}^m \mu_j h_j(\vec{x}) \quad (3.13)$$

Voraussetzung des KKT-Verfahrens ist, dass die Lösung  $x^*$  des Systems eine von verschiedenen Regularitätsbedingungen, wie zum Beispiel die Slater-Bedingung, erfüllt. Für

eine genaue Ausführung der einzelnen Regularitätsbedingungen wird auf die Fachliteratur verwiesen (vgl. Jarre und Stoer, 2019). Jedoch ist festzuhalten, dass wenn der Wert  $x^*$  eine Lösung des Optimierungsproblems darstellt und darüber hinaus eine der Regularitätsbedingungen erfüllt, die Lösung  $x^*$  immer ein Karush-Kuhn-Tucker-Punkt ist (Pieper, 2017, S. 33). Bei dem KKT-Verfahren werden üblicherweise zunächst die möglichen Lösungen anhand der KKT-Bedingungen ermittelt. Anschließend wird geprüft, ob diese Lösung regulär ist und somit einen kritischen Punkt  $x^*$  abbildet.

Die fünf Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen als notwendiges Optimalitätskriterium der 1. Ordnung auf Basis von Gleichung 3.13 sind (Papageorgiou et al., 2012, S. 81 f.):

$$\nabla L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^l \lambda_i \nabla c_i(x^*) + \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla h_j(x^*) = 0 \quad (3.14)$$

$$c_i(x^*) = 0 \quad (3.15)$$

$$h_j(x^*) \leq 0 \quad (3.16)$$

$$h_j(x^*)\mu_j^* = 0 \quad (3.17)$$

$$\mu_j^* \geq 0 \quad (3.18)$$

Die Gradientenbedingung, wie sie bereits aus den Gleichungen 3.10 und 3.12 bekannt ist, wird in Gleichung 3.14 dargestellt. Sie besteht im Wesentlichen aus der Lagrange-Funktion mit Ergänzung der Ungleichheitsbedingungen. Gleichungen 3.15 und 3.16 beschreiben die primale Zulässigkeit in Form der Restriktionen  $c_i$  und  $h_j$ . Sobald Ungleichheitsbedingungen vorhanden sind, ist es möglich, dass Randwerte des Suchraums kleinere Werte ergeben verglichen mit den lokalen Minima. Abbildung 3.5 demonstriert einen analogen Fall, in dem bei der Suche nach einem globalem Maximum die Grenzwerte größer wären als das vorhandene lokale Maximum. Gleichung 3.17 wird als Komplementaritätsbedingung bezeichnet und soll bestätigen, dass die Randwerte kleiner sind als der gefundene Punkt. In Gleichung 3.18 folgt abschließend die Überprüfung der dualen Zulässigkeit mithilfe der Ungleichungsnebenbedingungen sowie der KKT-Multiplikatoren.

Sind die aus den KKT-Bedingungen ermittelten Lösungen zusätzlich regulär, gelten sie als kritische Punkte  $x^*$ . Im Anschluss muss mit einem hinreichenden Optimalitätskriterium auf Basis eines weiterführenden Berechnungsverfahrens überprüft werden, ob es sich tatsächlich um ein lokales Minimum handelt. Für eine Beschreibung dieser Methoden wird auf die einschlägige Fachliteratur verwiesen (vgl. Jarre und Stoer, 2019). Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass falls das Optimierungsproblem als konvex eingestuft werden kann, durch die Erfüllung der fünf KKT-Bedingungen eindeutig festgelegt ist, dass es sich bei dem kritischen Punkt auch um das globale Minimum handelt (Papageorgiou et al., 2012, S. 94). Das Optimierungsproblem kann dann als konvex betrachtet werden, sobald die Zielfunktion konvex und die Ungleichungsnebenbedingungen konvex sind und alle Gleichungsnebenbedingungen als affin linear eingestuft werden können. Die KKT-Bedingungen sind für diesen speziellen Fall sowohl das notwendige als auch das hinreichende Optimalitätskriterium (Pieper, 2017, S. 33).

Mit Hilfe der KKT-Bedingungen ist es demnach möglich, unter gewissen Voraussetzungen die optimale Lösungen nichtlinearer restringierter Optimierungsprobleme analytisch zu ermitteln. Aufgrund aufwendiger Funktionen ist dies aber häufig nicht auf direktem Weg möglich, sodass alternativ numerische Verfahren zur Anwendung kommen. Viele der numerischen Optimierungsalgorithmen nutzen die KKT-Bedingungen zwar nicht um kritische Punkte direkt analytisch zu ermitteln, jedoch verwenden sie die KKT-Bedingungen häufig zur Prüfung vorhandener Lösungen (Schumacher, 2020, S. 57).

Die numerische Suche nach einer optimalen Lösung ist aufwendig und kann nur für ein bis zweidimensionale Funktionen mit vertretbarem Aufwand von Hand bewerkstelligt werden. Es gilt herauszufinden, bei welchen Anpassungen der Entwurfsvariablen, welche Zustandsvariablen in welcher Größenordnung verändert werden. Gerade bei mehrdimensionalen Systemen müssen automationsgestützte Algorithmen die Ermittlung eines Optimums unterstützen. Mathematische Optimierungsalgorithmen helfen dabei, den Suchprozess zu verkürzen und erkennen gezielt Muster unter den bereits ermittelten Zielfunktionswerten. Eine Vielzahl verschiedener Algorithmen zur Identifizierung von lokalen bzw. globalen Extrema linearer und nichtlinearer Zielfunktionen mit und ohne Restriktionen stehen dem Anwendenden zur Verfügung. Die Auswahl des in dieser Arbeit verwendeten numerischen Optimierungsalgorithmus wird in Kapitel 4 eingehend erläutert.

## 3.4 Grundlagen der Modalanalyse

Die Bedeutung baulastdynamischer Strukturanalysen hat in den vergangenen Jahrzehnten stark zugenommen. Während vor der industriellen Revolution massive, schwingungsempfindliche Bauweisen dominierten, werden heute immer schlankere Konstruktionen mit geringerem Eigengewicht realisiert. Dies führt nicht zuletzt durch die häufig geringeren Dämpfungen der Konstruktionen zu einer ansteigenden Empfindlichkeit gegenüber Schwingungsanregungen (Meskouris, 1999, S. 1 f.). Die Baulastdynamik ist gegenwärtig kein Spezialthema mehr, heute ist sie ein wesentlicher Bestandteil ganzheitlicher Nachweis- und Bewertungskonzepte. So müssen störende Resonanzerscheinungen zwischen System und Erregerquellen mit detaillierten Berechnungen und aussagekräftigen Messungen beurteilt und gegebenenfalls durch geeignete bauliche Maßnahmen vermieden werden. Sind gleich mehrere System- und Erregerfrequenzen betroffen, ist das aus der Baustatik bekannte Prinzip der *Wahl der sicheren Seite* nicht realisierbar und detaillierte Simulationen müssen die Resonanzerscheinungen ingenieurmäßig bewerten (Kramer, 2013, S. 6). Neben der dynamischen Nachweisführung ist die messtechnische Erfassung der modalen Parameter heute, auch aufgrund erhöhter Schwingungsempfindlichkeit der Bauteile, eine vielfach angewandte Methodik für das Prinzip des Model Updating zur Ermittlung von Lasten und Steifigkeitsverhältnissen (vgl. Kapitel 2).

Grundlegende Kenntnisse der dynamischen Modellbildung sowie der experimentellen Schwingungsanalyse sind für die Behandlung baulastdynamischer Problemstellungen erforderlich. Abschnitt 3.4.1 vermittelt Grundlagen der theoretischen Schwingungsanalyse und erläutert grundlegend die Bedeutung der Übertragungsfunktion. Praktische Anwendung finden die Kenntnisse in der messtechnischen Ermittlung modaler Parameter. Abschnitt 3.4.2 gibt einen Überblick gängiger Methoden der experimentellen Modalanalyse.

### 3.4.1 Theoretische Modalanalyse

Zur dynamischen Auswertung von Strukturen ist die theoretische Ermittlung der modalen Parameter von zentraler Bedeutung. Diese definieren das Schwingungsverhalten des Bauteils und bestehen aus den Eigenschaften Eigenkreisfrequenz, Eigenform und Dämpfung. Auch wenn die Überführung aufwendiger Baukonstruktionen in geeignete rechnerische

Idealisierungen häufig aufwendig erscheint, können die Grundlagen der Baudynamik bereits in übersichtlichen Modellen abgebildet werden. Dabei sind die Auswirkungen von Steifigkeiten, Massen und Dämpfungen auf die modalen Parameter zu klären. Ohne ausreichende Kenntnis der theoretischen Basis können weder die rechnerischen Modelle, noch die experimentellen Ergebnisse sinnvoll bewertet werden. Grundlagen einer theoretischen Modalanalyse werden in Abschnitt 3.4.1.1 anhand eines Einmassenschwingers erläutert. Modelle mit mehreren Freiheitsgraden werden als Mehrmassenschwinger bezeichnet und in Abschnitt 3.4.1.2 vorgestellt.

### 3.4.1.1 Einmassenschwinger

Die Betrachtung eines übersichtlichen Feder-Masse-Systems in Form eines Einmassenschwingers ist geeignet für das Verständnis wesentlicher Zusammenhänge zwischen den Tragwerkseigenschaften, den modalen Parametern und den äußeren Lasteinwirkungen. Abbildung 3.6 demonstriert auf der linken Seite einen ruhenden Einmassenschwinger mit der konzentrierten Masse  $m$ , der Dämpfungskonstanten  $c$  und der Federsteifigkeit  $k$ . Das System befindet sich in einem Ruhezustand, sodass keine zeitlich abhängigen Verschiebungen  $u$  existieren. Auf der rechten Seite in Abbildung 3.6 ist dasselbe System wie links zu sehen, nachdem es durch einen einmaligen Stoß in horizontaler Richtung angeregt wurde. Der Einmassenschwinger befindet sich schließlich ohne weitere Krafteinwirkung in einer freien gedämpften Ausschwingbewegung. Bei einem frei schwingenden System bilden die Trägheitskraft  $f_m(t)$ , Dämpfungskraft  $f_c(t)$  und Federkraft  $f_k(t)$  zu jedem

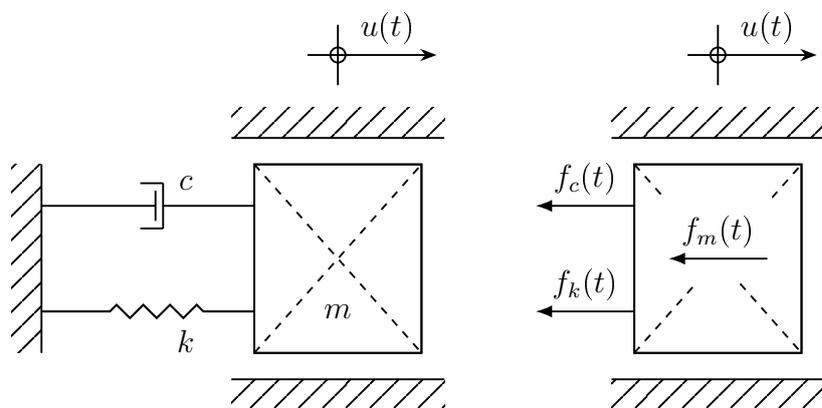


Abbildung 3.6: Darstellung eines Einmassenschwingers ohne äußere Lastbeanspruchung

Zeitpunkt  $t$  ein Gleichgewicht. Es herrscht ein linearer Zusammenhang zwischen der Federsteifigkeit  $k$  und der Verschiebung  $u$  sowie zwischen der Dämpfungskonstante  $c$  und der Geschwindigkeit  $\dot{u}$ . Nach dem Prinzip von d'Alembert ergibt sich das dynamische Gleichgewicht, ohne Berücksichtigung einer äußeren Lasteinwirkung, zu (Paultre, 2011, S. 37):

$$f_m(t) + f_c(t) + f_k(t) = 0 \quad (3.19)$$

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (3.20)$$

Mit dem Lösungsansatz für eine gewöhnliche homogene Differentialgleichung

$$u(t) = Ue^{pt} \quad (3.21)$$

folgt aus Gleichung 3.20 (Meskouris, 1999, S. 51):

$$\underbrace{(mp^2 + cp + k)}_{\text{char. Gleichung} \stackrel{!}{=} 0} \cdot Ue^{pt} = 0 \quad (3.22)$$

Da die e-Funktion mathematisch betrachtet zu keinem Zeitpunkt den Wert 0 annehmen kann, muss die charakteristische Gleichung verschwinden, damit die Bedingung aus Gleichung 3.22 erfüllt ist. Daraus ergibt sich:

$$(mp^2 + cp + k) = 0 \quad (3.23)$$

Die Lösungen der Eigenwerte  $p$  lauten schließlich:

$$p_{1/2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{\sqrt{c^2 - 4km}}{2m} \quad (3.24)$$

Aufgrund des Wurzelterms werden im Folgenden drei Fälle unterschieden. So kann der Radikand einen positiven Wert, eine negative Zahl oder genau den Wert 0 annehmen. Zunächst wird der Fall betrachtet, indem der Radikand den Wert 0 annimmt, und so die übrigen beiden Fälle voneinander separiert. Dazu wird die Beziehung eines ungedämpften

Einmassenschwingers (Avitabile, 2018, S. 39)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.25)$$

eingesetzt in

$$c^2 - 4km = 0 \quad (3.26)$$

Wird Gleichung 3.26 anschließend nach  $c$  umgeformt, ergibt sich eine dynamische Systemeigenschaft, die als kritische Dämpfung  $c_c$  bezeichnet wird.

$$c_c = 2m\omega_0 \quad (3.27)$$

Ist die Dämpfungskonstante  $c$  genauso groß wie  $c_c$ , ist das System so stark gedämpft, dass gerade keine vollständige Schwingung mehr erreicht wird. Für eine anschaulichere Beschreibung des Schwingungsverhaltens wird der dimensionslose Dämpfungsgrad  $\xi$ , auch als LEHRsches Dämpfungsmaß bekannt, eingeführt (Meskouris, 1999, S. 51):

$$\xi = \frac{c}{c_c} \quad (3.28)$$

Das Dämpfungsmaß  $\xi$  beschreibt das Verhältnis zwischen der Dämpfungskonstanten  $c$  und der kritischen Dämpfung  $c_c$ . Ist  $\xi$  größer als 1, ergibt sich in Gleichung 3.24 ein positiver Radikand. Es wird folglich von einer hohen Dämpfung und einer aperiodischen Schwingungsbewegung gesprochen, bei der keine freie Schwingung erzeugt werden kann (Petersen und Werkle, 2017, S. 372). Der Zustand der Auslenkung wird ohne Schwingbewegung in den stationären Ruhezustand überführt. Dies wird, ähnlich wie die zeitlich ausgedehnte plastische Verformung unter äußerer Last, ebenfalls als Kriechvorgang bezeichnet (Natke, 1989, S. 29). Ist das Dämpfungsmaß  $\xi$  kleiner als die kritische Dämpfung  $c_c$  und der Radikand somit negativ, ergibt sich eine schwache Dämpfung. Das Schwingungsverhalten wird dann als eine gedämpft quasiharmonische Schwingung beschrieben (Kuttner, 2015, S. 36). Erst nach einer Mehrzahl vollständiger Schwingungsbewegungen infolge einmaliger Auslenkung kehrt das System in den absoluten Ruhezustand zurück.

Während die Systemeigenschaften der Masse und Federsteifigkeit sinnvoll abgeschätzt werden können, ist die Definition von Dämpfungsparametern üblicherweise deutlich schwieriger (Paultre, 2011, S. 123). Die Dämpfung bildet ein multidimensionales Zusammenspiel unterschiedlicher Mechanismen, die eine Bewegungsauslenkung im Zeitverlauf reduziert und die maximal erreichbare Amplitude begrenzt. Dieser Vorgang wird als Energiedissipation bezeichnet, bei der die verlorene Energie in Form von Wärme das gedämpfte System verlässt (Petersen, 1982, S. 101, 145). Drei wesentliche Mechanismen können im Bauwesen unterschieden werden: Materialdämpfung, Bauteildämpfung und Baugrunddämpfung. Während die Materialdämpfung ihre Ursache in der internen Struktur des Baustoffs hat (vgl. Paultre, 2011, S. 133), fasst die Bauteildämpfung Reibungen in Bauteilübergängen, wie Lagern, Fugen und Stößen, zusammen. Die weitergehende Einwirkung von Einspannungen, Lagerungen und Bodenbeschaffenheit wird der Baugrunddämpfung zugeordnet (Petersen, 1982, S. 142).

In der Literatur finden sich eine Vielzahl unterschiedlicher linearer und nichtlinearer Dämpfungsmodelle (vgl. Ewins, 2000b; Kramer, 2013; Paultre, 2011). Das in Gleichung 3.19 angewendete parallel geschaltete viskos-lineare Dämpfungsmodell, auch Voigt-Kelvin-Modell genannt, wird vielfach in der Schwingungstheorie für Baukonstruktionen verwendet, obwohl aufgrund der hohen Komplexität des Themengebietes aufwendigere nichtlineare Theorien treffender erscheinen. Dass es sich dennoch um einen sinnvollen Ansatz handelt, ergibt sich unter anderem aus der einfachen Anwendbarkeit und der im Vergleich zur Trägheits- und Federkraft geringen Dämpfungskomponente, welche lediglich zu minimalen Veränderungen der Eigenfrequenzen führt (Petersen, 1982, S. 133 f.).

Zur Einordnung der im Bauwesen üblichen Werte stellt Tabelle 3.1 typische Dämpfungsmaße für ausgewählte Baustoffe bereit (vgl. Albert, 2018, S. 4.73). Für Baustrukturen liegt  $\xi$  in der Regel unter 5% (Natke, 1989, S. 30), sodass eine schwache Dämpfung die Standardsituation abbildet. Aufgrund des negativen Radikanden, ergeben sich aus der Auswertung von Gleichung 3.24 die Eigenwerte zu einer komplexen Lösung, bestehend aus einem Real- und Imaginärteil (Petersen und Werkle, 2017, S. 372):

$$p_{1,2} = \underbrace{-\omega_0 \xi}_{\text{Realteil}} \pm \underbrace{i\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}_{\text{Imaginärteil}} \quad (3.29)$$

Tabelle 3.1: Ausgewählte Dämpfungsmaße für Baustoffe im elastischen Materialbereich (Albert, 2018, S. 4.73)

Baustoff	Dämpfungsmaß $\xi$ [%]	Baustoff	Dämpfungsmaß $\xi$ [%]
Stahl, verschraubt	1	Stahlbeton	1 – 2
Stahl, verschweißt	0,4	Spannbeton	0,8
Holz	1 – 3	Mauerwerk	1 – 2

Aus der Lösung der Gleichung 3.29 geht hervor, dass der Eigenwert  $p$  als komplex konjugiertes Zahlenpaar erscheint. Abbildung 3.7 demonstriert den S-Plan als komplexe Zahlenebenendarstellung. Auf der horizontalen Achse zeigt sich der Realteil und auf der vertikalen Achse der Imaginärteil. Über den Halbkreis lassen sich Systeme mit unterschiedlichen Dämpfungsmaßen  $\xi$  in Form komplex konjugierter Zahlenpaare visualisieren. Ist die Dämpfung genau 0, existiert kein Realteil und die Schwingung ist vollständig harmonisch ohne Amplitudenreduktion. Ist sie oberhalb des kritischen Wertes  $c_c$ , fehlt der Imaginärteil und es kommt zu keiner vollständigen Schwingungsbewegung.

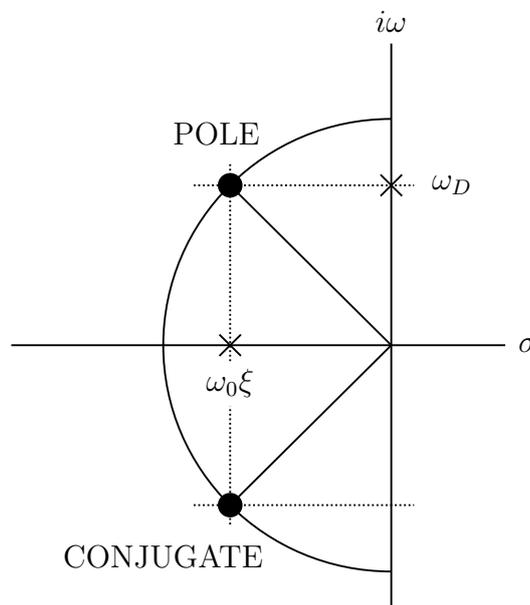


Abbildung 3.7: Darstellung der komplexen Zahlenebene in einem S-Plan nach Avitabile (2018, S. 40)

Die gedämpfte Eigenfrequenz  $\omega_D$  ergibt sich aus Gleichung 3.29 zu (Paultre, 2011, S. 49):

$$\omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \quad (3.30)$$

Bei einem im Bauwesen üblicherweise maximalen Dämpfungsgrad  $\xi$  von 0,05 ergibt sich aus dem Wurzelterm in Gleichung 3.30 ein Faktor von 0,99875 und damit eine Abweichung der ungedämpften Frequenz  $\omega_d$  von weniger als 0,15%. Aus dieser geringen Abweichung kann für übliche Baukonstruktionen folgendes vereinbart werden:

$$\omega_D \approx \omega_0 \quad (3.31)$$

Das Modell des Einmassenschwingers ermöglicht dem Anwendenden überschlägige Abschätzungen des Tragverhaltens. Die Kenntnis der ersten und damit niedrigsten Eigenkreisfrequenz ist häufig ausreichend, um Aussagen zu möglichen Überlagerungen mit äußeren Krafteinwirkungen treffen zu können. Die rechnerische Zusammenfassung von Gewichten zu einer konzentrierten Masse und die Berechnung einer Federkonstanten an der wesentlich mitschwingenden Stelle können auch für Systeme mit kontinuierlich verteilter Masse und Steifigkeit zu sinnvollen Abschätzungen führen (Kramer, 2013, S. 110 ff.).

Sind detaillierte Informationen hinsichtlich des Schwingungsverhaltens in der Resonanz bzw. die Klärung der Modalparameter erforderlich, sind weitergehende Überlegungen mit Verwendung äußerer Lastanregung notwendig. Das in Abbildung 3.6 dargestellte System wird in Abbildung 3.8 um eine zeitabhängige äußere Lasteinwirkung  $f_p(t)$  ergänzt. Das

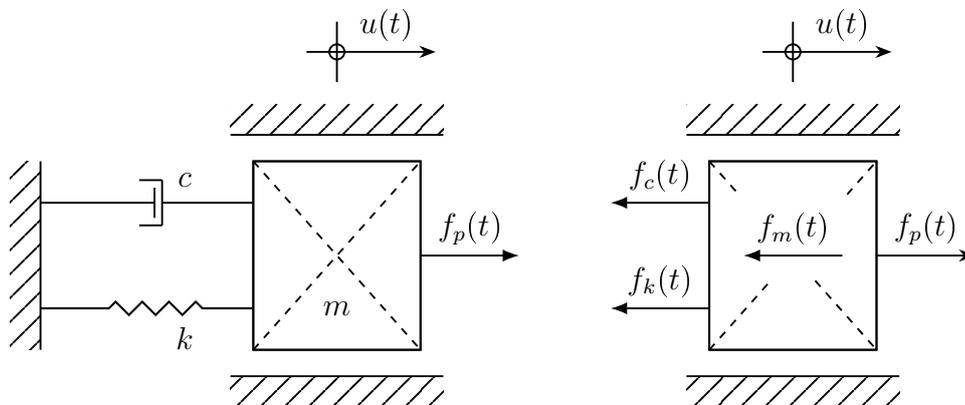


Abbildung 3.8: Darstellung eines Einmassenschwingers mit äußerer Lastbeanspruchung

Kräftegleichgewicht einer erzwungenen Schwingung des linear gedämpften Einmassenschwingers lautet in Anlehnung an Gleichung 3.20:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = f_p(t) \quad (3.32)$$

Die gewöhnliche inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung kann mit dem Lösungsansatz  $u = Ue^{i\omega t}$  und der Annahme einer sinusförmigen Störfunktion  $f_p(t) = F_p e^{i\omega t}$  gelöst werden (Ewins, 2000b, S. 31):

$$(-\omega^2 m + i\omega c + k)Ue^{i\omega t} = F_p e^{i\omega t} \quad (3.33)$$

Wird aus der Antwortschwingung  $U$  und der Kraftanregung  $F_p$  ein Quotient geformt, ergibt sich nach Kürzung der  $e$ -Funktion die Übertragungsfunktion (engl.: Frequency Response Function, FRF) zu:

$$H(\omega) = \frac{U}{F_p} = \frac{1}{(k - \omega^2 m) + i(\omega c)} \quad (3.34)$$

Die kraftnormierte Übertragungsfunktion ermöglicht Aussagen darüber, wie groß die Systemantwort gegenüber einer bestimmten Erregerkreisfrequenz  $\omega_p$  ist. Die Kraftanregung bzw. Antwortschwingung kann dabei auch als Wirkung und Ursache formuliert werden. Eine Frequenz, bei der das System außergewöhnlich groß auf eine äußere Einwirkung  $f_p$  reagiert, wird als Resonanzfrequenz  $\omega_R$  bezeichnet.

Die Übertragungsfunktion  $H$  ist eine komplexe Funktion und beinhaltet Informationen über den Amplitudenanteil  $|H|$  und den Phasenverschiebungswinkel  $\zeta$  zwischen der anregenden Kraft und dem schwingenden System. Die Magnitude und der Phasenverschiebungswinkel der Übertragungsfunktion  $H$  ergeben sich zu (Kuttner, 2015, S. 45 f.; Avitabile, 2018, S. 41):

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2}} \quad (3.35)$$

$$\zeta(\omega) = \arctan\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right) \quad (3.36)$$

Die Übertragungsfunktion  $H$  (Gleichung 3.34) wird in eine dimensionslose Form überführt. Das Verhältnis aus Anregerkreisfrequenz und Eigenkreisfrequenz des Systems wird zur Vereinfachung durch  $\eta = \frac{\omega_p}{\omega_0}$  ersetzt (Meskouris, 1999, S. 69; Kuttner, 2015, S. 45 f.):

$$V(\eta) = |H(\omega)| \cdot k = \frac{U_{dynamisch}}{Y_{statisch}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2}} \quad (3.37)$$

$$\zeta(\eta) = \arctan\left(\frac{2\xi\eta}{1 - \eta^2}\right) \quad (3.38)$$

Der Amplitudenfrequenzgang  $V$  wird in der Maschinendynamik auch als Vergrößerungsfaktor bezeichnet und zeigt an, wie groß das Verhältnis der Amplitude einer dynamischen Schwingungsauslenkung im Vergleich zu einer äquivalent statischen Verformung ist. Abbildung 3.9 demonstriert den Vergrößerungsfaktor unter verschiedenen Dämpfungsgraden  $\xi$ . Für im Bauwesen übliche Maße für  $\xi$  von bis zu 5% ergeben sich stark zunehmende Vergrößerungsfaktoren  $V$  in der Nähe der Systemeigenkreisfrequenz. Je niedriger die Dämpfungsgrade, umso größer werden die Maximalwerte des Vergrößerungsfaktors. Liegt die Anregerfrequenz unterhalb der Systemeigenfrequenz in einem unterkritischen Bereich spricht man von Hochabstimmung. Für den analogen Fall oberhalb der System-

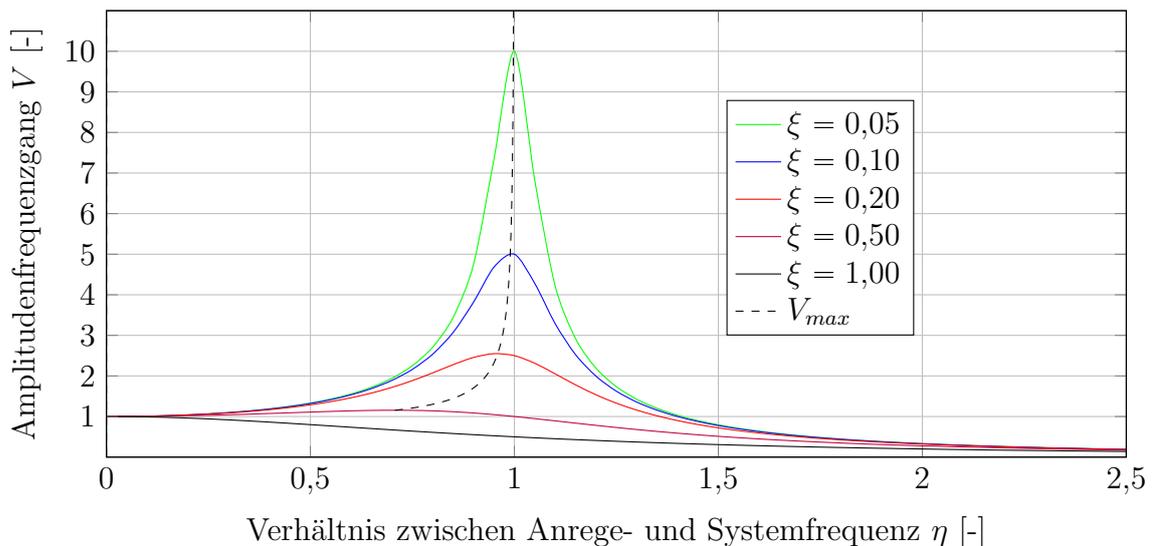


Abbildung 3.9: Amplitudenfrequenzgang  $V$  in Abhängigkeit des Frequenzverhältnisses  $\eta$  unter Berücksichtigung verschiedener Dämpfungsmaße  $\xi$

eigenfrequenz handelt es sich um eine Tiefabstimmung. An den Stellen, an denen der Vergrößerungsfaktor maximal wird (vgl.  $V_{max}$  in Abbildung 3.9), kommt es zu einer verhältnismäßig großen Übertragung der Erregung auf das System. Diese Stelle wird als Resonanzfrequenz  $\omega_R$  bezeichnet. Wie in Abbildung 3.9 zu sehen, ist die Stelle der maximalen Vergrößerung abhängig von dem Dämpfungsgrad  $\xi$ . Die Systemantwort wird maximal, wenn die Übertragungsfunktion maximal wird. Die Ableitung von  $V$  nach  $\eta$

$$\frac{dV}{d\eta} = \frac{2\eta - 2\eta^3 - 4\eta\xi^2}{[(1 - \eta^2)^2 + 4\xi^2\eta^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (3.39)$$

wird gleich 0 gesetzt und nach  $\eta$  ausgewertet. Die Resonanzfrequenz  $\omega_R$  tritt auf bei (Meskouris, 1999, S. 68 ff.):

$$\eta_R = \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (3.40)$$

Daraus folgt die Resonanzfrequenz  $\omega_R$  zu:

$$\omega_R = \omega_0 \cdot \eta_R = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (3.41)$$

Ein im Bauwesen übliches maximales Dämpfungsmaß von 5 % ergibt für  $\omega_R$  einen Wert und damit eine Abweichung zur ungedämpften Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$  von 0,25 %. Die nun bekannten Systemfrequenzen  $\omega_0$ ,  $\omega_D$  und  $\omega_R$  können aufgrund der geringen Abweichungen für Dämpfungsmaße im Bauwesen als identisch angesehen werden:

$$\omega_R \approx \omega_D \approx \omega_0 \quad (3.42)$$

Abbildung 3.10 demonstriert analog zur Darstellung des Vergrößerungsfaktors  $V$  in Abbildung 3.9 den entsprechenden Phasenfrequenzgang  $\zeta$ . Liegt die Eigenkreisfrequenz der Anregung  $\omega_p$  unter der Eigenkreisfrequenz des Systems  $\omega_0$ , läuft die Anregung zwischen 0 und 90° voraus. Ist  $\eta$  gleich 1 ergibt sich unabhängig des Dämpfungsgrads  $\xi$  immer ein Phasenverschiebungswinkel  $\zeta$  von genau 90°. Bei größeren Werten liegt der Verschiebungswinkel  $\zeta$  zwischen 90° und 180°. Je niedriger der Dämpfungsgrad  $\xi$ , desto enger verläuft der Bereich des größten Frequenzsprungs.

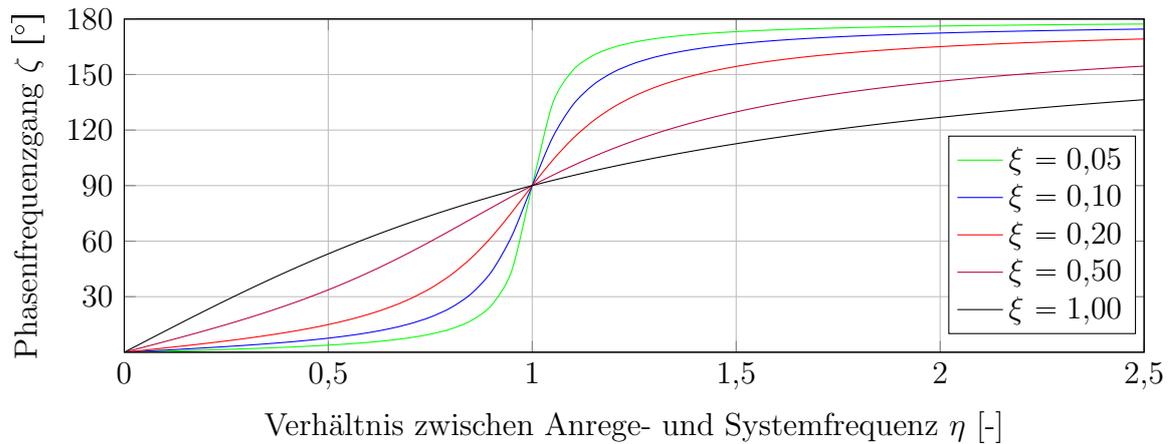


Abbildung 3.10: Phasenfrequenzgang  $\zeta$  in Abhängigkeit des Frequenzverhältnisses  $\eta$  unter Berücksichtigung verschiedener Dämpfungsmaße  $\xi$

Die bisherigen Annahmen der Übertragungsfunktion  $H$  basieren auf einer verschiebungsbasierten Antwort  $U$  gegenüber einer Erregerkraft  $F$ . Dies wird auch als dynamische Nachgiebigkeit (engl. receptance) bezeichnet. Es gibt alternative Definitionen der Übertragungsfunktion, welche im Wesentlichen für eine messtechnische Ermittlung der modalen Eigenschaften benötigt werden (vgl. Abschnitt 3.4.2). Übertragungsfunktionen können gegenüber der Darstellung von Antwort zu Kraft (R/F), auch invers als Kraft zu Antwort formuliert werden. Tabelle 3.2 zeigt eine Übersicht der verschiedenen Varianten und gibt neben den deutschen Definitionen zusätzlich in Klammern die englischsprachigen Begriffe an (Ewins, 2000b, S. 36). Es sei darauf hingewiesen, dass die Formel zur Berechnung der Resonanzkreisfrequenz  $\omega_R$  von der Wahl der Antwortreaktion abhängt

Tabelle 3.2: Verschiedene Definitionen der Übertragungsfunktion  $H(\omega)$

Antwort R	Standard R/F	Inverse F/R
Verschiebung (displacement)	dynamische Nachgiebigkeit (receptance)	dynamische Steifigkeit (dynamic stiffness)
Schnelle (velocity)	Admittanz (mobility)	mechanische Impedanz (mechanical impedance)
Beschleunigung (acceleration)	Akzeleranz (accelerance)	dynamische Masse (apparent mass)

und somit numerische Abweichungen auftreten können. Die Differenzen verglichen zu der Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Einmassenschwingers  $\omega_0$  sind maximal so groß, wie bereits beschrieben, sodass die bisherigen Annahmen aus Gleichung 3.42 ihre Gültigkeit behalten. Weitergehende Informationen hinsichtlich der Amplitudenfrequenzgänge und Phasenfrequenzgänge der unterschiedlichen Definitionen der Übertragungsfunktionen aus Tabelle 3.2 kann Kuttner (2015, S. 51) entnommen werden.

### 3.4.1.2 Mehrmassenschwinger

Bislang wurden übersichtliche Strukturen mit einer konzentrierten Masse  $m$ , einer Dämpfungskonstanten  $c$  einer Federsteifigkeit  $k$  und einer äußeren Last  $f_p$  betrachtet. Die Idealisierung kontinuierlicher Systeme als Einmassenschwinger ermöglicht in vielen Fällen eine übersichtliche Abschätzung von Resonanzerscheinungen oder Belastungszuständen (vgl. Petersen und Werkle, 2017). Die Vereinfachung als Einmassenschwinger führt dann häufig zu ungenauen oder falschen Ergebnissen, wenn Strukturen aus mehreren Stäben bestehen, Systemeigenschaften über die Stablänge hinweg variieren oder die Ermittlung mehrerer Moden erforderlich ist. Das theoretische Modell des Mehrmassenschwingers ist eine Methode, die vorhandenen Systeme abschnittsweise mit einer spezifischen Masse  $m_i$ , Steifigkeit  $k_i$ , Dämpfung  $c_i$  und Last  $f_{p,i}$  zu untergliedern. Abbildung 3.11 demonstriert einen Zweimassenschwinger mit den Massen  $m_1$  und  $m_2$ , den Dämpfungskonstanten  $c_1$  und  $c_2$ , den Federkonstanten  $k_1$  und  $k_2$  sowie den äußeren Lastbeanspruchungen  $f_{p,1}$  und  $f_{p,2}$ . In Anlehnung an Gleichung 3.20 ergibt sich für das Kräftegleichgewicht eines

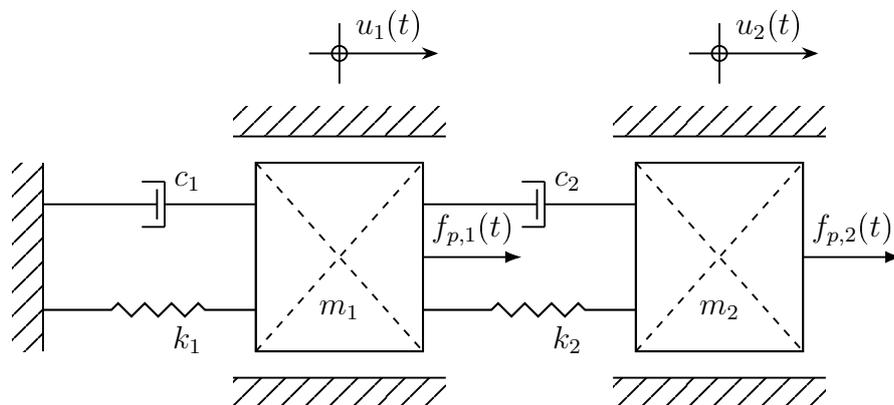


Abbildung 3.11: Darstellung eines Mehrmassenschwingers mit Lastbeanspruchung

allgemeinen Mehrmassenschwingers unter Verzicht der zeitabhängigen Darstellung die folgende Matrizen- und Vektorgleichung:

$$\underline{M}\{\ddot{u}\} + \underline{C}\{\dot{u}\} + \underline{K}\{u\} = \{f_p\} \quad (3.43)$$

Die Anzahl der vorhandenen Massen  $m$  ist in diesem Beispiel gleichbedeutend mit der Anzahl an Freiheitsgraden. Für die Spezifizierung des dynamischen Gleichgewichts ist es erforderlich, für jede Masse  $m_i$  eine Bewegungsgleichung zu formulieren. Für das in Abbildung 3.11 dargestellte System werden aufgrund der beiden vorhandenen Massen  $m_1$  und  $m_2$  zwei Bewegungsgleichungen formuliert. Aus Abschnitt 3.4.1.1 ist bekannt, dass die Dämpfungskonstanten  $c$  für die Ermittlung der Eigenkreisfrequenzen  $\omega_n$  vernachlässigt werden können (vgl. Gleichung 3.31). Für eine freie Schwingung ( $c_i = 0$ ) ohne äußere Lasteinwirkung  $f_p$  ergibt sich das dynamische Gleichgewicht zu:

$$m_1\ddot{u}_1 + k_1(u_1 - u_2) = 0 \quad (3.44)$$

$$m_2\ddot{u}_2 + k_2 \cdot u_2 - k_1(u_1 - u_2) = 0 \quad (3.45)$$

Die Überführung in Matrizenschreibweise ergibt:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_2 + k_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (3.46)$$

Mit dem Lösungsansatz  $u = Ue^{i\omega t}$  ergibt sich das Eigenwertproblem zu:

$$\underbrace{(\underline{K} - \omega^2 \underline{M})}_{\text{char. Gleichung} \stackrel{!}{=} 0} \cdot \{U\}e^{i\omega t} = \{0\} \quad (3.47)$$

Die Determinante der charakteristischen Gleichung muss den Wert 0 annehmen:

$$\det|\underline{K} - \omega^2 \underline{M}| = 0 \quad (3.48)$$

Die Anzahl der Freiheitsgrade des Mehrmassenschwingers entscheidet über die Menge der Lösungen. Bei wenigen konzentrierten Massen lassen sich die entsprechenden Eigen-

kreisfrequenzen  $\omega_n$  analytisch bestimmen. Sind aufwendigere Systeme zur Idealisierung notwendig, können numerische Verfahren unterstützen, die Lösungen aus Gleichung 3.48 zu bestimmen. Sobald alle Eigenwerte analytisch oder numerisch gefunden werden, lautet die Matrix der Eigenkreisfrequenzen  $\underline{\Omega}$ :

$$\underline{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & \omega_n \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Nach Lösen des Eigenwertproblems lassen sich die Eigenkreisfrequenzen  $\omega_n$  zur Ermittlung der Eigenform in Gleichung 3.47 einsetzen. Es ergeben sich für jede Eigenkreisfrequenz  $\omega_n$  Verschiebungen der idealisierten Massen. Die Eigenformvektoren  $\Psi_n$  lauten:

$$\{\Psi_n\} = \begin{Bmatrix} \psi_{1n} \\ \psi_{2n} \\ \vdots \\ \psi_{jn} \end{Bmatrix} \quad (3.50)$$

Der Index  $n$  beschreibt die Ordnungszahl der Mode; der Index  $j$  zeigt die Stelle der Verschiebung an. Die Lösungen der individuellen Eigenformvektoren  $\{\Psi_n\}$  ergeben gesamttheitlich die Eigenformmatrix  $\underline{\Psi}$  (Petersen und Werkle, 2017, S. 326):

$$\underline{\Psi} = [\{\Psi_1\}, \{\Psi_2\}, \dots, \{\Psi_n\}] = \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \cdots & \psi_{1n} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \cdots & \psi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \psi_{j1} & \psi_{j2} & & \psi_{jn} \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Diese Arbeit stellt ein Verfahren zur Systemidentifikation vor, bei der Systemeigenschaften eines Ausgangsmodells solange durch einen Optimierungsprozess angepasst werden, bis eine bestmögliche Übereinstimmung zwischen den rechnerischen und experimentellen modalen Systemeigenschaften besteht. Im Zuge des Identifikationsverfahrens dieser Abhandlung (s. Abschnitt 4.1) ist es erforderlich, die rechnerischen und experimentellen

modalen Parameter miteinander zu vergleichen und über eine Zielfunktion (vgl. 3.3.2) die schrittweise Anpassung des Ausgangsmodells zu ermöglichen. Verschiedene rechnerische Verfahren stehen zur Verfügung, die Unterschiede zwischen Eigenkreisfrequenzen  $\omega$  sowie Eigenformvektoren  $\{\Psi\}$  numerisch zu definieren.

Die Normalized Relative Frequency Difference (NRFD) ist eine Methode, mittels prozentualer Abweichung zwei Eigenkreisfrequenzen  $\omega_r$  und  $\omega_v$  miteinander zu vergleichen (Nasisi et al., 2015, S. 413; Lein und Beitelschmidt M., 2014, S. 2688):

$$\text{NRFD}(\omega_r, \omega_v) = \frac{|\omega_r - \omega_v|}{\omega_r} = \left|1 - \frac{\omega_v}{\omega_r}\right| \quad (3.52)$$

Ein Wert von 0 zeigt eine vollständige Übereinstimmung zwischen dem Referenzwert  $\omega_r$  und dem zu validierenden Wert  $\omega_v$  an, während Werte größer 1 eine um über 100% erhöhte Abweichung hinsichtlich des Referenzwerts  $\omega_r$  angeben.

Das Modal Assurance Criterion (MAC), auch als Mode Shape Correlation Coefficient (MSCC) bekannt (vgl. Ewins, 2000b), ist eine formale Beschreibung zum Abgleich von Eigenformen. Der Koeffizient basiert auf der Methode der kleinsten Quadrate und beinhaltet die beiden Eigenformvektoren  $\{\Psi_A\}$  und  $\{\Psi_X\}$  (Pastor et al., 2012, S. 544):

$$\text{MAC}(\{\Psi_A\}, \{\Psi_X\}) = \frac{|\{\Psi_X\}^T \{\Psi_A\}|^2}{\left(\{\Psi_X\}^T \{\Psi_X\}\right) \cdot \left(\{\Psi_A\}^T \{\Psi_A\}\right)} \quad (3.53)$$

Der MAC resultiert in einer skalaren Größe. Die Reihenfolge der Moden kann vertauscht werden. Eine Normierung der Eigenformen ist nicht erforderlich. Das Einführen eines skalaren Faktors hat keinen Einfluss auf die Ermittlung, sodass gilt (Ewins, 2000a, S. 227):

$$\text{MAC}(\{\Psi_A\}, \{\Psi_X\}) = \text{MAC}(\{\Psi_X\}, \{\Psi_A\}) = \text{MAC}(\{\Psi_X\}, y \cdot \{\Psi_A\}) \quad (3.54)$$

Sind die beiden zu vergleichenden Eigenformen identisch, ergibt sich für den MAC ein Wert von 1. Je weiter die Eigenformen von einander differieren, desto näher kommt der MAC dem Wert 0. Allgemein kann davon ausgegangen werden, dass ab einem Wert von 0,9 eine gute Korrelation besteht und unter einem Wert von 0,1 keine Korrelation zwischen den Modenpaaren herrscht (Ewins, 2000b, S. 426). Eine breite Übersicht ver-

schiedener Korrelationsmethoden hinsichtlich Eigenformvektoren und Eigenkreisfrequenzen kann Lein und Beitelschmidt M. (2014, S. 2687 ff.) entnommen werden.

Der in Abbildung 3.11 dargestellte Mehrmassenschwinger kann mithilfe der Eigenformvektoren  $\{\Psi\}$ , der Massenmatrix  $\underline{M}$  und der Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}$  in eine Kombination aus individuellen Einmassenschwingern zerlegt werden. Für zwei Eigenformen  $\{\Psi_i\}$  und  $\{\Psi_j\}$  gilt allgemein (vgl. Petersen und Werkle, 2017, S. 326 ff.):

$$\{\Psi_i^T\}\underline{M}\{\Psi_j\} = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ \bar{m}_{ii} & i = j \end{cases} \quad (3.55)$$

$$\{\Psi_i^T\}\underline{K}\{\Psi_j\} = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ \bar{k}_{ii} & i = j \end{cases} \quad (3.56)$$

Die Gleichungen für zwei unterschiedliche Eigenformvektoren  $\{\Psi\}_i$  und  $\{\Psi\}_j$  müssen stets den Wert 0 ergeben. Dieser Zusammenhang wird auch als Orthogonalität bezeichnet und ermöglicht eine Plausibilitätskontrolle der ermittelten Eigenformvektoren. Werden zwei identische Eigenformen  $\Psi$  der Mode  $n$  eingesetzt, ergibt sich die modale Masse  $\bar{m}_{nn}$  und modale Steifigkeit  $\bar{k}_{nn}$  für einen theoretischen Einmassenschwinger dieser Mode.

Für die Auswertung der Modalmatrix  $\underline{\Psi}$  ergeben sich Diagonalmatrizen, die ausschließlich auf ihrer Hauptdiagonalen Werte ungleich 0 enthalten (Avitabile, 2018, S. 62):

$$\text{modale Massenmatrix:} \quad \bar{m} = \underline{\Psi}^T \underline{M} \underline{\Psi} = \begin{bmatrix} \bar{m}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{m}_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & \bar{m}_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

$$\text{modale Steifigkeitsmatrix:} \quad \bar{k} = \underline{\Psi}^T \underline{K} \underline{\Psi} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{k}_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & \bar{k}_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Es lässt sich festhalten, dass der Mehrmassenschwinger auch als Summe linear unabhängiger Einmassenschwinger abgebildet werden kann. Diese aufgelöste Darstellung wird als modales Modell bezeichnet und ist vor allem im Zuge der experimentellen Modalanalyse von maßgeblicher Relevanz (vgl. Abschnitt 3.4.2).

Bislang wurden ausschließlich die modalen Parameter eines freien ungedämpften Mehrmassenschwingers betrachtet. Werden Dämpfungskonstanten  $c_i$  und äußere Lasteinwirkungen  $f_{p,i}$  berücksichtigt, lautet die formale Beschreibung des dynamischen Gleichgewichts inklusive der modalen Dämpfungsmatrix  $\bar{c}$  und der modalen Lasteinwirkung  $\underline{\Psi}^T \{f_p\}$  (Avitabile, 2018, S. 63):

$$\bar{m}\{\ddot{u}\} + \bar{c}\{\dot{u}\} + \bar{k}\{u\} = \underline{\Psi}^T \{f_p\} \quad (3.59)$$

Vergleichbar zum Einmassenschwinger aus Abschnitt 3.4.1.1 ermöglicht die Einführung der Übertragungsfunktion  $H_{ig}$  die Konvertierung in das Antwortmodell:

$$H_{ig}(\omega) = \frac{U_i}{F_{p,g}} \quad (3.60)$$

Während bei einem Einmassenschwinger (vgl. Abbildung 3.6) die Stelle der Krafteinwirkung und der Ort der Auslenkung identisch sind, können an einem Mehrmassenschwinger verschiedene Kombinationen betrachtet werden. Der Index  $i$  beschreibt den Ort der Systemantwort, während der Index  $g$  die Stelle der Krafteinwirkung ausdrückt. Eine anspruchsvolle Beschreibung der Übertragungsfunktion lautet (Ewins, 2000b, S. 64):

$$H_{ig}(\omega) = \frac{U_i}{F_g} = \sum_{n=1}^N \frac{\psi_{in}\psi_{gn}}{(\bar{k}_n - \omega^2\bar{m}_n) + i(\omega\bar{c}_n)} \quad (3.61)$$

Aus der Summe der Übertragungsfunktion eines Mehrmassenschwingers ergibt sich die Matrix der Übertragungsfunktion:

$$\underline{H}(\omega) = \left\{ \begin{array}{cccc} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1g} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2g} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ H_{i1} & H_{i2} & & H_{ig} \end{array} \right\} \quad (3.62)$$

Nach dem Satz von Maxwell und Betty, auch Maxwellsche Vertauschung genannt, ergibt sich eine symmetrische Matrix mit der Größe  $i \times g$ . Werden die Stelle der Aktion in Form der Lastanregung als Ursache und die Stelle der Reaktion als Wirkung miteinander vertauscht, ergeben sich identische Übertragungsfunktionen (Hirschfeld, 2006, S. 139 ff.), sodass für eine vollständige Beschreibung der Matrix aus Gleichung 3.62 nicht alle Einzelwerte bestimmt werden müssen.

#### 3.4.2 Experimentelle Modalanalyse

Die bisherigen Annahmen aus Abschnitt 3.4.1 basieren auf einem Modell konzentriert verteilter Massen  $m$ , Steifigkeiten  $k$  und Dämpfungskonstanten  $c$ . In der Realität sind diskrete Systeme nur in Ausnahmefällen vorhanden, sodass die Ideen des Ein- und Mehrmassenschwingers auf kontinuierliche Strukturen übertragen werden müssen. Dabei besteht das theoretische Modell eines kontinuierlichen Schwingers im übertragenden Sinn aus einer unendlichen Menge infinitesimal kleiner verteilter Massen, Steifigkeiten und Dämpfungskonstanten, wodurch rein theoretisch unendlich viele Moden existieren. Jede Mode besteht aus einer individuellen Eigenkreisfrequenz, Eigenform sowie Dämpfung und kann in Form des modalen Modells als Einmassenschwinger abgebildet werden. Dabei existieren in einem dreidimensionalen Raum neben den häufig maßgebenden vertikalen bzw. lateralen Biegeschwingungen, zusätzlich longitudinale und torsionale Moden. Das Ziel einer experimentellen Modalanalyse besteht darin, diejenigen Moden messtechnisch zu erfassen, welche für die Problemstellung eine besondere Relevanz haben. Grundsätzlich ist eine dynamische Untersuchung erforderlich, wenn die modalen Eigenschaften durch eine theoretische Auswertung nicht ausreichend genau ermittelbar sind oder die modalen Parameter für einen Optimierungsprozess notwendig sind.

Grundlage der experimentellen Modalanalyse ist üblicherweise die messtechnische Ermittlung der Übertragungsfunktion auf Basis der Erfassung von Lastanregung und korrespondierenden Reaktion des zu untersuchenden Systems. Werden anschließend die Frequenzspektren der Lasteinwirkung, sowie der Antwortschwingung berechnet, kann die experimentelle Übertragungsfunktion, trivial ausgedrückt, aus ihrem Quotienten erstellt werden. Die Übertragungsfunktion kann auch als kraftnormiertes Antwortspektrum interpretiert werden und beinhaltet Maximalwerte bei den Frequenzen, welche sich durch eine

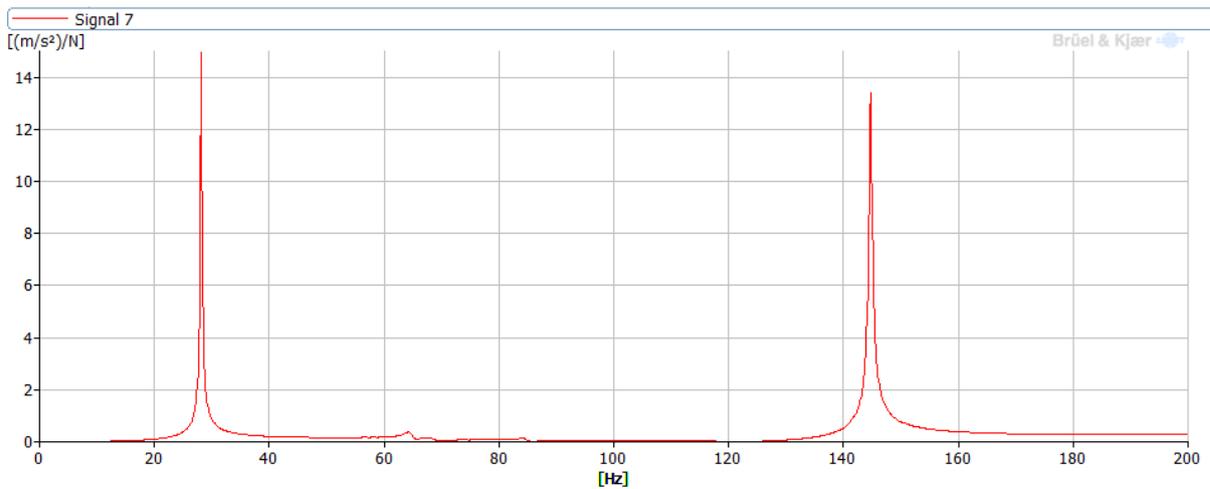


Abbildung 3.12: Beispiel der Magnitude einer Übertragungsfunktion

äußere Kraftanregung besonders stark anregen lassen. Abbildung 3.12 demonstriert exemplarisch eine experimentelle Übertragungsfunktion der Modalanalyse eines Prüfkörpers, der an dieser Stelle nicht näher beschrieben wird. Grundlage der abgebildeten Kurve ist die Beschleunigungsmessung in Kombination mit einem Impulshammer, auch Akzeleranz genannt (vgl. Tabelle 3.2). Bei der experimentellen Modalanalyse erfolgt die Berechnung und Darstellung der modalen Parameter häufig nicht über die Kreisfrequenzen  $\omega$ , sondern über die direkt über die Zeitachsen ermittelten Frequenzen  $f$  in der Einheit [Hz]. Die Umrechnung erfolgt durch:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (3.63)$$

Abbildung 3.12 stellt die Magnitude der Übertragungsfunktion in einem Frequenzbereich von 0 bis 200 Hz dar. Die beiden Peaks, an denen die einwirkende Kraft eine besonders große Systemantwort erzeugt, können als Resonanzfrequenzen  $f_{R,1}$  und  $f_{R,2}$  definiert werden. Aufgrund der im Bauwesen geringen Dämpfungsgrade  $\xi$  können die Werte für  $f_R$  gleichzeitig als Eigenfrequenzen  $f_1$  und  $f_2$  bzw. nach Gleichung 3.63 umgerechnet als Eigenkreisfrequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  festgelegt werden (s. Gleichung 3.42).

Während der experimentellen Modalanalyse ist sicherzustellen, dass die Anregeform ein Frequenzspektrum erzeugt, welches den Bereich der zu ermittelten Moden abdeckt. Die Anregeformen entstammen im Wesentlichen aus den Kategorien Periodisch, Transi-

ent und Zufällig. Je nach Umgebungsbedingungen, vorhandener Messtechnik und Eigenschaften des zu untersuchenden Systems haben sie unterschiedliche Vor- und Nachteile. Für detaillierte Informationen sei auf die einschlägige Fachliteratur verwiesen (Avitabile, 2018; Ewins, 2000b). Die Aufbringung der Last erfolgt in der Praxis häufig durch einen Impulshammer oder elektromagnetischen Schwingungserreger genannt. Während der Impulshammer eine transiente Anregung in Form von Impulsen aufbringt, stehen mit einem elektromagnetischen Schwingungserreger diverse periodische, transiente und zufallsgenerierte Formen zur Verfügung.

Die Messung der Lasteinwirkung erfolgt durch einen Kraftsensor direkt am Kopf des Impulshammers. Bei der Verwendung eines direkt mit der Probe verbundenen elektrodynamischen Schwingungserregers wird der Kraftsensor als Verbindungselement montiert. Die Messung der Systemantwort erfolgt in der Praxis über direkt am Bauteil applizierte Beschleunigungs-, Geschwindigkeits- oder Wegsensoren. Die Schwingungsmessung kann auch kontaktlos über Mikrofone (s. Resta et al., 2020), Videokameras (s. Feng et al., 2017) und 3D-Laser-Scanner (s. Arbelo et al., 2015) erfolgen. In dieser Arbeit werden ausschließlich Beschleunigungsaufnehmer während der laborexperimentellen Untersuchungen in Phase II verwendet (s. Kapitel 5), sodass die folgenden Beschreibungen dieser Sensorart gewidmet sind.

Kraft- und Beschleunigungsaufnehmer zeichnen analoge Zeitsignale auf, welche zur Weiterverarbeitung an ein Frontend übertragen werden. Eine zusammenfassende Demonstration der Signalverarbeitung einer experimentellen Modalanalyse kann Avitabile (2018, S. 95) entnommen werden. Zunächst steht das analoge Eingangssignal aus einer kraftbezogenen Ursache (Input) und einer Wirkung (Output) zur Verfügung. Es ist amplituden- sowie zeitkontinuierlich und wird für die weitere Verarbeitung an bestimmten Zeitpunkten ausgelesen. Die Abtastrate der Sensoren spielt für die Reliabilität der Modalanalyse eine wesentliche Rolle. Wird die maximal zu erwartende Systemfrequenz mit  $f_{max}$  angegeben, ist nach dem Nyquist-Theorem eine Abtastrate  $f_s$  zu wählen, die mindestens doppelt so groß ist wie die Frequenz  $f_{max}$  (Möser, 2018, S. 7). Das Nyquist-Theorem, auch als Shannon-Theorem bekannt (Mühl, 2017, S. 74), lautet demnach:

$$f_s \geq 2 \cdot f_{max} \quad (3.64)$$

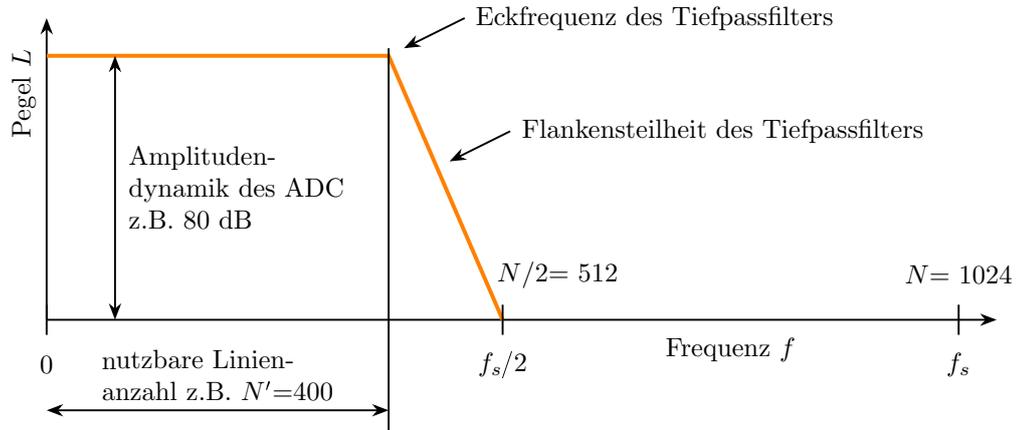


Abbildung 3.13: Beispiel eines Tiefpassfilters nach Kuttner (2015, S. 289)

Andernfalls lassen sich Mehrdeutigkeiten des Eingangssignals nicht ausschließen, sodass bei der Auswertung eines messtechnisch ermittelten Zeitsignals ursprünglich nicht vorhandene Frequenzen im Spektrum erscheinen (Möser, 2010, S. 545 ff.). Diese Wirkung wird auch als Alias-Effekt bezeichnet. Abtastraten  $f_s$ , die das Nyquist-Theorem unterschreiten, können nicht mehr ausreichend nachbearbeitet werden und führen zu falschen Frequenzgängen (Avitabile, 2018, S. 101). Um dies zu vermeiden, besitzt das Daten verarbeitende Frontend üblicherweise einen Tiefpassfilter, welcher den Alias-Effekt für den Anwendenden bestmöglich reduziert. Anstelle des Mindestwerts aus Gleichung 3.64 werden zum Teil zusätzliche Frequenzen als Schutz gefiltert (Ewins, 2000b, S. 215). Abbildung 3.13 demonstriert die Wirkung eines analogen Tiefpassfilters zur Reduktion bestimmter Frequenzen innerhalb des ursprünglichen Zeitsignals. In diesem Beispiel wird die ursprüngliche Linienanzahl des Spektrums  $N$  von 1024 um 61 % auf 400 nutzbare Frequenzlinien verringert. Damit können Systemfrequenzen  $f_{max}$  sicher identifiziert werden, die den äquivalenten Anteil an der Abtastfrequenz  $f_s$  ausmachen.

Nach Anwendung des Aliasing-Tiefpassfilters liegt ein Zeitsignal mit einem zeitkontinuierlichen und wertkontinuierlichen Verlauf vor (Kuttner, 2015, S. 250 f.). Das analoge Signal stellt die kontinuierliche Darstellung einer bestimmten Messgröße dar und wird zur weiteren Verarbeitung in ein digitales Signal überführt. Dieser Prozess wird in Abbildung 3.14 in einem Flussdiagramm dargestellt. Im Gegensatz zu einem analogen Signal, ist ein digitales Signal sowohl zeitdiskret, da die Messgrößen an bestimmten Zeitpunk-

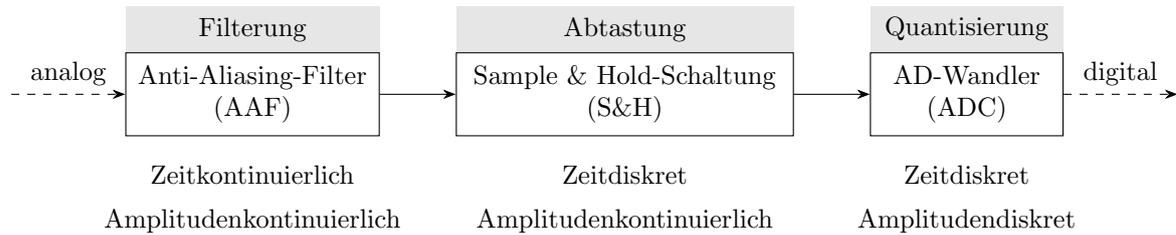


Abbildung 3.14: Umwandlung eines analogen Signals mit Tiefpassfilterung in ein digitales Signal in Anlehnung an Meyer (2017, S. 152 f.)

ten  $t$  abgetastet werden, als auch wertediskret, da die Amplituden in einer bestimmten endlichen Auflösung codiert werden (Mühl, 2017, S. 73). Die Einordnung der kontinuierlichen Amplitude in eine bestimmte Amplitudenstufe wird als Quantisierung bezeichnet. Wird das Signal zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t$  abgetastet, wird die Amplitude in einer Sample & Hold-Schaltung festgesetzt und anschließend bei der Quantisierung einer bestimmten Stufe zugeordnet und codiert. Die Auflösung eines Analog-Digital-Wandlers (ADC) mit der Bitzahl  $n$  ermöglicht  $2^n$  Ebenen zwischen der maximal und minimal erreichten Spannung des Sensors (Möser, 2010, S. 544). Die Quantisierungsstufen ergeben sich aus dem maximalen Eingangsspannungsbereich  $U_{max}$  zu (Mühl, 2017, S. 75):

$$\Delta U = \frac{U_{max}}{2^n - 1} \quad (3.65)$$

Durch die endliche Genauigkeit der digitalisierten Amplitude ergibt sich ein nicht rekonstruierbarer Informationsverlust, welcher auch als Quantisierungsrauschen bezeichnet wird (Meyer, 2017, S. 153). Dieser Wegfall ist im Hinblick weitergehender Berechnungsmethoden nicht vermeidbar und muss auf Seiten der Anwendenden auf ein nicht relevantes Minimum reduziert werden.

Das Zeitsignal liegt nun in digitalisierter Form über eine bestimmte Zeitspanne mit der Länge  $T$  vor. Aus der Abtastfrequenz  $f_s$  lässt sich die Abtastdifferenz  $\Delta t$  bestimmen:

$$\Delta t = \frac{1}{f_{Abt}} \quad (3.66)$$

Das diskrete Zeitsignal wird anschließend mit der Fourier-Transformation in einen Frequenzbereich überführt. Die Auswertung eines Zeitsignals der Zeitspanne  $T$  kann anhand

der Diskreten-Fourier-Transformation (DFT) erfolgen. Das Frequenzspektrum  $\underline{X}(n)$  wird auf Basis der DFT definiert zu (Kuttner, 2015, S. 280):

$$\underline{X}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot e^{-i2\pi \frac{kn}{N}} \quad (3.67)$$

Die aus dem Zeitsignal bekannten diskreten Wertepaare werden mit  $x(k)$  definiert.  $N$  ist die Anzahl der abgetasteten Werte aus dem Zeitsignal bzw. der im Spektrum dargestellten Linien und  $k$  ein Abzählkriterium von 0 bis  $N - 1$  (Kuttner, 2015, S. 279).

Die Transformation eines diskreten Zeitsignals in den komplexen Frequenzbereich ist aufwendig und wird üblicherweise durch einen Computer gelöst. Dabei ist die Anwendung der 1965 von Cooley und Tukey entwickelten Fast-Fourier-Transformation eine ökonomische Berechnungsmethode, um die Diskrete-Fourier-Transformation aus Gleichung 3.67 umzusetzen. Im Gegensatz zur allgemeinen Form der Diskreten-Fourier-Transformation, verzichtet die Fast-Fourier-Transformation auf redundante Berechnungsschritte. Der Algorithmus lässt sich besonders effizient anwenden, wenn der betrachtete Frequenzbereich  $N$  eine Zweierpotenz darstellt (Meyer, 2017, S. 175). Die Fast-Fourier-Transformation basiert auf der Annahme periodischer Zeitsignale, sodass die wiederholte Aneinanderreihung eines endlichen Zeitausschnitts mit der Länge  $T$  als Lösungsmethode herangezogen wird. Üblicherweise enthalten die Übergänge der sich wiederholenden Zeitspannen Unstetigkeiten in Form von Knicken oder Sprüngen. Dies wird als asynchrone Abtastung bezeichnet. Eine synchrone Abtastung liegt ausschließlich vor, wenn alle im Signal enthaltenen Schwingungsperioden als ganzzahliges Vielfaches die Zeitspanne darstellen. Die asynchrone Abtastung stellt den Standardfall dar (Kuttner, 2015, S. 283). Der daraus entstehende Fehler wird in der Strukturdynamik auch als Leakage-Effekt bezeichnet. Die Anwendung einer Wichtungsfunktion  $w(t)$ , in der Signalverarbeitung auch Fensterfunktion bezeichnet, ermöglicht eine Reduzierung des Leakage-Effekts. Die Periodizität wird dadurch näherungsweise erreicht, dass die Amplituden der Zeitsignale am Anfang bzw. Ende der Zeitspanne rechnerisch reduziert werden. Eine periodische Wiederholung dieser Zeitblöcke besitzt dadurch reduzierte Unstetigkeiten an den Übergängen.

Für das transformierte Zeitsignal  $x_T(t)$  gilt demnach (Ewins, 2000b, S. 216):

$$x_T(t) = x(t) \cdot w(t) \quad (3.68)$$

Während der Anti-Alias-Filter als Frequenzspektren-Filter verwendet wird, können die Fensterfunktionen als Zeitsignal bezogene Filter verstanden werden. Verschiedene dieser Wichtungsfunktionen existieren, wobei unter Umständen auf die Nutzung in Gänze verzichtet werden kann, falls die Aufzeichnungslänge einen ausreichenden Abfall der Schwingungsamplitude ermöglicht. Für eine genauere Darstellung der Funktionsform und ihrer Anwendungsbereiche wird auf die einschlägige Fachliteratur verwiesen (Avitabile, 2018; Ewins, 2000b). Die Anwendung der Fast-Fourier-Transformation ergibt eine komplexe Lösung, bestehend aus einem Amplitudenanteil und einer Frequenzgangkurve als Phasenunterschied der im Signal enthaltenen Frequenzen.

Mithilfe der Frequenzspektren lassen sich abschließend die Übertragungsfunktion und die Kohärenzfunktion ermitteln. Während die Übertragungsfunktion dem Anwendenden die Ermittlung der modalen Parameter ermöglicht, erlaubt die Kohärenzfunktion im Frequenzspektrum Aussagen darüber, inwieweit die Reaktion des Systems auf die Krafteinwirkung als Ursache zurückzuführen ist. Die Kohärenzfunktion kann einen Wert zwischen 0 und 1 annehmen, wobei der Wert 0 keine statistische Abhängigkeit und der Wert 1 eine volle statistische Abhängigkeit zwischen Ursache und Reaktion aufzeigt. Die Kohärenzfunktion kann als Qualitätsmaßstab hinsichtlich der durchgeführten Messung verstanden werden (Natke, 1992, S. 113 ff.).

Zur Messung der Eigenfrequenz und Dämpfung ist es theoretisch möglich, mit einer einzigen gemessenen Übertragungsfunktion auszukommen. Bei der Anwendung werden jedoch meistens zusätzlich Informationen hinsichtlich der Eigenform benötigt, sodass verschiedene Messpunkte im Verlauf des Bauteils berücksichtigt werden. Dies kann entweder der Fall sein, falls genaue Informationen für einen Optimierungsprozess erforderlich sind, sich die vorgefundenen Eigenfrequenzen nicht eindeutig einer bestimmten Mode zuordnen lassen oder Vergleiche zu älteren Messungen nötig sind. Es ist zu erwähnen, dass für die Bestimmung der modalen Eigenschaften, bestehend aus der Eigenkreisfrequenz, der Eigenform und der Dämpfung, lediglich eine Spalte bzw. Zeile der Matrix der Übertragungsfunktion  $\underline{H}$  aus Gleichung 3.62 benötigt wird (Möser, 2020, S. 10).

Sind die erforderlichen Übertragungsfunktionen generiert, lassen sich je nach Spektrenbreite Informationen mehrerer Moden herausarbeiten. Diverse Verfahren existieren, um die modalen Parameter direkt aus den gemessenen Übertragungsfunktionen abzuleiten. So ermöglicht zum Beispiel ein direktes visuelles oder rechnergestütztes Abgreifen der Maximalstellen, Aussagen hinsichtlich Eigenfrequenzen und Eigenformen zu treffen. Dies wird als Peak-Picking bezeichnet, beinhaltet bei der Überlagerung mehrerer Moden jedoch unter Umständen große Abweichungen zu den tatsächlichen Werten. Die rechnerische Erfassung der Dämpfung erfolgt anschließend durch vereinfachte Verfahren unter anderem über die Betrachtung des Zeitsignal-Abklingens der Schwingungsamplitude (free-decay method) oder die Schärfe der jeweiligen Amplitude (amplification method, half-power bandwidth method) (vgl. Paultre, 2011). Die vorgeschlagenen Methoden sind einfache Hilfsmittel, kurzfristig Informationen ohne größeren technischen Rechenaufwand zu erhalten. Sie sind jedoch stark abhängig von der Qualität der Messung und können die äußeren Einflüsse bestenfalls geringfügig von der eigentlichen Übertragungsfunktion unterscheiden. Vielversprechender sind dagegen moderne Optimierungsalgorithmen, welche die gemessenen Übertragungsfunktionen dazu verwenden, theoretische Übertragungsfunktionen solange iterativ anzupassen, bis sie mit den Messwerten bestmöglich übereinstimmen. Der Ansatz von Optimierungsalgorithmen reduziert die Störsignale innerhalb der Übertragungsfunktion und ermöglicht eine eindeutige Differenzierung der vorzufindenden Moden. Abbildung 3.15 demonstriert die Auswertung einer messtechnisch ermittelten Übertragungsfunktion durch ein nicht näher beschriebenes Optimierungsverfahren. Neben der tatsächlich erfassten Funktion, dargestellt durch den imaginären Anteil

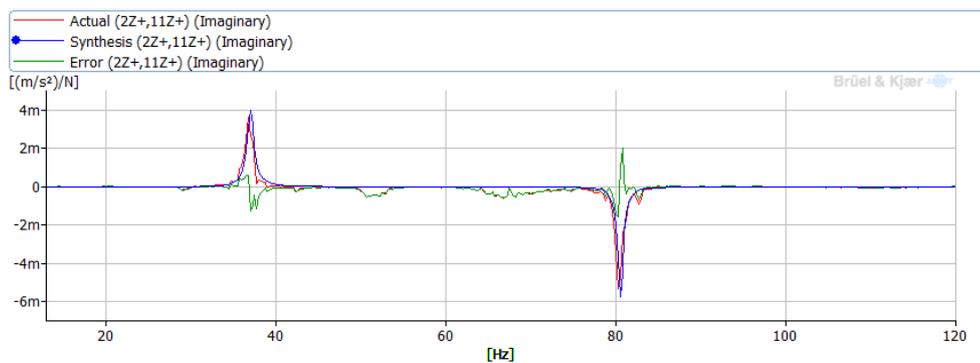


Abbildung 3.15: Beispiel einer optimierten Übertragungsfunktion

(rot), sind zusätzlich die synthetische Kurve (blau) sowie die Fehlerfunktion (grün) aus dem Optimierungsalgorithmus abgebildet. Zur Erstellung der Übertragungsfunktion liegen dem Anwendenden verschiedene Methoden zur Verfügung, welche in Abhängigkeit des Anwendungsfalls unterschiedliche Vor- und Nachteile bieten. Für eine genauere Beschreibung der Verfahren wird auf die einschlägige Fachliteratur verwiesen (Avitabile, 2018; Ewins, 2000b). Bei der händischen Eigenformermittlung ist zu beachten, vorzugsweise den Imaginärteil zum Abgreifen der Eigenformauslenkung heranzuziehen. Dieser entspricht im Resonanzzustand dem Wert der Magnitude und zeigt darüber hinaus Informationen hinsichtlich der Schwingungsrichtung an. Der gleichzeitig auftretende Realteil nimmt innerhalb der Resonanz einen Wert von 0 an (Paultre, 2011, S. 3).

## 3.5 Programmiersprache

Im Rahmen dieser Forschungsarbeit werden verschiedene Softwareprogramme mithilfe eines differenzierten Entwicklungsprozesses durch den Autor selbstständig programmiert. Die im Laufe der Abhandlung dargestellten theoretischen Ausgangsmodelle und Optimierungsprozesse des dynamischen und statischen Verfahrens zur Systemidentifikation werden mit der freien Programmiersprache R (Version 4.0.1) auf eine digitale Verarbeitungsebene überführt (s. R Core Team, 2020). Zur Erstellung und Anwendung der Programmiersprache wird die freie Ausgabe der Entwicklungsumgebung RStudio der Version 2021.09.0 (Microsoft Windows) verwendet (s. Posit PBC, 2021).

Im Laufe dieser Arbeit werden mehrere Softwareprogramme codiert. Dazu gehören die nachfolgenden Programme zur Berechnung von statischen und dynamischen Ausgangsmodellen sowie zur Implementierung in einen jeweiligen Optimierungsprozess für die Auswertung der statischen und dynamischen Versuchsreihen:

- *DynamBasic* (dynamisches Basismodell, s. Abschnitt 4.1.1.2)
- *DynamOpti* (dynamisches Identifikationsverfahren, s. Abschnitt 4.1.2.3)
- *StaticBasic* (statisches Basismodell, s. Abschnitt 4.2.1.2)
- *StaticOpti* (statisches Identifikationsverfahren, s. Abschnitt 4.2.2.3)

Darüber hinaus dienen Hilfsprogramme dazu, einen Knicklängenbeiwert aus den optimierten Lagerungsbedingungen zu ermitteln und die zuvor genannten Hauptprogramme zu Validierungszwecken in gesonderte Berechnungsschleifen zu integrieren. Alle Eingaben der für die Berechnung erforderlichen Parameter erfolgt im Programmcode, während die Ausgabewerte manuell über die Konsole ausgelesen werden.

## 4 Phase I: Programmentwicklung

Grundlage dieser Forschungsarbeit ist die Erstellung von zwei Verfahren zur dynamischen und statischen Systemidentifikation eines kontinuierlichen Stabelements (s. Abschnitt 3.2). Die vorgestellte Analysemethodik wird anschließend in ein Softwareprogramm überführt. Abschnitt 4.1 beschreibt die Entwicklung des dynamischen Analyseverfahrens auf Grundlage der experimentell ermittelten Eigenkreisfrequenz und Eigenform. Das statische Vergleichsprogramm wird mithilfe einer experimentell erfassten Verformungskurve auf Basis einer Einzellastbeanspruchung entwickelt und in Abschnitt 4.2 dargestellt. Abschnitt 4.3 beschreibt das in dieser Abhandlung verwendete normgerechte Berechnungsverfahren des Knicklängenbeiwerts für den Stabilitätsnachweis nach dem Ersatzstabverfahren.

### 4.1 Programmentwicklung eines dynamischen Verfahrens zur Systemidentifikation

Die experimentelle Arbeit stellt ein Verfahren zur Systemidentifikation vor, welches die gemessene erste Eigenkreisfrequenz und korrespondierende Eigenform zur Systemoptimierung verwendet. Auf Basis eines Ausgangsmodells werden die Entwurfsvariablen solange angepasst bis eine bestmögliche Übereinstimmung mit den experimentellen Parametern vorliegt. Die Beschreibung des dynamischen Basismodells einschließlich seines Transfers in das Programm *DynamBasic* erfolgt in Abschnitt 4.1.1. Anschließend überführt Abschnitt 4.1.2 das Ausgangsmodell in einen Optimierungsprozess und stellt das Programm *DynamOpti* auf Basis einer zu optimierenden Abstandsfunktion der experimentell und theoretisch ermittelten modalen Systemeigenschaften vor.

### 4.1.1 Dynamisches Basismodell

Der nachfolgende Abschnitt beschreibt neben den theoretischen Grundlagen des Basisstabs in Abschnitt 4.1.1.1, die Überführung in das Basisprogramm *DynamBasic* in Abschnitt 4.1.1.2. Anschließend werden in Abschnitt 4.1.1.3 ausgewählte Eigenformen bezogen auf idealisierte Standardlager visualisiert. Der Einfluss der Normalkraft auf die modalen Parameter wird abschließend in Abschnitt 4.1.1.4 näher beschrieben.

#### 4.1.1.1 Theoretische Grundlagen

Grundlage des vorgestellten Verfahrens ist das analytische Modell eines dynamischen Basisstabs, der die Ermittlung von Eigenkreisfrequenzen und Eigenformen ermöglicht. Abbildung 4.1 visualisiert einen kontinuierlichen, ideal geraden Stab, aus dem ein kurzer Abschnitt herausgeschnitten wird. Das in der Mitte infinitesimal kleine ruhende Element mit der Länge  $dx$  dient als Grundlage für die Herleitung des dynamischen Gleichgewichts eines kontinuierlichen Biegeschwingers mit einer über den Träger konstanten Stabsteifigkeit  $EI$  und Massenverteilung  $\mu$ . Die Herleitungen basieren auf den Annahmen des Euler-Bernoulli-Balkens (vgl. Dinkler, 2019, S. 33, 44):

- Der Balkenquerschnitt bleibt im Zuge einer Verformung in sich eben.
- Der Balkenquerschnitt bleibt im Zuge einer Verformung senkrecht zur Stabachse.
- Die Verformungen des Balkens sind sehr klein im Verhältnis zur Stablänge, sodass ihr Effekt auf das Gleichgewicht vernachlässigbar ist (Theorie I. Ordnung).
- Der Werkstoff verformt sich linear elastisch nach dem Hooke'schen Gesetz.
- Lokale Spannungsverteilungen an Kräfteinleitungsbereichen sind vernachlässigbar.

Da es sich um die Ermittlung der Eigenschwingungsparameter handelt, werden keine äußeren dynamischen Lasten berücksichtigt. Die Berücksichtigung etwaiger statischer Belastungen quer zur Systemlinie, wie dem möglichen Eigengewicht in Horizontallage, bleibt unberücksichtigt, da sie lediglich in einer geringfügigen Änderung der Vorkrümmung resultieren und für die dynamische Berechnung von weitestgehend druckbeanspruchten planmäßig geraden Stabelementen keine Relevanz aufweisen. In Abschnitt 3.4.1 wird ge-

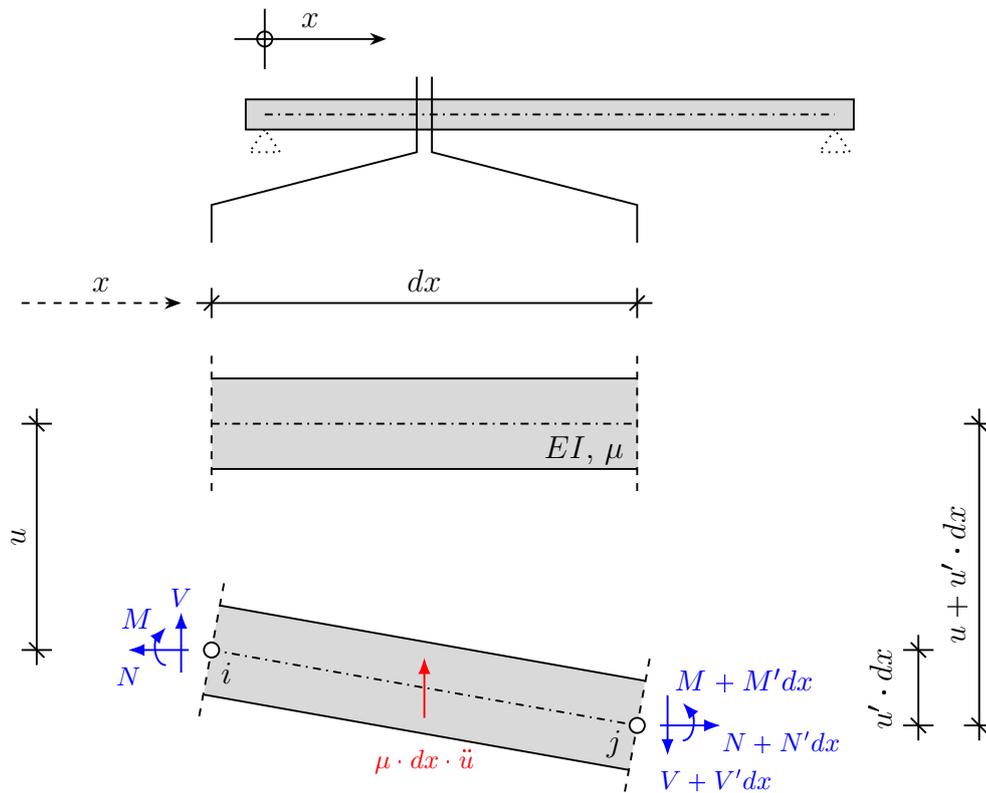


Abbildung 4.1: Dynamisches Kräftesystem an einem Euler-Bernoulli-Balken

zeigt, dass die Eigenfrequenzen des gedämpften Schwingers mit denen eines ungedämpften schwingenden Systems im baupraktischen Sinn identisch sind. Des Weiteren ergeben sich aufgrund von Dämpfungen keine Änderung der Eigenform (Ewins, 2000b, S. 63), sodass an dieser Stelle ein ungedämpftes Basismodell gewählt wird. Darüber hinaus werden die Rotationsträgheit und die Schubsteifigkeit des Querschnitts vernachlässigt. Einwirkende Normalkräfte werden ausschließlich an den Stabenden eingeleitet und während der Schwingungen aufgrund geringer Schwingungsamplituden als konstant angenommen.

Im mittleren Teil von Abbildung 4.1 ist ein infinitesimal kurzes Stück eines Balkens abgebildet. Das Teilstück ist dynamisch unbelastet und befindet sich daher auf der Nulllinie, von der aus die Verformung  $u$  ihren Ursprung findet. Kommt es durch eine einmalige äußere Krafteinleitung, zum Beispiel durch einen Stoß, zu einer Anregung, reagiert das System in einer charakteristischen Schwingungsantwort, in Form der Eigenfrequenzen und Eigenformen.

Im unteren Bereich der Abbildung 4.1 ist das in Schwingung gebrachte System aufgezeichnet, welches sich zu dem eingefrorenen Zeitpunkt unterhalb der ursprünglichen statischen Systemlinie befindet. Auch wenn sich die einzelnen aufgezeigten Kräfte dieses schwingenden Balkens zu jedem Zeitpunkt verändern, muss zu jedem spezifischen Zeitpunkt  $t$  ein dynamisches Kräftegleichgewicht herrschen. Mit Einbeziehung der in Abbildung 4.1 aufgetragenen Kräfte werden die drei Gleichgewichtsbedingungen des ebenen Raums definiert. Ableitungen nach der Verschiebung  $u$  werden mit Hochstrichen und Ableitungen nach der Zeit  $t$  mit Punkten notiert.

$$\overset{\leftarrow}{\sum} F_N = 0 : \quad N(x, t) - [N(x, t) + N'(x, t) \cdot dx] = 0 \quad (4.1)$$

$$N(x, t)' = 0 \quad (4.2)$$

$$\overset{\uparrow}{\sum} F_V = 0 : \quad V(x, t) - [V(x, t) + V'(x, t) \cdot dx] + \mu \cdot dx \cdot \ddot{u}(x, t) = 0 \quad (4.3)$$

$$V'(x, t) = \mu \cdot \ddot{u}(x, t) \quad (4.4)$$

$$\overset{\curvearrowright}{\sum} M_{(j)} = 0 : \quad M(x, t) - [M(x, t) + M'(x, t) \cdot dx] + V(x, t) \cdot dx - N(x, t) \cdot u'(x, t) \cdot dx + \frac{\mu \cdot dx^2 \cdot \ddot{u}(x, t)}{2} = 0 \quad (4.5)$$

$$M'(x, t) = V(x, t) - N(x, t) \cdot u'(x, t) \quad (4.6)$$

Nach dem Ableiten von Gleichung 4.6 und dem Entfernen vernachlässigbarer Terme, wird die erste Ableitung der Querkraft  $V$  durch den Term aus Gleichung 4.4 ersetzt:

$$M''(x, t) = -N(x, t) \cdot u'' + \mu \cdot \ddot{u}(x, t) \quad (4.7)$$

Wird die zweifache Ableitung des Moments mit der Momenten-Krümmungs-Beziehung eines Biegebalkens (Gross et al., 2021, S. 104)

$$M(x, t) = -EI \cdot u''(x, t) \quad (4.8)$$

$$M''(x, t) = -EI \cdot u''''(x, t) \quad (4.9)$$

und die Beschleunigung  $\ddot{u}(x, t)$  mit der gleichmäßig beschleunigten Kreisbewegung

$$\ddot{u}(x, t) = -\omega^2 \cdot u(x, t) \quad (4.10)$$

aus dem Eigenschwingungsansatz (Proske, 2021, S. 59)

$$u(x, t) = U(x) \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (4.11)$$

$$\dot{u}(x, t) = \omega \cdot U(x) \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (4.12)$$

$$\ddot{u}(x, t) = -\omega^2 \cdot U(x) \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (4.13)$$

ersetzt, ergibt sich die zu lösende homogene partielle Differentialgleichung:

$$EI \cdot u(x, t)^{\prime\prime\prime\prime} - N \cdot u(x, t)^{\prime\prime} - \mu\omega^2 \cdot u(x, t) = 0 \quad (4.14)$$

Mit  $D$  als Drucklast, definiert durch positive Werte folgt:

$$EI \cdot u(x, t)^{\prime\prime\prime\prime} + D \cdot u(x, t)^{\prime\prime} - \mu\omega^2 \cdot u(x, t) = 0 \quad | : (EI) \quad (4.15)$$

Wird die Differentialgleichung durch die Biegesteifigkeit  $EI$  dividiert, ergibt sich:

$$u(x, t)^{\prime\prime\prime\prime} + \frac{D}{EI} \cdot u(x, t)^{\prime\prime} - \frac{\mu\omega^2}{EI} \cdot u(x, t) = 0 \quad (4.16)$$

Die Verschiebung  $u$  kann über eine konkrete Stelle  $x$  und einen bestimmten Zeitpunkt  $t$  formal vollständig definiert werden. Eine derartig zweidimensionale Betrachtung ist für die Eigenwert- und Eigenformermittlung jedoch nicht zielführend, da konkrete Verformungsgrößen nicht von Bedeutung sind. Ausschließlich das über die Stablänge betrachtete Verhältnis der Durchbiegungen ist von Interesse. Dieses Verhältnis ist bei Schwingungsbetrachtungen zu jedem Zeitpunkt  $t$  der Schwingung identisch, sodass die Abhängigkeit von Gleichung 4.16 auf  $x$  reduziert wird. Die Variable  $t$  kann dementsprechend als Skalierfaktor für die Verformungskurve einer Eigenformlösung betrachtet werden. Die Differentialgleichung besitzt dementsprechend unendlich viele Lösungen für die Darstellung der skalierbaren Eigenformen. Lediglich die Verformungsverhältnisse einzelner Punkte zuein-

ander sowie die für die Baupraxis wichtigen Eigenkreisfrequenzen  $\omega_n$  können eindeutig definiert werden. Die Differentialgleichung der Biegeschwingung eines kontinuierlichen Trägers mit einer Normalkraftbeanspruchung  $D$  ergibt sich demnach zu:

$$u(x)^{''''} + \frac{D}{EI} \cdot u(x)'' - \frac{\mu\omega^2}{EI} \cdot u(x) = 0 \quad (4.17)$$

Die gewöhnliche homogene Differentialgleichung kann nun mit dem nachfolgenden Ansatz und seinen Ableitungen gelöst werden:

$$u(x) = Ue^{px} \quad (4.18)$$

$$u(x)' = Up \cdot e^{px} \quad (4.19)$$

$$u(x)'' = Up^2 \cdot e^{px} \quad (4.20)$$

$$u(x)^{'''} = Up^3 \cdot e^{px} \quad (4.21)$$

$$u(x)^{''''} = Up^4 \cdot e^{px} \quad (4.22)$$

Die Funktionen 4.18, 4.20 und 4.22 werden in die Differentialgleichung aus 4.17 eingesetzt:

$$p^4 \cdot e^{px} + \frac{D}{EI} \cdot p^2 \cdot e^{px} - \frac{\mu\omega^2}{EI} \cdot e^{px} = 0 \quad (4.23)$$

$$e^{px} \cdot \underbrace{\left( p^4 + \frac{D}{EI} \cdot p^2 - \frac{\mu\omega^2}{EI} \right)}_{\text{charakteristische Gleichung} \stackrel{!}{=} 0} = 0 \quad (4.24)$$

Die charakteristische Gleichung muss 0 sein, da ansonsten keine triviale Lösung existiert. Die zu lösende Gleichung ergibt sich demnach zu:

$$p^4 + \frac{D}{EI} \cdot p^2 - \frac{\mu\omega^2}{EI} = 0 \quad (4.25)$$

Zunächst wird  $p^2 = z$  substituiert:

$$z^2 + \frac{D}{EI} \cdot z - \frac{\mu\omega^2}{EI} = 0 \quad (4.26)$$

Anschließend lassen sich die beiden Unbekannten  $z_1$  und  $z_2$  bestimmen:

$$z_{1,2} = -\frac{D}{2 \cdot EI} \pm \sqrt{\left(\frac{D}{2 \cdot EI}\right)^2 + \frac{\mu\omega^2}{EI}} \quad (4.27)$$

Die abschließende Resubstituierung ergibt die nachfolgenden Lösungen  $p_1$  bis  $p_4$ :

$$p_1 = +\sqrt{-\frac{D}{2 \cdot EI} + \sqrt{\left(\frac{D}{2 \cdot EI}\right)^2 + \frac{\mu\omega^2}{EI}}} \quad (4.28)$$

$$p_3 = -\sqrt{-\frac{D}{2 \cdot EI} + \sqrt{\left(\frac{D}{2 \cdot EI}\right)^2 + \frac{\mu\omega^2}{EI}}} = -p_1 \quad (4.29)$$

$$p_2 = -i\sqrt{\frac{D}{2 \cdot EI} + \sqrt{\left(\frac{D}{2 \cdot EI}\right)^2 + \frac{\mu\omega^2}{EI}}} \quad (4.30)$$

$$p_4 = +i\sqrt{\frac{D}{2 \cdot EI} + \sqrt{\left(\frac{D}{2 \cdot EI}\right)^2 + \frac{\mu\omega^2}{EI}}} = -p_2 \quad (4.31)$$

Die Werte  $p_i$  werden anschließend in die Lösung für eine homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten eingesetzt:

$$u(x) = C_1 \cdot e^{p_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{-p_1 \cdot x} + C_3 \cdot \cos(p_2 \cdot x) + C_4 \cdot \sin(p_2 \cdot x) \quad (4.32)$$

Mit der hyperbolischen Funktion (Bosch, 2002, S. 67)

$$e^x = \cosh(x) + \sinh(x) \quad (4.33)$$

wird die Gleichung umgeformt und differenziert (vgl. Petersen und Werkle, 2017, S. 685 f.):

$$u(x) = C_1 \cdot \cosh(p_1 x) + C_2 \cdot \sinh(p_1 x) + C_3 \cdot \cos(p_2 x) + C_4 \cdot \sin(p_2 x) \quad (4.34)$$

$$u(x)' = C_1 p_1 \cdot \sinh(p_1 x) + C_2 p_1 \cdot \cosh(p_1 x) - C_3 p_2 \cdot \sin(p_2 x) + C_4 p_2 \cdot \cos(p_2 x) \quad (4.35)$$

$$u(x)'' = C_1 p_1^2 \cdot \cosh(p_1 x) + C_2 p_1^2 \cdot \sinh(p_1 x) - C_3 p_2^2 \cdot \cos(p_2 x) - C_4 p_2^2 \cdot \sin(p_2 x) \quad (4.36)$$

$$u(x)''' = C_1 p_1^3 \cdot \sinh(p_1 x) + C_2 p_1^3 \cdot \cosh(p_1 x) + C_3 p_2^3 \cdot \sin(p_2 x) - C_4 p_2^3 \cdot \cos(p_2 x) \quad (4.37)$$

Anschließend müssen vier Randbedingungen formuliert werden, um die Konstanten  $C_1$  bis  $C_4$  zu ermitteln. Die Randbedingungen sind abhängig von den Auflagerbedingungen des Systems. Die Auswertung von idealen Lagerungen wird in diverser Fachliteratur einschließlich Berechnungshilfen dargestellt (vgl. Petersen und Werkle, 2017). Diese Arbeit benötigt im Zuge des Optimierungsprozesses genauere Angaben hinsichtlich der modalen Parameter. Abbildung 4.2 demonstriert ein Basismodell mit der Systemlänge  $L$  und den konstanten Querschnittseigenschaften  $EI$  und  $\mu$ , wie es ebenfalls von Ding et al. (2020, S. 2) verwendet wird. Der Stab besitzt an den beiden Stabenden  $i$  und  $j$  jeweils eine Dreh-

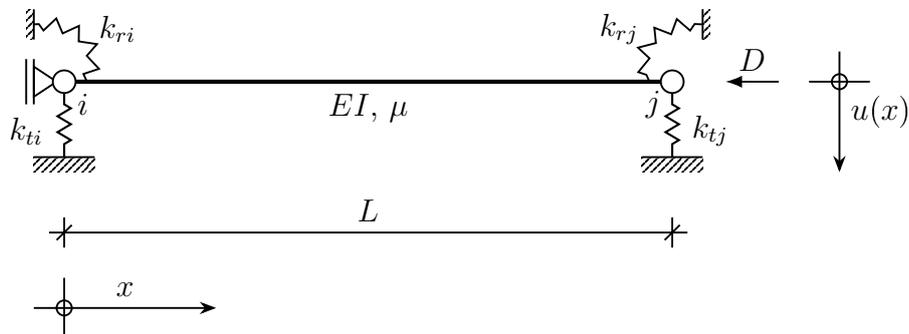


Abbildung 4.2: Basisstab für das dynamische Analysemodell

feder  $k_r$  und eine Wegfederung  $k_t$ . Die vier Randbedingungen lassen sich entsprechend ableiten:

$$\text{I :} \quad + EI \cdot u(0)'' \quad = k_{ri} \cdot u(0)' \quad (\text{Drehfeder links}) \quad (4.38)$$

$$\text{II :} \quad - EI \cdot u(L)'' \quad = k_{rj} \cdot u(L)' \quad (\text{Drehfeder rechts}) \quad (4.39)$$

$$\text{III :} \quad - EI \cdot u(0)''' \quad = k_{ti} \cdot u(0) \quad (\text{Wegfeder links}) \quad (4.40)$$

$$\text{IV :} \quad + EI \cdot u(L)''' \quad = k_{tj} \cdot u(L) \quad (\text{Wegfeder rechts}) \quad (4.41)$$

Das resultierende lineare Gleichungssystem wird allgemein definiert zu:

$$\underline{A} * \{C\} = 0 \quad (4.42)$$

Die Matrix  $\underline{A}$  und der Vektor  $\{C\}$  lauten:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

$$\{C\} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \quad (4.44)$$

Die vollständige Beschreibung von Gleichung 4.42 ergibt sich zu:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = 0 \quad (4.45)$$

Nach Einsetzen der vier Randbedingungen in die Gleichungen 4.34 bis 4.37 und Übertragung in das Gleichungssystem 4.42 ergeben sich die Koeffizienten der Matrix  $\underline{A}$ :

$$a_{11} = -EI \cdot p_1^2 \quad (4.46)$$

$$a_{12} = +k_{ri} \cdot p_1 \quad (4.47)$$

$$a_{13} = +EI \cdot p_2^2 \quad (4.48)$$

$$a_{14} = +k_{ri} \cdot p_2 \quad (4.49)$$

$$a_{21} = +EI \cdot p_1^2 \cdot \cosh(p_1 \cdot L) + k_{rj} \cdot p_1 \cdot \sinh(p_1 \cdot L) \quad (4.50)$$

$$a_{22} = +EI \cdot p_1^2 \cdot \sinh(p_1 \cdot L) + k_{rj} \cdot p_1 \cdot \cosh(p_1 \cdot L) \quad (4.51)$$

$$a_{23} = -EI \cdot p_2^2 \cdot \cos(p_2 \cdot L) - k_{rj} \cdot p_2 \cdot \sin(p_2 \cdot L) \quad (4.52)$$

$$a_{24} = -EI \cdot p_2^2 \cdot \sin(p_2 \cdot L) + k_{rj} \cdot p_2 \cdot \cos(p_2 \cdot L) \quad (4.53)$$

$$a_{31} = +k_{ti} \quad (4.54)$$

$$a_{32} = +EI \cdot p_1^3 \quad (4.55)$$

$$a_{33} = +k_{ti} \quad (4.56)$$

$$a_{34} = -EI \cdot p_2^3 \quad (4.57)$$

$$a_{41} = -EI \cdot p_1^3 \cdot \sinh(p_1 \cdot L) + k_{tj} \cdot \cosh(p_1 \cdot L) \quad (4.58)$$

$$a_{42} = -EI \cdot p_1^3 \cdot \cosh(p_1 \cdot L) + k_{tj} \cdot \sinh(p_1 \cdot L) \quad (4.59)$$

$$a_{43} = -EI \cdot p_2^3 \cdot \sin(p_2 \cdot L) + k_{tj} \cdot \cos(p_2 \cdot L) \quad (4.60)$$

$$a_{44} = +EI \cdot p_2^3 \cdot \cos(p_2 \cdot L) + k_{tj} \cdot \sin(p_2 \cdot L) \quad (4.61)$$

Gleichung 4.42 kann nur gelöst werden, wenn die Determinante von  $\underline{A}$  den Wert 0 annimmt. Wird die Bedingung

$$\det \underline{A} \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.62)$$

durch die Lösungen  $p_1$  und  $p_2$  erfüllt, werden anschließend die Eigenkreisfrequenzen  $\omega$  des zu untersuchenden Systems mit den Gleichungen 4.28 und 4.30 ermittelt. Werden die Lösungen in Gleichung 4.42 eingesetzt und zusätzlich eine der Unbekannten  $C$  einem festen Wert zugeordnet, ergeben sich die korrespondierenden Eigenformverläufe. Wird  $C_1$  gleich 1 gesetzt, zeigt sich das zu lösende lineare Gleichungssystem zu:

$$\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -a_{21} \\ -a_{31} \\ -a_{41} \end{Bmatrix} \quad (4.63)$$

Werden die ermittelten Unbekannten  $C_2$  bis  $C_4$  zusammen mit  $C_1$  und der entsprechenden Eigenkreisfrequenz  $\omega_n$  in Gleichung 4.34 eingesetzt, ergibt sich der stetige Eigenformverlauf. Es lassen sich nun die modalen Parameter des in Abbildung 4.2 dargestellten Basisstabs in Form der Eigenkreisfrequenzen und Eigenformen bestimmen. Da es sich um ein kontinuierliches System verteilter Masse und Steifigkeit handelt, können unendlich viele Frequenzen  $\omega$  gefunden werden, die Gleichung 4.63 erfüllen.

Mit den bisherigen Darstellungen ist es möglich, einen Stab der Länge  $L$  mit kontinuierlicher Biegesteifigkeit  $EI$  und Massenverteilung  $\mu$  sowie Federsteifigkeiten  $k$  zu berechnen. Die Werte der Lagersteifigkeit, in Form von Weg- und Drehfedern  $k_r$  und  $k_t$ , entscheiden über die Größenordnung des jeweiligen rotatorischen und translatorischen Einspanneffekts. Jedoch kann der explizite Werte dieser Steifigkeit  $k$  erst mit zusätzlichem Wissen über Systemlänge  $L$  und Biegesteifigkeit  $EI$  ganzheitlich eingeordnet werden. So kann eine bestimmte Auflagersteifigkeit  $k$  für einen sehr langen Träger mit geringer Biegesteifigkeit als Einspannung angesetzt werden, während für einen kurzen Stab mit sehr hoher Biegesteifigkeit der gleiche Wert einen gelenkigen Übergangseffekt repräsentiert. Zur ingenieurmäßigen Einschätzung der Lagerungsbedingungen ist ein skalarer Wert erforderlich, der die Lager- und Querschnittssteifigkeiten sowie die Systemlänge vereint.

Der Grad einer Drehfedereinspannung  $\beta$  wird für zwei Systempunkte  $i$  und  $j$  nach Abbildung 4.2 definiert werden zu (Türker et al., 2009, S. 1540):

$$\beta_{ri} = \frac{k_{ri}L}{3EI + k_{ri}L} \quad (4.64)$$

$$\beta_{rj} = \frac{k_{rj}L}{3EI + k_{rj}L} \quad (4.65)$$

Für die dimensionslose Darstellung einer Wegfedersteifigkeit wird folgender Ansatz vorgeschlagen (vgl. Kernicky et al., 2018, S. 404):

$$\beta_{ti} = \frac{k_{ti}L^3}{3EI + k_{ti}L^3} \quad (4.66)$$

$$\beta_{tj} = \frac{k_{tj}L^3}{3EI + k_{tj}L^3} \quad (4.67)$$

Gleichungen 4.64 bis 4.67 nehmen einen Wert zwischen 0 für eine ideal freie und 1 für eine vollständig steife Lagerung an. Abbildung 4.3 demonstriert den Verlauf von  $\beta_r$  für den Drehfederanschluss eines Hohlprofils mit rechteckigem Querschnitt der Nenngröße  $140 \times 80$  mm mit einer Nennwanddicke von 4,0 mm. Auf Basis eines E-Moduls von  $21\,000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$  ergibt sich bei Betrachtung der stärkeren Querschnittsrichtung die Biegesteifigkeit  $EI$  zu  $0,926 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$ . Abbildung 4.3 zeigt den Verlauf des Rotationseinspanngrads  $\beta_r$  in Abhängigkeit der Federsteifigkeit  $k_r$  verschiedener Systemlängen  $L$  zwischen 2,5 m und

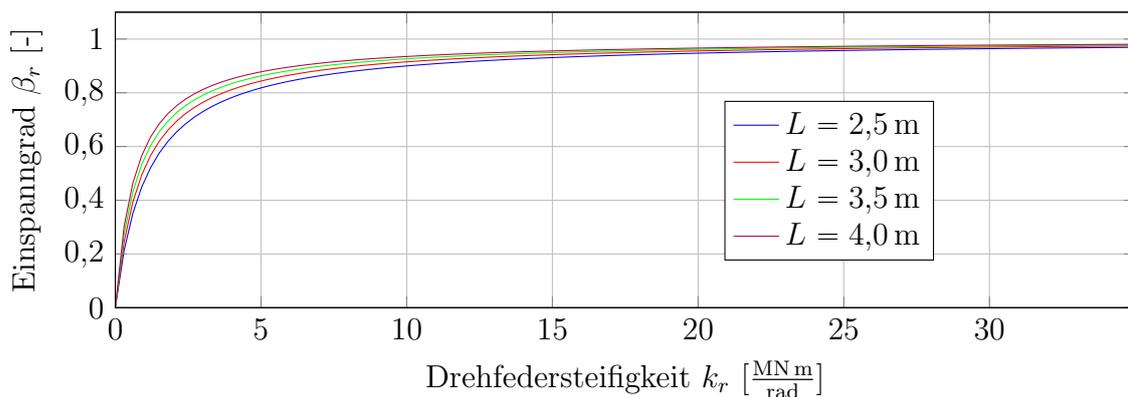


Abbildung 4.3: Einspanngrad  $\beta_r$  in Abhängigkeit der Drehfedersteifigkeit  $k_r$  für eine Biegesteifigkeit  $EI$  von  $0,926 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$  unter verschiedenen Systemlängen  $L$

4,0 m. Alle dargestellten Kurven nähern sich mit steigender Drehfedersteifigkeit  $k_r$  dem  $\beta_r$  Wert 1 an, wobei dieser ausschließlich rechnerisch erreicht werden kann, wenn die Biegesteifigkeit  $EI$  den Wert 0 annimmt. Die Steigerung des Einspanngrads  $\beta_r$  nimmt mit zunehmender Drehfedersteifigkeit  $k_r$  deutlich ab, sodass bei zunehmenden Einspanneffekten  $\beta$  überproportional große Betragsänderungen der Drehfedersteifigkeit  $k_r$  zugrunde liegen. Ein vergleichbares Verhalten zeigt sich für den Einspanngrad der Wegfedersteifigkeit  $\beta_t$ . Auf eine separate Darstellung wird im Zuge der Abhandlung verzichtet.

#### 4.1.1.2 Überführung in das Programm DynamBasic

Eine rein analytische Auswertung der in Abschnitt 4.1.1.1 dargestellten Beziehungen ist für die Ermittlung der modalen Parameter eines konkret definierten Stabs aufwendig und nur mit großem Arbeitsaufwand zu bewerkstelligen. Daher wird auf eine numerische Berechnung mithilfe der freien Programmiersprache R zurückgegriffen (s. R Core Team, 2020). Das eigens für diese Arbeit codierte Softwareprogramm trägt den Namen *DynamBasic* und ermöglicht auf Grundlage bekannter Systemparameter die Berechnung einer definierbaren Menge an Eigenkreisfrequenzen und korrespondierenden Eigenformen. Das Programm *DynamBasic* dient als Unterprogramm und wird im weiteren Verlauf in das Systemidentifikationsprogramm *DynamOpti* integriert (s. Abschnitt 4.1.2).

Der in Abbildung 4.4 dargestellte Ablaufplan stellt die Bearbeitungsschritte schematisch dar und verbindet die einzelnen Phasen mit den Gleichungen aus den Abschnitten 3.4.1.2 und 4.1.1.1. Zu Beginn des Programms müssen System- und Berechnungsparameter definiert werden. Es sind acht Systemparameter in Anlehnung an Abbildung 4.2 bestehend aus der Systemlänge  $L$ , der Massenverteilung  $\mu$ , der Querschnittssteifigkeit  $EI$ , der Normalkraftbeanspruchung  $D$  und den vier Federsteifigkeiten  $k$  erforderlich. Ebenso gehört die Anzahl der zu berechnenden Moden  $n_\omega$ , die Startfrequenz der Eigenkreisfrequenzermittlung  $\omega_{Start}$  und die Rechengenauigkeit  $\omega_\Delta$  zu den Eingabeparametern.

Grundlage des Programms *DynamBasic* ist die Auswertung der Determinante von Matrix  $\underline{A}$  aus Gleichung 4.42 in einem Schleifenprozess mit variierenden Frequenzen  $\omega$ . Ziel ist es, diejenigen Frequenzen  $\omega$  zu finden, bei der die Determinante der Matrix  $\underline{A}$  den Wert 0 annimmt. Diese Frequenzen erfüllen die Bedingung aus Gleichung 4.42 und stellen die Eigenkreisfrequenzen des Systems dar. Beginnend mit der Startfrequenz  $\omega_{Start}$

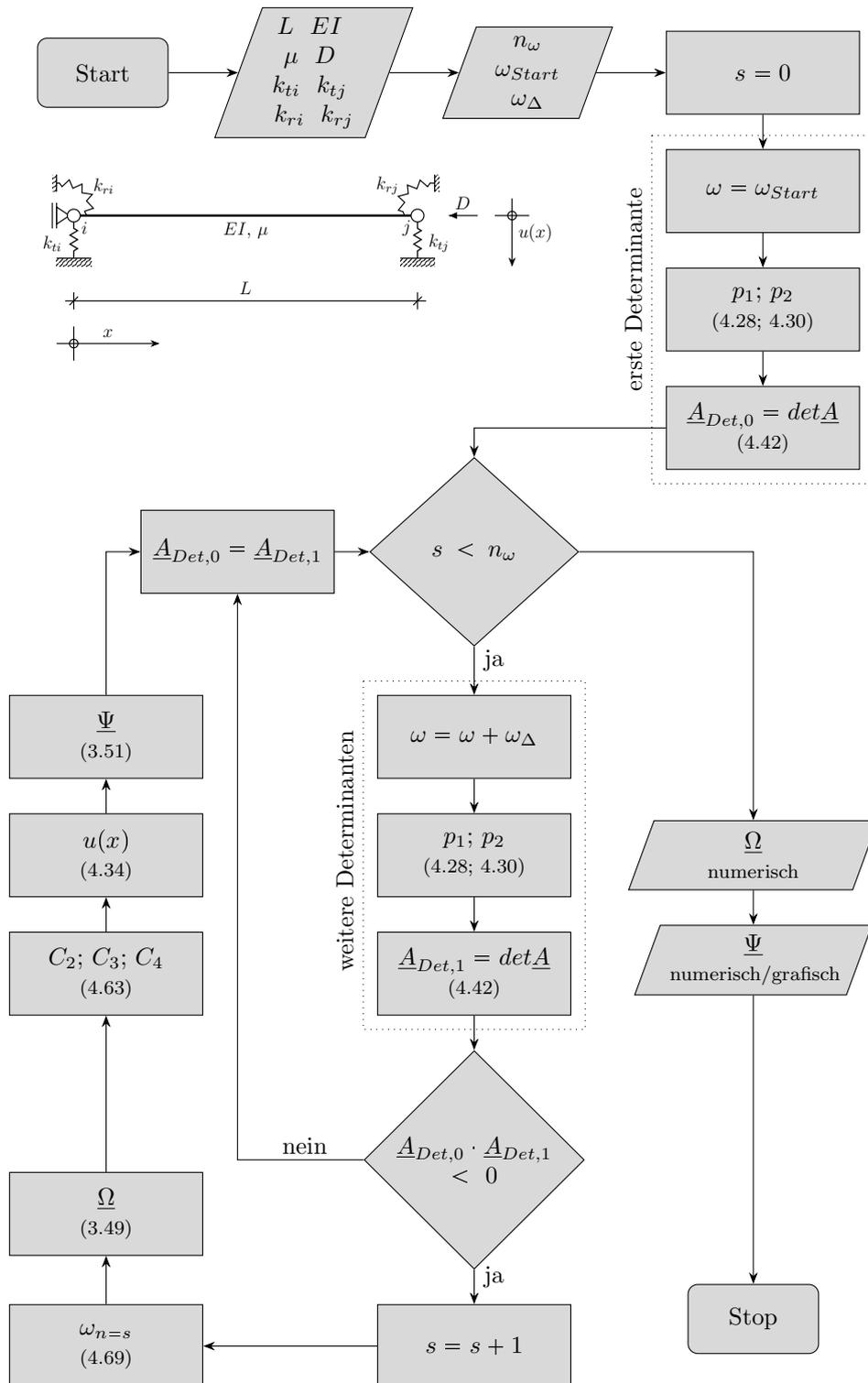


Abbildung 4.4: Schematischer Ablaufplan des Programms *DynamBasic*

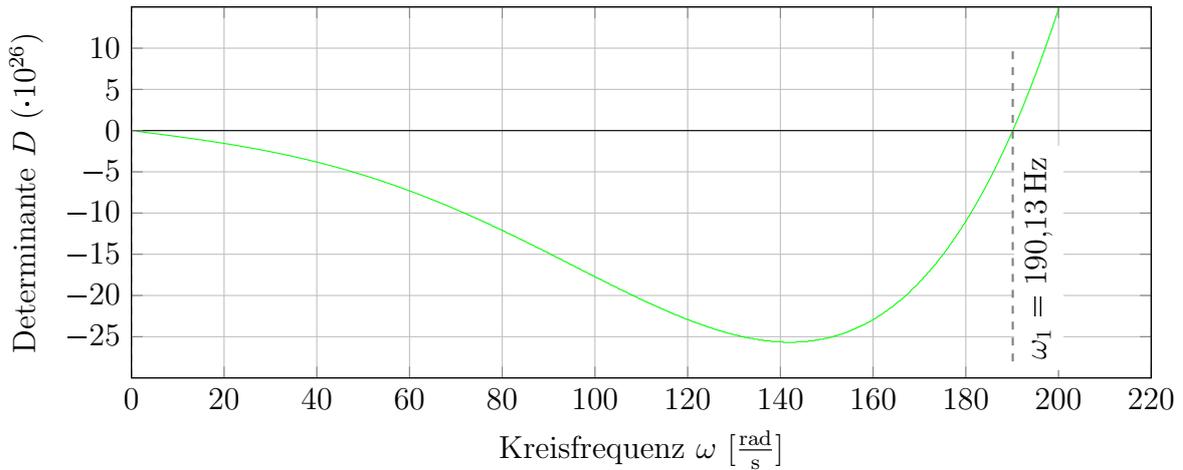


Abbildung 4.5: Darstellung eines exemplarischen Determinantenverlaufs

werden wiederholend in einem Abstand von  $\omega_\Delta$  zwei aufeinanderfolgende Determinanten  $\underline{A}_{Det,0}$  und  $\underline{A}_{Det,1}$  gebildet. Die Determinante  $\underline{A}_{Det,0}$  stellt in jedem Durchlauf den Wert mit der geringeren Frequenz dar, während die Determinante  $\underline{A}_{Det,1}$  die um  $\omega_\Delta$  größere Frequenz widerspiegelt. Die Berechnung der ersten Determinante  $\underline{A}_{Det,0}$  erfolgt für den Startwert  $\omega_{Start}$  außerhalb des Schleifenprozesses. Abbildung 4.5 zeigt exemplarisch die Kurve der Determinantenfunktion einer nicht näher beschriebenen Berechnung. Ergibt die Multiplikation von zwei aufeinanderfolgenden Determinanten  $D$  durch einen Vorzeichenwechsel der Lösungen einen negativen Wert, existiert eine Nullstelle und damit eine Eigenkreisfrequenz zwischen den für die beiden Determinanten angesetzten Frequenzen. Für die rechnerische Ermittlung der Eigenkreisfrequenz  $\omega_n$  wird näherungsweise eine lineare Funktion zwischen den beiden Wertepaaren  $(\omega - \omega_\Delta \mid \underline{A}_{Det,0})$  und  $(\omega \mid \underline{A}_{Det,1})$  gebildet und ihre Nullstelle als Eigenkreisfrequenz des Systems definiert. Die Berechnung erfolgt auf Basis der linearen Beziehung

$$y = m \cdot x + b \quad (4.68)$$

Werden beide Wertepaare  $(\omega - \omega_\Delta \mid \underline{A}_{Det,0})$  und  $(\omega \mid \underline{A}_{Det,1})$  in die Gleichung eingesetzt, ergibt sich aus der Definition  $x = \omega_n$  die Eigenkreisfrequenz des Stabs zu:

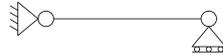
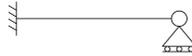
$$\omega_n = \omega - \omega_\Delta + \frac{\underline{A}_{Det,0} \cdot \omega_\Delta}{\underline{A}_{Det,0} - \underline{A}_{Det,1}} \quad (4.69)$$

Die Berechnung der Eigenkreisfrequenzen wird solange fortgesetzt bis die gewünschte Anzahl an Moden  $n_\omega$  mithilfe des programminternen Zählkriteriums  $s$  erreicht wird. Nach jeder berechneten Eigenkreisfrequenz  $\omega_n$  erfolgt die Ermittlung der korrespondierenden Eigenform über das in Gleichung 4.63 dargestellte lineare Gleichungssystem mit Ansatz der Eigenformfunktion aus Gleichung 4.34. Auf die Darstellung dieses Schleifenprozesses wird aus Gründen der Übersichtlichkeit an dieser Stelle verzichtet. Für die Berechnung und grafische Darstellung der Eigenform innerhalb des Programms *DynamBasic* ist eine Schrittweite von 0,01 m voreingestellt. Das Programm besitzt als Basiswerte zudem eine Startfrequenz  $\omega_{Start}$  von  $1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  und eine Genauigkeit  $\omega_\Delta$  von  $0,1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .

#### 4.1.1.3 Eigenformen von Systemen mit Standardlagerungen

Zur Veranschaulichung der Schwingungsformen werden die Eigenformverläufe von idealisierten Auflagersystemen mit *DynamBasic* berechnet. Tabelle 4.1 zeigt die vier berechneten Fälle skizzenhaft und weist ihnen Auflagersteifigkeiten zu. Auch wenn die Berechnung den Ansatz expliziter Systemparameter nach Abschnitt 4.1.1.2 erfordert, haben sie für die Ermittlung der Eigenformen von Standardsystemen keine Bedeutung und werden an dieser Stelle nicht weiter spezifiziert. Abbildungen 4.6 bis 4.9 illustrieren die Eigenformen der ersten drei Moden von Fall 1 bis Fall 4 anhand einer normierten Bauteillänge. Je höher die Ordnungszahl der betrachteten Mode, desto höher ist die Anzahl der auftretenden Schwingungsnulldpunkte. Diese Knotenpunkte erfahren keine Wegverschiebung, sondern ausschließlich eine während des Schwingungsvorgangs zeitabhängige Verdrehung.

Tabelle 4.1: Definitionen idealisierter Auflagersituationen nach Euler

				
	Fall 1	Fall 2	Fall 3	Fall 4
$k_{ri}$	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$
$k_{rj}$	0	0	0	$\infty$
$k_{ti}$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$k_{tj}$	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$

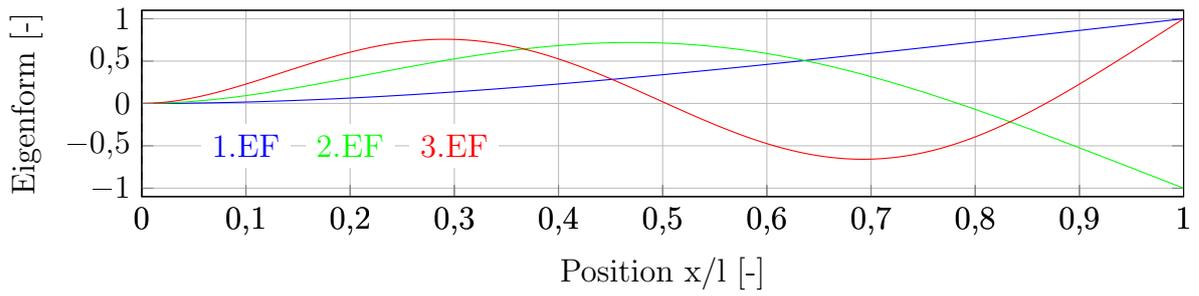


Abbildung 4.6: Die ersten drei Eigenformen der idealisierten Auflagersituation Fall 1

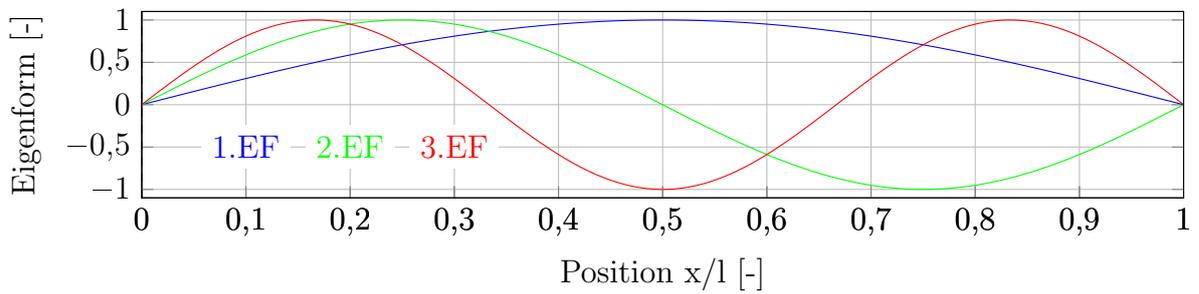


Abbildung 4.7: Die ersten drei Eigenformen der idealisierten Auflagersituation Fall 2

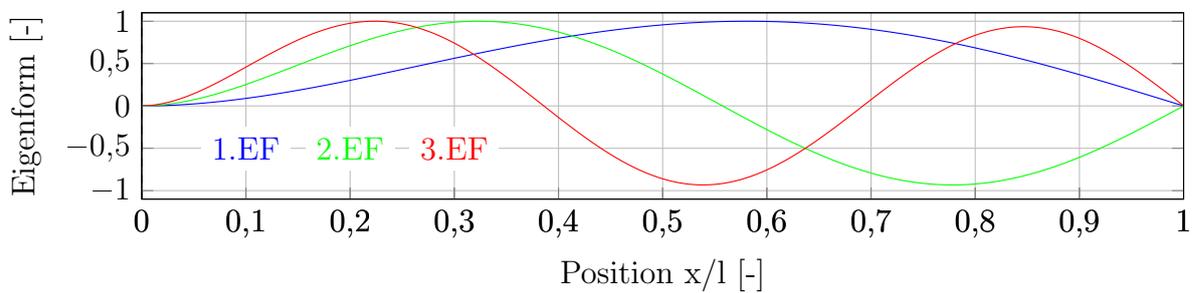


Abbildung 4.8: Die ersten drei Eigenformen der idealisierten Auflagersituation Fall 3

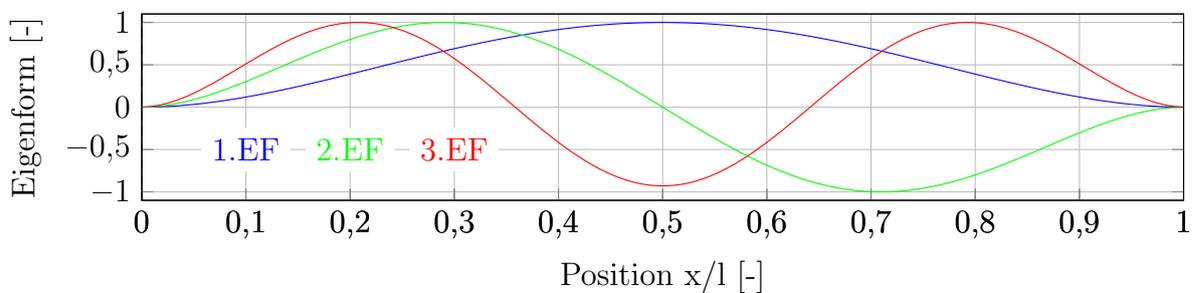


Abbildung 4.9: Die ersten drei Eigenformen der idealisierten Auflagersituation Fall 4

#### 4.1.1.4 Einfluss der Normalkraft auf die Eigenwerte und Eigenkreisfrequenzen

Die Existenz einer Abhängigkeit zwischen der Eigenkreisfrequenzen  $\omega_n$  des Systems und der einwirkenden Normalkraft  $D$  ist Grundlage des in dieser Forschungsarbeit vorgestellten dynamischen Verfahrens zur Systemidentifikation. Abschnitt 2.1 beschreibt diverse Forschungsarbeiten, die diese Abhängigkeit sowohl theoretisch, als auch laborexperimentell aufzeigen (vgl. Amabili et al., 2010; Lagomarsino und Calderini, 2005). Insbesondere bei schlanken Seilkonstruktionen lassen sich, äquivalent zu Saiteninstrumenten aus der Musik, höhere Eigenkreisfrequenzen bei steigenden Zugkräften aufzeigen (vgl. B. H. Kim und Park, 2007; Xue und Shen, 2020).

Für die Ermittlung eines rechnerischen Zusammenhangs zwischen der Normalkraft  $D$  und der Eigenkreisfrequenz  $\omega_n$  von biegesteifen Zug- und Druckstäben führen die in Abschnitt 2.1 und Abschnitt 4.1.1.1 dargestellten theoretischen Ansätze zu größerem rechnerischen Aufwand. Für einfache Stabsysteme existieren komprimierte Grundlagen, die Abhängigkeit dieser Parameter in übersichtlicher Rechenweise zu beschreiben. Petersen und Werkle (2017, S. 687) formulieren für Stäbe mit den vier nach Euler idealisierten Auflagersituationen (vgl. Abschnitt 4.1.1.3) eine rechnerische Beziehung zwischen dem Eigenwert, als Quadrat der Eigenkreisfrequenz  $\omega_n$  und der Normalkraft  $D$ . Auf Basis der vier Eigenwertgleichungen als Lösung des Gleichungssystems ergeben sich für den Sonderfall  $\omega$  gleich 0 die aus der Statik bekannten Stabilitätsgleichungen sowie Eulerschen Knicklasten. Wird ein ursprünglich normalkraftfreies System der Frequenz  $\omega_0$  mit seiner ideellen Euler-Knicklast  $D_{Euler,n}$  beansprucht, sinkt der ursprüngliche Eigenwert  $\omega_0^2$  des Systems auf den Wert 0 herab. Für den Euler-Fall 2 ergibt sich daraus eine exakt lineare Abhängigkeit zwischen dem Eigenwert  $\omega_n^2$  und der einwirkenden Normalkraftbeanspruchung  $D$  (Petersen und Werkle, 2017, S. 687 ff.):

$$\omega_n^2 = \left(1 - \frac{D}{D_{Euler,n}}\right) \cdot \omega_{0,n}^2 \quad (4.70)$$

Umgeformt ergibt sich die Eigenkreisfrequenz:

$$\omega_n = \sqrt{\left(1 - \frac{D}{D_{Euler,n}}\right)} \cdot \omega_{0,n} \quad (4.71)$$

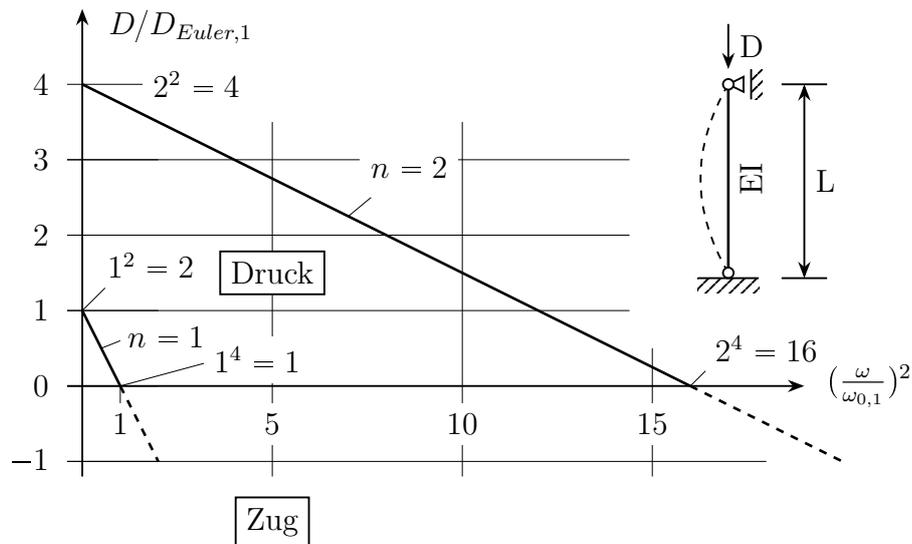


Abbildung 4.10: Zusammenhang zwischen den ersten zwei Eigenwerten und der Normalkraft für den Euler-Fall 2 nach Petersen und Werkle (2017, S. 688)

Gleichungen 4.70 und 4.71 gelten für unterschiedliche Ordnungszahlen  $n$ . Der vorgestellte Zusammenhang aus Gleichung 4.70 wird in der Literatur auch als Dunkerley-Gerade bezeichnet (Meskouris, 1999, S. 143). Abbildung 4.10 veranschaulicht den Abfall der Eigenwerte  $\omega_n^2$  im Zuge steigender Normalkräfte  $D$  auf Basis des Euler-Falls 2. Zu sehen sind der jeweilige Kurvenverlauf des ersten Eigenwerts ( $n = 1$ ) sowie der Verlauf für den zweiten Eigenwert ( $n = 2$ ). Die Euler-Fälle 1, 3 und 4 besitzen eine annähernd lineare, jedoch keine exakt lineare Abhängigkeit zwischen dem Eigenwert und der Lasteinwirkung. Aus den Gleichungen 4.70 und 4.71 ergibt sich die lineare Abhängigkeit zu:

$$\frac{D}{D_{Euler,j}} + \left(\frac{\omega_n}{\omega_{0,n}}\right)^2 > 1 \quad (4.72)$$

Die messtechnische Ermittlung eines Frequenzunterschieds bei wechselnden Normalkräften ist wesentlich für die Qualität der Analyse. Dabei ist die Größe des messbaren Bereichs unter anderem davon Abhängigkeit, ob es sich bei der Auswertung um ein zug- oder druckbeanspruchtes Tragelement handelt. Während Druckstäbe maximal bis zur Knicklast beansprucht werden können (0 bis  $\omega_0$ ), ist die Zugbelastung von Systemen häufig um ein Vielfaches der betragsmäßigen Eulerschen Knicklast höher, woraus sich der möglich messbare Bereich sich verändernder Eigenwerte um ein Vielfaches ver-

größern kann. Ein Flachstahl mit einer Kantenbreite von  $1 \times 2$  cm, einer Systemlänge von 1 m und einer Zugfestigkeit von  $23,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$  kann im Euler-Fall Zwei (vgl. Tabelle 4.1) mit einer maximalen Zuglast von 47 kN beansprucht werden. Dies entspricht dem vielfachen seiner theoretischen Knicklast von 3,45 kN, berechnet mit einem Elastizitätsmodul von  $21\,000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$ . Der unbelastete Stab besitzt einen Eigenwert von  $21\,760 \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2}$  bzw. eine Eigenkreisfrequenz von  $147,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ . Bei Erreichen der Eulerschen Knicklast fällt der Eigenwert um den Faktor 1 auf den Wert 0 ab. Im Zuge des Stabilitätsnachweises nach EC3 wird die maximale Druckkraft die angegebene Eulersche Knicklast, nicht erreichen. Dementsprechend ist ein maximaler Abfall der Eigenkreisfrequenz  $\omega_n$  um einen Faktor kleiner 1 zu erwarten. Im Gegensatz dazu wird bei Ansatz der maximal möglichen Zugkraft der Eigenwert um den Faktor 13,6 und die Eigenkreisfrequenz um den Faktor 3,6 erhöht. Das Beispiel zeigt, dass der Zusammenhang zwischen Normalkraftbeanspruchung und Eigenwerten bzw. Eigenkreisfrequenzen in zugbeanspruchten Tragelementen üblicherweise deutlich messbarer ist. Die Mehrzahl an Forschungsarbeiten im Bereich der Zugkraftbestimmung im Vergleich zu den Ausarbeitungen hinsichtlich der Druckkraftidentifikation deutet darauf hin, dass hier ein größerer Forschungserfolg gewährleistet werden kann.

#### 4.1.2 Dynamisches Verfahren zur Systemidentifikation

Das in diesem Abschnitt vorgestellte Verfahren zur Systemidentifikation dient dazu, für die Knicksicherheit relevante Systemeigenschaften eines Druckstabs auf Grundlage der messbaren Schwingungseigenschaften zu bestimmen. Abschnitt 4.1.1 beschreibt das dynamische Basismodell, auf dessen Grundlage die theoretische Berechnung der Eigenkreisfrequenzen und Eigenformen eines Einzelstabs mit definierten Systemeigenschaften ermöglicht wird. Die Überführung dieses Basismodells in einen Optimierungsprozess ist wesentlich für den Erfolg des dargestellten Verfahrens und wird im Folgenden näher beschrieben. Abschnitt 4.1.2.1 stellt die formale mathematische Beschreibung des Optimierungsproblems in Form einer Abweichungsfunktion dar. Mithilfe eines evolutionären Suchalgorithmus wird diese minimiert, sodass eine bestmögliche Übereinstimmung der modalen Eigenschaften aus der theoretischen Betrachtung und des realen Systems gefunden wird. Der gewählte Lösungsalgorithmus wird in Abschnitt 4.1.2.2 vorgestellt und anschließend in das Programm *DynamOpti* integriert (Abschnitt 4.1.2.3).

#### 4.1.2.1 Formale Beschreibung der Zielfunktion

Die Definition und Notwendigkeit einer Zielfunktion wird in Abschnitt 3.3.2 erläutert und ist Grundlage einer mathematischen Optimierung. Das dargestellte Verfahren sucht für das Basismodell aus Abschnitt 4.1.1 diejenigen Eingangparameter, die eine optimale Übereinstimmung mit den gemessenen dynamischen Eigenschaften des realen Systems aufweisen. Für diesen Prozess wird eine Abweichungsfunktion  $f_{error}$  formuliert, die neben den Entwurfsvariablen des Basismodells die modalen Parameter der ersten Mode aus der experimentellen Modalanalyse enthält:

$$f_{error}(k_{ri}, k_{rj}, k_{ti}, k_{tj}, D, L, EI, \mu, \omega_{ex,1}, \Psi_{ex,1}) \quad (4.73)$$

Im konkreten Anwendungsfall sind die Eigenkreisfrequenz  $\omega_{ex,1}$  und die Eigenform  $\Psi_{ex,1}$  der realen Stütze bekannt. Mit Definition der Systemlänge  $L$ , der Querschnittssteifigkeit  $EI$  und der Massenverteilung  $\mu$  kann die Abhängigkeit der Abweichungsfunktion auf die Federsteifigkeiten  $k$  und die Normalkraft  $D$  reduziert werden. In Anlehnung an den für die Eigenkreisfrequenzen formulierten NRFD (Gleichung 3.52) bzw. den für die Eigenformen vorgestellten MAC (Gleichung 3.53) zur Vergleichbarkeit aus Abschnitt 3.4.1.2 wird die Abweichungsfunktion  $f_{error}$  im Anwendungsfall mit den bekannten Parametern  $L$ ,  $EI$ ,  $\mu$ ,  $\omega_{ex,1}$  und  $\Psi_{ex,1}$  definiert zu (vgl. H. T. Luong et al., 2017, S. 389):

$$f_{error}(k_{ri}, k_{rj}, k_{ti}, k_{tj}, D) = \left( \frac{\omega_{th,1} - \omega_{ex,1}}{\omega_{th,1}} \right)^2 + |\text{MAC}_1^{th,ex} - 1| \quad (4.74)$$

Eingangswerte von  $f_{error}$  sind die im Verfahren zu optimierenden Systemparameter, bestehend aus den vier Federsteifigkeiten  $k$  sowie der einwirkenden Drucknormalkraft  $D$ . Abbildung 4.11 demonstriert schematisch den Prozessablauf zur Berechnung des Fehlers  $f_{error}$ . Nach Ansatz der Entwurfsvariablen  $k_{ri}$ ,  $k_{rj}$ ,  $k_{ti}$ ,  $k_{tj}$  und  $D$  führt die Auswertung des Programms *DynamBasic* und die Überführung der resultierenden modalen Parameter des theoretischen Modells  $\omega_{th,1}$  und  $\Psi_{th,1}$  in Gleichung 4.74 zu einer skalaren Lösung  $f_{error}$ . Auf die Darstellung der Berechnungsparameter zur Ausführung des Programms *DynamBasic* wird in Abbildung 4.11 verzichtet (vgl. Abschnitt 4.1.1.2).

Ziel ist es, die Abweichungsfunktion aus Gleichung 4.74 in einen Optimierungsprozess zu integrieren und diejenigen Entwurfsvariablen zu identifizieren, welche das globale

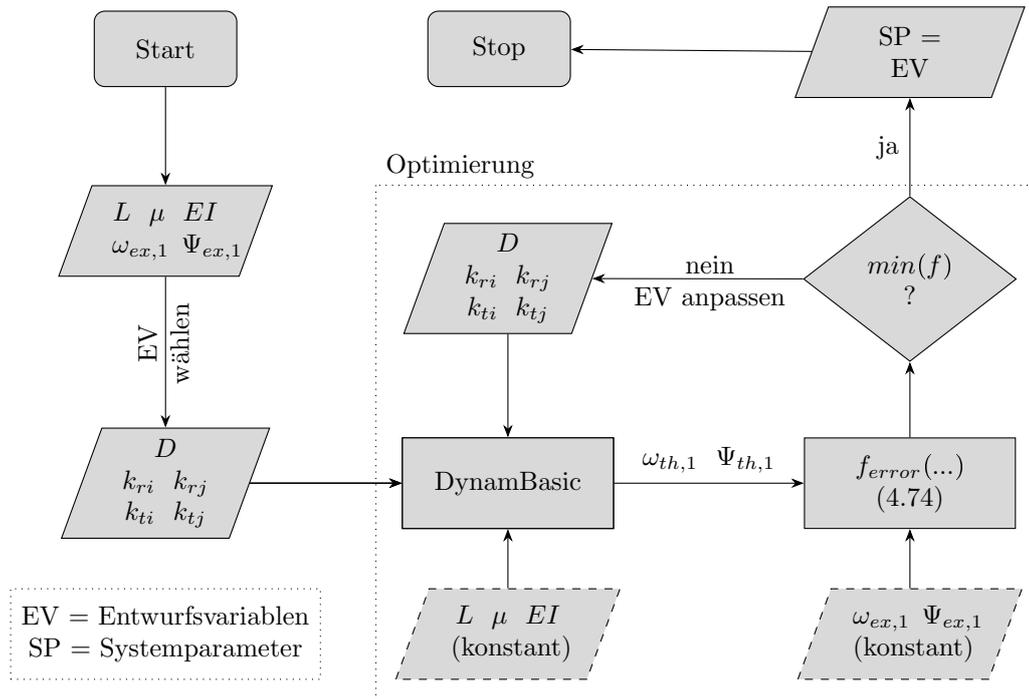


Abbildung 4.11: Schematischer Ablaufplan eines Optimierungsprozesses

Minimum der Funktion  $f_{error}$  widerspiegeln. Die Lösungen des Prozesses sind die optimierten Systemeigenschaften, welche die modalen Parameter des Tragwerks bestmöglich reflektieren und für eine statische Nachweisführung herangezogen werden können.

#### 4.1.2.2 Wahl des Lösungsalgorithmus

Die Anwendung deterministischer Strategien zur exakten Lösung nichtlinearer Funktionen ist in Abhängigkeit der Zielfunktion anspruchsvoll oder im Einzelfall nicht möglich. Anstelle eines aufwendigen deterministischen Lösungsverfahrens ist die Verwendung von näherungs-basierten Optimierungsstrategien zielführend, um das Minimum der Abweichungsfunktion  $f_{error}$  aus Gleichung 4.74 zu identifizieren. Ein innovatives Instrument moderner Lösungsstrategien ist die Verwendung von evolutionären Algorithmen. Sie werden seit den 1960er Jahren entwickelt und beinhalten neben einer gerichteten, auch eine zufällige Lösungskomponente, wodurch sie auch als metaheuristische Verfahren bezeichnet werden (Grimme und Bossek, 2018, S. 197; vgl. Dittes, 2015, S. 63 ff.). Basis dieser naturinspirierten Verfahren ist die Evolutionstheorie von Alfred Russel Wallace und

Charles Darwin aus dem 19. Jahrhundert. Breite Bekanntheit erfuhr das Modell durch die Veröffentlichung der Abhandlung *On the Origin of Species* von Charles Darwin aus dem Jahr 1859 (Darwin, 1859). Nach Wallace und Darwin begründet sich das Bestehen allen Daseins darin, dass alle Geschöpfe im Laufe der Zeit einen Änderungsprozess erfahren, der durch Mutation einzelner Individuen und Rekombination verschiedener Populationsmitglieder verursacht wird (Grimme und Bossek, 2018, S. 196). Dabei ist entscheidend, welche daraus entwickelten neuen Individuen am stärksten sind und die Fortpflanzung dominieren. Dieses Prinzip ist auch unter dem Begriff *Survival of The Fittest* bekannt und demonstriert einen Optimierungsprozess für das natürliche Überleben.

Auch wenn die Evolution ein hochkomplexes Entwicklungsprinzip des gesamten Lebens auf der Erde darstellt, lassen sich dennoch seine Grundprinzipien in einen mathematischen Überlebens- bzw. Optimierungsalgorithmus überführen. Ausgangssituation ist die Existenz von zerstreuten Individuen, die in Summe als Population bezeichnet werden. Jedes Einzelmitglied besitzt definierte Eigenschaften, welche für jedes Individuum zu einem charakteristischen Wert führen, der sogenannte Fitnesswert. Für den mathematischen Optimierungsprozess ist dieser Wert mit der skalaren Lösung aus der Abweichungsfunktion  $f$  vergleichbar. Er gibt ein Maß für die Differenz des Individuums zu einem Optimalzustand an, wobei die Qualität erst über den Vergleich mit anderen Individuen bestimmt werden kann. Jede Population durchläuft im Laufe der Zeit unterschiedliche Generationen, in denen sich die Eigenschaften der Mitglieder unterschiedlich stark verändern. Dazu werden unter anderem einzelne Merkmale des Individuums auf Basis der eigenen Erfahrungen aus vergangenen Generationen angepasst (Mutation). Weiterhin führt der Vergleich mit anderen Mitgliedern der Population zu einem Informationsaustausch und einer Vermischung der Eigenschaften (Rekombination). Dieser Veränderungsprozess zwischen den Generationen führt somit zu einer individuellen und gleichzeitig gemeinschaftlichen Suche nach einem optimalen Ergebnis. Ziel ist es, so viele Generationen zu erzeugen bis die Population eine bestmögliche Lösung innerhalb definierter Grenzen identifizieren kann. Für das vorgestellte Verfahren zur Systemidentifikation bedeutet das die Minimierung der Zielfunktion  $f_{error}$ . Evolutionäre Algorithmen sind in der Lage, einen großen Bereich metaheuristisch zu durchsuchen, können aber nie vollständig garantieren, tatsächlich das globale Extremum einer Zielfunktion zu identifizieren. Bedeutende For-

men der evolutionären Algorithmen sind die Evolutionsstrategien und die genetischen Algorithmen. Sie unterscheiden sich historisch in der Verwendung reeller oder ganzzahliger Repräsentationen sowie in den Wichtungsunterschieden von Mutation und Rekombination. Eine klare Trennung existiert für moderne Verfahren nicht, sodass aus heutiger Sicht die Anwendbarkeit und die verwendeten Bausteine eine höhere Relevanz besitzen (Grimme und Bossek, 2018, S. 217).

Die Partikelschwarmoptimierung gehört zu einem modernen und weit verbreiteten evolutionären Optimierungsalgorithmus. Sie wurde erstmals im Jahr 1995 von Eberhart und Kennedy (1995) vorgestellt und basiert auf den Gesetzmäßigkeiten des Gruppenverhaltens von Tieren. Als Beispiel seien Vogelschwärme genannt, die bei der Suche nach einem Nistplatz oder einer Ruhezone ein kollektives Suchverhalten auf Basis individueller Verhaltensweisen zeigen. So folgt das Einzelmitglied des Schwarms nicht nur der Gruppenbewegung, indem auf das Flugverhalten benachbarten Tiere Rücksicht genommen wird, sondern trägt durch individuelle Abweichungen wiederum zu einem angepasst kollektiven Verhalten bei. Im Vergleich zu vergleichbaren näherungsbasierten Optimierungsstrategien, weist die Partikelschwarmoptimierung eine einfache Durchführung und Implementierung sowie eine schnelle Konvergenz auf (Zhao und Li, 2020, S. 124905).

Im Folgenden werden die Ideen aus der Tierwelt in ein numerisches Konzept überführt. In der mathematischen Optimierung wird die Bewegung des Schwarms aus einer Mehrzahl an diskreten Bewegungsketten aller Einzelmitglieder der Gesamtpopulation betrachtet. Jedes Einzelmitglied erhält in der Generation  $k$  eine bestimmte Position  $x_k$ , welche in einer darauffolgend neuen Generation durch eine Bewegung zu einer sprunghaft neuen Position  $x_{k+1}$  überführt wird. Jede Position besitzt zur Beschreibung ihrer Qualität einen bestimmten Fitnesswert. Dabei steht  $x$  nicht nur für die Bezeichnung einer Lage, sondern in dem hier vorgestellten Verfahren zur Systemidentifikation für die Entwurfsvariablen der Abweichungsfunktion. Grundlage der Partikelschwarmoptimierung ist die iterative Veränderung der Position jedes Populationsmitglieds mit jeder neuen Generationsstufe auf Basis eines Verrückungsvektors  $v_{k+1}$  (Grimme und Bossek, 2018, S. 220):

$$x_{k+1} = x_k + v_{k+1} \tag{4.75}$$

Die Variable  $x_k$  bildet die Entwurfsvariablen des Individuums aus dem vorherigen Gene-

rationsschritt und  $x_{k+1}$  die Variablen aus der neuen Generation ab. Die Überführung der Population in eine nächste Generation wird mithilfe einer Geschwindigkeit  $v_{k+1}$  vollzogen (Grimme und Bossek, 2018, Helwig, 2010):

$$v_{k+1} = \underbrace{w \cdot v_k}_{\text{alte Richtung}} + \underbrace{c_1 r_1 (x_k^{best} - x_k)}_{\text{kognitive Komponente}} + \underbrace{c_2 r_2 (x^{global} - x_k)}_{\text{soziale Komponente}} \quad (4.76)$$

Die Geschwindigkeit entscheidet über die Veränderung des Positionsvektors und wird aus insgesamt drei Eigenschaften des Individuums bzw. des Schwarms zusammengesetzt. So beinhaltet  $v_{k+1}$  zunächst die Informationen der vergangenen Bewegungsrichtung, bestehend aus einem Wichtungsparemeter  $w$  sowie der alten Geschwindigkeit  $v_k$ . Dieser Anteil kann auch als Trägheit des Einzelmitglieds bezeichnet werden. Darüber hinaus bestimmen eine kognitive Komponente des Individuums und eine soziale Komponente aus der Betrachtung der gesamten Population die neue Geschwindigkeit. Grundlage ist die Fähigkeit des Individuums, sich die Position des bis dato am besten erreichten Fitnesswerts der Abweichungsfunktion mit den Entwurfsvariablen  $x_k^{best}$  zu merken. Weiterhin wird vorausgesetzt, dass die Individuen miteinander kommunizieren und somit für alle Mitglieder die Position des besten Wertes der gesamten Population  $x^{global}$  bekannt ist. Während mit der kognitiven Komponente der Bestwert des Individuums angesteuert wird, entscheidet bei der sozialen Komponente der am besten erreichte Wert aller in der Population vorhandenen Mitglieder über die Bewegungsrichtung. Die Parameter  $c_1$  und  $c_2$  entscheiden über die Wichtung der kognitiven und sozialen Komponente untereinander. Die Variablen  $r_1$  und  $r_2$  werden für jede neue Generation und des Mitglied zufällig zwischen 0 und 1 gewählt (Zhao und Li, 2020). Nachdem die Geschwindigkeit jedes Individuums der neuen Generation ermittelt wurde, erfolgt die erneute Auswertung der Abweichungsfunktion für jedes Mitglied. Die anfangs zerstreute Population rückt nach einem gewissen Zeitraum zusammen und nähert sich gemeinschaftlich einer bestmöglichen Lösung. Der Optimierungsprozess in Form einer iterativen Generationsschleife wird solange fortgesetzt bis ein Abbruchkriterium erreicht wird (Helwig, 2010, S. 10). Dies kann eine nicht ausreichende Verbesserung des Fitnesswerts der Abweichungsfunktion zu seinem Vorgänger sein oder das Erreichen einer zu definierenden maximalen Anzahl von Iterationsschritten. Die Partikelschwarmoptimierung wird ebenfalls von Ding et al. (2020, S. 4) verwendet.

### 4.1.2.3 Überführung in das Programm DynamOpti

Zur Realisierung des Identifikationsverfahrens wird die Partikelschwarmoptimierung mit der Programmiersprache R (s. R Core Team, 2020) in das Programm *DynamOpti* überführt. Dazu bietet R ergänzend zur Basisausstattung eine Vielzahl von Paketen, welche zusätzlich vordefinierte Funktionen bereitstellen. Seit der Veröffentlichung des ersten Partikelschwarmalgorithmus von Eberhart und Kennedy aus dem Jahr 1995 wurden diverse Pakete für die Anwendung ursprünglicher und angepasster Formen des Verfahrens für R bereitgestellt. Für die Umsetzung der Partikelschwarmoptimierung in dieser Arbeit wird das Paket *pso* von Claus Bendtsen verwendet (s. Bendtsen, 2012). Es umfasst den Basisalgorithmus von Eberhart und Kennedy wie er im vorherigen Abschnitt schematisch dargelegt wird, ergänzt den ursprünglichen Algorithmus jedoch mit zusätzlichen Funktionen zur Arbeitserleichterung. Die in dieser Arbeit verwendete Funktion des Pakets *pso* heißt *psoptim* und beinhaltet im Wesentlichen den ursprünglichen Partikelschwarmalgorithmus von Eberhart und Kennedy mit ergänzenden Optionen.

Die Implementierung der Optimierungsfunktion *psoptim* erfordert neben der Angabe einer Zielfunktion  $f_{error}$  und der aus Gleichung 4.76 bekannten Parametern zur Geschwindigkeitsberechnung  $v_k$ , die Größe der Population  $s$  sowie die maximale Anzahl der Iterationen  $maxit$  und ein Abbruchkriterium  $maxit.stagnate$ . Für verschiedene Parameter, die für die Berechnung erforderlichen Argumente, sind in der Funktion *psoptim* Standardwerte hinterlegt, die der Tabelle 4.2 entnommen werden können. Zur Größenermittlung der Population  $s$  wird die Menge an zu optimierenden Variablen  $par$  herangezogen. Mit

Tabelle 4.2: Standardeinstellungen des Pakets *pso* (Bendtsen, 2012)

Beschreibung	Kürzel	Default-Wert
Größe der Population	$s$	$\text{floor}(10 + 2 \cdot \sqrt{par})$
Faktor des konstanten Anteils	$w$	$\frac{1}{2 \cdot \log(2)}$
Faktor des kognitiven Anteils	$c_1$	$5 + \log(2)$
Faktor des sozialen Anteils	$c_2$	$5 + \log(2)$
Maximale Anzahl an Iterationen	$maxit$	1000
Abbruchkriterium	$maxit.stagnate$	$Inf$

der Funktion *floor* werden Dezimalzahlen auf ganze Zahlen abgerundet. Für das in dieser Arbeit vorgestellte dynamische Verfahren zur Systemidentifikation, ergibt sich bei fünf Dimensionen (*par*), bestehend aus den Entwurfsvariablen der Zielfunktion  $f_{error}$  aus Gleichung 4.74 eine Populationsgröße von 14 Individuen je Generation. Das Abbruchkriterium *maxit.stagnate* definiert das Ende des Optimierungsprozesses, wenn über eine definierte Anzahl an Iterationen keine Verbesserung des am besten erreichten Fitnesswerts der Fehlerfunktion erzielt wird. Die maximale Anzahl an Iterationsschritten *maxit* wird in dieser Arbeit auf 10000 und das Abbruchkriterium *maxit.stagnate* auf 50 Iterationen festgelegt.

Die Funktion *psoptim* bietet darüber hinaus die Option, eine obere und untere Grenze der Entwurfsvariablen festzulegen. Die Anwendung von *DynamOpti* erfolgt in der gesamten Abhandlung mit identischen Grenzwerten. Für die Normalkrafteinwirkung  $D$  wird die untere Grenze von 0 und die obere Grenze von 1000 kN gewählt. Für die Federsteifigkeiten gelten minimale Werte von 0 ( $k_r$ ) bzw.  $1 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$  ( $k_t$ ) und maximale Zahlenwerte von  $100\,000 \frac{\text{kNm}}{\text{rad}}$  ( $k_r$ ) bzw.  $100\,000 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$  ( $k_t$ ).

Ziel des Programms *DynamOpti* ist es, das globale Minimum der Abweichungsfunktion  $f_{error}$  aus Gleichung 4.74 zu identifizieren. Dazu ist zur Anwendung die Angabe der Massenverteilung  $\mu$ , der Systemlänge  $L$ , der Querschnittssteifigkeit  $EI$  sowie der Eigenkreisfrequenz  $\omega_{ex,1}$  (alternativ: Eigenfrequenz  $f_{ex,1}$ ) und Eigenform  $\Psi_{ex,1}$  erforderlich. Die Eigenform wird in dieser Forschungsarbeit durch mindestens elf gleichmäßig verteilte Messstellen definiert und für die Optimierung herangezogen. Nach Eingabe der Parameter wird mit der Funktion *psoptim*, der Abweichungsfunktion  $f_{error}$  und den zuvor genannten Berechnungsparametern die Partikelschwarmoptimierung durchgeführt. Für den niedrigsten Wert der Funktion  $f_{error}$  werden abschließend die dazu korrespondierenden fünf Entwurfsvariablen, bestehend aus den vier Federsteifigkeiten  $k_{opt}$  sowie der Normalkraftbeanspruchung  $D_{opt}$  ausgegeben. Die ausführliche Beschreibung der Funktion *psoptim* sowie die Initialisierung der Anfangspositionen und der Starteigenschaften jedes Individuums können dem Referenzhandbuch entnommen werden (s. Bendtsen, 2012).

Zur Einschätzung der Qualität des Identifikationsprozesses wird der MAC aus Gleichung 3.53 als Zustandskriterium herangezogen. In dieser Arbeit wird nach Abschluss der Optimierungsschleifen für die optimierte bzw. experimentelle Eigenform im Zuge der Versuche in Kapitel 5 und Kapitel 6 ein MAC größer 0,9995 angestrebt.

## 4.2 Programmentwicklung eines statischen Verfahrens zur Systemidentifikation

Diese Arbeit befasst sich mit der Entwicklung und Validierung eines dynamischen Verfahrens zur Systemidentifikation. Dazu wird neben der theoretischen Erarbeitung in Abschnitt 4.1, eine qualitative Laboruntersuchung anhand von Stahlprüfkörpern durchgeführt (s. Kapitel 5). Die aus diesem dynamischen Prozess entwickelten Lager- und Querschnittssteifigkeiten sowie Normalkräfte sind während der Laborexperimente mit alternativen Verfahren zu validieren. Während die Normalkraft  $D$  über die Verwendung von Dehnungsmessstreifen und einer Kraftmessdose direkt überprüft werden kann, ist für eine äquivalente Plausibilitätskontrolle der optimierten Weg- und Drehfedersteifigkeiten  $k$  sowie der Querschnittssteifigkeit  $EI$  eine ergänzende Untersuchung erforderlich. Im Folgenden wird ein statisches Prüfverfahren vorgestellt, welches ebenfalls die Ermittlung der Lagersteifigkeiten  $k$  sowie ergänzend der Querschnittssteifigkeit  $EI$  ermöglicht und einen Vergleich der Werte aus dem dynamischen Verfahren zur Systemidentifikation erlaubt. Die Grundidee des Verfahrens ist es, den Prüfkörper in einem statischen Drei-Punkt-Biegeversuch zu belasten, die Last-Verformungs-Kurve zu bestimmen und die gesuchten statischen Systemparameter über einen Optimierungsprozess aus der experimentell erfassten Biegelinie zu rekonstruieren. Das Basismodell des Verfahrens wird in Abschnitt 4.2.1 und die Überführung in das statische Verfahren zur Systemidentifikation in Abschnitt 4.2.2 beschrieben.

### 4.2.1 Statisches Basismodell

Nachfolgend wird das Basismodell des statischen Verfahrens zur Systemidentifikation vorgestellt. Die theoretischen Grundlagen werden in Abschnitt 4.2.1.1 und die Überführung in ein Softwareprogramm unter Abschnitt 4.2.1.2 beschrieben.

#### 4.2.1.1 Theoretische Grundlagen

Voraussetzung für die Entwicklung eines Grundstabs ist es, die Verformung als kontinuierliche, mathematische Beschreibung abzubilden, um einen anschließenden Abgleich zwischen den experimentell gemessenen Werten und theoretischen Modellen zu ermöglichen.

Das theoretische Ausgangsmodell wird in Abbildung 4.12 dargestellt und beschreibt den Grundstab inklusive dem Lastansatz für den Belastungsversuch. Es gelten die erweiterten Annahmen des Euler-Bernoulli-Balkens, wie sie ebenfalls für das dynamische Kräftegleichgewicht in Abschnitt 4.1.1.1 verwendet werden. Der als schubstarr idealisierte Stab mit einer konstanten Biegesteifigkeit  $EI$  und einer Systemlänge  $L$  wird an beiden Endpunkten  $i$  und  $j$  durch Weg- bzw. Drehfedern  $k_t$  und  $k_r$  gelagert und von einer Einzellast  $F$  an der Stelle  $x_F$  belastet. Das in Abbildung 4.12 dargestellte System wird für die Ermittlung der Verformungsfigur über acht Eingangsparameter vollständig definiert.

Die Entwicklung der kontinuierlichen Biegelinie  $w(x)$  erfolgt auf Basis der vierfachen Integration einer äußeren Lastfunktion  $q(x)$  der allgemeinen Form:

$$EIw(x)^{''''} = q(x) \quad (4.77)$$

Eine Herleitung dieser Beziehung wird in der Fachliteratur ausführlich dargestellt und in dieser Arbeit nicht näher betrachtet (vgl. Altenbach, 2020; Gross et al., 2016). Das in Abbildung 4.12 dargestellte System wird durch eine Einzellast  $F$  beansprucht, durch die eine Unstetigkeit mit zwei separat stetigen Funktionsbereichen entsteht. Die vierfache Integration zweier Bereiche führt bis zur Ermittlung der vollständigen Biegelinie  $w(x)$  zu acht Integrationskonstanten  $C_i$ . Um die Anzahl der Konstanten  $C_i$  und den rechnerischen Aufwand zu minimieren, wird auf das Föppl-Symbol zurückgegriffen, welches für nichtnegative natürliche Exponenten  $n$  definiert ist zu (vgl. Gross et al., 2016, S. 198):

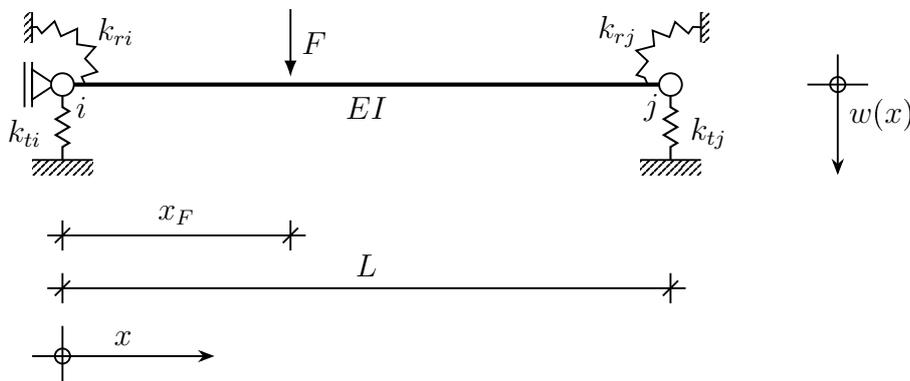


Abbildung 4.12: Basisstab für das statische Analysemodell

$$\langle x - x_F \rangle^n = \begin{cases} 0 & x < x_F \\ (x - x_F)^n & x > x_F \end{cases} \quad (4.78)$$

Es ermöglicht durch das Unterscheidungskriterium in Gleichung 4.78 trotz des unstetigen Lastverlaufs die Beschreibung der Biegelinie  $w(x)$  in einer Gleichungsebene. Zusätzlich erforderliche Übergangsbedingungen an der Stelle der Einzellast entfallen, da sie durch Verwendung der Föppl-Klammern automatisch erfüllt sind (Gross et al., 2016, S. 200). Mit dem Ansatz der äußeren Lastfunktion (vgl. Gross et al., 2016, S. 200)

$$q(x) = F\langle x - x_F \rangle^{-1} \quad (4.79)$$

ergeben sich die Gleichungen 4.80 bis 4.84. Die Funktionen der Biegelinie und ihrer Ableitungen liefern in der entsprechenden Reihenfolge Informationen über die Querkraftbeanspruchung  $Q$  (4.81), Momentenbeanspruchung  $M$  (4.82), Verdrehung  $\gamma$  (4.83) und Durchbiegung  $w$  (4.84) des in Abbildung 4.12 dargestellten Basisstabs.

$$EIw(x)^{''''} = F\langle x - x_F \rangle^{-1} = q(x) \quad (4.80)$$

$$EIw(x)^{'''} = F\langle x - x_F \rangle^0 + C_1 = -Q(x) \quad (4.81)$$

$$EIw(x)^{''} = F\langle x - x_F \rangle^1 + C_1 \cdot x + C_2 = -M(x) \quad (4.82)$$

$$EIw(x)^{\prime} = \frac{F}{2}\langle x - x_F \rangle^2 + \frac{C_1}{2} \cdot x^2 + C_2 \cdot x + C_3 = EI\gamma(x) \quad (4.83)$$

$$EIw(x) = \frac{F}{6}\langle x - x_F \rangle^3 + \frac{C_1}{6} \cdot x^3 + \frac{C_2}{2} \cdot x^2 + C_3 \cdot x + C_4 \quad (4.84)$$

Zur Lösung der Integrationskonstanten  $C_1$  bis  $C_4$  sind vier Randbedingungen erforderlich. Sie setzen sich aus den Beziehungen der vier Dreh- sowie Wegfedern zusammen und können den Gleichungen 4.85 bis 4.88 entnommen werden.

$$\text{I :} \quad + EI \cdot w(0)'' = k_{ri} \cdot w(0)' \quad (\text{Drehfeder links}) \quad (4.85)$$

$$\text{II :} \quad - EI \cdot w(L)'' = k_{rj} \cdot w(L)' \quad (\text{Drehfeder rechts}) \quad (4.86)$$

$$\text{III :} \quad - EI \cdot w(0)''' = k_{ti} \cdot w(0) \quad (\text{Wegfeder links}) \quad (4.87)$$

$$\text{IV :} \quad + EI \cdot w(L)''' = k_{tj} \cdot w(L) \quad (\text{Wegfeder rechts}) \quad (4.88)$$

Das aus den Bedingungen I bis IV resultierende Gleichungssystem wird definiert zu:

$$\{A\} * \{C\} = \{B\} \quad (4.89)$$

Nach Einsetzen der acht Eingangsparameter mit Verwendung des Entscheidungskriteriums aus Gleichung 4.78 ergibt sich:

$$\begin{Bmatrix} 0 & -1 & \frac{k_{ri}}{EI} & 0 \\ L + \frac{k_{rj} \cdot L^2}{EI \cdot 2} & 1 + \frac{k_{rj} \cdot L}{EI} & \frac{k_{rj}}{EI} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{k_{ti}}{EI} \\ -1 + \frac{k_{tj} \cdot L^3}{EI \cdot 6} & \frac{k_{tj} \cdot L^2}{EI \cdot 2} & \frac{k_{tj} \cdot L}{EI} & \frac{k_{tj}}{EI} \end{Bmatrix} * \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{k_{rj} \cdot F \cdot (L - x_F)^2}{EI \cdot 2} - F \cdot (L - x_F) \\ 0 \\ -\frac{k_{tj} \cdot F \cdot (L - x_F)^3}{EI \cdot 6} + F \end{Bmatrix} \quad (4.90)$$

Verschiedene Methoden wie zum Beispiel das Additionstheorem oder das Jacobi-Verfahren führen zu exakten oder näherungs-basierten Lösungen des Gleichungssystems. Anschließend lässt sich nach Transformation des Föppl-Symbols die Biegelinie  $w(x)$  aus Gleichung 4.84 in die zwei folgenden Bereiche untergliedern:

$$x < x_F : \quad w_1(x) = \frac{1}{EI} \cdot \left[ \frac{C_1}{6} \cdot x^3 + \frac{C_2}{2} \cdot x^2 + C_3 \cdot x + C_4 \right] \quad (4.91)$$

$$x > x_F : \quad w_2(x) = \frac{1}{EI} \cdot \left[ \frac{F}{6} (x - x_F)^3 + \frac{C_1}{6} \cdot x^3 + \frac{C_2}{2} \cdot x^2 + C_3 \cdot x + C_4 \right] \quad (4.92)$$

Wird der Bereich links von der Einzellast  $F$  betrachtet (s. Abbildung 4.12), reduziert sich Gleichung 4.92 um einen Summanden. Ist die betrachtete Stelle  $x$  gleich dem Ort der Einwirkung  $x_F$  führen beide Gleichungen 4.91 und 4.92 zur identischen Lösung.

#### 4.2.1.2 Überführung in das Programm *StaticBasic*

Das in Abschnitt 4.2.1.1 beschriebene statische Basismodell zur Berechnung der Verformungsfigur eines Balkens infolge einer Einzellast wird mit der Programmiersprache **R** in das Softwareprogramm *StaticBasic* überführt (s. Abschnitt 3.5). Für die Anwendung des eigens codierten Programms sind acht Eingangsparameter erforderlich. Darunter zählen die Systemlänge  $L$ , die vier Lagersteifigkeiten  $k$ , die Querschnittssteifigkeit  $EI$ , die Einzellastbeanspruchung  $F$  sowie die Lage der Lasteinwirkung  $x_F$ . Die Ausgabe der Verformungsfigur erfolgt in einem Abstand von 0,01 m. Das Programm *StaticBasic* stellt ein Unterprogramm des statischen Identifikationsverfahrens und dem korrespondierenden Programm *StaticOpti* dar.

### 4.2.2 Statisches Verfahren zur Systemidentifikation

Das Basismodell aus Abschnitt 4.2.1 wird im Folgenden in einen Optimierungsprozess integriert. Abschnitt 4.2.2.1 beschreibt die Zielfunktion in Form einer Abweichungsfunktion. Nach der Definition des Lösungsalgorithmus in Abschnitt 4.2.2.2 wird das Softwareprogramm *StaticOpti* in Abschnitt 4.2.2.3 eingeführt.

#### 4.2.2.1 Formale Beschreibung der Zielfunktion

Gleichungen 4.91 und 4.92 ermöglichen auf Grundlage von acht Eingangsparametern die Bestimmung einer bereichsweise kontinuierlichen Verformungsfigur für einen Stab unter Einzellastbeanspruchung. Durch den Ansatz einer experimentellen Last-Verformungskurve, der Systemlänge sowie der Lastparameter ist es möglich, die fünf Systemeigenschaften  $EI$ ,  $k_{ri}$ ,  $k_{rj}$ ,  $k_{ti}$  und  $k_{tj}$  aus der Verformungskurve zu extrahieren. Die Einführung einer Abweichungsfunktion  $f_{error}$  ermöglicht es, die Differenz zwischen den experimentellen Messstellen und äquivalenten theoretischen Funktionswerten mathematisch abzubilden. Die anschließende Suche nach dem globalen Minimum ermöglicht die Ermittlung unbekannter Querschnitts- und Lagersteifigkeiten. Mit bekannter Systemlänge  $L$ , Beanspruchung  $F$  und korrespondierender Verformungsfigur  $w_{ex}$  ist die Fehlerfunktion ausschließlich abhängig von der Stabsteifigkeit  $EI$  und den Lagerungsbedingungen  $k$ . Die Abweichungsfunktion 4.93 wird über die Summe der Fehlerquadrate zwischen den Messpunkten

und der zu optimierenden Funktion beschrieben. Sie kann unter Berücksichtigung der experimentellen Verformungen  $w_{ex,r}$  und der theoretischen Funktionswerte  $w_{th,r}$  aus den Gleichungen 4.91 und 4.92 beschrieben werden:

$$f_{error}(EI, k_{ri}, k_{rj}, k_{ti}, k_{tj}) = \sum_{r=1}^n (w_{th,r} - w_{ex,r})^2 \quad (4.93)$$

Die Abweichungsfunktion  $f_{error}$  gibt an, wie weit die theoretische Kurve und das gemessene System übereinstimmen oder sich entsprechend von einander differenzieren. Für eine bestmögliche Übereinstimmung führt daher die Bestimmung des globalen Minimums der Funktion 4.93 zu den gesuchten Entwurfsvariablen.

#### 4.2.2.2 Wahl des Lösungsalgorithmus

Die zuvor beschriebene Abweichungsfunktion  $f_{error}$  aus Gleichung 4.93 wird zur Bestimmung des Minimums in einen Optimierungsprozess integriert. Für die Lösung des Problems wird die Partikelschwarmoptimierung in Anlehnung an das dynamische Verfahren zur Systemidentifikation verwendet (Abschnitt 4.1.2). Für eine detaillierte Beschreibung des Algorithmus wird auf Abschnitt 4.1.2.2 verwiesen.

#### 4.2.2.3 Überführung in das Programm *StaticOpti*

Das in Abschnitt 4.2.1 vorgestellte Basismodell wird über die Zielfunktion aus Abschnitt 4.2.2.1 in das Softwareprogramm *StaticOpti* überführt (s. Abschnitt 3.5). Dazu wird ein Partikelschwarmalgorithmus unter Verwendung des Pakets *pso* in das Programm implementiert. Für eine Beschreibung des Algorithmus und der aus dem Paket verwendeten Funktion *psopti* wird auf Ausführung aus Abschnitt 4.1.2.2 verwiesen.

Die Abweichungsfunktion  $f_{error}$  aus Gleichung 4.93 ist zusammen mit den in Abschnitt 4.1.2.3 vorstellten Einstellungen Grundlage der Optimierung. Für das statische Verfahren werden, soweit nicht anders angegeben, die in Abschnitt 4.1.2.3 dargestellten Berechnungsparameter verwendet. Für die zu optimierende Querschnittssteifigkeit  $EI$  wird ergänzend ein Grenzbereich von 0 bis 1000 kN m<sup>2</sup> festgelegt. Die Randbedingungen für die Federsteifigkeiten  $k$  bleiben mit den Angaben aus Abschnitt 4.1.2.3 identisch.

Die Aufgabe des Programms *StaticOpti* besteht darin, das globale Minimum der Fehler-

funktion  $f_{error}$  aus Gleichung 4.93 zu finden. Neben den Voreinstellung ist zur Anwendung des Programms die Eingabe der Systemlänge  $L$ , der Lasteinwirkung  $F$  und die Stelle der Beanspruchung  $x_F$  notwendig. Zudem ist der Ansatz einer zur Last korrespondierenden Verformungsfigur, in dieser Arbeit an mindestens zwölf gleichmäßig verteilten Messstellen, erforderlich. Im Zuge der Auswertung von  $f_{error}$  ermittelt *StaticOpti* die gesuchten Systemeigenschaften, bestehend aus der optimierten Querschnittssteifigkeit  $EI_{opt}$  sowie der vier optimierten Federstetigkeiten  $k_{opt}$ .

### 4.3 Bestimmung des Knicklängenbeiwerts

Im Zuge der laborexperimentellen Untersuchungen in Phase II werden die Lagerungsbedingungen sowohl durch das statische als auch dynamische Identifikationsverfahren ermittelt. Dabei dienen die statischen Ergebnisse nicht nur als Vergleichswerte, sondern auch zur Vordimensionierung maximaler Normalkräfte während der dynamischen Versuche. Für die Nachweisführung im Stabilitätsfall wird in dieser Arbeit das Ersatzstabverfahren nach DIN EN 1993-1-1 angewendet. Dazu erforderlich ist die Ermittlung einer Knicklänge  $l_o$  auf Basis der Federsteifigkeiten  $k$  sowie der Querschnittssteifigkeit  $EI$ . Die Knicklänge  $l_o$  setzt sich zusammen aus der Systemlänge  $L$  und einem Knicklängenbeiwert  $\beta$  (Böge und Böge, 2019, S. 407):

$$l_o = \beta \cdot L \quad (4.94)$$

Die vier Lagersteifigkeiten  $k$  werden in einen Knicklängenbeiwert  $\beta$  überführt. Grundlage dieser Berechnung ist die Differentialgleichung eines kontinuierlichen Stabelements nach Theorie 2. Ordnung ohne transversale Lastbeanspruchung und mit konstanter Druckkraft  $D$  (Petersen, 1982, S. 16):

$$EI \cdot w'''' + D \cdot w'' = 0 \quad (4.95)$$

Die Querschnittssteifigkeit  $EI$  wird als konstant vorausgesetzt und die Schubsteifigkeit wird vernachlässigt. Unter Verwendung der Stabkennzahl  $\varepsilon$  lautet die Lösung der homogenen Differentialgleichung vierter Ordnung mit  $\zeta = \frac{x}{L}$  als dimensionslosen Verhältniswert

(Petersen, 1982, S. 14):

$$w(\zeta) = C_1 \cdot \sin(\varepsilon \cdot \zeta) + C_2 \cdot \cos(\varepsilon \cdot \zeta) + C_3 \cdot \zeta + C_4 \quad (4.96)$$

$$\varepsilon = L \cdot \sqrt{\frac{D}{EI}} \quad (4.97)$$

Mit den äußeren Lagerungsbedingungen des Druckstabs, wie sie bereits aus den Gleichungen 4.85 bis 4.88 bekannt sind, lässt sich das zu lösende Eigenwertproblem formulieren. Das Eigenwertproblem besitzt ausschließlich eine von  $\{C\} = 0$  verschiedene Lösung, wenn die Determinante von  $\underline{A}$  den Wert 0 annimmt. Unter Verwendung einer bekannten Querschnittssteifigkeit  $EI$  und einer bekannten Systemlänge  $L$ , führen mehrere Werte  $D_{Euler,i}$  zu einer Lösung des Problems. Dabei ist ausschließlich die Lösung mit dem geringsten Wert für baupraktische Zwecke von Relevanz. Dieser Wert ist die niedrigste Knicklast des Systems  $D_{Euler,1}$  und stellt die äußere Lasteinwirkung dar, bei der ein stabiles Gleichgewicht ohne äußere Verschiebung in ein labiles indifferentes Systemverhalten übergeht. Die Betrachtung von  $D_{Euler}$  gegenüber der Knicklast des einfach gelenkig gelagerten Stabs nach Euler-Fall 2 (s. Tabelle 4.1) ergibt den spezifischen Knicklängenbeiwert des Systems (Petersen, 1982, S. 192):

$$\beta = \frac{\pi}{\varepsilon} \quad (4.98)$$

Anschließend kann der Knicklängenbeiwert für die Nachweisführung herangezogen werden. Darüber hinaus ergibt sich durch Einsetzen der Knicklast  $D_{Euler}$  in Gleichung 4.96 die Knickfigur. Die Berechnung der Knicklast  $D_{Euler}$  wird für die optimierten Systemparameter sowohl für das statische, als auch für das dynamische Verfahren zur Systemidentifikation verwendet. Der Knicklängenbeiwert  $\beta$  bezieht sich anschließend auf den Abstand  $L$  zwischen der ersten und letzten Messstelle (s. Abbildungen 4.12 und 4.2).

Die Lösungen für Knicklängenbeiwerte, Verformungskurven im Stabilitätsfall sowie Knicklasten für übliche Lagerungsbedingungen in Form der Euler-Fälle können diverser Fachliteratur entnommen werden (Albert, 2018; Gross et al., 2021).

# 5 Phase II: Validierung anhand einer experimentellen Laborversuchsreihe

Das in Kapitel 4 vorgestellte Programm *DynamOpti* ermöglicht auf Basis der ersten Eigenkreisfrequenz  $\omega_{ex,1}$  und Eigenform  $\Psi_{ex,1}$  die Ermittlung der Lagersteifigkeiten  $k$  sowie der Normalkraftbeanspruchung  $D$  eines Druckstabs (vgl. Abbildung 4.2). Das dynamische Verfahren zur Systemidentifikation wird in Phase II mithilfe einer laborexperimentellen Versuchsreihe validiert. Dazu wird ein Versuchsstand entworfen, der den Einbau normalkraftbelasteter Stahlprofile mit variierenden Auflagerbedingungen ermöglicht. Abschnitt 5.1 erläutert das experimentelle Konzept anhand des Versuchsstands, der Prüfkörper sowie der statischen und dynamischen Versuchsreihe. Anschließend werden die Ergebnisse auf Basis der mit einem Impulshammer erzeugten Modaleigenschaften in Abschnitt 5.2 vorgestellt sowie in Abschnitt 5.3 analysiert. Die Reliabilität dieser Ergebnisse wird in Abschnitt 5.4 mit einer Vergleichsauswertung anhand der modalen Parameter, ermittelt durch einen elektrodynamischen Schwingungserreger, validiert.

## 5.1 Experimentelles Konzept

Diese Abhandlung präsentiert ein dynamisches Verfahren zur Systemidentifikation auf Basis einer zerstörungsfreien Modalanalyse. Die im Prozess optimierten Systemparameter, bestehend aus den vier Lagersteifigkeiten  $k$  und der Drucknormalkraft  $D$ , werden im Folgenden laborexperimentell validiert. Das Ziel ist es, die genannten Systemeigenschaften zur Plausibilitätskontrolle mit einem alternativen Prüfverfahren zu bestimmen. Während die Normalkraft  $D$  mit einer Kraftmessdose und die Massenverteilung  $\mu$  über eine Waage direkt erfasst werden können, ist ein ergänzender statischer Belastungsversuch

erforderlich, um Vergleichswerte bezüglich der Lagersteifigkeiten  $k$  und der Querschnittssteifigkeit  $EI$  zu ermöglichen. Abbildung 5.1 beschreibt den Ablauf der Validierung für die laborexperimentelle Untersuchung eines Prüfkörper, definiert durch wechselnde Querschnittsprofile und Lagerungsbedingungen. Nach dem Einbau des Prüfkörpers in den Versuchsstand beginnt die Laboruntersuchung mit einem Drei-Punkt-Biegeversuch ohne Normkraftbeanspruchung. Die Anwendung des statischen Verfahrens zur Systemidentifikation (s. Abschnitt 4.2) ermöglicht die Bestimmung der Querschnittssteifigkeit  $EI$ , sowie der vier Lagersteifigkeiten  $k$ . Aus den daraus ermittelten Systemparametern lassen sich die Knicklänge  $l_0$  sowie die maximale Knicklast  $D_{EC3}$  nach DIN EN 1993 ableiten. Mit dieser Information werden anschließend die dynamischen Untersuchungen unter verschiedenen Normalkräften bis zur Maximalbelastung  $D_{EC3}$  durchgeführt. Die aus den Schwingungen extrahierte erste Eigenkreisfrequenz  $\omega_{ex,1}$  und Eigenform  $\Psi_{ex,1}$  werden mit dem Programm *DynamOpti* analysiert. Die aus dem Identifikationsverfahren

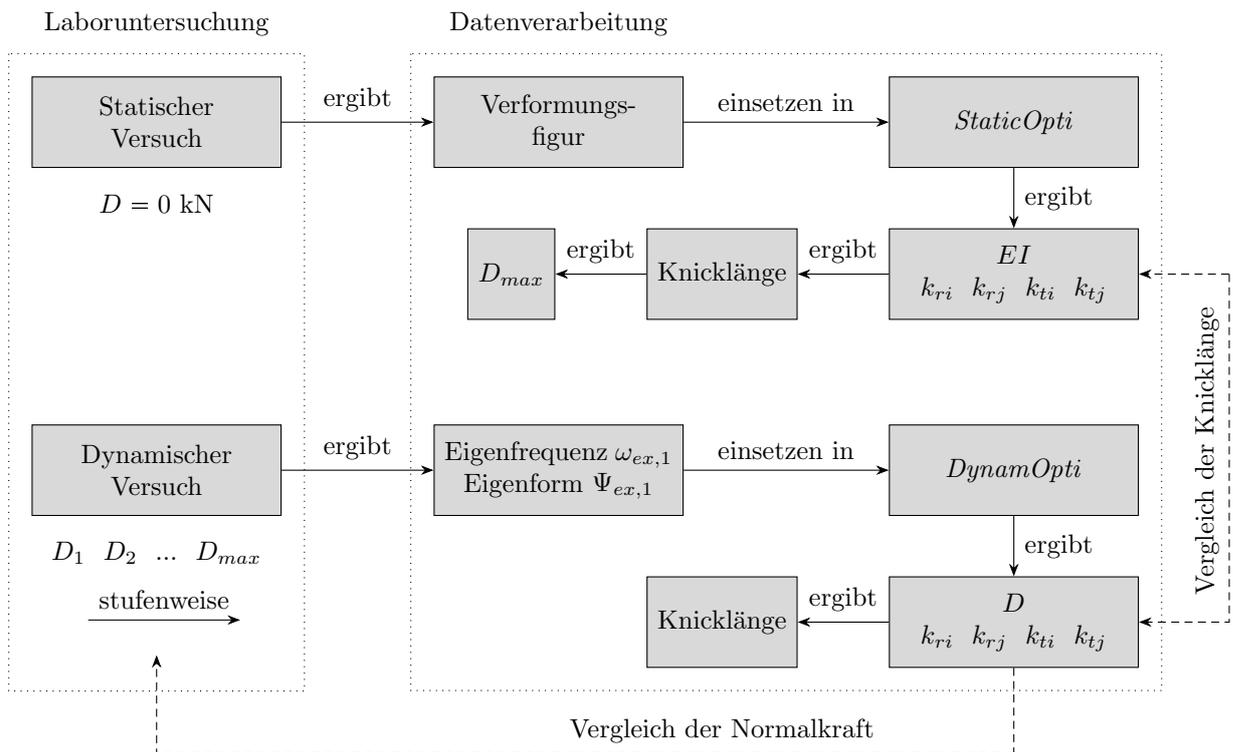


Abbildung 5.1: Laborexperimenteller Prozessablauf für einen Prüfkörper in Phase II

optimierten Werte der Normalkräfte und der Lagerungssteifigkeiten werden anschließend mit den Ergebnissen aus alternativen Verfahren validiert.

Abschnitt 5.1.1 beschreibt den grundsätzlichen Versuchsstand der Prüfkörper, die in Abschnitt 5.1.2 detailliert dargestellt werden. Anschließend vermitteln Abschnitt 5.1.3 und 5.1.4 wesentliche Informationen zu der statischen und dynamischen Versuchsreihe.

### 5.1.1 Versuchsstand

Für die laborexperimentelle Validierung des in Abschnitt 4.1 dargestellten dynamischen Optimierungsverfahrens wird ein Versuchsstand konzipiert. Dieser ermöglicht den Einbau von Prüfkörpern, welche sowohl durch eine axiale Druckkraft, wie auch durch eine statische Querlast untersucht werden können. Abbildung 5.2 zeigt den Aufbau des Versuchsstands einschließlich detaillierter Ansichten der Auflagersituation. Das zu untersuchende Stahlprofil wird über zwei Auflager an einem bestehenden Prüfraum mit lichtem Prüfraum von  $4,08 \times 3,344$  m befestigt. Für das obere Auflager kann zwischen dem Einbau eines Gelenk- bzw. Profilanschlusses gewählt werden. Während der Gelenkanschluss eine verdrehweiche Verbindung darstellt, ist es durch die Wahl unterschiedlich steifer Zwischenprofile möglich, Drehfedersteifigkeiten zu generieren. Je größer die Biegesteifigkeit des Profilanschlusses, umso geringer ist die Nachgiebigkeit und umso größer wird die Drehfedersteifigkeit des Übergangs. Während das obere Lager somit unterschiedlich steife Drehfederungen ermöglicht, erhält das untere Lager dauerhaft einen verdrehweichen Gelenkanschluss. Die Zusammensetzung eines spezifischen Stahlprofils mit einem definierten Anschlusstyp wird als Prüfkörper bezeichnet. Dieser besitzt, bezogen auf eine beidseitig gelenkige Lagerung und den jeweiligen Drehpunkten, eine Systemlänge von 2,545 m.

Während die obere Lagerung durch den Gelenkanschluss und den festen Übergang an den Breitflanschträger HEM 550 des Prüfraums axial gehalten ist, befindet sich das untere Auflager an einem vertikal verschieblichen Schlitten aus UPE-Profilen. Dieser kann frei über zwei Hohlprofile geführt werden, sodass die Normalkrafteinleitung für die dynamischen Untersuchungen unterhalb der Stütze durch einen Hydraulikzylinder ermöglicht wird (vgl. Abschnitt 4.1). Durch die Platzierung des Versuchsstands im Hauptraum kann die Anbringung eines horizontalen Hydraulikzylinders an den HEM 300 für den ergänzenden statischen Drei-Punkt-Biegeversuch realisiert werden (vgl. Abschnitt 4.2).



## 5.1.2 Prüfkörper

Im Zuge der Laboruntersuchungen werden unterschiedliche Stützenprofile unter Verwendung wechselnder Lagerungsbedingungen geprüft. Während das untere Auflager über alle Versuche hinweg als Gelenkanschluss ausgeführt wird, kann das obere Auflager durch den Einsatz unterschiedlich steifer Zwischenelemente variiert werden (vgl. Abbildung 5.2). Die insgesamt 20 Prüfkörper bestehen aus fünf Druckstäben sowie vier Anschlusstypen, die in Abschnitt 5.1.2.1 vorgestellt werden. Anschließend beschreibt Abschnitt 5.1.2.2 eine rechnerische Modellbildung der Versuchskörper und weist diesen theoretische Lagersteifigkeiten zu.

### 5.1.2.1 Stützenprofile und Anschlusstypen

Zur Validierung des in dieser Arbeit vorgestellten dynamischen Verfahrens zur Systemidentifikation werden fünf rechteckige Hohlquerschnitte nach Tabelle 5.1 verwendet (vgl. DIN EN 10210-2 & DIN EN 10219-2). Angegeben sind neben den Nennmaßen — Höhe ( $h$ ), Breite ( $b$ ), Wandungstärke ( $t$ ) — die statischen Eigenschaften, bestehend aus dem Flächeninhalt  $A$ , den Trägheitsmomenten  $I$ , den Widerstandsmomenten  $W$  sowie der Massenverteilung  $\mu$ . Alle Profile P bestehen aus dem Werkstoff S235 und sind in Tabelle 5.1 nach steigenden Trägheitsmomenten angeordnet, wobei P1 den Querschnitt mit den niedrigsten Flächenträgheitsmomenten  $I_y$  und  $I_z$  repräsentiert. Die Stützenprofile P1 und P2 sind warmgefertigt; die Profile P3, P4 und P5 kaltgefertigt. Sie werden über Kopfplatten an die Auflagerkonstruktionen befestigt (vgl. Abbildung 5.2). Während das

Tabelle 5.1: Querschnittswerte der Stützenprofile

Bezeichnung	$h$	$b$	$t$	$A$	$I_y$	$W_y$	$I_z$	$W_z$	$\mu$
Stützenprofil	[mm]	[mm]	[mm]	[cm <sup>2</sup> ]	[cm <sup>4</sup> ]	[cm <sup>3</sup> ]	[cm <sup>4</sup> ]	[cm <sup>3</sup> ]	[ $\frac{\text{kg}}{\text{m}}$ ]
P1	50	30	4,0	5,59	16,5	6,60	7,08	4,72	4,39
P2	60	40	4,0	7,19	32,8	10,9	17,0	8,52	5,64
P3	80	40	4,0	8,55	64,8	16,2	21,5	10,7	6,71
P4	100	50	4,0	10,9	134	26,8	44,9	18,0	8,59
P5	120	60	4,0	13,3	241	40,1	81,2	27,1	10,5

Tabelle 5.2: Querschnittswerte der Anschlussprofile

Bezeichnung	Typ	$h$	$b$	$t$	$A$	$I_y$	$W_y$	$I_z$	$W_z$
Anschluss		[mm]	[mm]	[mm]	[cm <sup>2</sup> ]	[cm <sup>4</sup> ]	[cm <sup>3</sup> ]	[cm <sup>4</sup> ]	[cm <sup>3</sup> ]
C1	Gelenk	-	-	-	-	-	-	-	-
C2	Profil	50	30	4,0	5,35	15,3	6,10	6,69	4,46
C3	Profil	80	40	4,0	8,55	64,8	16,2	21,5	10,7
C4	Profil	100	100	8,0	28,8	400	79,9	400	79,9

untere Auflager bei jeder Prüfung gelenkig ausgeführt wird, kann die Verdrehsteifigkeit der oberen Lagerung angepasst werden. Dies erfolgt über den Wechsel zwischen einem Gelenkanschluss und drei Profilan schlüssen, sodass insgesamt vier Verbindungselemente für jeden der fünf Druckstäbe zur Verfügung stehen. Die Profilan schlüsse besitzen dieselbe Höhe wie der zweiteilig ausgeführte Gelenkanschluss (vgl. Abbildung 5.2). Tabelle 5.2 stellt die Geometrien und statischen Profileigenschaften der Anschluss typen C1 bis C4 dar (vgl. DIN EN 10210-2 & DIN EN 10219-2). Der Anschluss C1 beschreibt den gelenkigen Übergang, bestehend aus einer verdrehweichen Bolzenverbindung mit einer Festigkeitsklasse des Bolzens von 10.9. Die Anschluss typen C2 und C3 stellen rechteckige Hohlprofile dar (kaltgefertigt), während C4 ein quadratisches Hohlprofil repräsentiert (warmgefertigt). Der Gelenkanschluss C1 besteht aus dem Werkstoff S355; die Profilan schlüsse C2, C3 und C4 aus S235.

Die spezifische Kombination aus einem der fünf verfügbaren Druckstäbe P und einem der vier oberen Anschlüsse C definiert den sogenannten Prüfkörper. Der fortlaufend verwendete Name eines Prüfkörpers setzt sich aus den jeweiligen Bezeichnungen des Stützenprofils und des Anschlusses zusammen. Die Prüfkörperbezeichnung P1C1 beschreibt die Verwendung des Profils P1 mit dem Anschlusstyp C1. Zur Sicherstellung einer eindeutigen Versagensrichtung unter Normalkraftbeanspruchung werden die Profile aus den Tabellen 5.1 und 5.2 ausschließlich in der schwächeren Querschnittsachse untersucht. Die Versuche der fünf Druckstäbe P und vier Anschlusstypen C umfassen demnach insgesamt 20 Prüfkörper, die im Folgenden zur laborexperimentellen Validierung des dynamischen Identifikationsverfahrens herangezogen werden.

### 5.1.2.2 Berechnung theoretischer Lagersteifigkeiten

Während der laborexperimentellen Versuche werden die Prüfkörper statisch und dynamisch untersucht. Für die Verfahren zur Systemidentifikation sind die Ermittlung einer statischen Last-Verformungs-Kurve bzw. der modalen Parameter als Grundlage erforderlich. Die Analyse durch die Programme *StaticOpti* und *DynamOpti* ermöglicht anschließend die Berechnung verschiedener Systemeigenschaften, wie die Lagersteifigkeiten. Bevor die Laboruntersuchungen durchgeführt werden, erfolgt zunächst eine analytische Berechnung der zu erwartenden Anschlusssteifigkeiten. Die theoretischen Ausgangswerte dienen vor allem zur Vordimensionierung der maximalen Lastbeanspruchung während des statischen Drei-Punkt-Biegeversuchs (s. Abschnitt 5.1.3). Aus dem Optimierungsprozess des statischen Belastungsversuchs ergeben sich wiederum experimentelle Anschlusssteifigkeiten  $k$ , die im weiteren Verlauf der Untersuchung als rechnerische Vorlage für die Berechnung der maximalen Druckbeanspruchung für den dynamischen Belastungsversuch verwendet werden (vgl. Abschnitt 5.1.4).

Die Modellidealisierung des in Abbildung 5.2 dargestellten Versuchsstands erfolgt mit den Querschnittswerten aus Tabelle 5.1 und 5.2. In Abhängigkeit des oberen Anschlusstyps C werden zur rechnerischen Modellidealisierung zwei unterschiedliche Modelle mit Systemlängen von 2,545 m für alle Prüfkörper mit einem Gelenkanschluss und 2,3975 m für alle Prüfkörper mit einem Profilanschluss unterschieden. Abbildung 5.3 zeigt eine Übersicht mit entlang des Prüfkörpers verteilten Sensoren für alle Prüfkörper mit einem beidseitig gelenkigen Anschluss C1. Der rechte Teil der Darstellung visualisiert die realen Gegebenheiten; der linke Teil zeigt das rechnerische Modell zur Vordimensionierung in Form eines einfach gelagerten Balkens auf zwei Stützen. Der HEM 550 des Hauptrahmens aus Abbildung 5.2 stellt im Vergleich zu den Dimensionen des Versuchsstands eine deutlich steifere Verbindung dar und kann für die rechnerische Vordimensionierung als Festpunkt angesehen werden. Das Stützenprofil P ist an beiden Enden mit dem gelenkigen Anschluss C1 unverschieblich an den Hauptrahmern sowie an die Auflagerbank angeschlossen. Alle Prüfkörper mit einem Anschlusstyp C1 werden mit einer Systemlänge von 2,545 m idealisiert.

Während der statischen bzw. dynamischen Versuche werden über den Prüfkörper verteilte Verformungs- und Beschleunigungsaufnehmer angebracht. Abbildung 5.3 stellt die

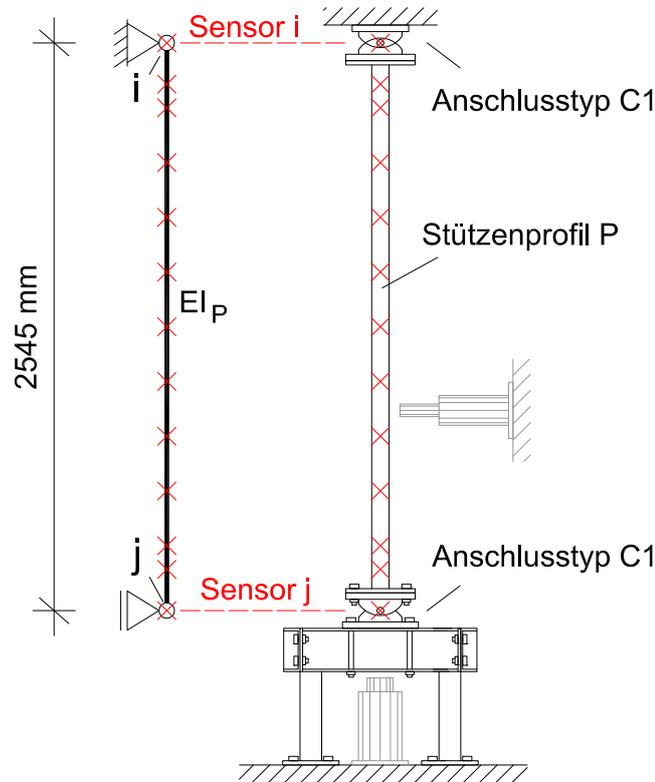


Abbildung 5.3: Basismodell (links) und Ausgangssituation (rechts) für alle Prüfkörper mit einem Gelenkanschluss C1 am Stützenkopfende

Position des ersten und letzten ( $i$  und  $j$ ) Sensors an den Stellen der Drehpunkte dar. Diese Messstellen sind Anfangs- und Endpunkt des statischen bzw. dynamischen Verfahrens zur Systemidentifikation (vgl. Abschnitt 5.1.3 bzw. 5.1.4). Die Systemlänge während des statischen bzw. dynamischen Identifikationsverfahrens entspricht dem Maß der rechnerischen Modellidealisation von 2,545 m.

Während für die Prüfkörper mit einem Gelenkanschluss C1 die Überführung in ein rechnerisches Modell übersichtlich erscheint, wird für alle Prüfkörper mit den Anschlusstypen C2, C3 und C4 ein alternatives Modell nach Abbildung 5.4 gewählt. Aus den rechts in der Abbildung dargestellten Realbedingungen resultiert das mittig aufgeführte statische System, bestehend aus zwei kraftschlüssig verbundenen Stäben unterschiedlicher Steifigkeiten sowie entsprechender Auflagersituationen. Der Übergang des Profilan schlusses C2 bis C4 zu dem Hauptträger des bestehenden Prüfrahmens (HEM 550) wird



dung 5.3), sind für alle übrigen Prüfkörper genauere Untersuchungen hinsichtlich der Lagersteifigkeiten erforderlich (vgl. Abbildung 5.4). Eine analytische Berechnung definiert die Steifigkeitsverhältnisse an der Stelle des ersten Sensors  $i$  und damit die Auflagerbedingungen des Basismodells nach Abbildung 5.4 (linke Darstellung).

Für alle 15 Prüfkörper mit einem Profilanschluss werden nach den in Anhang A dargestellten Berechnungsgrundlagen die Auflagersteifigkeiten ermittelt. Eine gemeinsame Darstellung der ermittelten Lagersteifigkeiten sowie der Grenzwertsteifigkeiten der Prüfkörper mit einem Gelenkanschluss Anschlusstyp C1 ist in den Tabellen 5.3 ( $k_{ri}$ ) und 5.4 ( $k_{ti}$ ) gegeben. Neben den tatsächlichen Steifigkeiten werden zusätzlich die entsprechenden Einspanngrade nach den Gleichungen 4.64 ( $\beta_{ri}$ ) bzw. 4.66 ( $\beta_{ti}$ ) aufgeführt. Die in Abschnitt 5.1.2.1 vorgestellten Prüfkörper mit Profilanschlüssen erreichen rechnerische Einspanngrade zwischen 60,1 % und 92,8 % für die Drehfedersteifigkeit  $k_{ri}$  bzw. zwischen 99,7 % und 100 % für die Wegfedersteifigkeit  $k_{ti}$

Tabelle 5.3: Drehfedersteifigkeit  $k_{ri}$  [ $\frac{\text{kNm}}{\text{rad}}$ ] (Einspanngrad  $\beta_{ri}$  [%])

Stützenprofil	C1	C2	C3	C4
P1	0 (0)	82,5 (81,6)	145 (88,6)	238 (92,8)
P2	0 (0)	123 (73,4)	231 (83,8)	542 (92,4)
P3	0 (0)	139 (71,1)	258 (82,1)	670 (92,2)
P4	0 (0)	213 (64,3)	361 (75,4)	1253 (91,4)
P5	0 (0)	322 (60,1)	486 (69,5)	1958 (90,2)

Tabelle 5.4: Wegfedersteifigkeit  $k_{ti}$  [ $\frac{\text{kN}}{\text{m}}$ ] (Einspanngrad  $\beta_{ti}$  [%])

Stützenprofil	C1	C2z	C3z	C4z
P1	$\infty$ (100)	4298 (99,9)	11677 (100)	96630 (100)
P2	$\infty$ (100)	5336 (99,9)	13138 (99,9)	144015 (100)
P3	$\infty$ (100)	5777 (99,8)	13670 (99,9)	155558 (100)
P4	$\infty$ (100)	7892 (99,7)	16169 (99,9)	185775 (100)
P5	$\infty$ (100)	10719 (99,7)	19720 (99,8)	204161 (100)

### 5.1.3 Statische Versuchsreihe

Nach dem Einbau eines Prüfkörpers, entsprechend der Vorgaben aus Abschnitt 5.1.2, wird zunächst ein statischer Belastungsversuch durchgeführt. Die messtechnische Erfassung einer Verformungsfigur sowie ihre Weiterverarbeitung durch das in Abschnitt 4.2 aufgezeigte statische Verfahren zur Systemidentifikation ermöglicht die Ermittlung der Auflagersteifigkeiten  $k$  sowie der Querschnittssteifigkeit  $EI$ . Im Folgenden stellt Abschnitt 5.1.3.1 das statische Grundmodell für das Identifikationsverfahren vor. Anschließend beschreibt Abschnitt 5.1.3.2 Angaben zur Einleitung der Einzellastbeanspruchung sowie die Komponenten des verwendeten Messsystems. Die Versuchsdurchführung, einschließlich der Darstellung maximaler Belastungsparameter, wird in Abschnitt 5.1.3.3 erläutert. Abschnitt 5.1.3.4 stellt die Einflüsse von unplanmäßigen Fehlerquellen im Versuchsaufbau auf die Optimierungsergebnisse des Identifikationsverfahrens dar.

#### 5.1.3.1 Statisches Grundmodell

Das Verfahren zur Systemidentifikation ermöglicht auf Grundlage eines statischen Ausgangsmodells die Bestimmung zunächst unbekannter Systemeigenschaften. Für die Analyse der Prüfkörper werden die in Abbildung 5.5 dargestellten statischen Modelle verwendet. Anders als bei der Vordimensionierung in Abschnitt 5.1.2.2 werden die Auflagerbedingungen durch vier statt zwei Lagersteifigkeiten  $k$  ausgedrückt (vgl. Abschnitt 4.2.1.1). Abbildung 5.5 unterscheidet zwischen Prüfkörpern mit einem Gelenkanschluss (C1) und denen mit einem Profilananschluss (C2 bis C4). Die Definitionen der für die statischen Modelle gewählten Systemlängen von 2,545 m (C1) und 2,3975 m (C2 bis C4) können Abschnitt 5.1.2.2 entnommen werden. Die dargestellten Systeme sind Grundlage des statischen Verfahrens zur Systemidentifikation und werden über die erste und letzte messtechnisch erfasste Stelle definiert. Die Einzellast wird über den Hauptrahmen in einer Höhe von ca. 0,7755 m durch einen manuell gesteuerten Hydraulikzylinder eingeleitet.

#### 5.1.3.2 Geräte und Equipment

Das vorgestellte statische Verfahren zur Systemidentifikation erfordert den Ansatz einer diskreten Verformungsfigur  $w$  infolge einer korrespondierenden Krafteinwirkung  $F$ . Der aus Abschnitt 5.1.1 bekannte Versuchsstand wird daher mit einem Hydraulikzylinder

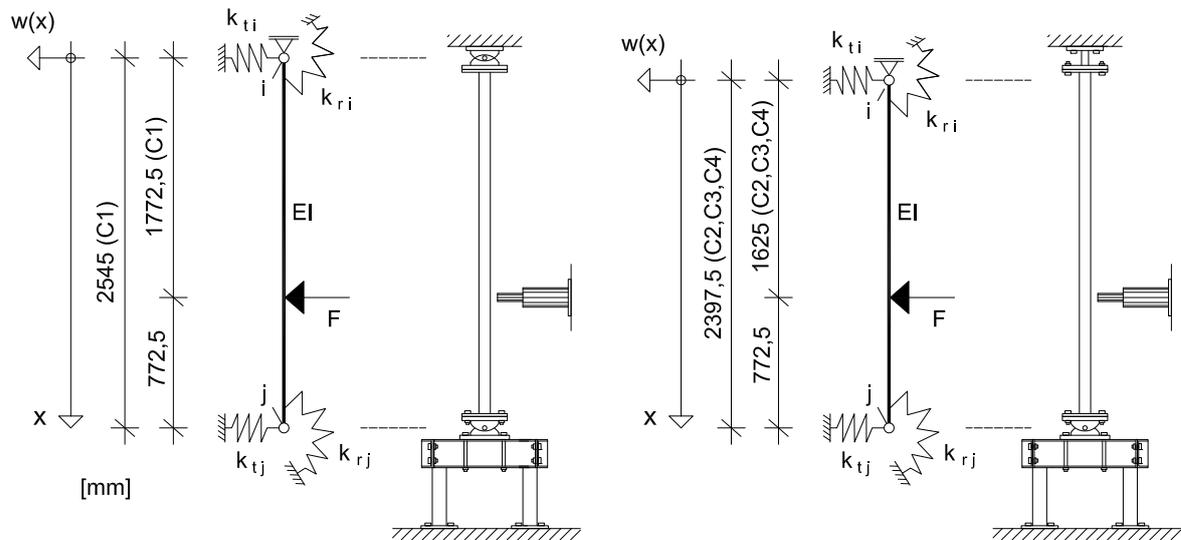
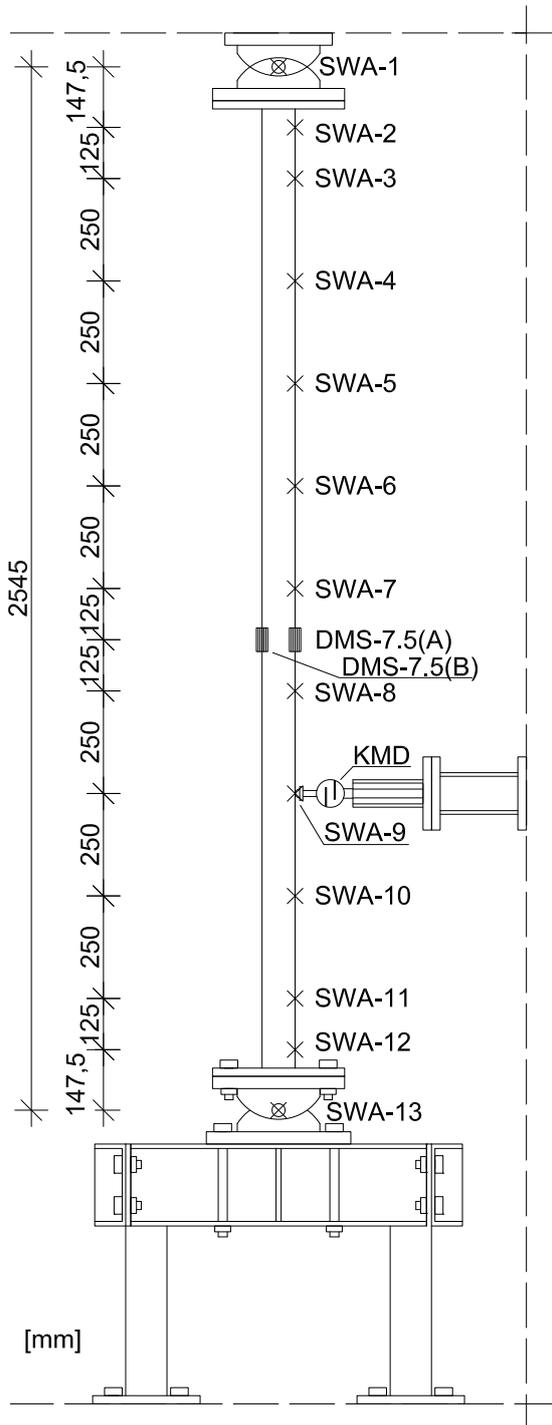


Abbildung 5.5: Basismodelle der statischen Versuchsreihe: Prüfkörper mit dem Anschlusstyp C1, Gelenkanschluss (l) bzw. mit den Anschlusstypen C2 bis C4, Profilananschluss (r)

zur Krafteinleitung sowie mit Messtechnik zur Aufzeichnung von Last und Verformung nach Abbildung 5.6 ergänzt. Während der Versuchsdurchführung ermöglichen, neben den Kraft- und Wegsensoren, Dehnungsmessstreifen eine Kontrolle der aus den Dehnungen in Echtheit berechneten Spannungen. Detaillierte Ansichten der Lasteinleitung sowie der Messtechnik können Abbildung 5.7 entnommen werden. Im Folgenden werden die für den statischen Belastungsversuch verwendeten Geräte und Messeinrichtungen beschrieben.

Die Lasteinleitung erfolgt durch einen Hydraulikzylinder des Typs RC154 der Firma Enerpac mit einer maximalen Druckkraft von 140 kN. Der Zylinder wird mit einem Zwischenprofil seitlich an den Hauptraahmen befestigt und drückt im Abstand von 0,7725 m vom unteren Drehpunkt entfernt horizontal auf den Prüfkörper. Direkt mit dem Hydraulikzylinder verbunden, ist eine S-förmige Kraftmessdose (KMD) des Typs CTOL der Firma X-Sensors mit einem Messbereich von bis zu 25 kN Zug- und Druckkraft. Der Kontakt zum Prüfkörper erfolgt über eine kugelförmige Hutmutter, sodass auf die Verwendung einer Kugelkalotte verzichtet wird. Gesteuert wird der Hydraulikzylinder manuell durch eine Handpumpe des Typs P141 der Firma Enerpac. Eine Ansicht der Lasteinleitung kann Abbildung 5.7 (a) entnommen werden.



(a) Übersicht Messsystem



(b) Versuchsaufbau

Abbildung 5.6: Anordnung und Darstellung der Messtechnik im Zuge des statischen Belastungsversuchs, hier am Beispiel der Prüfkörper mit Gelenkanschluss am Stützenkopf (Ausschluss von SWA-1 für alle Prüfkörper mit einem Profilanschluss C2, C3 oder C4, s. Abschnitt 5.1.2.2)

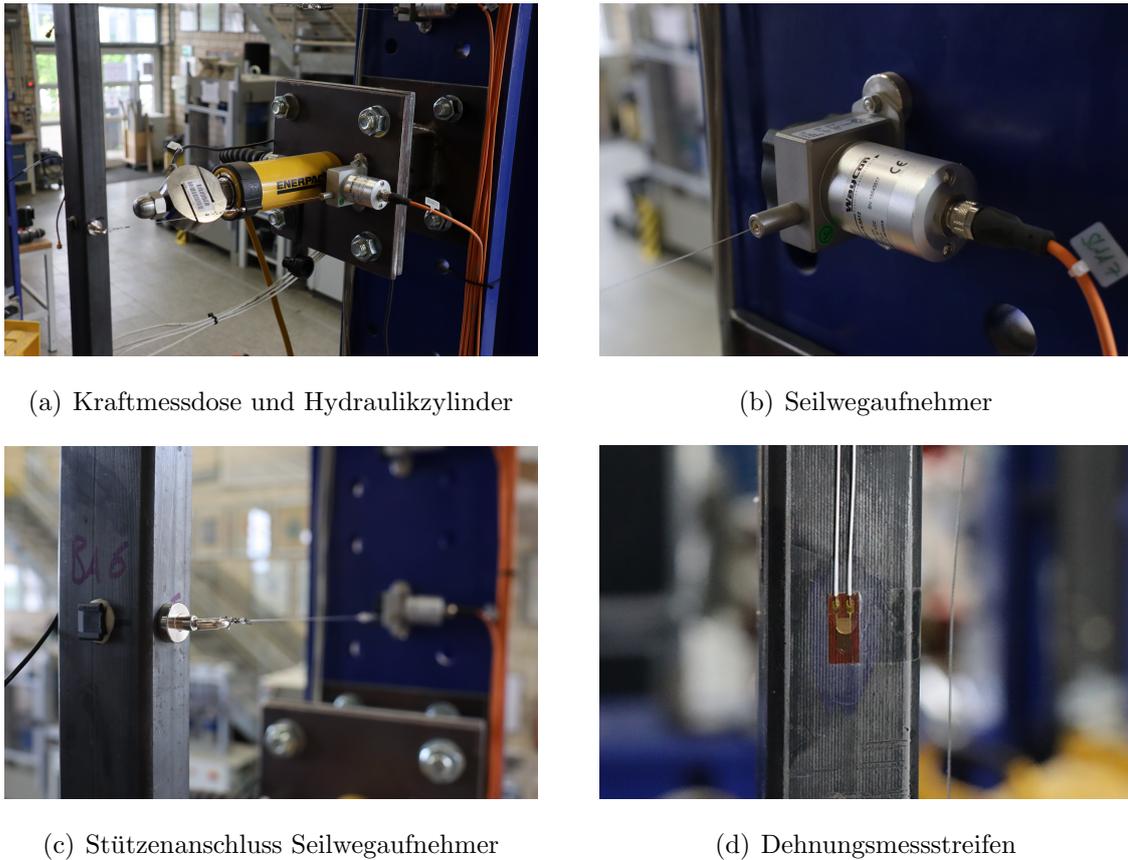


Abbildung 5.7: Detailansichten des statischen Belastungsversuchs

Für die Aufzeichnung der zur Querlast korrespondierenden Verformung werden dreizehn Seilwegaufnehmer (SWA) des Typs SX50-250-1R-SA12 der Firma WayCon mit einer maximalen Messweite von 250 mm verwendet. Während die Verteilung weitestgehend gleichmäßig in einem Abstand von 0,25 m erfolgt, werden auflagernah geringere Abstände gewählt (s. Abbildungen 5.6). Die an dem Hauptrahmen befestigten Seilwegaufnehmer werden mithilfe von Magnethaken an die Prüfkörper angeschlossen (s. Abbildungen 5.7 (b) und (c)). Neben den für das statische Identifikationsverfahren erforderlichen Messungen von Kraft und Verformung ermöglicht die Anbringung zweier Dehnungsmessstreifen (DMS) des Typs 6/120ZE LY41 (HBM) die Begrenzung der Materialspannungen während des Versuchs. Die Dehnungsmessstreifen werden beidseitig nach Abbildung 5.7 (d) zwischen SWA-7 und SWA-8 appliziert. Zur Steuerung und Verwaltung der Sensoren werden die Messverstärker QuantumX MX1615B und QuantumX MX879B und das Programm *Catman Easy* (HBM) verwendet.

### 5.1.3.3 Durchführung der statischen Versuchsreihe

Während der statischen Versuchsdurchführung wird die Einzellast durch einen Hydraulikzylinder über eine Handpumpe steigend auf den Prüfkörper aufgebracht. Im Folgenden werden Abbruchkriterien definiert, bei denen eine bestimmte rechnerische Beanspruchung erreicht und der Versuch beendet wird. Ziel ist es, die größte rechnerische Spannung des Stützenprofils P auf 50 % ( $\pm 11,75 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$ ) der Streckgrenze des Materials zu begrenzen. In Anlehnung an die Berechnung der theoretischen Lagersteifigkeiten aus Abschnitt 5.1.2.2 demonstriert Abbildung 5.8 das für die Vordimensionierung idealisierte Modell inklusive der für Zielparameter relevanten Stellen. Die Angaben der Auflagersteifigkeiten  $k_{ri}$  und  $k_{ti}$  können den Tabellen 5.3 und 5.4 entnommen werden. Drei Zielparameter, bestehend aus der Last  $F_{max}$ , der Durchbiegung  $w_{max}$  an Stelle 9 und der Spannung  $\sigma_{max}$  an Stelle 7.5, werden definiert. Die Lasteinleitung der Kraft  $F$  erfolgt in einem Abstand von 0,7725 m vom Drehpunkt des unteren Auflagers entfernt und damit an der selben Stelle, an der sich auch der Seilwegaufnehmer SWA-9 befindet (vgl. Abbildung 5.6). Die Dehnungsmessstreifen sind mit einem Abstand von 0,375 m oberhalb der Stelle 9 appliziert.

Die in Abbildung 5.8 dargestellten Stellen der Zielparameter werden unter Berücksichtigung einer maximalen Spannungsauslastung von 50 % für alle Prüfkörper mit den

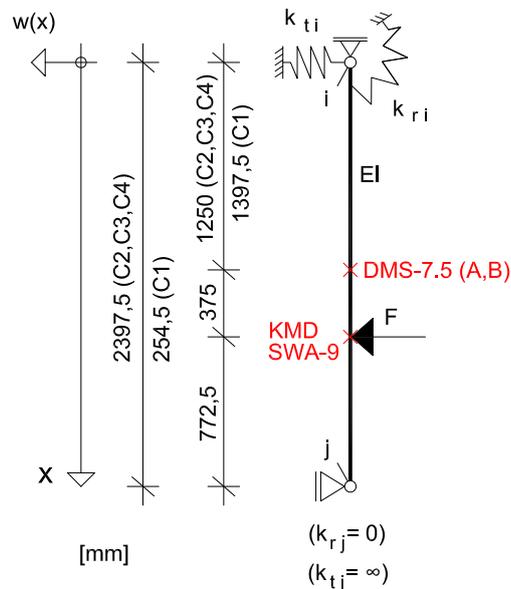


Abbildung 5.8: Stellen der Zielparameter der statischen Versuchsreihe (in rot)

Querschnittseigenschaften nach Abschnitt 5.1.2.1 und den Lagersteifigkeiten nach Abschnitt 5.1.2.2 berechnet. Mit Ansatz der Drehfederkonstanten  $k$  aus den Tabellen 5.3 und 5.4 ergeben sich die in Tabelle 5.5 dargestellten Zielparameter, bestehend aus der Kraft  $F_{max}$  an der Stelle 9, der Verschiebung  $w_{max}$  an der Stelle 9, sowie der maximalen Spannung  $\sigma_{max}$  an der Stelle 7.5. Ist einer der drei Zielparameter erreicht, wird die Laststeigerung beendet und die Lastbeanspruchung  $F$  abgebaut. Der Versuch wird fünfmal je Prüfkörper durchgeführt und mit den Buchstaben a bis e gekennzeichnet.

Die Verwendung unterschiedlicher Zielparameter reduziert die Wahrscheinlichkeit eines experimentellen Spannungsübertritts auf Basis abweichender Systemeigenschaften. Sind in der Realität geringere Federsteifigkeiten  $k_{ri}$  vorhanden, führen ausschließlich größere Verformungen als  $w_{max}$  zu der maximal erlaubten Spannung. Vergleichbares gilt für Spannung  $\sigma_{max}$  an der Stelle 7.5. Sind dagegen größere Einspannungen  $k_{ri}$  vorhanden, wären höhere Kräfte  $F_{max}$  erforderlich, um die angesetzte Spannungsauslastung zu erreichen.

Tabelle 5.5: Zielparameter der statischen Versuchsreihe

Stützenprofil	Wert	Einheit	Sensor	C1	C2	C3	C4
P1	$F_{max}$	[kN]	KMD	1,03	1,25	1,29	1,32
	$w_{max}$	[mm]	SWA-9	17,03	12,85	12,07	11,65
	$\sigma_{max}$	$[\frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}]$	DMS-7.5	$\pm 9,26$	$\pm 7,50$	$\pm 7,17$	$\pm 7,00$
P2	$F_{max}$	[kN]	KMD	1,86	2,17	2,29	2,37
	$w_{max}$	[mm]	SWA-9	12,80	10,41	9,47	8,79
	$\sigma_{max}$	$[\frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}]$	DMS-7.5	$\pm 9,26$	$\pm 7,92$	$\pm 7,39$	$\pm 7,01$
P3	$F_{max}$	[kN]	KMD	2,34	2,68	2,85	2,98
	$w_{max}$	[mm]	SWA-9	12,71	10,58	9,55	8,74
	$\sigma_{max}$	$[\frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}]$	DMS-7.5	$\pm 9,26$	$\pm 8,05$	$\pm 7,48$	$\pm 7,02$
P4	$F_{max}$	[kN]	KMD	3,93	4,32	4,63	4,99
	$w_{max}$	[mm]	SWA-9	10,24	9,11	8,18	7,09
	$\sigma_{max}$	$[\frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}]$	DMS-7.5	$\pm 9,26$	$\pm 8,46$	$\pm 7,82$	$\pm 7,05$
P5	$F_{max}$	[kN]	KMD	5,92	6,30	6,73	7,48
	$w_{max}$	[mm]	SWA-9	8,52	7,92	7,20	5,96
	$\sigma_{max}$	$[\frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}]$	DMS-7.5	$\pm 9,26$	$\pm 8,74$	$\pm 8,15$	$\pm 7,11$

### 5.1.3.4 Stabilität des Lösungsalgorithmus gegenüber einer Platzierungsabweichung der Seilwegaufnehmer

Das vorgestellte statische Verfahren zur Systemidentifikation erfordert die messtechnische Ermittlung einer diskreten Verformungsfigur infolge einer definierten Einzellastbeanspruchung. Der statische Belastungsversuch wird sowohl zur Vordimensionierung der maximalen Normalkraftbeanspruchung während der dynamischen Untersuchungen, wie auch als Vergleichsuntersuchung für die optimierten Lagersteifigkeiten der dynamischen Systemidentifikation herangezogen. Für die Laboruntersuchungen im Zuge der Forschungsarbeit werden zur Verformungsmessung Seilwegaufnehmer des Typs SX50-250-1R-SA12 der Firma WayCon verwendet und durch Magnethaken mit dem Prüfkörper verbunden (vgl. Abschnitt 5.1.3.2). Die genaue Platzierung der Seilwegaufnehmer bzw. der Magnethaken ist Abbildung 5.6 zu entnehmen.

Während der Messung können unterschiedliche Einflüsse dazu beitragen, dass die ermittelten Verformungswerte eine experimentelle Unsicherheit einschließen. Um die Robustheit der vergleichenden Optimierungsergebnisse aus der statischen Versuchsreihe aufzuzeigen, wird die Wirkung einer Platzierungsabweichung der Magnethaken zu den rechnerisch angesetzten Sensorstellen nach Abbildung 5.6 untersucht. Abbildung 5.9 stellt unterschiedliche Berechnungsszenarien der Platzierungsabweichung für die numerische Untersuchung dar. Es werden zwei Genauigkeitsklassen unterschieden, bei der die jeweils maximal angesetzte Platzierungsabweichung zwischen theoretischem Ansatz und

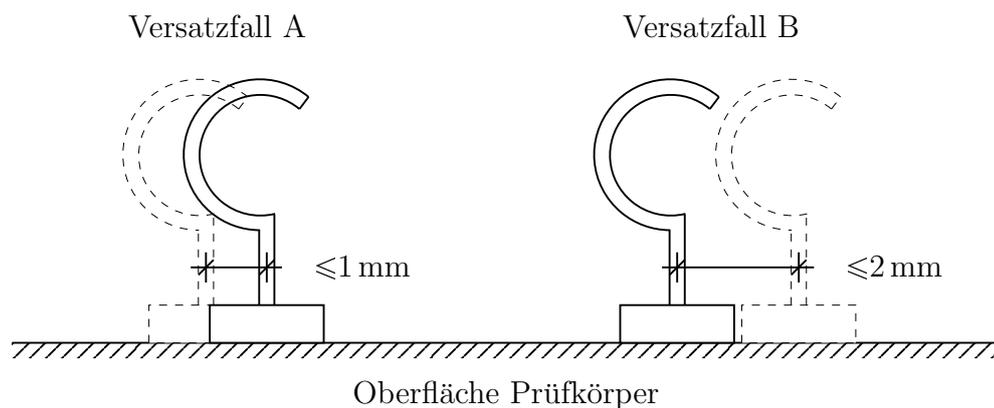


Abbildung 5.9: Berechnungsszenarien der Platzierungsabweichung der Magnethaken

tatsächlichen Gegebenheiten unterschiedlich groß sind. Versatzfall A stellt die Situation dar, in der die Platzierungsabweichung auf maximal  $\pm 1$  mm in Stablängsrichtung begrenzt wird; Versatzfall B repräsentiert einen äquivalenten Fall für Abweichungen von bis zu  $\pm 2$  mm. Für die numerische Untersuchung werden alle Stützenprofile P1 bis P5 mit den Anschlusstypen C1 und C4 einbezogen. Rechnerische Grundlage dieser insgesamt zehn Prüfkörper sind die Systemidealisationen aus den Abbildungen 5.3 und 5.4 in Kombination mit den Anschlusssteifigkeiten  $k$  aus den Tabellen 5.3 und 5.4.

Für die Analyse eines Prüfkörpers erfolgt zunächst durch das Programm *StaticBasic* (vgl. Abschnitt 4.2.1) die Ermittlung diskreter Verformungsgrößen  $w_i$  an den Stellen  $x_i$  der Seilwegaufnehmer nach Abbildung 5.6. Für die Berechnung der dreizehn (C1) bzw. zwölf (C4) Verschiebungen  $w_i$  wird die halbe theoretische Maximalbelastung  $F_{max}$  aus Tabelle 5.5 angesetzt. Die definierten Punkte der Verformungskurve ( $x_i|w_i$ ) sind mit der Kraftereinwirkung  $F_{max}/2$  Grundlage für das anschließende Identifikationsverfahren.

Bevor der Optimierungsprozess durchgeführt wird, erfolgt in einem zweiten Schritt die Manipulation der zuvor ermittelten Verformungskurve. Dabei werden die Stellen  $x_i$  der Punkte ( $x_i|w_i$ ) mit einer Maßungengenauigkeit versehen. Anhand einer zufälligen Gleichverteilung werden für alle Stellen Platzierungsabweichungen  $x_{i,shift}$  erzeugt. Die Ungenauigkeiten variieren je nach Szenario zwischen  $\pm 1$  mm (Versatzfall A) bzw.  $\pm 2$  mm (Versatzfall B) und bilden mit  $x_i$  die manipulierten Stellen  $x_{i,man}$ :

$$x_{i,man} = x_i + x_{i,shift} \quad (5.1)$$

Anschließend ermittelt das Programm *StaticOpti* in einem dritten Schritt (Abschnitt 4.1.2) die Querschnittssteifigkeit  $EI_{opt}$  sowie die Lagersteifigkeiten  $k_{kri,opt}$ ,  $k_{krj,opt}$ ,  $k_{kti,opt}$  und  $k_{ktj,opt}$  einschließlich des Knicklängenbeiwerts  $\beta$ . Der Vorgang der Stellenmanipulation und Systemidentifikation wird für jeden Prüfkörper 100 Mal ( $n = 1$  bis 100) wiederholt. Abbildung 5.10 zeigt die Platzierungsabweichungen  $x_{8,shift}$  für die Messstelle SWA-8 des Prüfkörpers P4C4 für den Versatzfall B ( $\pm 2$  mm). Die Punktwolke visualisiert für jeden Berechnungsdurchgang  $n$  das dazugehörige Verschiebungsmaß  $x_{8,shift}$ .

Ziel der numerischen Untersuchung ist es, den Einfluss der Platzierungsabweichung auf die Ergebnisse des statischen Identifikationsverfahrens zu bestimmen. Daher werden die optimierten Parameter aus allen 100 Durchgängen je Prüfkörper mithilfe einer statisti-

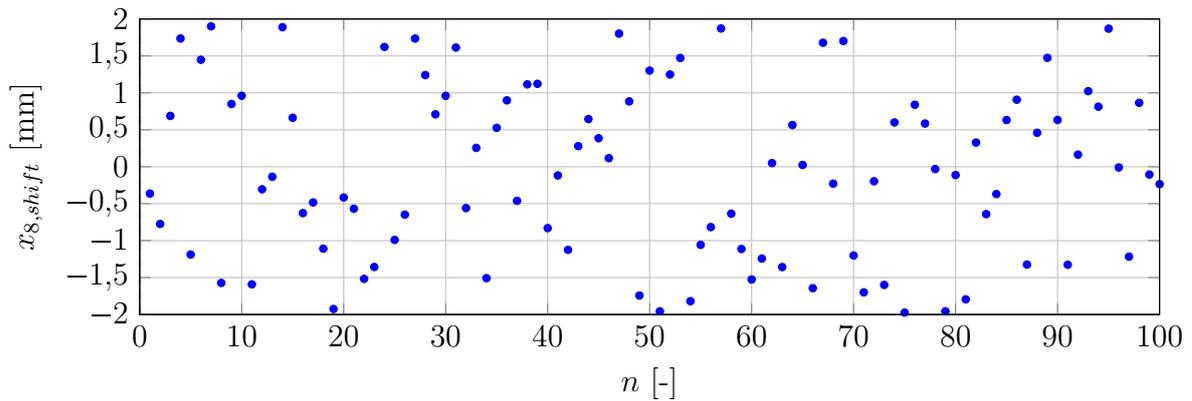


Abbildung 5.10: Platzierungsabweichung  $x_{8,shift}$  des Prüfkörpers P4C4 (Versatzfall B)

schen Auswertung zusammengefasst. Wesentlich ist die Bestimmung der Varianzkoeffizienten  $V$  für alle Biegesteifigkeiten  $EI_{opt,n}$  bzw. dimensionslosen Knicklängenbeiwerte  $\beta_{opt,n}$  eines Prüfkörpers. Der Varianzkoeffizient stellt die prozentuale Abweichung zwischen der Standardabweichung und dem Mittelwert aller Durchgänge dar. Tabelle 5.6 zeigt die Auswertung des Prüfkörpers P4C4 für den Versatzfall B ( $\pm 2$  mm). Abgebildet sind der Basiswert (Ausgangsberechnung), das über alle Berechnungen hinweg ermittelte Maximum und Minimum, der Mittelwert, die Standardabweichung  $s$  und der Varianzkoeffizient  $V$ . Der in Tabelle 5.6 dargestellte Prüfkörper P4C4 besitzt für die optimierte Biegesteifigkeit  $EI_{opt}$  einen Varianzkoeffizienten von 0,49 % und für den Knicklängenbeiwert  $\beta$  auf Basis der optimierten Federsteifigkeiten  $k_{opt}$  einen Wert von 0,23 %.

Abbildungen 5.11 und 5.12 visualisieren die Varianzkoeffizienten von  $EI_{opt}$  und  $\beta$  für alle zehn Prüfkörper getrennt nach Versatzfall A und B. Über alle Untersuchungen hinweg, ergibt sich hinsichtlich des Varianzkoeffizienten  $V_{EI}$  ein Maximum von 0,44 % für den Versatzfall A und ein maximaler Wert von 0,74 % für den Versatzfall B. Durchschnittlich

Tabelle 5.6: Statistische Auswertung des Prüfkörpers P4C4 für den Versatzfall B

Parameter	Basiswert	Max	Min	Mittelwert	$s$	$V$
$EI_{opt}$	94,29	94,72	92,41	94,17	0,47	0,0049
	[kN m <sup>2</sup> ]	[—]				
$\beta_{opt}$	0,7204	0,7214	0,7135	0,7198	0,0016	0,0023
	[—]	[—]	[—]	[—]	[—]	[—]

konnte der Varianzkoeffizient zu 0,37 % (A) bzw. 0,57 % (B) bestimmt werden. Für  $V_\beta$  ergeben sich im Allgemeinen geringere Werte. So liegen die maximal ermittelten Varianzkoeffizienten bei 0,21 % (A) bzw. 0,34 % (B). Als Durchschnittswerte ergeben sich für den Varianzkoeffizienten 0,18 % (A) und 0,27 % (B).

Es zeigt sich, dass bei beiden Genauigkeitsklassen der Einfluss der Abweichungen auf die zu optimierenden Parameter gering bleibt. Verglichen zu den im Bauwesen üblichen Toleranzen sind die aufgezeigten Varianzkoeffizienten von maximal 0,74 % als unbedenklich einzuordnen. Der Einfluss einer Platzierungsabweichung von bis zu  $\pm 2$  mm kann für die Auswertung der laborexperimentellen Versuche vernachlässigt werden.

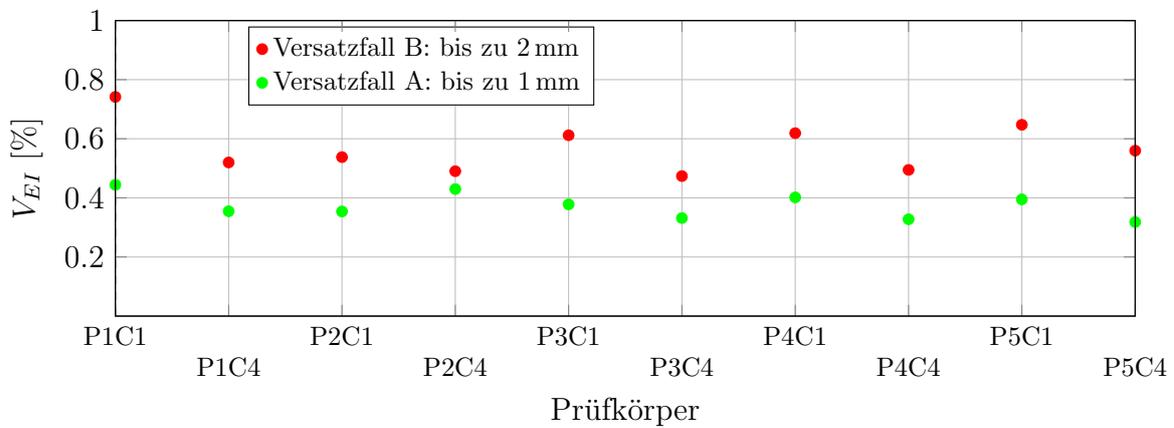


Abbildung 5.11: Varianzkoeffizient  $V_{EI}$  aller Prüfkörper

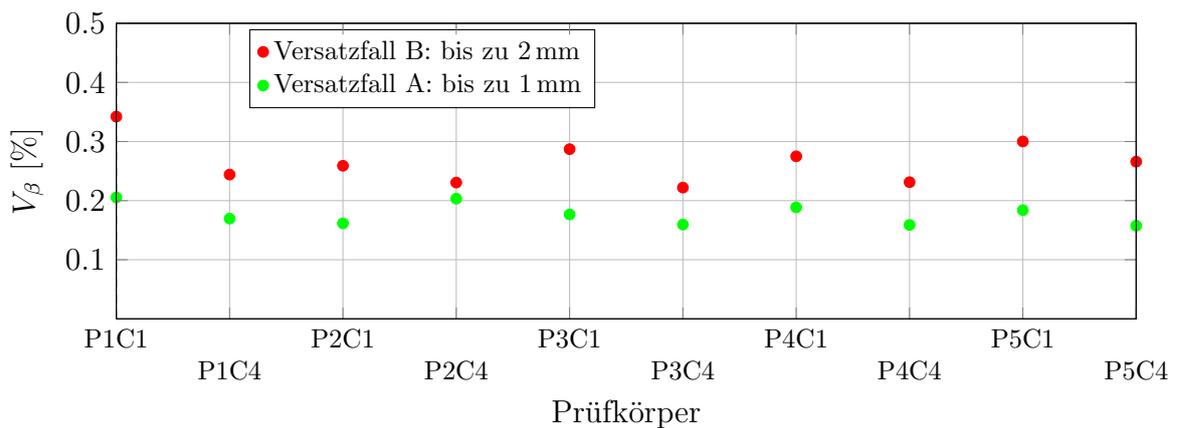


Abbildung 5.12: Varianzkoeffizient  $V_\beta$  aller Prüfkörper

### 5.1.4 Dynamische Versuchsreihe

Diese Forschungsarbeit entwickelt ein dynamisches Verfahren zur Systemidentifikation für druckbeanspruchte Bauteile zur Ermittlung der Lagersteifigkeiten  $k$  und der tatsächlichen Normalkraftbeanspruchung  $D$ . Nach Abschluss der statischen Untersuchung erfolgt daher in einer zweiten Versuchsreihe die Modalanalyse des Prüfkörpers unter der Belastung verschiedener Normalkraftzustände  $D_{real}$ . Die experimentell ermittelten Schwingungseigenschaften führen anschließend mit dem in Abschnitt 4.1 dargestellten dynamischen Verfahren, vergleichbar zu den statischen Untersuchungen, zu den Lagersteifigkeiten  $k_{opt}$  und ergänzend zu der Normalkraftbeanspruchung  $D_{opt}$ . Abschnitt 5.1.4.1 beschreibt das Grundmodell als Basis des dynamischen Identifikationsverfahrens. Während Abschnitt 5.1.4.2 die verwendete Messtechnik vorstellt, erläutert Abschnitt 5.1.4.3 die Versuchsdurchführung. Anschließend untersucht Abschnitt 5.1.4.4 den Einfluss der Normalkraftbeanspruchung auf die Systemlänge und Abschnitt 5.1.4.5 die Auswirkungen einer verkürzten Eigenformmessung auf die Ergebnisse des Identifikationsverfahrens.

#### 5.1.4.1 Dynamisches Grundmodell

Die Anpassung der Systemeigenschaften eines dynamischen Basismodells ist Grundlage des entsprechenden Verfahrens zur Systemidentifikation. Der Versuchsaufbau der in dieser Forschungsarbeit vorgestellten Laboruntersuchung kann durch die in Abbildung 5.13 abgebildeten Modelle idealisiert werden. Äquivalent zu den statischen Versuchen aus Abschnitt 5.1.3 sind zwei Modelle in Abhängigkeit des oberen Anschlusstyps zu unterscheiden, wodurch entweder zwölf oder dreizehn Stellen in die Systemidentifikation einfließen. Nähere Erläuterungen zu den angegebenen Systemlängen von 2,545 m für den Gelenkanschluss C1 und 2,3975 m für die Profilanlüsse C2 bis C4 können Abschnitt 5.1.2.2 entnommen werden. Die Normalkraftbeanspruchung  $D$  wird unterhalb der vertikal frei verschieblichen Auflagerbank durch einen Hydraulikzylinder eingeleitet.

#### 5.1.4.2 Geräte und Equipment

Der Aufbau des Messsystems zur Modalanalyse kann Abbildung 5.14 entnommen werden. Die aus den statischen Versuchen bekannten Dehnungsmessstreifen verbleiben am Prüfkörper und werden auch für die Überwachung der dynamischen Messreihe verwendet.

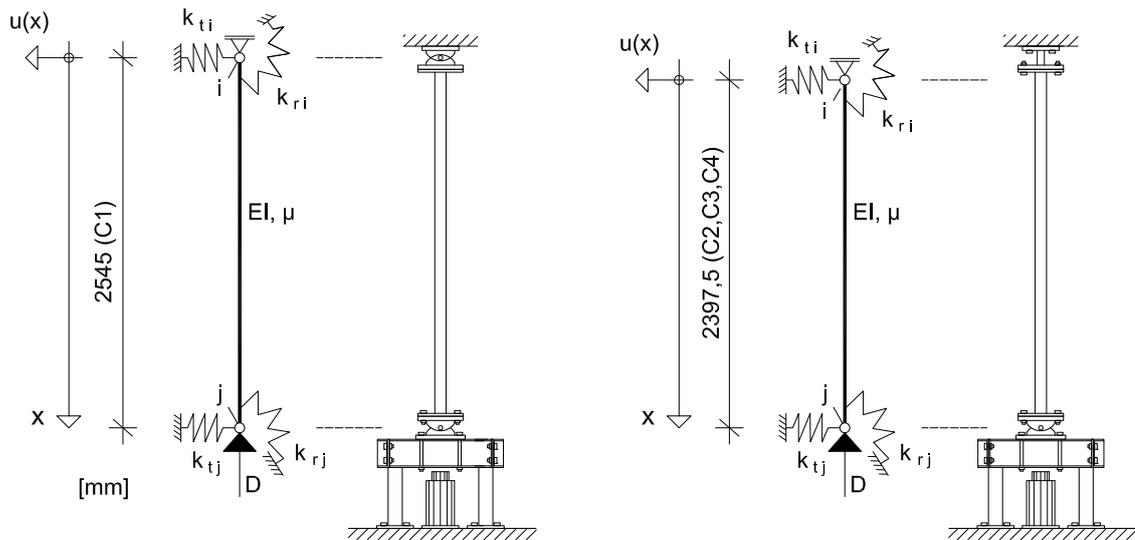
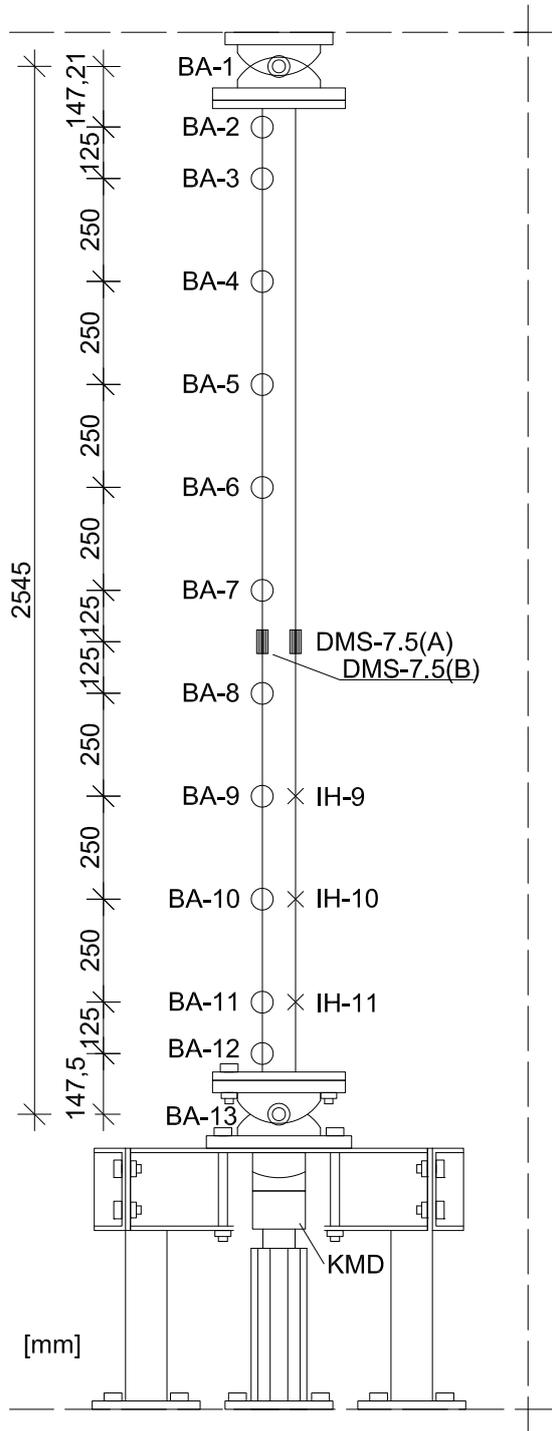


Abbildung 5.13: Basismodelle der dynamischen Versuchsreihe: Prüfkörper mit dem Anschlussstyp C1, Gelenkanschluss (l) bzw. mit den Anschlussstypen C2 bis C4, Profilanschluss (r)

(vgl. Abschnitt 5.1.3.2). Die Einleitung der axialen Last erfolgt über einen Hydraulikzylinder des Typs CLRG1006E300 (Enerpac) mit einer Kapazität von etwa 900 kN über eine Kraftmessdose C6A (HBM) und eine Kugelkalotte am Fußende der Stütze (s. Abbildung 5.14 (a)). Mit Hilfe einer Handpumpe des Typs P141 (Enerpac) und dem vertikal verschieblichen Auflager wird die Kraft eingeleitet. Die Messdaten der Kraftmessdose und Dehnungsmessstreifen werden, wie zuvor, mit einem QuantumX MX1615B und QuantumX MX879B (HBM) sowie der Software *Catman Easy* (HBM) verarbeitet.

Das vorgestellte dynamische Verfahren zur Systemidentifikation beruht auf der Ermittlung der ersten Eigenkreisfrequenz  $\omega_{ex,1}$  und korrespondierenden Eigenform  $\Psi_{ex,1}$ . Für die Erfassung der modalen Parameter werden dreizehn Beschleunigungsaufnehmer (BA) des Typs DeltaTron 4507 B 002 (Brüel & Kjær) mit einer mittleren Sensitivität von  $100 \frac{mV}{m/s^2}$  und einer Messbreite von 7 g am Prüfkörper befestigt. Die Sensoren werden, äquivalent zu den Seilwegaufnehmern für die statische Untersuchung, an denselben Stellen auf der gegenüberliegenden Seite montiert (s. Abbildung 5.15 (b)). Der Einfluss des Gewichts von 5 g je Beschleunigungsaufnehmer wird bei der Anwendung des Identifikationsverfahrens vernachlässigt.



(a) Übersicht Messsystem



(b) Versuchsaufbau

Abbildung 5.14: Anordnung und Darstellung der Messtechnik im Zuge des dynamischen Versuchsstands, hier am Beispiel der Prüfkörper mit Gelenkanschluss am Stützenkopf (Ausschluss von BA-1 für alle Prüfkörper mit einem Profilanchluss C2, C3 oder C4, s. Abschnitt 5.1.2.2)

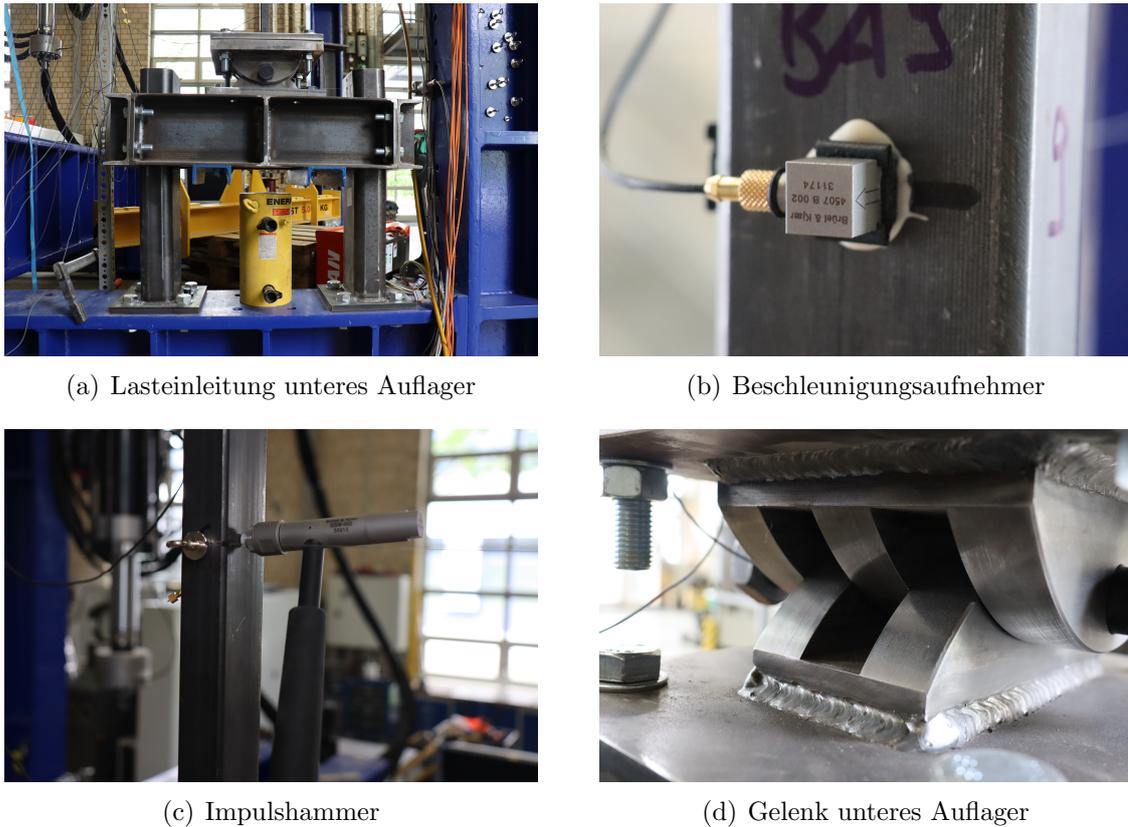


Abbildung 5.15: Detailansichten Modalanalyse

Die dynamische Anregung des Systems erfolgt durch einen Impulshammer des Typs 8206-002 der Firma Brüel & Kjær. Für die Anwendung des 100 g schweren Impulshammers der maximalen Kapazität von 2200 N wird eine weiche Spitze verwendet. Es werden für jeden Prüfkörper und jede Messstelle mindestens 10 Impulse zur Mittlung herangezogen. Die Nutzung eines Impulshammers ermöglicht im Gegensatz zu der Anwendung eines elektrodynamischen Schwingungserregers eine flexiblere Wahl der Anregestelle. Zudem können anstehende Rückkopplungseffekte, wie bei festinstallierten Schwingungserregern, durch den Anwendenden selber vermieden bzw. abgedämpft werden. Abbildung 5.15 (c) zeigt das Aufbringen der Last mit dem Impulshammer während der Modalanalyse. Als Anschlagpunkte werden die Stellen 9, 10 und 11 (IH-9, IH-10 und IH-11) nach Abbildung 5.14 (a) verwendet. Die Messdaten der Beschleunigungsaufnehmer sowie des Impulshammers werden über zwei Frontends des Typs 3160-A-042 bzw. 3053-B-120 mit der Software *BK Connect* verarbeitet (Brüel & Kjær).

### 5.1.4.3 Durchführung der dynamischen Versuchsreihe

Anders als bei der statischen Versuchsreihe wird der Prüfkörper für die dynamischen Untersuchungen mit Normalkräften statt Querlasten beansprucht. Dazu wird der Prüfkörper mit zuvor definierten Druckkräften  $D_{real}$  belastet und unter Erhalt dieser Lasteinwirkung ( $\pm 100$  N) dynamisch untersucht. Während der Modalanalyse ist es erforderlich, die einwirkenden Kräfte messtechnisch zu erfassen, um für die aus dem Identifikationsverfahren optimierte Kraft den tatsächlich auftretenden Vergleichswert zu erhalten. Zudem sind experimentelle Grenzwerte der maximalen Normalkraftbeanspruchung  $D_{max}$  zu definieren und einzuhalten, um ein frühzeitiges Versagen des Prüfkörpers zu vermeiden.

Zur Berechnung der maximalen Normalkraft  $D_{EC3}$  werden die optimierten Systemparameter aus dem statischen Identifikationsverfahren verwendet. Die optimierten Lagersteifigkeiten  $k_{opt}$  und die optimierte Querschnittssteifigkeit  $EI_{opt}$  ermöglichen die Berechnung eines entsprechenden Knicklängenbeiwerts  $\beta$ , der über die DIN EN 1993 eine Berechnung der maximalen Normalkraftbeanspruchung  $D_{EC3}$  ermöglicht (DIN e.V., 2010-12). Weiterführende Informationen zu der rechnerischen Bestimmung von  $D_{EC3}$  können Abschnitt 4.3 entnommen werden. Die experimentell ermittelten maximalen Normalkräfte  $D_{EC3}$  auf Basis der statischen Versuchsreihe können Abschnitt 5.2 entnommen werden. Auf dieser Grundlage erfolgt die Wahl der Laststufen bis zur Maximallast.

Die Überwachung der realen Normalkraft  $D_{real}$ , die durch einen Hydraulikzylinder unterhalb der Auflagerbank eingeleitet wird, erfolgt über eine zwischengeschaltete Kraftmessdose. Auch wenn die Auflagerbank in der Theorie eine verschiebliche Lagerung darstellt, kann es auf Grund von Verkantungen oder Reibungseffekten zu einer reduzierten Normalkraft innerhalb des Prüfkörpers kommen. Dies wird anhand der zwei gegenüberliegend applizierten Dehnungsmessstreifen an Stelle 7.5 (vgl. Abbildung 5.14) kontrolliert. Die Normalkraft innerhalb des Prüfkörpers wird mit tabellarisierten Querschnittswerten aus Tabelle 5.1 sowie dem Elastizitätsmodul von  $21\,000\text{ kN/cm}^2$  berechnet:

$$D_{DMS} = \left( \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \right) \cdot E \cdot A \quad (5.2)$$

Die aus den Dehnungen ermittelte Last dient als Anhaltswert für die Kraftmessdose.

#### 5.1.4.4 Einfluss der Normalkraft auf die Systemlänge

Äußere Einwirkungen in Form statischer massebelegter Querbelastungen tragen zu einer Veränderung der modalen Parameter bei. So erreicht die Nutzlast einer Geschossdecke aufgrund der erhöhten Gesamtmasse im Vergleich zum reinen Eigengewicht eine Verringerung der Biegeeigenfrequenzen. Während die neuen mitschwingenden Massen in die Berechnung eingeschlossen werden, wird die daraus resultierende statische Verformung üblicherweise nicht berücksichtigt. Das Schwingungsverhalten des Bauteils orientiert sich lediglich an einer neuen Schwingungsnulldlinie, die von der geraden Stabachse des unbelasteten Bauteils abweicht. Diese Annahmen für Querbeanspruchungen basieren auf den im Hochbau kleinen Verformungen, sodass keine wesentliche Veränderung der Systemlänge oder des Tragverhaltens existieren. Bei dem Ansatz longitudinaler Normalkräfte ergeben sich im Gegensatz zu Querbelastungen aktive Stauchungen bzw. Dehnungen der Systemlänge. Abbildung 5.16 demonstriert einen druckbeanspruchten Stab, dessen Ausgangslänge  $L$  durch die äußere Lasteinwirkung  $D$  auf eine reduzierte Länge  $L_{red}$  gestaucht wird. Die Größenordnung dieser relativen Längenänderung wird im Folgenden diskutiert. Dazu wird der dimensionslose Längenänderungsfaktor  $\varepsilon$  eines Stabs auf Basis des Hookeschen Gesetzes betrachtet (Spura, 2019, S. 72):

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (5.3)$$

Die einwirkende Spannung wird durch  $\sigma$  und der Elastizitätsmodul durch  $E$  ausgedrückt. Für die Betrachtung des größtmöglichen Einflusses auf die modalen Parameter ist der Fall zu untersuchen, bei dem die Stauchung bzw. Dehnung den maximalen Zustand annimmt. Der Parameter  $\varepsilon$  wird dann maximal, wenn die größtmögliche Spannung  $\sigma$  er-

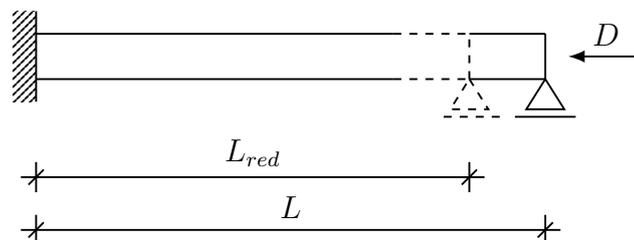


Abbildung 5.16: Reduzierte Systemlänge infolge einer Drucknormalkraft  $D$

reicht wird. Im klassischen Stahlbau kann von maximalen elastischen Streckgrenzen  $f_y$  von 23,5 kN/cm<sup>2</sup> (S235) bzw. 35,5  $\frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$  (S355) ausgegangen werden. In Kombination mit einem üblichen Elastizitätsmodul für Stahl von 21 000  $\frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$  ergibt sich mit Verwendung von S355 eine dimensionslose maximale Dehnung bzw. Stauchung:

$$\varepsilon_{max} = \frac{\sigma_{zul}}{E} = \frac{35,5}{21000} = 0,0017 \quad (5.4)$$

Für den Werkstoff S235 ergibt sich eine reduzierte relative Längenänderung  $\varepsilon$  von 0,11 %. Die aus Gleichung 5.4 abzuleitenden maximalen Normalkräfte werden im Zuge einer Nachweisführung nach DIN EN 1993 nur bei Bauteilen ohne Gefahr auf Stabilitätsversagen erreicht. Für den Nachweis von stabilitätsgefährdeten Stahlbauteilen werden die zulässigen Normalkräfte  $D_{EC3}$  bei schlanken Bauteilen durch den Abminderungsfaktor  $\chi$  und den erhöhten Teilsicherheitsbeiwert  $\gamma_{M1} = 1,1$  reduziert:

$$D_{EC3} = \chi \cdot A \cdot \frac{f_y}{\gamma_{M1}} \quad (5.5)$$

Die laborexperimentelle Validierung des in dieser Arbeit vorgestellten dynamischen Verfahrens zur Systemidentifikation in Phase II erfolgt mit schlanken Stahlstützen der Materialgüte S235 und einem maximalen Abminderungsfaktor  $\chi$  von ca. 0,60. Daraus ergibt sich die größtmöglich zu erwartende Stauchung:

$$\varepsilon_{max,red} = 0,0017 \cdot \frac{0,6}{1,1} = 0,0009 \quad (5.6)$$

Auf Basis einer Systemlänge von 2,545 m ergibt sich durch die relative Längenänderung  $\varepsilon_{max,red}$  eine maximale Verkürzung um etwa 1,5 mm. Die sich daraus ergebende Änderung der Gesamtlänge und die Anpassung der einzelnen Messstellen werden während des Optimierungsprozesses rechnerisch berücksichtigt.

In der Praxis wird bei direkter Messung der Abstände vor Ort, der Einfluss von Längenänderungen im Zuge der Normalkraft automatisch berücksichtigt. Auf den rechnerischen Ansatz der Werte aus Bestands- oder Werkstattplänen sollte in der Praxis aufgrund möglicher Abweichungen oder Ungenauigkeiten verzichtet werden.

#### 5.1.4.5 Einfluss einer örtlich begrenzten Eigenformmessung

Die möglichst präzise Bestimmung der ersten Eigenform ist wesentlich für den Erfolg der Systemidentifikation. Dabei entscheidet nicht nur die Genauigkeit der Messtechnik über die Qualität der Optimierung, sondern ebenso die Anordnung der Beschleunigungsaufnehmer. Abbildung 5.17 demonstriert zwei unterschiedliche Stabsysteme mit normierter Systemlänge, welche im Folgenden mithilfe einer numerischen Untersuchung näher betrachtet werden. Dargestellt ist der Eigenformverlauf eines beidseitig gelenkigen und eines beidseitig eingespannten Stabs ohne Berücksichtigung von Wegfedern. Die Systeme sind Druckstäbe in einem unverschieblichen Rahmen und werden hinsichtlich ihrer optimierten Lagersteifigkeiten und Normalkräfte untersucht. Für die Parameterbestimmung mit dem dynamischen Identifikationsverfahren ist neben der Eigenkreisfrequenz  $\omega_{ex,1}$ , die Information über den gesamten Eigenformverlauf von 0 bis 1 der in Abbildung 5.17 dargestellten Stäbe der bestmögliche Fall, um rechnerische Abgrenzungen der Systeme zu ermöglichen. Die Anordnung der Messtechnik in den Übergängen von Bauteilen und Knoten ist jedoch in der Praxis nicht immer realisierbar, und auch in der laborexperimentellen Versuchsreihe nur eingeschränkt möglich. Vorhandene Abdeckungen und Verbauten können den Zugang versperren und die Anordnung der Messinstrumente zur Erfassung der vollständigen Eigenform ist gegebenenfalls nur mit großem Aufwand zu bewerkstelligen. Auch kann es sich bei der zu untersuchenden Konstruktion um einen verschieblichen

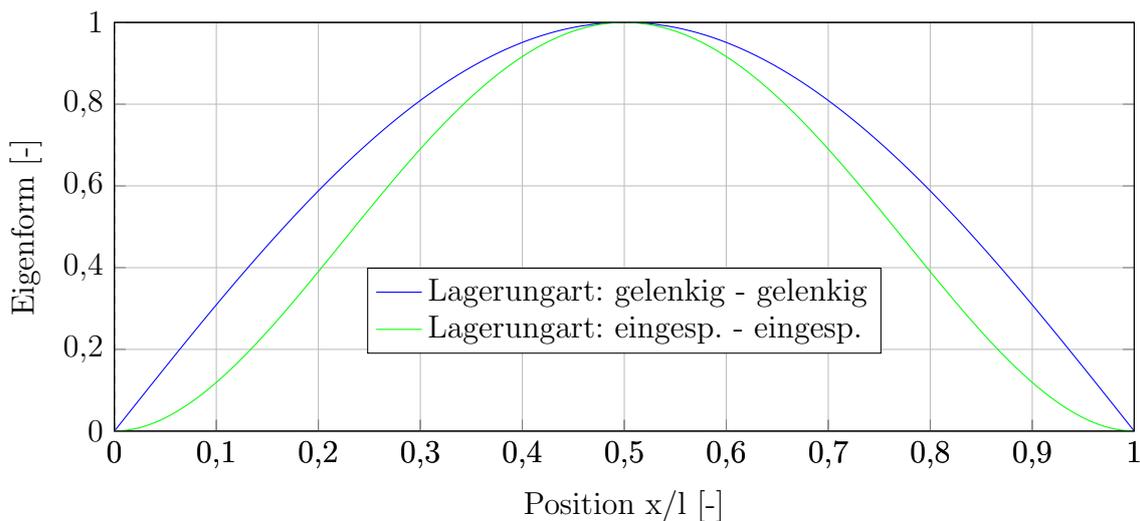


Abbildung 5.17: Eigenformen von Stäben mit unterschiedlichen Lagersituationen

Rahmen handeln, bei dem die Nullpunkte nicht mehr in der Stützebene liegen und real gar nicht erfasst werden können.

Ist die Ermittlung der Schwingungsform ausschließlich in einem räumlich begrenzten Bereich, entfernt von den tatsächlichen Nulldurchgängen der Eigenform, möglich, kann dies zu größeren Ungenauigkeiten im Zuge des Identifikationsverfahrens führen. Die Aufgabe des Verfahrens ist es, aus einer Messung der modalen Parameter einen Ausgangsstab zu optimieren, der bestmöglich die Messwerte widerspiegelt. Dazu steht dem Verfahren neben der Eigenkreisfrequenz  $\omega_{ex,1}$  die Eigenform  $\Psi_{ex,1}$  an mehreren Stellen zur Verfügung. Während die Eigenkreisfrequenz an jeder Stelle des Versuchskörpers den gleichen skalaren Wert besitzt, ist die Eigenform an unterschiedlichen Stellen durch verschieden große Auslenkungen definiert. Abbildung 5.18 demonstriert die bereits in Abbildung 5.17 dargestellten Eigenformen von zwei unterschiedlich gelagerten Stäben. Können die Systeme nur in begrenzten Bereichen dynamisch erfasst werden, ergeben sich für die Systemoptimierung ausschließlich begrenzte Informationen hinsichtlich der Eigenform. Je kürzer die Länge der gemessenen Schwingungsform ist, desto weniger Informationen liegen dem Identifikationsverfahren vor, um die jeweilige Kurve von der Eigenform des anders gelagerten Stabs zu unterscheiden. Der MAC ist dabei ein mathematisches Kriterium, den Unterschied zweier Kurven mit einem skalaren Wert zwi-

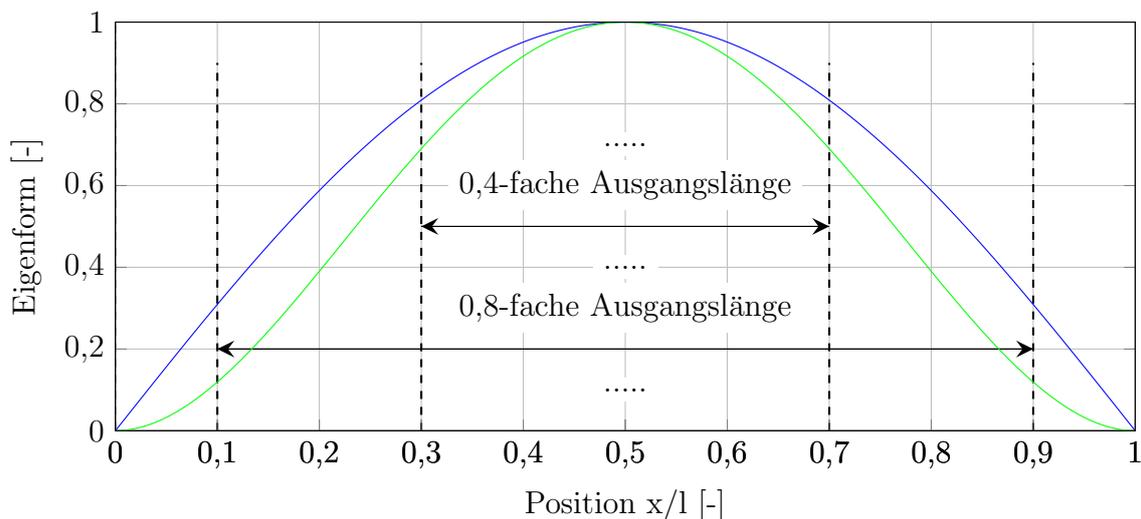


Abbildung 5.18: Eigenformen von Stäben mit unterschiedlichen Lagersituationen (Ergänzende Darstellung von Eigenformabschnitten)

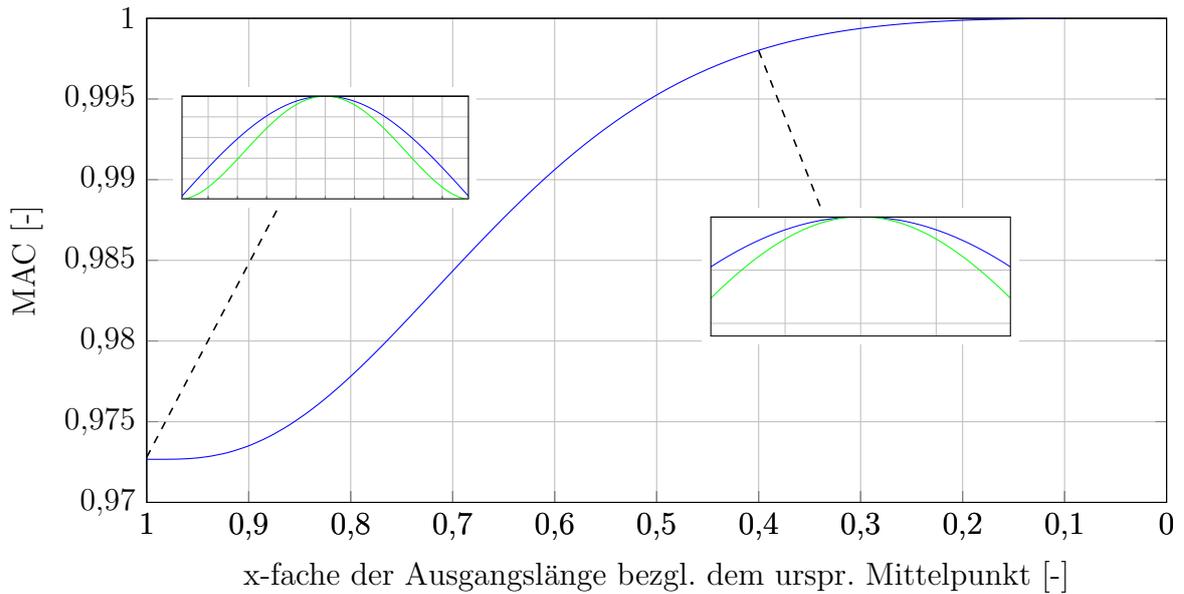


Abbildung 5.19: MAC in Abhängigkeit des Anteils der messbaren Länge des Eigenformabschnitts an der Gesamtlänge der Eigenform (in Ergänzung an die Darstellung der Eigenformen in Abbildung 5.17 bzw. 5.18)

schen 0 und 1 auszudrücken (s. Abschnitt 3.4.1.2). Die Entwicklung des MAC im Zuge verkürzt erfasster Eigenformbereiche wird an dem konkreten Beispiel aus Abbildung 5.17 bzw. 5.18 untersucht. Berechnet wird der MAC der beiden dargestellten Eigenformen für verschieden symmetrische Eigenformabschnitte ohne Normalkraftbeanspruchung, beginnend mit einer 1,0-fachen Ausgangslänge und endend mit einer 0,1-fachen Ausgangslänge. Abbildung 5.19 stellt die Ergebnisse grafisch in 0,02-fachen Abständen dar. Die Eigenformvektoren werden innerhalb der Untersuchung an 100 Stellen berechnet und für die Optimierung angesetzt. Während der MAC bei vollständig erfassten Kurven (Faktor 1,0) bei 0,9727 liegt, steigert er sich auf einen Wert von nahezu 1,0 für einen kurz mittig abgegriffenen Kurvenabschnitt (Faktor 0,1). Das Verfahren zur Systemidentifikation wird folglich Schwierigkeiten haben, die beiden Systeme von einander zu unterscheiden, sodass bei verkürzten Abschnitten der Eigenformmessung größere Abweichungen hinsichtlich der Optimierungsparameter zu erwarten sind.

Zur Verdeutlichung der Auswirkungen wird im Folgenden eine numerische Untersuchung hinsichtlich verkürzter Eigenformmessungen vorgestellt. Basis der Betrachtung ist ein 2,545 m langer beidseitig voll eingespannter Druckstab mit einem rechteckigen Hohl-

profil P3 (s. Abschnitt 5.1.2.1). Insgesamt 20 unterschiedliche Systeme gebildet aus fünf Normalkraftzuständen  $D_{real}$  zwischen 10 kN und 50 kN sowie vier Reduktionsfaktoren zwischen 1,00 und 0,85 werden untersucht. Die Reduktion der messbaren Eigenform erfolgt, wie in Abbildung 5.18, gleichmäßig zu beiden Enden, sodass ein symmetrisches System für das Identifikationsverfahren angenommen wird.

Zu Beginn der Untersuchung werden die erste Eigenkreisfrequenz  $\omega_{ex,1}$  und Eigenform  $\Psi_{ex,1}$  des Systems in einem reduzierten Bereich an dreizehn über die Länge verteilten Stellen nach Abbildung 5.14 ermittelt. Die Auslenkungen der Eigenform werden vor der Systemidentifikation mit gleichförmig verteilten zufälligen Fehlern von bis zu 0,5 % versehen. Anschließend wird die Systemidentifikation mit der Eigenkreisfrequenz  $\omega_{ex,1}$  und der manipulierten Eigenform  $\Psi_{ex,1,man}$  durchgeführt. Hieraus ergeben sich die optimierte Normalkraft  $D_{opt}$  sowie die optimierten Lagerungsbedingungen  $k_{opt}$  und der daraus berechnete Knicklängenbeiwert  $\beta$ . Der Manipulations- und Identifikationsprozess wird für jedes der 20 Systeme 50 mal durchgeführt. Die optimierten Systemparameter werden in einer statistischen Auswertung hinsichtlich dem Mittelwert, der Standardabweichung und dem Varianzkoeffizienten zusammengefasst. Tabelle 5.7 stellt den Varianzkoeffizienten  $V_D$  für die 50 optimierten Normalkräfte  $D_{opt}$  bereit. Der Wert steigt konsequent mit Abfall der angesetzten Normalkräfte und mit erhöhter Reduktion der zur Optimierung verwendeten Eigenformkurve. Er beläuft sich in der numerischen Untersuchung auf bis zu 15,84 % für die niedrigste Last von 10 kN und geringsten Reduktionsfaktor von 0,85. Sind vollständige Eigenformen (1,00) für die Systemidentifikation vorhanden, ergibt sich der maximale Varianzkoeffizient  $V_D$  zu 2,80 %. Der niedrigste Wert kann für das Ausgangs-

Tabelle 5.7: Varianzkoeffizient  $V_D$  [–] der optimierten Drucknormalkräfte  $D_{opt}$  für unterschiedliche Kräfte  $D_{real}$  und variierende Reduktionsfaktoren

Faktor	Normalkraft $D_{real}$				
	[–]	10 kN	20 kN	30 kN	40 kN
1,00	0,0280	0,0183	0,0122	0,0102	0,0055
0,95	0,1144	0,0546	0,0380	0,0275	0,0222
0,90	0,1480	0,0810	0,0496	0,0350	0,0268
0,85	0,1584	0,0768	0,0598	0,0478	0,0324

Tabelle 5.8: Varianzkoeffizient  $V_\beta$  [–] der optimierte Knicklängenbeiwerte  $\beta$  für unterschiedliche Kräfte  $D_{real}$  und variierende Reduktionsfaktoren

Faktor	Normalkraft $D_{real}$				
	[–]	10 kN	20 kN	30 kN	40 kN
1,00	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0003
0,95	0,0015	0,0013	0,0014	0,0015	0,0014
0,90	0,0020	0,0023	0,0021	0,0020	0,0020
0,85	0,0025	0,0024	0,0029	0,0031	0,0026

modell mit der höchsten Last (50 kN) und der vollständigen Eigenform erreicht werden (0,55 %). Bei der höchsten angesetzten Last von 50 kN kann der Varianzkoeffizient  $V_D$  auf maximal 3,24 % begrenzt werden.

Anders als die Varianzkoeffizienten  $V_D$  für die Normalkräfte  $D_{opt}$  zeigen die Knicklängenbeiwerte  $\beta$  deutlich niedrigere Abweichungen. Die Varianzkoeffizienten  $V_\beta$  für die aus den optimierten Federsteifigkeiten  $k_{opt}$  berechneten Beiwerte  $\beta$  werden in Tabelle 5.8 präsentiert. Auch wenn die Genauigkeit im Zuge reduzierte Eigenformlängen erkennbar nachlässt, ist der maximal erreichte Varianzkoeffizient von 0,25 % (10 kN, Faktor 0,85) deutlich niedriger als die maximalen 15,8 % für den Varianzkoeffizienten  $V_D$  bei der Normalkraftbestimmung. Die Änderung der einwirkenden Normalkraft  $D_{real}$  zeigt bei diesem numerischen Berechnungsbeispiel keine erkennbare Tendenz für die Genauigkeit des experimentellen Knicklängenbeiwerts  $\beta$ .

Die Ergebnisse der vorgestellten numerischen Untersuchung demonstrieren eine Abhängigkeit zwischen der Größe der Normalkrafteinwirkung  $D_{real}$  und der Genauigkeit des optimierten Wertes  $D_{opt}$  aus dem dynamischen Identifikationsverfahren. Da aufgrund der Nähe zum Versagensfall vor allem eine möglichst genaue Identifikation in höher belasteten Bauteilen von Interesse ist, sind die größeren Abweichung im niedrigen Lastbereich für die reale Anwendung der Methode aus ingenieurmäßiger Sicht akzeptabel. Die identifizierten Knicklängenbeiwerte  $\beta$  demonstrieren in diesem Berechnungsbeispiel eine gewisse Unabhängigkeit und führen auch bei Veränderung der einwirkenden Normalkraft  $D_{real}$  bzw. bei Anpassung der messbaren Eigenformlänge zu sinnvollen Ergebnissen.

## 5.2 Ergebnisse

Nachfolgend werden die laborexperimentellen Ergebnisse der in Abschnitt 5.1.2 vorgestellten und nach den Abschnitten 5.1.3 und 5.1.4 statisch bzw. dynamisch untersuchten Prüfkörper präsentiert. Die Resultate der statischen Versuchsreihe mit Querbelastung werden in Abschnitt 5.2.1 vorgestellt. Anschließend zeigt Abschnitt 5.2.2 die Ergebnisse der dynamischen Versuchsreihe mit unterschiedlichen Normalkraftbelastungen.

### 5.2.1 Statische Versuchsreihe

Die experimentelle Ermittlung einer definierten Biegelinie durch einen Drei-Punkt-Biegeversuch ist Grundlage der statischen Versuchsreihe. Die aus den Seilwegaufnehmern und der Kraftmessdose erzeugten Zeitverläufe werden nach Abschnitt 5.2.1.1 zunächst in diskrete Last-Verformungs-Kurven überführt. Die Auswertung erfolgt mit dem aus Abschnitt 4.2 bekannten statischen Verfahren zur Systemidentifikation für die Ermittlung der Querschnittssteifigkeit  $EI$  und der Lagerungsbedingungen  $k$  in Abschnitt 5.2.1.2.

#### 5.2.1.1 Ermittlung diskreter Verformungsfiguren auf Basis von Zeitverläufen

Die zur Bestimmung der Verformungsfigur eingesetzten Seilwegaufnehmer und die Kraftmessdose ermitteln zunächst unabhängige Zeitverläufe für Verschiebung und Last. Eine nähere Beschreibung der Messeinrichtung sowie die Anordnung der jeweiligen Sensoren kann Abschnitt 5.1.3.2 entnommen werden. Für das Verfahren zur Systemidentifikation ist es erforderlich, die gesammelten Zeitverläufe in eine diskrete Verformungskurve bei fest definierter Einzellastbeanspruchung zu überführen. Dazu wird für jeden der zur Verfügung stehenden Messstellen eine Kraft-Verformungs-Punktwolke, bestehend aus den zeitlich korrespondierenden Wertepaaren aus der Kraft  $F$  und der Verformung  $w_i$ , erstellt. Abbildung 5.20 stellt exemplarisch die Punktwolken von ausgewählten Messstellen für den Prüfkörper P2C1a (Durchgang a) dar. Wertepaare aus Kraft und Verformung, die zeitlich gesehen erst nach dem Erreichen der maximalen Last  $F_{max,exp}$  im Zuge der Entlastung auftreten, bleiben für die Auswertung der Punktwolke unberücksichtigt. Für den Versuchsdurchlauf P2C1a aus Abbildung 5.20 liegt die Maximallast bei 1,86 kN.

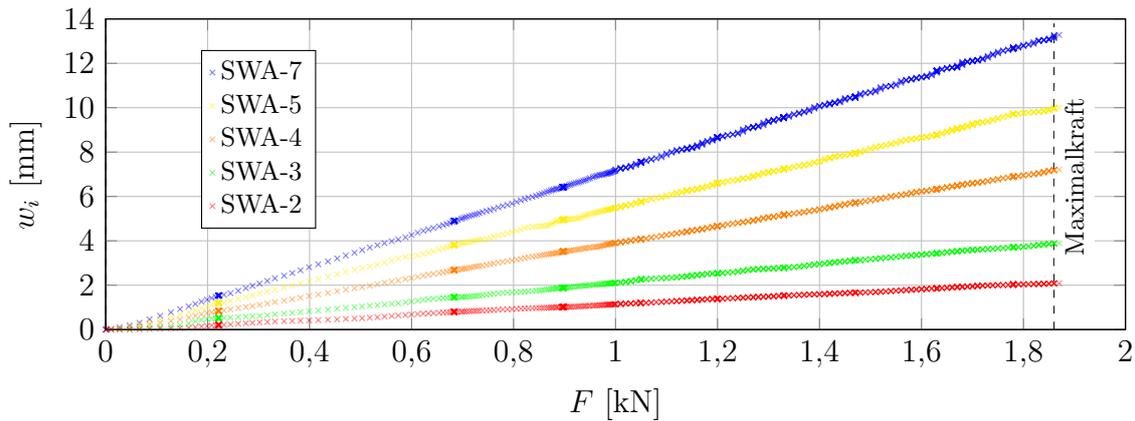


Abbildung 5.20: Kraft-Verformungs-Wolke ausgewählter Seilwegaufnehmer (P2C1a)

Die Kraft-Verformungs-Punktwolken werden zur Funktionsglättung in individuelle lineare Regressionen der Form  $y = a \cdot x + b$  überführt. Zur Reduktion von Unstetigkeiten in Niedriglastbereichen werden ausschließlich Wertepaare mit einem Lastwert von mindestens 500 N in die Berechnung eingeschlossen. Um abschließend eine diskrete Verformungskurve zu formulieren, wird die halbe maximale Kraft als Bezugslast  $F_{ref}$  definiert und die Verformung anhand der in den Ursprung parallel verschobenen Regressionsgeraden bestimmt. Abbildung 5.21 zeigt ausgewählte Regressionen des Prüfkörpers P2C1a mit einer Maximalkraft  $F_{max,exp}$  von 1,86 kN und der Bezugskraft  $F_{ref}$  von 0,93 kN. Die markierten Werte stellen mit ihren Positionen und der Bezugslast  $F_{ref}$  die Eingangswerte für das Identifikationsverfahren aus Abschnitt 4.2.2 bereit.

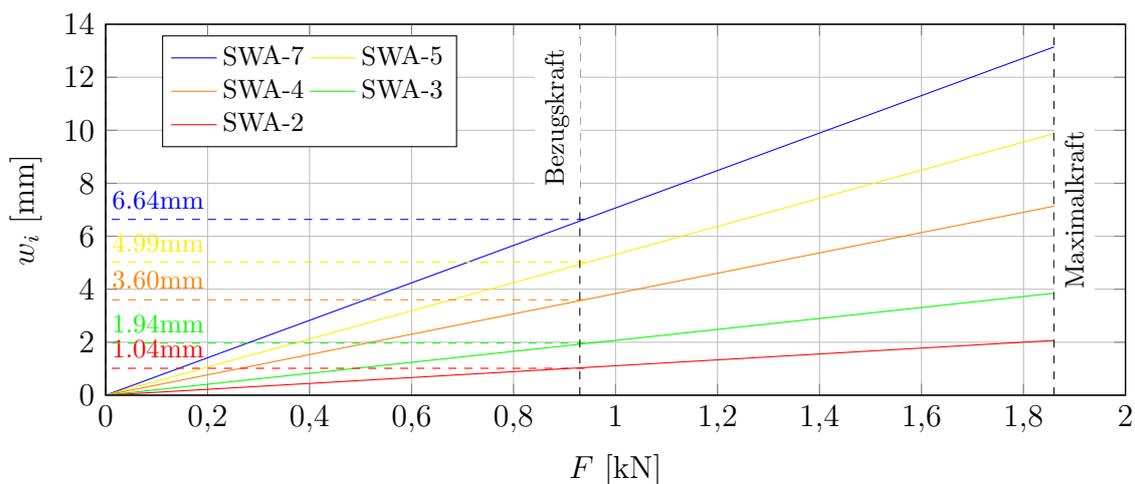


Abbildung 5.21: Lineare Regressionen ausgewählter Seilwegaufnehmer (P2C1a)

### 5.2.1.2 Statischer Optimierungsprozess

Sind die diskreten Verformungsfiguren eines Prüfkörpers definiert, werden die Verschiebungen  $w_i$  einschließlich Positionen und der korrespondierenden Krafteinwirkung  $F_{ref}$  durch das Programm *StaticOpti* analysiert (vgl. Abschnitt 4.1.2.3). Der statische Belastungsversuch wird für jeden Prüfkörper insgesamt fünf Mal wiederholt und mit dem Verfahren zur Systemidentifikation analysiert. Tabelle 5.9 stellt alle Optimierungsergebnisse im Zusammenhang mit dem Stützenprofil P3 bereit. Neben den zu optimierenden Parametern, bestehend aus der Querschnittssteifigkeit  $EI_{opt}$  und den vier Lagersteifigkeiten  $k_{opt}$ , werden der Fehler  $f_{error}$  und die Anzahl der für die Optimierung erforderlichen Iterationsschritte  $n_{iter}$  gelistet. Die Anzahl der zur Optimierung verwendeten Stellen unterscheidet sich zwischen Prüfkörpern mit einem gelenkigen Anschluss C1 und Prüfkörpern mit einem Profilanschluss C2 bis C4. Die Optimierung der Prüfkörper mit gelenkigem Anschluss C1 wird mit allen dreizehn zur Verfügung stehenden Messstellen durchgeführt. Stelle 1 wird dagegen für alle Prüfkörper mit Profilanschluss (C2 bis C4) ausgeschlossen, da das Basismodell des Optimierungsprozesses einen kontinuierlichen Träger repräsentiert und auftretende Biegemomente im Anschlussbereich bei teilweise veränderten Querschnitteigenschaften die Ergebnisse beeinflussen können (vgl. Abschnitt 5.1.2.2). Abbildung 5.22 visualisiert für jeden Prüfkörper aus Tabelle 5.9 den Versuchsdurchgang a anhand der experimentell ermittelten und rechnerisch optimierten Verformungsfigur. Während die experimentellen Verformungsfiguren durch diskrete Punkte abgebildet werden, stellen durchgängige Kurven die optimierten Biegelinien dar. Die Einzellasten  $F_{ref}$  werden an Stelle 9 eingeleitet und können der Abbildung 5.22 entnommen werden. Eine Darstellung aller Prüfkörper und Versuchsdurchgänge in Anlehnung an Tabelle 5.9 ist im Anhang B zu finden.

Zur Reduzierung äußerer Störeinflüssen werden für die weitere Betrachtung Mittelwerte aus den Querschnittssteifigkeiten  $EI_{opt}$  und den Auflagersteifigkeiten  $k_{opt}$  gebildet. Die gemittelten Werte stellen im Folgenden die statischen Vergleichswerte zu den korrespondierenden Ergebnissen des dynamischen Verfahrens aus Abschnitt 5.2.2 dar. Tabelle 5.10 stellt die gemittelten Systemeigenschaften aller 20 Prüfkörper zusammen. Wie Tabelle 5.1 mit Blick auf die tabellarisierten Querschnittswerte zeigt, steigen die Querschnittssteifigkeiten  $EI_{opt}$  mit aufsteigender Nummerierung. Die in Tabelle 5.10 angegebenen ge-

Tabelle 5.9: System- und Berechnungseigenschaften aus dem Optimierungsprozess für alle Verformungskurven der Prüfkörper P3C1, P3C2, P3C3 und P3C4

Stütze	Versuch	$EI_{opt}$ [kN m <sup>2</sup> ]	$k_{ri,opt}$ [ $\frac{\text{kN m}}{\text{rad}}$ ]	$k_{rj,opt}$ [ $\frac{\text{kN m}}{\text{rad}}$ ]	$k_{ti,opt}$ [ $\frac{\text{kN}}{\text{m}}$ ]	$k_{tj,opt}$ [ $\frac{\text{kN}}{\text{m}}$ ]	$f_{error}$ [–]	$n_{iter}$ [–]
P3C1	a	43,24	0	0	> 99999	25137	1,01E–8	375
	b	43,31	0	0	> 99999	21485	1,12E–8	761
	c	43,30	0	0	> 99999	16339	8,53E–9	438
	d	43,40	0	0	> 99999	18892	1,20E–8	458
	e	43,23	0	0	> 99999	22796	9,70E–8	448
	∅	43,29	0	0	> 99999	20930		
P3C2	a	42,97	56,96	0	1020	> 99999	1,36E–8	615
	b	43,10	56,73	0	1017	76324	1,10E–8	867
	c	42,98	56,43	0	1045	89592	1,42E–8	1053
	d	42,96	56,59	0	1049	72967	1,43E–8	985
	e	42,95	56,84	0	1038	58389	1,75E–8	696
	∅	42,99	56,71	0	1034	79454		
P3C3	a	42,85	123,2	0	2283	> 99999	6,44E–9	551
	b	42,97	122,3	0	2327	> 99999	5,07E–9	636
	c	42,91	122,5	0	2336	> 99999	5,56E–9	513
	d	42,98	121,2	0	2371	> 99999	6,81E–9	572
	e	42,88	123,0	0	2361	89762	7,24E–9	1350
	∅	42,92	122,5	0	2336	97952		
P3C4	a	43,06	265,5	1,61	72439	7092	1,39E–8	1458
	b	43,70	264,3	0	83231	7056	1,33E–8	1095
	c	43,46	264,4	0,56	78680	6903	1,50E–8	1772
	d	43,26	266,8	0,80	64893	7290	1,46E–8	1920
	e	42,46	272,0	3,11	38844	3771	9,30E–9	1692
	∅	43,19	266,6	1,22	67617	6422		

mittelten Querschnittssteifigkeiten  $EI_{opt}$  weisen, basierend auf den Detailergebnissen aus Anhang B, eine geringe Streuung je Prüfkörper auf. Die optimierten Steifigkeiten  $EI_{opt}$

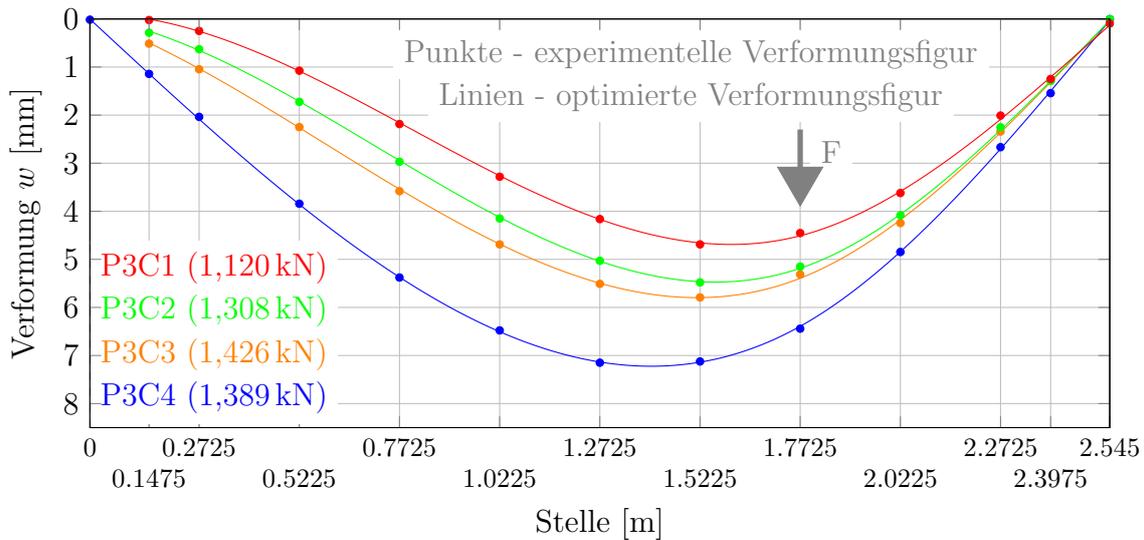


Abbildung 5.22: Experimentell ermittelte und rechnerisch optimierte Verformungsfiguren der Prüfkörper P3C1a, P3C2a, P3C3a und P3C4a

zeigen über alle 20 Prüfkörper hinweg einen durchschnittlichen Varianzkoeffizienten  $V_{EI}$  von 0,14 %. Während bei elf Prüfkörpern der Varianzkoeffizient niedriger als 0,10 % ist, konnte der höchste Wert von 0,48 % bei Prüfkörper P1C1 festgestellt werden.

Mit aufsteigender Steifigkeit des Anschlussprofils erhöhen sich die Drehfedersteifigkeiten des optimierten Systems. Die größte Drehfedereinspannung  $k_{ri,opt}$  im Sinne des Einspanngrads  $\beta$  ergibt sich für P1C4, dem schwächsten Stützenprofil mit dem stärksten Anschlussprofil zu 92,7 %. Der größte Wert der Federsteifigkeit selber zeigt sich bei P4C4 mit  $513 \frac{\text{kN}\cdot\text{m}}{\text{rad}}$ . Für alle Prüfkörper wird an Stelle 13 ein gelenkiger Drehfederanschluss ausgebildet, genauso wie für alle Prüfkörper an Stelle 1 mit einem Anschlusstyp C1. Daraus ergeben sich planmäßig 25 gelenkige Anschlüsse, wobei sich dies in 19 Fällen auch rechnerisch zeigt. In den übrigen sechs Fällen ergeben sich Drehfedersteifigkeiten  $k_r$  von maximal  $2,1 \frac{\text{kN}\cdot\text{m}}{\text{rad}}$  mit einem größten Einspanngrad von 4,8 % (P2C1). Die Wegfedersteifigkeiten  $k_t$  zeigen über alle Versuche hinweg einen minimalen Einspanngrad von 98,1 % (P5C2,  $k_{ti,opt}$ ) und 99,5 % (P5C4,  $k_{tj,opt}$ ). Das Auflager ist bei allen 20 Prüfkörpern identisch ausgebildet, dennoch ergeben sich für die Wegfedersteifigkeiten  $k_{tj,opt}$  stark abweichende Mittelwerte zwischen  $6422 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$  (P3C4) und  $> 99\,999 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$  (P1C4). Dies liegt an der generell großen Steifigkeit der Auflagerbank gegenüber horizontaler Verschiebungen. Die zur Aufzeichnung der Verformung verwendeten Seilwegaufnehmer haben einen maxi-

Tabelle 5.10: Gemittelte optimierte Systemeigenschaften einschließlich Angaben zur axialen Belastungsgrenze für alle untersuchten Prüfkörper

Prüfkörper	$EI_{opt}$ [kN m <sup>2</sup> ]	$k_{ri,opt}$ [ $\frac{\text{kNm}}{\text{rad}}$ ]	$k_{rj,opt}$ [ $\frac{\text{kNm}}{\text{rad}}$ ]	$k_{ti,opt}$ [ $\frac{\text{kN}}{\text{m}}$ ]	$k_{tj,opt}$ [ $\frac{\text{kN}}{\text{m}}$ ]	$\beta$ [–]	$D_{Euler}$ [kN]	$D_{EC3}$ [kN]	
P1	C1	16,75	0,72	0	77069	12985	0,9893	26,1	19,1
	C2	15,74	61,05	0	869,9	10867	0,7648	46,2	34,6
	C3	15,64	108,9	0	4007	29875	0,7383	49,3	37,0
	C4	15,42	238,3	0,16	8181	> 99999	0,7262	51,6	38,2
P2	C1	37,85	0,22	2,12	7129	27891	0,9847	59,5	44,5
	C2	37,55	64,48	0	1045	22866	0,8219	95,5	67,6
	C3	37,95	135,3	0	2322	26663	0,7702	109,8	73,7
	C4	37,68	289,5	0	9871	19624	0,7346	119,9	79,9
P3	C1	43,29	0	0	> 99999	20930	1,0000	66,0	47,5
	C2	42,99	56,71	0	1034	79454	0,8430	103,9	67,6
	C3	42,92	122,5	0	2336	97952	0,7842	119,8	74,9
	C4	43,19	266,6	1,22	67617	6422	0,7472	136,4	80,4
P4	C1	105,3	0	0	> 99999	10795	1,0000	160,4	86,2
	C2	107,6	51,49	0	1408	11517	0,9280	219,2	107,1
	C3	102,8	154,8	1,03	2542	9700	0,8295	256,7	121,1
	C4	104,5	512,9	0	11100	16207	0,7519	317,2	132,7
P5	C1	172,3	0	0	> 99999	15745	1,0000	262,5	136,4
	C2	169,4	55,86	0	1868	10937	0,9389	329,9	159,1
	C3	177,3	123,9	0	2954	8253	0,8909	383,5	167,6
	C4	177,3	445,3	0	13574	7037	0,7880	490,1	187,5

malen Messfehler von 0,375 mm (0,15 % des Maximalwerts, s. Abschnitt 5.1.3.2). Damit liegt die mögliche Abweichung in einer ähnlichen Größenordnung wie die maximal gemessene Verschiebung an Stelle 13, sodass größere Unterschiede der Federsteifigkeit zu erwarten sind. Generell führen hohe Einspanngrade in Kombination mit Messungenauigkeiten zu größeren Abweichungen der totalen Federsteifigkeiten (vgl. Gleichungen 4.64 bis 4.67).

Tabelle 5.11: Vergleich zwischen theoretischen und experimentellen Querschnittswerten

Stützenprofil	$EI_{z,th}$ [kN m <sup>2</sup> ]	$EI_{z,opt}$ [kN m <sup>2</sup> ]	$\gamma_{EI,z}$ [%]	$\mu_{th}$ [ $\frac{kg}{m}$ ]	$\mu_{exp}$ [ $\frac{kg}{m}$ ]	$\gamma_{\mu}$ [%]
P1	14,87	15,89	+6,7	4,39	4,33	-1,4
P2	35,70	37,76	+5,8	5,64	5,56	-1,4
P3	45,15	43,10	-4,5	6,71	6,14	-8,5
P4	94,29	105,3	+11,5	8,59	9,82	+14,3
P5	170,5	174,1	+2,1	10,5	9,90	-5,7

Aus den in Tabelle 5.10 angegebenen Lagersteifigkeiten wird der Prüfkörper hinsichtlich seiner Belastungsgrenze für die dynamischen Untersuchungen dimensioniert. Neben dem Knicklängenbeiwert  $\beta$  und der Eulerschen Knicklast  $D_{Euler}$  ist die maximale Normalkraftbeanspruchung nach DIN EN 1993  $D_{EC3}$  gelistet.

Tabelle 5.11 vergleicht die tabellarischen Querschnittseigenschaften der Biegesteifigkeit  $EI_{z,th}$  und der Massenverteilung  $\mu_{z,th}$  mit den optimierten Biegesteifigkeit  $EI_{z,opt}$  und den messtechnisch ermittelten Massenverteilungen  $\mu_{exp}$  der Stützenprofile P1 bis P5. Dabei werden die Ergebnisse der Biegesteifigkeit identischer Stützenprofile gemittelt dargestellt. Bis auf das Stützenprofil P3 weisen alle Prüfkörper eine höhere Biegesteifigkeit im Vergleich zum tabellarisierten Wert auf. Die größte Abweichung wird mit +11,5 % bei P4 identifiziert. Die gewogenen Massenverteilungen weisen mit Ausnahme von P4 reduzierte Werte auf, wobei die größte Abweichung mit +14,3 % (P4) festzustellen ist.

## 5.2.2 Dynamische Versuchsreihe

Während der dynamischen Versuchsreihe werden die Prüfkörper mit unterschiedlichen Normalkräften beansprucht und dynamisch untersucht. Die Auswertung der modalen Systemparameter  $\omega_{ex,1}$  und  $\Psi_{ex,1}$  ermöglicht die Identifikation der Drucknormalkraft  $D$  sowie der Lagerungsbedingungen  $k$ . Abschnitt 5.2.2.1 definiert die Laststufen je Prüfkörper auf Basis der statischen Versuchsreihe. Informationen über die messtechnisch erfassten modalen Parameter sind in Abschnitt 5.2.2.2 zusammengefasst. Anschließend stellt Abschnitt 5.2.2.3 die Ergebnisse aus dem Optimierungsprozess bereit.

### 5.2.2.1 Laststufen

Die statische Versuchsreihe ermöglicht die Definition experimenteller Stabilitätseigenschaften und folglich maximaler Lastbeanspruchungen  $D_{EC3}$  (vgl. Tabelle 5.10). Im Zuge der dynamischen Versuchsreihe wird jeder Prüfkörper durch mehrere Laststufen (LS) bis maximal  $D_{EC3}$  mit unterschiedlichen Normalkräften  $D_{real}$  statisch beansprucht und dynamisch untersucht. Tabelle 5.12 stellt die Kräfte  $D_{real}$  der angesetzten Laststufen (LS) je Prüfkörper bereit. Die dargestellten Werte demonstrieren die tatsächlich im Prüfkörper

Tabelle 5.12: Normalkraft  $D_{real}$  [kN] je Prüfkörper und Laststufe (LS)

Prüfkörper	LS 1	LS 2	LS 3	LS 4	LS 5	LS 6	LS 7	LS 8	LS 9
P1	C1	8,36	13,36	18,36	-	-	-	-	-
	C2	18,36	23,36	28,36	33,36	-	-	-	-
	C3	18,36	23,36	28,36	33,36	-	-	-	-
	C4	18,36	23,36	28,36	33,36	-	-	-	-
P2	C1	18,34	28,34	38,34	-	-	-	-	-
	C2	18,34	28,34	38,34	48,34	58,34	68,34	-	-
	C3	18,34	28,34	38,34	48,34	58,34	68,34	-	-
	C4	18,34	28,34	38,34	48,34	58,34	68,34	78,34	-
P3	C1	18,34	28,34	38,34	48,34	-	-	-	-
	C2	18,34	28,34	38,34	48,34	58,34	68,34	-	-
	C3	18,34	28,34	38,34	48,34	58,34	68,34	-	-
	C4	18,34	28,34	38,34	48,34	58,34	68,34	78,34	-
P4	C1	18,29	38,29	58,29	78,29	88,29	-	-	-
	C2	18,29	38,29	58,29	78,29	98,29	108,29	-	-
	C3	18,29	38,29	58,29	78,29	98,29	118,29	-	-
	C4	18,29	38,29	58,29	78,29	98,29	118,29	128,29	-
P5	C1	18,29	38,29	58,29	78,29	98,29	118,29	138,29	148,29
	C2	18,29	38,29	58,29	78,29	98,29	118,29	138,29	158,29
	C3	18,29	38,29	58,29	78,29	98,29	118,29	138,29	158,29
	C4	18,29	38,29	58,29	78,29	98,29	118,29	138,29	158,29

existierenden Normalkräfte, wobei durch die Handpumpe und der daraus folgenden manuellen Nachsteuerung eine Genauigkeit von  $\pm 100$  N erreicht wird. Die 117 Belastungsstufen beinhalten die Reduktion eines Eigenlastanteils der Stützenprofile sowie des Gewichts der unteren Auflagerbank. Die Laststufen starten bei einem Kraftanzeigewert von 20 kN und steigern sich in 10 kN- bzw. 20 kN-Schritten bis vor die in Tabelle 5.10 angegebenen maximalen Lastbeanspruchungen  $D_{EC3}$ . Eine Ausnahme ist der Prüfkörper P1C1 mit der geringsten Querschnitts- und Systemsteifigkeit, bei dem bereits mit einem Kraftanzeigewert von 10 kN und mit 5 kN-Schritten verfahren wird.

### 5.2.2.2 Modale Parameter (Impulshammer)

Die experimentelle Ermittlung der dynamischen Systemeigenschaften ist Grundlage für das dynamische Verfahren zur Systemidentifikation, welches die Normalkraftbeanspruchung  $D$  und die Federsteifigkeiten  $k$  identifiziert. Zur Modalanalyse wird ein Impulshammer in Kombination mit zwölf bzw. dreizehn über den Prüfkörpern verteilten Beschleunigungsaufnehmern verwendet. Die gemessenen Übertragungsfunktionen an verschiedenen Messpunkten werden gemittelt und mit dem Programm *BK Connect* (Brüel & Kjær) ausgewertet (s. Abschnitt 5.1.4). Abbildung 5.23 stellt alle messtechnisch ermittelten Eigenfrequenzen  $f_{ex,1}$  der ersten Mode, aufgeteilt nach Prüfkörpern und Laststufen, bereit. Die einwirkenden Normalkräfte  $D_{real}$  variieren je nach Belastungsversuch zwischen 8,36 kN für das Profil und den Gelenkanschluss mit der jeweils geringsten Biege- bzw. Übergangsteifigkeit P1C1 sowie 178,29 kN für das Profil und den Anschluss mit der größten Steifigkeit P5C4 (s. Abschnitt 5.2.2.1). Dabei zeigt P1C1-LS 1 (8,36 kN) die Prüfung mit der niedrigsten Eigenfrequenz von 13,82 Hz und P5C4-LS 4 (178,29 kN) den Belastungsversuch mit der höchsten Frequenz von 43,68 Hz.

Theoretische Grundlagen zeigen, dass die Eigenwerte  $\omega_n^2$  als Lösung der Differentialgleichung des dynamischen Gleichgewichts im Zuge steigender Druckkräfte linear fallen (s. Abschnitt 4.1.1.4). Dies bedeutet für die experimentell ermittelten Eigenkreisfrequenzen  $\omega_{ex,1}$  bzw. Eigenfrequenzen  $f_{ex,1}$  ebenfalls einen theoretisch konsequenten Abfall, welcher in Abbildung 5.23 nicht für jeden Prüfkörper zu erkennen ist. Es zeigt sich eine zunächst unklare Abhängigkeit zwischen der Normalkraft  $D_{real}$  und der Eigenfrequenz  $f_{ex,1}$ . Die Prüfkörper P1C3 und P2C3 visualisieren zwar, dass steigende Drucknor-

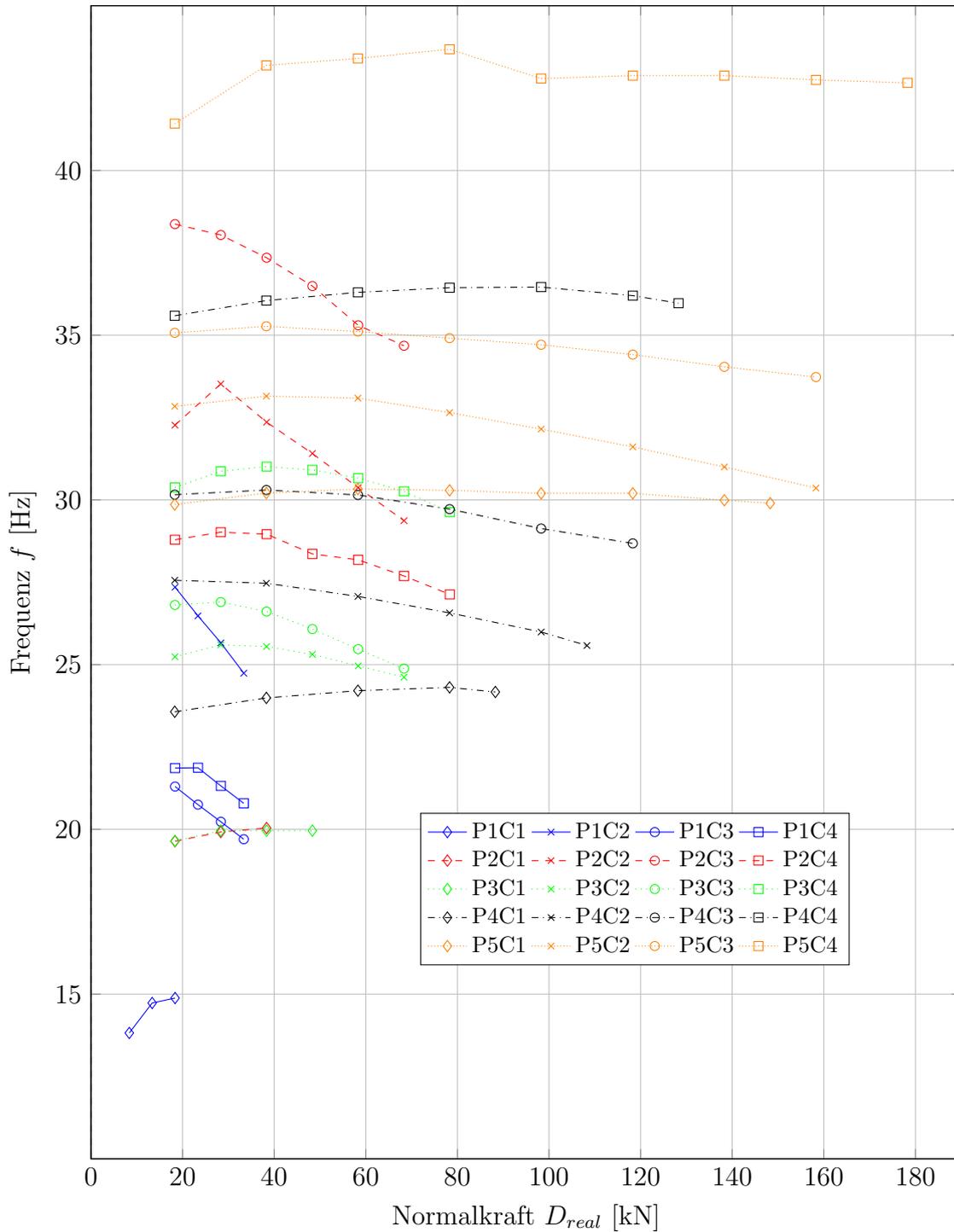


Abbildung 5.23: Experimentelle Eigenfrequenzen  $f_{ex,1}$  in Abhängigkeit der Normkraftbeanspruchung  $D_{real}$  je Prüfkörper und Laststufe

malkräfte  $D_{opt}$  die konsequente Reduktion der Eigenfrequenz zur Folge haben, jedoch ist dieser Zusammenhang bei anderen Prüfkörper nicht stringent vorhanden (z. B. P4C4) bzw. teilweise gar nicht existent (z. B. P3C1). In den meisten Fällen zeigen sich sowohl eine Erhöhung als auch eine Reduktion innerhalb eines Prüfkörpers bei unterschiedlichen Normalkräften (z. B. P3C4). Vor allem die nach der Theorie ungewöhnliche Erhöhung der Eigenfrequenzen  $f_{ex,1}$  im Zuge steigender Lasten  $D_{real}$  ist genauer zu untersuchen.

Da die Massenbelegung  $\mu$  und Querschnittssteifigkeit  $EI$  über unterschiedliche Normalkraftzustände  $D$  konstant bleiben, ist eine mögliche Veränderung der Auflagersteifigkeiten zu klären. Abbildungen 5.24 und 5.25 demonstrieren beispielhaft die Eigenformen für den Prüfkörper P3C4 bei ausgewählten Normalkraftzuständen (LS 1, LS 3, LS 5 & LS 7). Während die Wegfedern  $k_{t,opt}$  durch eine veränderte Normalkraft  $D_{real}$  kaum sichtbare Veränderungen erfahren, ist im Zuge steigender Kräfte eine stärkere Verkrümmung im Lagerbereich zu erkennen (s. Abbildung 5.25). Es ist die Aufgabe des dynamischen Verfahrens zur Systemidentifikation die Veränderung der Lagersteifigkeiten numerisch zu klären. Für die weitere Auswertung hinsichtlich der steigenden Frequenzen mit zunehmender Normalkraftbeanspruchung wird auf Abschnitt 5.3 verwiesen.

Die experimentell ermittelten Eigenfrequenzen und Eigenformen sind Basis für das dynamische Verfahren zur Systemidentifikation. Die Dämpfung ist nicht Bestandteil des

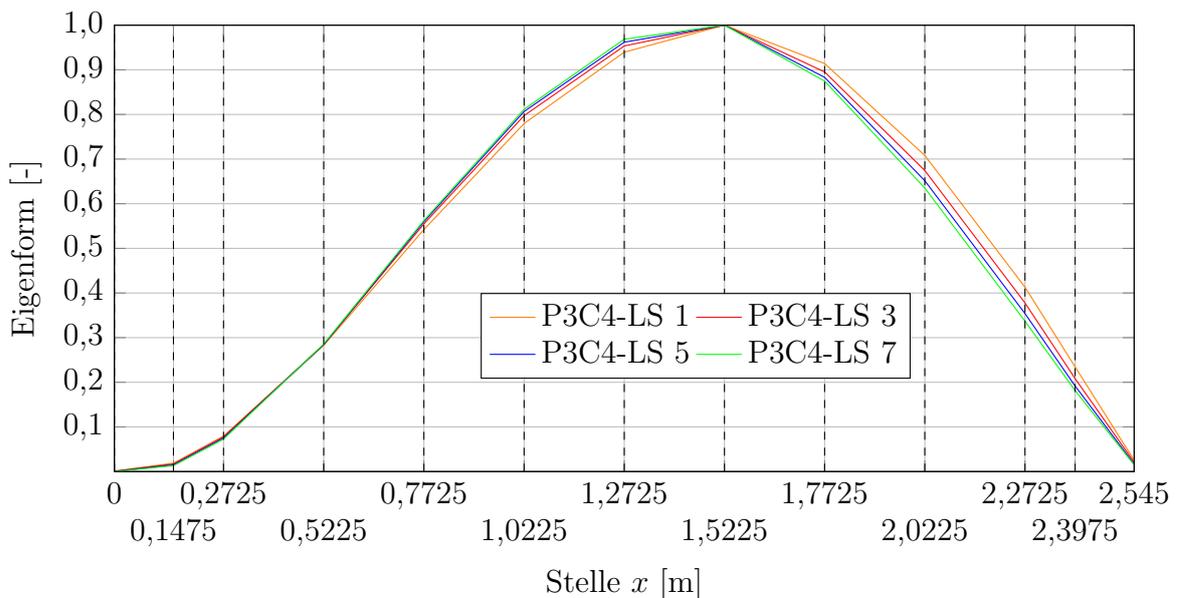


Abbildung 5.24: Ausgewählte experimentelle Eigenformen des Prüfkörpers P3C4

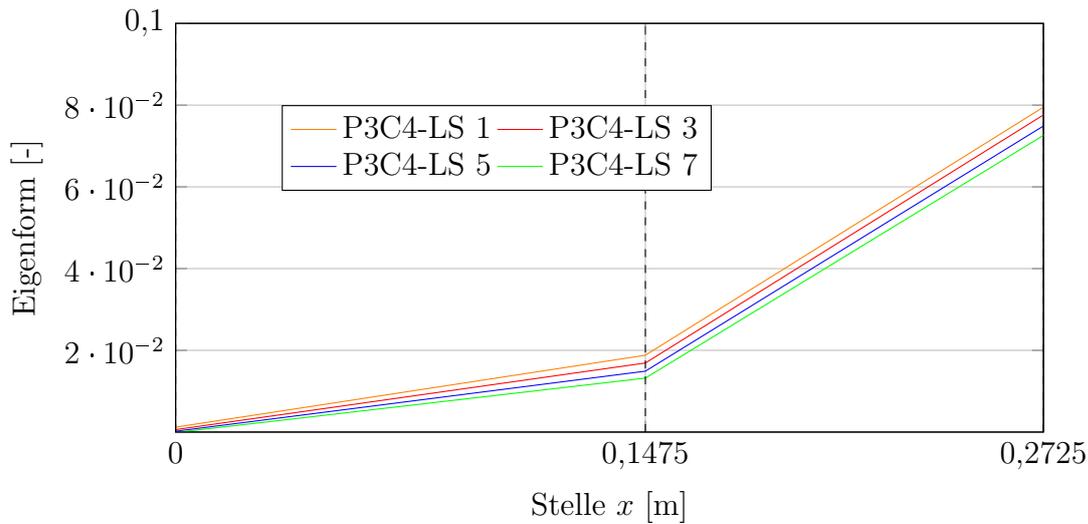


Abbildung 5.25: Detaillierte Ansicht ausgewählter experimenteller Eigenformen des Prüfkörpers P3C4

Optimierungsprozesses, wird aber im Laufe der Modalanalyse mit ermittelt und zur Einordnung der vorgestellten theoretischen Grundlagen aus Abschnitt 3.4 herangezogen. Tabelle 5.13 stellt die Dämpfungsmaße  $\xi$  der ersten Mode, korrespondierend zu den Eigenfrequenzen  $f_{ex,1}$  aus Abbildung 5.23, bereit. Die mit dem Impulshammer ermittelten Werte liegen zwischen 0,061 % und 5,361 %, wobei 104 von den insgesamt 117 Untersuchungen einen Wert kleiner als 1,0 % aufweisen. Etwa zwei Drittel der Prüfungen haben Dämpfungsmaße von unter 0,5 %. Die in Tabelle 3.1 unter Abschnitt 3.4.1.1 angegebenen üblichen Dämpfungsmaße im Stahlbau werden dementsprechend weitestgehend erreicht und häufig unterboten. Größere Werte von über 1,0 % treten ausschließlich auf einem niedrigeren Lastniveau auf und können durch Energiedissipation, zum Beispiel aufgrund nicht ausreichend überbrückter Bauteilübergänge, erklärt werden. Die in Tabelle 5.25 aufgezeigten Dämpfungsmaße  $\xi$  steigern die Reliabilität der durchgeführten Messungen und bestätigen die in Kapitel 3.1 getroffenen Annahmen zur Gleichstellung von gedämpfter und ungedämpfter Eigenkreisfrequenz für im Bauwesen übliche Konstruktionen.

Die Optimierung der zunächst unbekanntesten Systemeigenschaften auf Basis der modalen Parameter nach dem in Abschnitt 4.1 dargestellten Verfahren ermöglicht im Folgenden die Definition der Normalkraftbeanspruchung  $D$  und der Lagerungsbedingungen  $k$ .

Tabelle 5.13: Experimentelles Dämpfungsmaß [%] je Prüfkörper und Laststufe (LS)

Prüfkörper	LS1	LS2	LS3	LS4	LS5	LS6	LS7	LS8	LS9
P1	C1	1,209	1,341	1,374	-	-	-	-	-
	C2	0,312	0,295	0,227	0,253	-	-	-	-
	C3	3,547	1,760	1,429	1,095	-	-	-	-
	C4	1,140	0,865	0,289	0,587	-	-	-	-
P2	C1	1,386	3,989	5,361	-	-	-	-	-
	C2	0,298	0,214	0,245	0,061	0,401	0,329	-	-
	C3	0,575	0,729	0,716	0,983	1,395	0,281	-	-
	C4	0,309	0,426	0,361	0,916	0,298	0,306	0,202	-
P3	C1	0,580	0,552	0,565	0,589	-	-	-	-
	C2	0,564	0,425	0,379	0,349	0,329	0,372	-	-
	C3	0,443	0,512	0,516	0,496	0,474	0,483	-	-
	C4	0,427	0,476	0,450	0,457	0,500	0,453	0,447	-
P4	C1	0,449	0,414	0,413	0,386	0,416	-	-	-
	C2	0,329	0,312	0,309	0,310	0,294	0,292	-	-
	C3	0,339	0,398	1,622	0,244	0,272	0,283	-	-
	C4	0,378	0,291	0,396	0,510	0,350	0,248	0,249	-
P5	C1	0,338	0,308	0,315	0,302	0,306	0,309	0,312	0,333
	C2	0,337	0,309	0,281	0,265	0,309	0,250	0,257	0,271
	C3	0,280	0,267	0,239	0,313	0,307	0,192	0,305	0,329
	C4	0,476	0,479	0,374	0,355	0,404	0,368	0,149	0,242

### 5.2.2.3 Dynamischer Optimierungsprozess

Das Programm *DynamOpti* ermöglicht die rechnerische Auswertung der modalen Parameter zur Identifikation bestimmter Systemeigenschaften (s. Abschnitt 4.1.2). Unter Vorgabe der Massenverteilung  $\mu$  und der Querschnittssteifigkeit  $EI$  aus Tabelle 5.1 werden die Normalkraftbeanspruchung  $D_{opt}$  sowie die vier Lagersteifigkeiten  $k_{opt}$  bestimmt. Im Folgenden werden ausschließlich die Ergebnisse der Optimierungsprozesses vorgestellt, für die Auswertung der dargestellten Parameter wird auf Abschnitt 5.3 verwiesen.

Tabelle 5.14 stellt die Detailergebnisse aller Identifikationsprozesse des Stützenprofils P3 dar. Neben den fünf optimierten Größen, bestehend aus der Normalkraft  $D_{opt}$  und den Federsteifigkeiten  $k_{ri,opt}$ ,  $k_{rj,opt}$ ,  $k_{ti,opt}$  und  $k_{tj,opt}$ , wird vergleichend die tatsächliche Normal-

Tabelle 5.14: System- und Berechnungseigenschaften aus dem Optimierungsprozess für die Prüfkörper P3C1, P3C2, P3C3 und P3C4

	LS	$D_{real}$ [kN]	$D_{opt}$ [kN]	$\gamma_D$ [%]	$k_{ri,opt}$ [ $\frac{\text{kN m}}{\text{rad}}$ ]	$k_{rj,opt}$ [ $\frac{\text{kN m}}{\text{rad}}$ ]	$k_{ti,opt}$ [ $\frac{\text{kN}}{\text{m}}$ ]	$k_{tj,opt}$ [ $\frac{\text{kN}}{\text{m}}$ ]	$f_{error}$ [-]	$n_{iter}$ [-]
C1	1	18,34	27,42	+49,5	15,14	21,79	> 99999	10887	6,20E-5	1940
	2	28,34	36,83	+30,0	23,20	32,54	> 99999	13229	6,03E-5	1481
	3	38,34	47,17	+23,0	31,39	42,88	> 99999	15041	5,87E-5	1633
	4	48,34	55,98	+15,8	39,99	51,50	> 99999	14383	5,46E-5	1696
C2	1	18,34	19,80	+8,0	50,33	23,91	1292	7729	3,34E-5	1367
	2	28,34	29,60	+4,4	50,43	44,24	1317	8765	3,23E-5	1399
	3	38,34	39,61	+3,3	50,98	62,41	1344	9732	3,02E-5	1347
	4	48,34	48,29	-0,1	51,46	77,08	1364	10965	3,19E-5	985
	5	58,34	56,90	-2,5	52,36	90,90	1386	11808	3,11E-5	2056
	6	68,34	64,27	-6,0	52,95	103,7	1403	12821	2,98E-5	1528
C3	1	18,34	18,82	+2,6	123,3	5,83	2508	7940	3,46E-5	1400
	2	28,34	30,46	+7,5	125,5	18,86	2506	10121	3,57E-5	1460
	3	38,34	40,85	+6,6	126,4	28,44	2507	11892	3,57E-5	2885
	4	48,34	50,58	+4,6	126,6	35,54	2495	13838	3,42E-5	1449
	5	58,34	60,60	+3,9	127,1	42,65	2479	17101	3,17E-5	1446
	6	68,34	70,71	+3,5	130,6	49,91	2471	21970	2,93E-5	1855
C4	1	18,34	16,31	-11,0	355,3	3,95	11219	6688	1,66E-5	1335
	2	28,34	27,25	-3,9	370,3	18,31	12002	8131	1,74E-5	17710
	3	38,34	37,36	-2,6	384,5	30,29	12914	9787	1,76E-5	1147
	4	48,34	47,73	-1,3	398,3	41,43	13748	11490	1,82E-5	1369
	5	58,34	57,42	-1,6	410,4	51,21	14403	12617	1,57E-5	1358
	6	68,34	67,31	-1,5	417,1	60,76	15012	13313	1,30E-5	1323
	7	78,34	77,13	-1,5	419,2	68,02	15510	14057	1,13E-5	1518

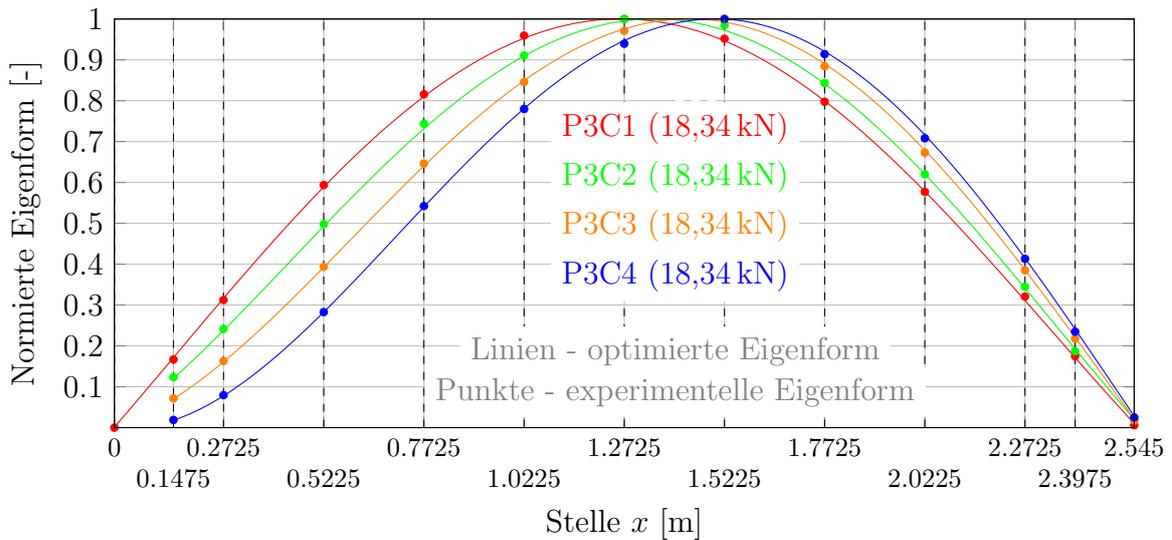


Abbildung 5.26: Optimierte und experimentelle Eigenformen von P3C1, P3C2, P3C3 und P3C4 jeweils bei Laststufe LS 1 (18,34 kN)

kraft  $D_{real}$  und die prozentuale Abweichung zwischen der optimierten und realen Last  $\gamma_D$  angegeben. Ebenso sind Informationen hinsichtlich des Optimierungskriteriums  $f_{error}$  und der erforderlichen Iterationsschritte  $n_{iter}$  gelistet. Darüber hinaus stellt Abbildung 5.26 ausgewählte und rechnerisch optimierte Eigenformen der in Tabelle 5.14 angegebenen Belastungsversuche bereit. Zur Übersichtlichkeit dieser Arbeit werden ausschließlich die Ergebnisse der Laststufe LS 1 aller Prüfkörper dargestellt. Äquivalent zu der statischen Versuchsreihe wird auch bei der dynamischen Optimierung auf die Messstelle 1 verzichtet, wenn es sich um Prüfkörper mit einem Zwischenprofil C2, C3 oder C4 handelt (vgl. Abschnitt 5.1.2.2).

Tabelle 5.15 stellt die Ergebnisse des Optimierungsprozesses für die Normalkräfte  $D_{opt}$  aller 117 Belastungsversuche bereit. Darüber hinaus beinhalten Tabellen 5.15 und 5.16 die optimierten Drehfedersteifigkeiten  $k_{ri,opt}$  und  $k_{rj,opt}$ . Auf eine vergleichbare Darstellung der optimierten Wegfedern  $k_{ti,opt}$  und  $k_{tj,opt}$  wird für die Übersichtlichkeit in diesem Abschnitt verzichtet. Die Detailergebnisse nach Tabelle 5.14 aller Optimierungsprozesse können zur Vollständigkeit dem Anhang C entnommen werden.

Wie Abschnitt 5.1.4.1 anhand des Grundmodells für das dynamische Verfahren zur Systemidentifikation beschreibt, werden alle Prüfkörper mit einem Profilanchluss C2, C3 oder C4 am oberen Übergang unter Ausschluss von Messstelle 1 ausgewertet. Zusätzlich

bleibt bei den Prüfkörpern P1C2, P2C2 und P2C3 die Messstelle Stelle 13 auf Höhe des Bolzens am Gelenkanschluss unberücksichtigt. Durch die vorhandene Drucknormalkraft  $D_{real}$  lässt sich im unteren Gelenkanschluss der genannten drei Prüfkörper eine für den Impulshammer nicht überwindbare Haftreibung identifizieren, wie die hohen Werte der Drehfedersteifigkeit  $k_{rj,opt}$  aus Tabelle 5.16 andeuten (vgl. Abschnitt 5.3.2). Dadurch zeigt sich am ursprünglich gelenkig ausgebildeten Stützenfuß ein rechnerisch nahezu vollständig biegesteifer Übergang, bei der die Drehfedersteifigkeit  $k_{rj,opt}$  den an-

Tabelle 5.15: Normalkräfte  $D_{opt}$  [kN] aus dem Optimierungsprozess

Prüfkörper	LS 1	LS 2	LS 3	LS 4	LS 5	LS 6	LS 7	LS 8	LS 9
P1	C1	8,09	13,26	17,02	-	-	-	-	-
	C2	21,02	25,72	30,03	35,18	-	-	-	-
	C3	16,44	22,38	27,63	32,12	-	-	-	-
	C4	18,73	24,59	29,18	37,38	-	-	-	-
P2	C1	24,15	30,24	37,47	-	-	-	-	-
	C2	20,46	31,03	41,44	53,21	60,46	68,94	-	-
	C3	14,40	28,40	37,80	48,54	57,98	68,98	-	-
	C4	19,30	27,01	36,65	43,43	53,73	62,39	69,95	-
P3	C1	27,42	36,83	47,17	55,98	-	-	-	-
	C2	19,80	29,60	39,61	48,29	56,90	64,27	-	-
	C3	18,82	30,46	40,85	50,58	60,60	70,71	-	-
	C4	16,31	27,25	37,36	47,73	57,42	67,31	77,13	-
P4	C1	33,60	53,50	72,11	90,94	98,86	-	-	-
	C2	25,40	43,47	60,48	76,53	94,35	104,47	-	-
	C3	38,93	57,24	68,97	87,70	97,76	110,51	-	-
	C4	43,51	53,85	71,58	87,54	105,46	123,15	132,21	-
P5	C1	39,70	63,91	85,98	105,06	123,87	143,20	164,21	174,39
	C2	37,67	60,81	79,48	99,92	122,55	142,74	161,53	180,60
	C3	36,10	48,47	68,21	88,99	108,75	128,73	147,65	166,45
	C4	78,36	57,72	56,98	58,96	79,44	98,42	119,64	142,97

gesetzten maximalen Grenzwert für den Optimierungsprozess erreicht. Das vorgestellte Verfahren ist nicht mehr geeignet, den im Zuge der Haftreibung biegesteifen Übergang zwischen den Stellen 12 und 13 theoretisch abzubilden. Unter Voraussetzung der genannten Einspannwirkung sind unsichere Identifikationsprozesse und fehlerhafte Ergebnisse zu erwarten, sodass ausschließlich die Messstellen 2 bis 12 in dem dynamischen Identifikationsverfahren berücksichtigt werden. Auch wenn durch die Drucknormalkraft  $D_{real}$  ausschließlich in drei Fällen eine unüberwindbare Haftreibung entsteht, zeigen sich in den

Tabelle 5.16: Drehfedersteifigkeiten  $k_{ri,opt}$  [ $\frac{\text{kNm}}{\text{rad}}$ ] aus dem Optimierungsprozess

Prüfkörper	LS 1	LS 2	LS 3	LS 4	LS 5	LS 6	LS 7	LS 8	LS 9
P1	C1	3,58	8,13	11,28	-	-	-	-	-
	C2	48,42	48,44	49,18	51,43	-	-	-	-
	C3	101,9	106,8	107,5	107,8	-	-	-	-
	C4	214,9	215,8	213,2	229,5	-	-	-	-
P2	C1	15,90	19,67	25,52	-	-	-	-	-
	C2	37,90	41,56	43,77	49,10	46,46	46,75	-	-
	C3	114,2	119,2	118,7	121,4	123,2	126,9	-	-
	C4	394,4	389,0	398,6	402,6	402,7	403,0	396,0	-
P3	C1	15,14	23,20	31,39	39,99	-	-	-	-
	C2	50,33	50,43	50,98	51,46	52,36	52,95	-	-
	C3	123,3	125,5	126,4	126,6	127,1	130,6	-	-
	C4	355,3	370,3	384,5	398,3	410,4	417,1	419,2	-
P4	C1	9,31	25,07	38,40	51,37	57,91	-	-	-
	C2	26,67	27,14	27,29	26,58	28,51	30,33	-	-
	C3	119,8	125,7	125,9	132,3	127,9	131,3	-	-
	C4	471,7	492,1	543,8	610,2	705,2	767,7	786,8	-
P5	C1	22,23	40,44	57,65	71,35	85,20	100,2	114,8	122,3
	C2	33,02	33,51	32,83	33,65	36,21	37,38	38,12	38,69
	C3	125,7	122,2	125,1	130,4	134,6	140,7	147,1	154,8
	C4	791,1	736,0	739,6	779,4	871,3	928,3	981,6	1034,8

Tabellen 5.15 und 5.16 auch in den übrigen Gelenkanschlüssen kleinere Einspanneffekte. Die entsprechenden Messstellen auf Höhe des Gelenkbolzens werden trotz der optimierten Federsteifigkeiten  $k_{r,opt}$  berücksichtigt, da der MAC als Qualitätskriterium, trotz Teilversteifung des Gelenks, in diesen Untersuchungen einen Wert von mindestens 0,9995 erreicht (vgl. Abschnitt 4.1.2.3) und sich die optimierten Steifigkeiten deutlich unter den rechnerisch festgelegten Grenzwerten befinden.

Tabelle 5.17: Drehfedersteifigkeiten  $k_{rj,opt}$  [ $\frac{\text{kNm}}{\text{rad}}$ ] aus Optimierungsprozess

Prüfkörper	LS 1	LS 2	LS 3	LS 4	LS 5	LS 6	LS 7	LS 8	LS 9
P1	C1	6,68	16,27	22,01	-	-	-	-	-
	C2	162,7	168,4	171,8	178,6	-	-	-	-
	C3	13,76	18,92	24,66	29,91	-	-	-	-
	C4	12,79	21,78	26,23	40,71	-	-	-	-
P2	C1	22,73	32,69	42,13	-	-	-	-	-
	C2	265,9	253,9	247,9	260,2	262,9	269,6	-	-
	C3	189,9	233,8	253,7	270,6	262,9	300,1	-	-
	C4	0	8,45	17,35	20,66	31,46	38,87	45,29	-
P3	C1	21,79	32,54	42,88	51,50	-	-	-	-
	C2	23,91	44,24	62,41	77,08	90,90	103,7	-	-
	C3	5,83	18,86	28,44	35,54	42,65	49,91	-	-
	C4	3,95	18,31	30,29	41,43	51,21	60,76	68,02	-
P4	C1	10,15	28,23	46,88	64,25	71,39	-	-	-
	C2	14,65	35,78	53,36	70,92	88,15	96,18	-	-
	C3	8,20	27,70	38,79	52,54	58,14	65,71	-	-
	C4	0	12,07	27,18	39,66	51,92	63,90	69,89	-
P5	C1	14,36	36,80	54,33	68,26	81,32	97,48	112,6	120,1
	C2	22,08	58,85	82,52	100,3	120,2	135,4	148,9	163,2
	C3	0	17,16	33,39	49,85	65,69	79,97	91,22	103,2
	C4	0	0	0	0	0	11,88	25,94	40,36

## 5.3 Analyse und Diskussion

Nachfolgend werden die zuvor in Abschnitt 5.2.2.3 dynamisch erzeugten Optimierungsergebnisse, unter anderem vergleichend anhand der statischen Untersuchungen aus Abschnitt 5.2.1.2, aufbereitet. Zunächst werden in Abschnitt 5.3.1 die dynamisch ermittelten Normalkräfte  $D_{opt}$  und ihre Abweichungen gegenüber den tatsächlichen Lasten  $D_{real}$  ausgewertet. Anschließend vergleicht Abschnitt 5.3.2 die Werte der optimierten Lagerungsbedingungen aus der dynamischen Versuchsreihe  $k_{opt,dyn}$  mit den Vergleichswerten aus der statischen Untersuchung  $k_{opt,st}$ . Zum Abschluss wird in Abschnitt 5.3.3 ein Modell zur Berechnung des theoretischen Frequenzabfalls im Zuge der anstehenden Lasten vorgestellt.

### 5.3.1 Optimierung der Normalkraft

Während der Laborversuche werden die Prüfkörper in Laststufen mit unterschiedlich starken Normalkräften beansprucht. Jede Probe wird dabei mit mindestens drei (z. B. P1C1) bzw. maximal neun Laststufen (P5C4) untersucht (s. Abschnitt 5.2.2.1) und mit dem Softwareprogramm *DynamOpti* analysiert (vgl. Ergebnisse aus Abschnitt 5.2.2.3). Die aus dem Verfahren zur Systemidentifikation optimierten Normalkräfte werden im Folgenden mit den real vorhandenen und durch eine Kraftmessdose ermittelten Beanspruchungen verglichen. Abbildung 5.27 stellt exemplarisch die tatsächlich vorhandenen Normalkräfte  $D_{real}$  und die aus dem Identifikationsverfahren optimierten Lasten  $D_{opt}$  des Prüfkörpers P3C4 dar. Dabei betragen die realen Lastbeanspruchungen  $D_{opt}$  zwischen 18,34 kN und 78,34 kN. Die Abbildung zeigt eine gute Übereinstimmung der rechnerischen Kräfte zu den tatsächlich vorhandenen Werten  $D_{real}$ . Die optimierten Lasten  $D_{opt}$  liegen in allen Laststufen leicht unterhalb des real aufgebracht Werts  $D_{real}$ , wobei sich die größte Differenz auf 2,03 kN beläuft (LS 1). Dies entspricht einer prozentualen Abweichung von  $-11,0\%$  gegenüber der tatsächlichen Last. Über alle sieben in Abbildung 5.27 dargestellten Belastungsversuche hinweg, liegt die mittlere prozentuale Abweichung bei  $-3,3\%$ . Abbildung 5.27 demonstriert eine Zunahme der prozentualen Genauigkeit des Identifikationsverfahrens mit steigenden Kräften. Für die beiden höchsten Laststufen LS 6 und LS 7 erreicht das Verfahren eine minimale Abweichung von  $-1,5\%$ .

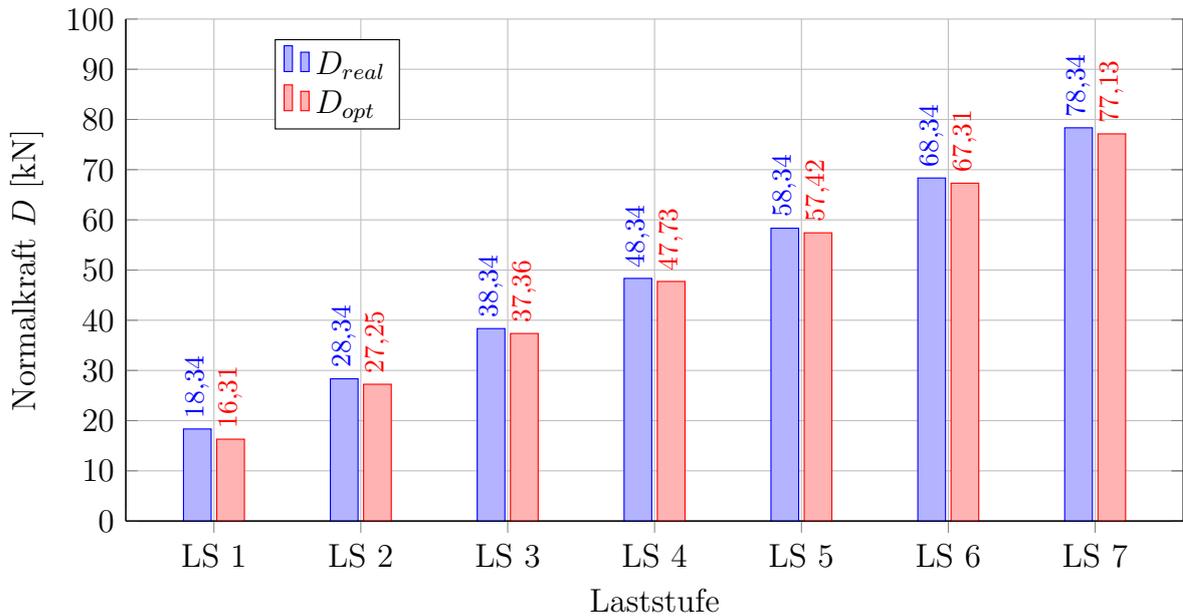


Abbildung 5.27: Werte der rechnerisch optimierten und experimentell gemessenen Normalkraftbeanspruchung  $D$  des Prüfkörpers P3C4

Die bisherige Betrachtung des Prüfkörpers P3C4 wird im Folgenden auf alle dynamischen Belastungsversuche ausgeweitet. Tabelle 5.18 stellt die prozentualen Abweichungen  $\gamma_D$  der optimierten Kräfte  $D_{opt}$  auf Basis der realen Lasten  $D_{real}$  für alle 117 Belastungsversuche dar. Es zeigt sich, dass die prozentuale Abweichung zwischen der optimierten und realen Last in etwa der Hälfte aller Versuche (59 von 117) bei unter 10% liegt. In 38 dieser Fälle kann eine Abweichung von unter 5% erzielt werden, wobei der beste Wert zwischen realer und optimierter Last mit 0,1% bei P3C2-LS 4 (48,34 kN) erreicht wird. Vereinzelt Untersuchungen zeigen eine Abweichung von über 100%, wobei alle betroffenen Belastungsversuche eine Laststufe auf einem für den Prüfkörper niedrigem Belastungsniveau repräsentieren.

Der zuvor bereits exemplarisch dargestellte Prüfkörper P3C4 weist in Abbildung 5.27 eine erhöhte Genauigkeit mit steigenden Normalkräften auf. Andere Prüfkörper, wie zum Beispiel P4C4 oder P5C1, repräsentieren ebenfalls niedrigere Abweichungen im Zuge steigender Lasten (vgl. Tabelle 5.18). Dieser Zuwachs an Genauigkeit auf höheren Lastniveaus wird im Folgenden mithilfe der für jeden Prüfkörper individuellen Eulerschen Knicklast ausgewertet. Dies ermöglicht auf einer mechanischen Grundlage das Treffen vergleichbarer Aussagen darüber, wie stark die Prüfkörper relativ zu einander ausge-

Tabelle 5.18: Abweichung  $\gamma_D$  [%] zwischen der rechnerisch optimierten und experimentell gemessenen Normalkraftbeanspruchung

Prüfkörper	LS 1	LS 2	LS 3	LS 4	LS 5	LS 6	LS 7	LS 8	LS 9
P1	C1	-3,2	-0,8	-7,3	-	-	-	-	-
	C2	+14,5	+10,1	+5,9	+5,5	-	-	-	-
	C3	-10,5	-4,2	-2,6	-3,7	-	-	-	-
	C4	+2,0	+5,3	+2,9	+12,0	-	-	-	-
P2	C1	+31,7	+6,7	-2,3	-	-	-	-	-
	C2	+11,6	+9,5	+8,1	+10,1	+3,6	+0,9	-	-
	C3	-21,5	+0,2	-1,4	+0,4	-0,6	+0,9	-	-
	C4	+5,3	-4,7	-5,2	-10,2	-7,9	-8,7	-10,7	-
P3	C1	+49,5	+23,0	+23,0	+15,8	-	-	-	-
	C2	+8,0	+4,4	+3,3	-0,1	-2,5	-6,0	-	-
	C3	+2,6	+7,5	+6,6	+4,6	+3,8	+3,5	-	-
	C4	-11,0	-3,9	-2,6	-1,3	-1,6	-1,5	-1,5	-
P4	C1	+83,7	+39,7	+23,7	+16,2	+12,0	-	-	-
	C2	+38,9	+13,5	+3,8	-2,2	-4,0	-3,5	-	-
	C3	+112,9	+49,5	+18,3	+12,0	-0,5	-6,6	-	-
	C4	+137,9	+40,7	+22,8	+11,8	+7,3	+4,1	+3,1	-
P5	C1	+117,1	+66,9	+47,5	+34,2	+26,0	+21,1	+18,8	17,6
	C2	+106,0	+58,8	+36,4	+27,6	+14,7	+20,7	+16,8	14,1
	C3	+97,4	+26,6	+17,0	+13,7	+10,6	+8,8	+16,8	5,2
	C4	+328,5	+50,7	-2,3	-24,7	-19,2	-16,8	-21,4	-9,7

lastet sind. Dabei werden zunächst die Eulerschen Knicklasten für alle Prüfkörper und Laststufen auf Basis der Querschnittssteifigkeiten  $EI$  aus Tabelle 5.1 und der optimierten Federsteifigkeiten  $k_{opt}$  aus Anhang C ermittelt. Auf dieser Basis zeigt Abbildung 5.28 die Konvergenz der prozentualen Abweichungen zwischen den realen Lasten  $D_{real}$  und den optimierten Normalkräften  $D_{opt}$  grafisch in Abhängigkeit nach dem prozentualen Anteil der tatsächlichen Last an der dynamisch ermittelten Eulerschen Knicklast  $D_{Euler}$ . Abgebildet sind alle Belastungsversuche mit einer Auslastung der Eulerschen Knicklast von

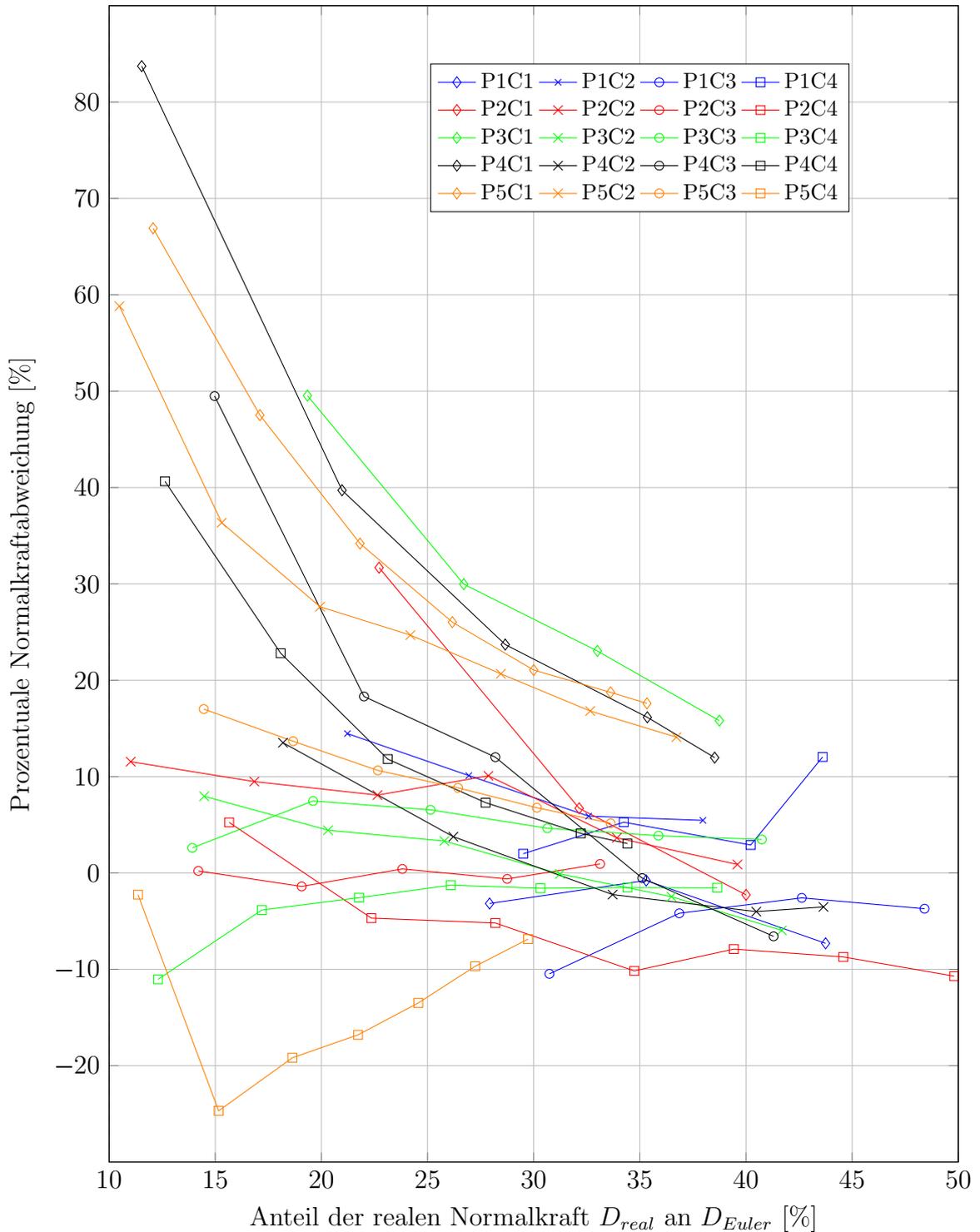


Abbildung 5.28: Konvergenz der prozentualen Abweichung in Abhängigkeit der anteiligen ideellen Knicklast nach Euler

größer als 10 %. Die zehn Beanspruchungszustände, die zu einer kleineren Auslastung der Eulerschen Knicklast führen, werden für die nachfolgende Untersuchung mit Blick auf den Fokus knickgefährdeter Bauteile als geringfügig relevant eingestuft und nicht weiter diskutiert. Die niedrigste in Abbildung 5.28 dargestellte Auslastung bezogen auf die jeweilige Eulersche Knicklast beträgt bei Prüfkörper P5C2 (LS 2) 10,5 %. Die größte Auslastung stellt Laststufe LS 7 von P2C4 mit 49,8 % dar.

Der Fokus von Abbildung 5.28 liegt nicht in der akribischen Visualisierung von Einzelergebnissen, sondern vielmehr auf der visuell erkennbaren Konvergenz der prozentualen Normalkraftabweichung. Das vertikale Zusammenrücken der Abweichungen beim Erreichen einer höheren Auslastung wird mit einer tabellarisierten Auswertung näher analysiert. Dabei gruppiert Tabelle 5.19 die Abweichungen aus Abbildung 5.28 nach Klassen in Abhängigkeit der erreichten Eulerschen Knicklast. Die 107 Belastungsversuche teilen sich auf acht Gruppen zwischen einer Auslastung der Eulerschen Knicklast von 10 % bis 50 % in 5 %-Schritten auf. Tabelle 5.19 stellt für jede Gruppe die Anzahl an berücksichtigten Versuchen, die Extremwerte der prozentualen Abweichungen, den Durchschnittswert sowie die Standardabweichung  $s$  dar. Dabei zeigt sich bei steigenden Auslastungen über alle Belastungsversuche hinweg eine höhere Genauigkeit der optimierten Normalkräfte  $D_{opt}$ . Während im Bereich von 10 % bis 15 % der Eulerschen Knicklast die mittlere Abweichung

Tabelle 5.19: Bereichsweise Auswertung der Normalkraftabweichung hinsichtlich der Auslastung der Eulerschen Knicklast

Bereich	Anzahl	Min	Max	Mittelwert	$s$
[%]	[-]	[%]	[%]	[%]	[%]
10 bis < 15	12	-11,0	+83,7	29,4	27,9
15 bis < 20	14	-24,7	+49,5	20,2	15,0
20 bis < 25	15	-16,8	+39,7	15,7	11,6
25 bis < 30	19	-9,7	+30,0	10,1	8,5
30 bis < 35	20	-10,5	+23,0	7,6	6,8
35 bis < 40	14	-7,9	+17,6	7,4	6,2
40 bis < 45	11	-8,7	+12,0	5,4	2,9
45 bis < 50	2	-10,7	-3,7	7,2	—

noch bei 29,4 % liegt, kann diese in einem Bereich von 40 % bis 45 % auf 5,4 % reduziert werden. Dabei erhöht sich die Genauigkeit konsequent je Gruppe mit steigender Auslastung; einzig die Gruppe mit den höchsten Grenzparametern (45 % bis <50 %) und nur zwei in der Statistik berücksichtigten Belastungsversuchen weicht von dieser Entwicklung ab. Der Bereich 45 % bis <50 % wird gemessen und verarbeitet, jedoch aufgrund der geringen Probenzahl nicht weiter diskutiert. Neben den in Tabelle 5.19 angegebenen Mittelwerten verhält sich auch die Standardabweichung  $s$  der prozentualen Ungenauigkeiten äquivalent und sinkt von 27,9 % für die Gruppe von 10 % bis 15 % auf 2,9 % für den Bereich von 40 % bis 45 %. Werden alle Prüfungen ab einer Auslastung von 10 % der Eulerschen Knicklast einbezogen, ergibt sich bei 107 Versuchen eine mittlere Abweichung von 13,0 % bei einer Standardabweichung von 14,8 %. Bei ausschließlicher Analyse von Prüfungen, in denen eine Auslastung von mindestens 15 % erreicht wird, ergibt sich ein Mittelwert von 10,9 % (Standardabweichung: 10,5 %, 95 Versuche). Die Auswertung von Auslastungsbereichen, die mindestens 20 % erreicht haben, zeigt eine mittlere Abweichung von 9,3 % (Standardabweichung: 9,3 %, 81 Versuche).

Eigene Voruntersuchungen der hier vorgestellten Versuchsreihe demonstrieren vergleichbare Abweichungen von durchschnittlich 7,4 % für 24 Belastungsversuche (vgl. Dudenhausen et al., 2023, S. 74). Die in dieser Forschungsarbeit ermittelten Differenzen zwischen der optimierten und realen Normalkraft lassen sich aufgrund der großen Variation der im Bauwesen vorhandenen Profile und daraus folgenden Querschnittseigenschaften sowie möglichen Lagerungsbedingungen eingeschränkt mit Arbeiten aus der Literatur vergleichen. Ding et al. (2020) untersuchen drei Hohlprofile mit einer Systemlänge von 100 cm und jeweils vier unterschiedlichen Lagersystemen unter fünf Laststufen von 2 kN bis 10 kN. Die mittlere Abweichung beträgt über alle 60 Druckversuche hinweg, umgerechnet durch den Autor dieser Arbeit, 10,8 % (Ding et al., 2020, S. 7). Druckbeanspruchte Tragelemente werden ebenfalls von Tullini und Laudiero (2008) untersucht. Ein Hohlprofil ( $80 \times 30 \times 3$  mm) mit einer Systemlänge von 2,38 m wird mit unterschiedlichen Normalkraftbeanspruchungen von 10 kN bis 60 kN belastet. Die mittlere Abweichung ergibt sich zu 3,0 %, wobei der Wert von 7,4 % bei 10 kN und die geringste Differenz von 0,4 % bei 40 kN gemessen wird. Die genannten Literaturen weisen, genauso wie die in dieser Arbeit vorgestellten Ergebnisse, eine höhere Genauigkeit der optimierten Last mit

zunehmender Normalkrafteinwirkung auf. Zudem sind die von Ding et al. (2020) und Tullini und Laudiero (2008) aufgezeigten totalen Abweichungen mit den Durchschnitt ausgewählter Prüfkörper dieser Forschungsarbeit vergleichbar. Mittelwerte von 3,3 % bzw. 3,8 % können die Prüfkörper P3C4 und P1C1 erreichen. Der Prüfkörper P2C3 erzielt dagegen mit einer durchschnittlichen Abweichung, für alle Untersuchungen mit einer Auslastung größer 10 % der Eulerschen Knicklast, von 0,7 % eine höhere Genauigkeit.

Die Ergebnisse aus den laborexperimentellen Versuchen dieser Arbeit und der voran genannten Literaturen demonstrieren eine steigende Genauigkeiten der Normalkraftbestimmung bei höheren Lasten. Grundlage des in dieser Abhandlung vorgestellten dynamischen Identifikationsverfahrens ist die experimentelle Bestimmung der modalen Systemeigenschaften. Unplanmäßige Abweichungen bei der Messung von Eigenfrequenzen und Eigenformen tragen zu geringeren Genauigkeiten in niedrigeren Lastniveaus bei.

Eine Begründung liegt in dem überproportionalen Abfall der Eigenfrequenzen  $f_n$  mit zunehmenden Drucklasten. In Kapitel 4.1.1.4 wird das Verhältnis zwischen dem Eigenwert  $\omega_n^2$  und der äußeren Druckbeanspruchung  $D$  auf Basis der Eulerschen Knicklast  $D_{Euler,n}$  beschrieben. Dabei fällt der Eigenwert  $\omega_n^2$  bei steigenden Drucklasten näherungsweise linear ab. Sobald die Drucknormalkraft  $D$  die Eulersche Knicklast  $D_{Euler,n}$  erreicht, sinkt der Eigenwert  $\omega_n^2$  und damit auch die Eigenfrequenz  $f_n$  auf den Wert 0 ab und das System wechselt von einem stabilen in ein labiles Gleichgewicht. Mit steigenden Kräften sinkt die zum Eigenwert korrespondierende Eigenfrequenz  $f_n$  in einer Wurzelfunktion. Mit Berücksichtigung der für diese Arbeit relevanten ersten Mode, ergeben sich die Eigenfrequenzen  $f_1$  eines mit Normalkraft belasteten Systems zu (s. Gleichung 4.71):

$$f_1 = \sqrt{\left(1 - \frac{D}{D_{Euler,1}}\right)} \cdot f_{0,1} \quad (5.7)$$

Daraus lässt sich der Abfall  $u_f$  der normalkraftfreien Eigenfrequenz  $f_{0,1}$  in Abhängigkeit der Auslastung  $n_D$  zwischen der auftretenden Druckkraft  $D$  und der Eulerschen Knicklast  $D_{Euler,1}$  ermitteln:

$$u_f(n_D = \frac{D}{D_{Euler,1}}) = 1 - \sqrt{1 - n_D} \quad (5.8)$$

Der Abfall der Eigenfrequenzen  $u_f$  steigt mit zunehmenden Druckkräften  $D$  überproportional, sodass bei gleichgroßen Schritten der Laststeigerung stetig stärker sinkende Eigenfrequenzen messbar sind. Gleiche numerische Messabweichungen der Eigenfrequenzmessung in Bereichen mit einer geringen Auslastung der Eulerschen Knicklast  $\nu_D$  tragen demnach zu größeren Ungenauigkeiten der optimierten Normalkraft bei als in höher ausgelasteten Bereichen.

Neben der messtechnischen Ermittlung der Eigenfrequenz  $\omega_{ex,1}$  ist die Bestimmung der Eigenform  $\Psi_{ex,1}$  ein wesentlicher Bestandteil für den Erfolg der Systemidentifikation. Kapitel 5.1.4.5 untersucht anhand eines konkreten Beispiels die Auswirkungen von Messungenauigkeiten der durch eine Modalanalyse erfassten Eigenform auf die optimierten Systemparameter des Identifikationsverfahrens. Dabei werden unterschiedliche Lasten in den Grenzen von 10 kN bis 50 kN aufgebracht, die modalen Eigenschaften bestimmt, die Eigenformen manipuliert und diese Schwingungskennwerte dem Verfahren zur Systemidentifikation wieder zugeführt. Die in Tabelle 5.7 angegebenen Varianzkoeffizienten bestehen jeweils aus 50 Einzeluntersuchungen und stellen die prozentuale Standardabweichung hinsichtlich des optimierten Mittelwertes dar. Dabei zeigen sich zwischen der größten und kleinsten Normalkraftbeanspruchung  $D$  Erhöhungen der prozentualen Abweichung um den durchschnittlichen von Faktor 5,2. Verglichen zu den Laboruntersuchungen dieser Arbeit zeigt sich in Tabelle 5.19 eine in der Größenordnung vergleichbare Steigerung der durchschnittlichen Abweichungen zwischen dem Bereich mit der höchsten bzw. der niedrigsten Auslastung der Eulerschen Knicklast von einem Faktor 4,1.

Sowohl die numerische als auch die experimentellen Ergebnisse zeigen höhere Abweichungen in Bereichen mit niedrigem Lastniveau. Trotz dieser größeren Ungenauigkeiten sind die Abweichungen in diesen, der Eulerschen Knicklast entsprechend gering ausgelasteten Bereichen, für die reale Anwendung des Verfahrens in der Praxis mit geringeren negativen Konsequenzen verbunden. Die erreichten Genauigkeiten in höheren Lastniveaus von unter 10 % für 80 Belastungsversuche sind hinsichtlich der allgemeinen Toleranzen im Bauwesen geeignet, um das dargestellte Verfahren zur Systemidentifikation langfristig als Analyseverfahren in die Praxis zu etablieren.

### 5.3.2 Optimierung der Lagerungsbedingungen

Die experimentelle Bestimmung der Lagerungsbedingungen vorhandener Systeme ermöglicht die praxisnahe Auswertung der Stabilitätseigenschaften nach den für das reale Modell vorhandenen Randbedingungen. Dazu zählt allen voran die Ermittlung des Knicklängenbeiwerts als Basis für die Berechnung der Eulerschen Knicklast und der nach Norm aufnehmbaren Maximalbelastung. Grundlage zur Ermittlung des Knicklängenbeiwerts ist die experimentelle Bestimmung der Lagersteifigkeiten mit dem dynamischen Verfahren zur Systemidentifikation. Gemeinsam mit der Querschnittssteifigkeit  $EI$  und ursprünglichen Systemlänge  $L$  lässt sich anschließend mithilfe der Stabilitätsbeziehung aus Abschnitt 4.3 der Knicklängenbeiwert  $\beta$  berechnen. Im Folgenden werden die in Abschnitt 5.2.2.3 vorgestellten Ergebnisse der Lagersteifigkeiten näher diskutiert.

Die Auswertung der experimentellen Versuche zeigt in Abschnitt 5.3.1 eine Wechselwirkung zwischen der Höhe der einwirkenden Normalkraft  $D_{opt}$  und den Lagersteifigkeiten  $k_{opt}$ . Mit Blick auf die in der dynamischen Versuchsreihe optimierten Drehfedersteifigkeiten  $k_{opt,dyn}$  (s. Tabellen 5.16 und 5.17) lässt sich feststellen, dass die Steifigkeiten im Zuge einer steigenden Druckkraftbeanspruchung in der Regel ebenfalls ihren Wert erhöhen. Vor allem die Drehfedersteifigkeit  $k_{ri,opt,dyn}$  (Gelenkanschluss C1) vergrößert sich, prozentual betrachtet, besonders stark. Abbildung 5.29 stellt exemplarisch die optimierten Drehfedersteifigkeiten  $k_{ri,opt,dyn}$  und  $k_{rj,opt,dyn}$  des Prüfkörpers P3C2 dar. Neben den Federsteifigkeiten aus der dynamischen Analyse ist ebenfalls der Vergleichswert

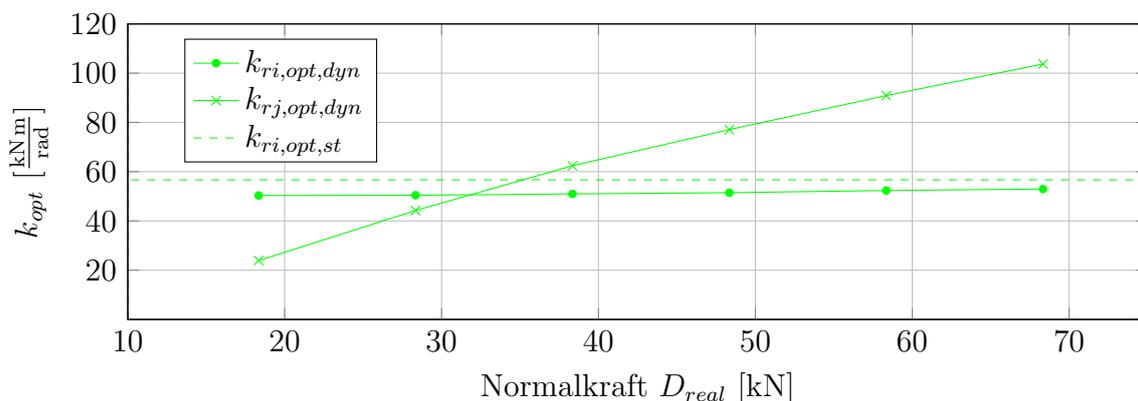


Abbildung 5.29: Federsteifigkeit  $k_{opt}$  in Abhängigkeit der Normalkraft  $D_{real}$  des Prüfkörpers P3C2

des oberen Auflagers für die statische Versuchsreihe  $k_{ri,opt,st}$  ohne Normalkraftbeanspruchung aufgetragen. Der Vergleichswert zum unteren Anschlusspunkt  $k_{rj,opt,st}$  ist 0 und nicht Teil der Abbildung. Während die Werte der Drehfedersteifigkeit  $k_{ri,opt,dyn}$  aus der dynamischen Analyse im Verlauf steigender Normalkräfte von  $50,3 \frac{\text{kNm}}{\text{rad}}$  und  $53,3 \frac{\text{kNm}}{\text{rad}}$  um lediglich 5,4 % kontinuierlich steigen, kommt es bei der Drehfedersteifigkeit  $k_{rj,opt,dyn}$  (Gelenkanschluss C1), verglichen zur Laststufe mit der geringsten Normalkraft (18,34 kN), zu einem deutlich steileren Anstieg von bis zu über 300 %.

Während der Gelenkanschluss C1 hinsichtlich der statischen Untersuchungen nach Tabelle 5.10 aus Abschnitt 5.2.1.2 für 19 von 25 verbauten Anschlüssen C1 als vollständiges und in den übrigen fünf Fällen weitestgehend als ideales Gelenk definiert werden kann, hat eine anstehende Normalkraftbeanspruchung  $D$  bei der dynamischen Versuchsreihe deutlich erkennbare Auswirkungen auf die Lagersteifigkeit  $k$  der Prüfkörper. Zur Erläuterung der steigenden Drehfedersteifigkeiten im Gelenkanschluss visualisiert Abbildung 5.30 den Anschlusstyp C1 unter Berücksichtigung der Schnittkräfte am Bolzenübergang. In der Detailansicht ist zu sehen, wie die Normalkraft  $D$  über eine abgerundete Kontaktfläche zwischen Bolzen und Bohrung innerhalb der Übergangskonstruktion übertragen wird. Hiermit entsteht durch den Anpressdruck eine Reibungskraft  $F_R$ , die der Bewegungskraft einer seitlichen Verdrehung des Stützensendes entgegen wirkt. Für die in dieser Arbeit vorgestellten Laborversuche können generell zwei Fälle unterschieden werden: (1) Gibt es keine relative Verdrehung des Bolzens in der Bohrung und bleibt die Verbindung starr bestehen, wird dies als Ruhe- oder Haftreibung bezeichnet. (2) Verdrehen sich beide Objekte relativ zu einander, wird von einer Gleitreibung gesprochen (Böge, 2011, S. 89).

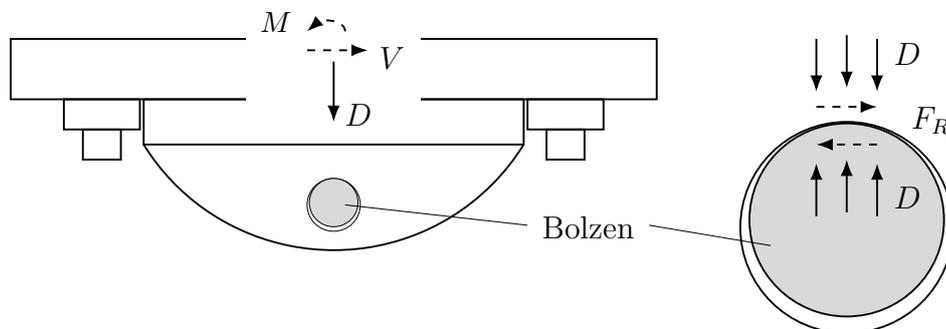


Abbildung 5.30: Darstellung von Reibungskräften im Gelenkanschluss C1

Um den Mechanismus der Gleitreibung zu aktivieren, muss dementsprechend zunächst die Haftreibung überwunden werden. Während bei den meisten Gelenkanschlüssen die Erhöhung der Gleitreibung deutlich erkennbar ist (Tabellen 5.16 und 5.17), existieren drei Prüfkörper (P1C2, P2C2 und P2C3), bei denen die Haftreibung des unteren Gelenkanschlusses durch die dynamische Anregung nicht überwunden wird und eine nahezu vollständige Einspannung vorliegt (vgl.  $k_{rj,opt}$ , Tabelle 5.17). Da dieser Effekt am unteren Auflager eine nicht vernachlässigbare Biegesteifigkeit des Gelenkanschlusses erzeugt und dadurch die Grundannahmen kontinuierlicher Querschnittssteifigkeiten aus Abschnitt 4.1.1.1 gefährdet, wird bei dem dynamischen Identifikationsverfahren dieser Prüfkörper auf den Messpunkt im Gelenk verzichtet.

Das statische und dynamische Identifikationsverfahren ermitteln jeweils auf Basis einer experimentellen Messung der Verformungsfigur bzw. der modalen Parameter vier unabhängige Federsteifigkeiten  $k_{opt}$ . Die im Basismodell verwendeten Wegfedersteifigkeiten  $k_t$  sind für das Erreichen genauer Ergebnisse der Optimierungsprozesse essenziell, werden jedoch in der weiteren Auswertung aufgrund der hohen Steifigkeiten nicht weiter besprochen. Auch die Drehfedersteifigkeiten  $k_r$  des Gelenkanschlusses C1 werden wegen der starken Abhängigkeit zur einwirkenden Normalkraft im Zuge einer Vergleichsauswertung zur statischen Systemidentifikation ausgeschlossen. Der Fokus dieses Abschnitts liegt in der Auswertung der Drehfedersteifigkeit  $k_{ri,opt}$ , für deren planmäßige Variation die unterschiedlichen Anschlusstypen und Stützenprofile gewählt werden. Anstelle des Vergleichs der reinen Zahlenwerte von  $k_{ri,opt}$  werden auf Basis dieser optimierten Federsteifigkeiten die Knicklängenbeiwerte  $\beta$ , als dimensionslose Systemeigenschaft, nach dem in Abbildung 5.31 dargestellten Modellansatz berechnet. Die Knicklängenbeiwerte aller Prüfkörper mit einem Anschlusstyp C2, C3 und C4 werden in die Analyse eingeschlossen und mit einer einheitlichen Systemlänge von 2,3975 m sowohl für die statische, als auch

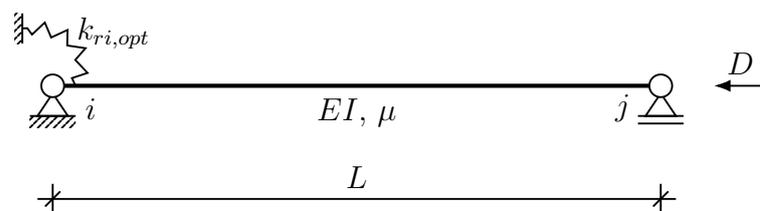


Abbildung 5.31: Angepasstes Modell zur Analyse des Knicklängenbeiwerts

die dynamische Versuchsreihe ermittelt (s. Abbildungen 5.13 und 5.5). Für die statische Versuchsreihe wird die optimierte Querschnittssteifigkeit  $EI_{opt}$  aus Tabelle 5.10 für die dynamische Versuchsreihe der theoretische Wert nach Tabelle 5.11 verwendet. Tabelle 5.20 enthält die zusammenfassende Auswertung aller berechneten Knicklängenbeiwerte, beginnend mit dem Knicklängenbeiwert  $\beta_{st}$  auf Basis der statisch ermittelten Drehfedersteifigkeit als Vergleichswert zu dem dynamisch optimierten Wert  $\beta_{dyn}$ . Neben den statischen Werten  $\beta_{st}$  werden die berechneten Knicklängenbeiwerte für die unterschiedlichen Laststufen der dynamischen Versuchsreihe  $\beta_{dyn}$  nicht individuell, sondern je Prüfkörper zusammenfassend unter verschiedenen Kriterien statistisch zusammengefasst. Dabei wird unter anderem der errechnete minimale bzw. maximale Knicklängenbeiwert  $\beta_{dyn,min}$  und  $\beta_{dyn,max}$ , inklusive der entsprechenden prozentualen Abweichungen  $\gamma_{\beta,min}$  und  $\gamma_{\beta,max}$ ,

Tabelle 5.20: Statistische Auswertung der statisch und dynamisch optimierten Knicklängenbeiwerte  $\beta$  anhand des Systemmodells nach Abbildung 5.31

Prüfkörper	$\beta_{st}$	$\beta_{dyn,min}$	$\gamma_{\beta,min}$	$\beta_{dyn,max}$	$\gamma_{\beta,max}$	$\gamma_{\beta,\emptyset}$	$\gamma_{\beta,s}$	
	[-]	[-]	[%]	[-]	[%]	[%]	[%]	
P1	C2	0,7632	0,7706	+0,97	0,7742	+1,44	1,29	0,19
	C3	0,7380	0,7366	-0,19	0,7386	+0,08	0,06	0,06
	C4	0,7175	0,7175	+0,01	0,7189	+0,19	0,13	0,07
P2	C2	0,8183	0,8356	+2,11	0,8561	+4,62	3,15	0,83
	C3	0,7688	0,7689	+0,07	0,7751	+0,83	0,41	0,25
	C4	0,7347	0,7239	-1,46	0,7247	-1,35	1,42	0,04
P3	C2	0,8389	0,8481	+1,10	0,8523	+1,60	1,39	0,18
	C3	0,7823	0,7814	-0,11	0,7851	+0,36	0,18	0,09
	C4	0,7425	0,7289	-1,83	0,7339	-1,16	1,57	0,24
P4	C2	0,9141	0,9368	+2,49	0,9432	+3,19	2,97	0,24
	C3	0,8285	0,8340	+0,67	0,8419	+1,61	1,05	0,31
	C4	0,7522	0,7320	-2,69	0,7514	-0,11	1,49	0,97
P5	C2	0,9355	0,9527	+1,84	0,9590	+2,51	2,21	0,26
	C3	0,8882	0,8684	-2,23	0,8863	-0,21	1,03	0,67
	C4	0,7907	0,7400	-6,41	0,7585	-4,07	5,09	0,81

gegenüber der statischen Versuchsreihe dargestellt. Ergänzend sind die durchschnittliche prozentuale Abweichung  $\gamma_{\beta,\emptyset}$  und die Standardabweichung  $\gamma_{\beta,s}$  aller Laststufen gegenüber der statischen Versuchsreihe angegeben. Die Knicklängenbeiwerte der dynamischen Untersuchungen  $\beta_{dyn}$  aller dargestellten Prüfkörper variieren zwischen einem Minimalwert von 0,7175 für P1C4 und einem maximalen Betrag von 0,9590 für P5C2. Auch die statische Versuchsreihe repräsentiert für diese Prüfkörper Extremwerte von 0,7175 (P1C4) und 0,9355 (P5C2). Die größte Abweichung zwischen der statischen und der dynamischen Versuchsreihe eines individuellen Belastungsversuchs ergibt sich für P5C4 mit einem Wert von  $-6,41\%$ . Wird der Fokus auf die durchschnittliche Abweichung  $\gamma_{\beta,\emptyset}$  je Prüfkörper gegenüber der statischen Vergleichswerte gelegt, schwankt diese zwischen  $0,06\%$  für P1C3 und  $5,09\%$  für P5C4. Der Mittelwert aus den gruppierten Abweichungen der 15 Prüfkörper beträgt  $1,56\%$  mit einer Standardabweichung von  $1,31\%$ .

Nachfolgend wird die Auswirkung der in Tabelle 5.20 angegebenen Differenzen zu den statischen Untersuchungen hinsichtlich der Eulerschen Knicklast analysiert. Grundlage der rechnerischen Auswertung ist die Einführung eines Faktors  $\gamma_{Euler}$ , der die Abweichung zwischen der Eulerschen Knicklast  $D_{Euler}$  und einer durch eine abweichende Knicklängenbestimmung manipulierten Eulerschen Knicklast  $D_{Euler+\gamma}$  abbildet:

$$D_{Euler+\gamma} = D_{Euler} \cdot (1 + \gamma_{Euler}) \quad (5.9)$$

Auf Basis der Eulerschen Knicklast ergibt sich (vgl. Vismann, 2018, S. 193):

$$D_{Euler+\gamma} = \frac{EI \cdot \pi^2}{(\beta \cdot L)^2} \cdot (1 + \gamma_{Euler}) \quad (5.10)$$

Die zuvor eingesetzte Definition von  $D_{Euler}$  wird auf  $D_{Euler+\gamma}$  erweitert:

$$\frac{EI \cdot \pi^2}{(\beta \cdot (1 + \gamma_{\beta}) \cdot L)^2} = \frac{EI \cdot \pi^2}{(\beta \cdot L)^2} \cdot (1 + \gamma_{Euler}) \quad (5.11)$$

Die anschließende Kürzung des Terms ergibt:

$$\frac{1}{(1 + \gamma_{\beta})^2} = 1 + \gamma_{Euler} \quad (5.12)$$

Die Auswirkung eines abweichenden Knicklängenbeiwerts auf die Eulersche Knicklast gegenüber einem Vergleichswert, in dieser Forschungsarbeit ermittelt aus der statischen Versuchsreihe, kann definiert werden zu:

$$\gamma_{Euler} = \frac{1}{(1 + \gamma_\beta)^2} - 1 \quad (5.13)$$

Die eindimensionale Funktion aus Gleichung 5.13 wird in Abbildung 5.32 grafisch ausgewertet. Abgebildet sind die Funktionswerte zwischen den Abweichungen des Knicklängenbeiwerts von  $-10\%$  bis  $+10\%$  gegenüber dem Vergleichswert. Für einen positiv unendlichen Wert von  $\gamma_\beta$  läuft der Graph gegen  $-100\%$  Abweichung der Knicklast gegenüber dem Vergleichswert, während die Kurve im negativen Bereich bis zu einem Wert  $\gamma_\beta$  von unter  $-100\%$  stetig steigt. Bei Ansatz des Mittelwerts der in Tabelle 5.20 dargestellten Prüfkörper von  $1,56\%$  ergibt sich die Abweichung der Eulerschen Knicklast von  $-3,05\%$  für eine positiv bzw.  $+3,19\%$  für eine negativ definierte Abweichung  $\gamma_\beta$

Es lässt sich zusammenfassen, dass der Knicklängenbeiwert  $\beta_{dyn}$  auf Basis der dynamischen Drehfedersteifigkeit  $k_{ri,dyn,opt}$  gut mit den Werten aus der statischen Versuchsreihe  $\beta_{st}$  übereinstimmt und den im Bauwesen üblichen Genauigkeiten entspricht. Da der Knicklängenbeiwert ein dimensionsloser Faktor ist, der durch unterschiedliche Kombinationen aus Querschnitts- und Federsteifigkeiten definiert werden kann und die Eigenform und Knickfigur näherungsweise gleich sind, ergibt sich eine zusätzliche Stabilität für seine experimentelle Ermittlung gegenüber abweichenden Systemannahmen.

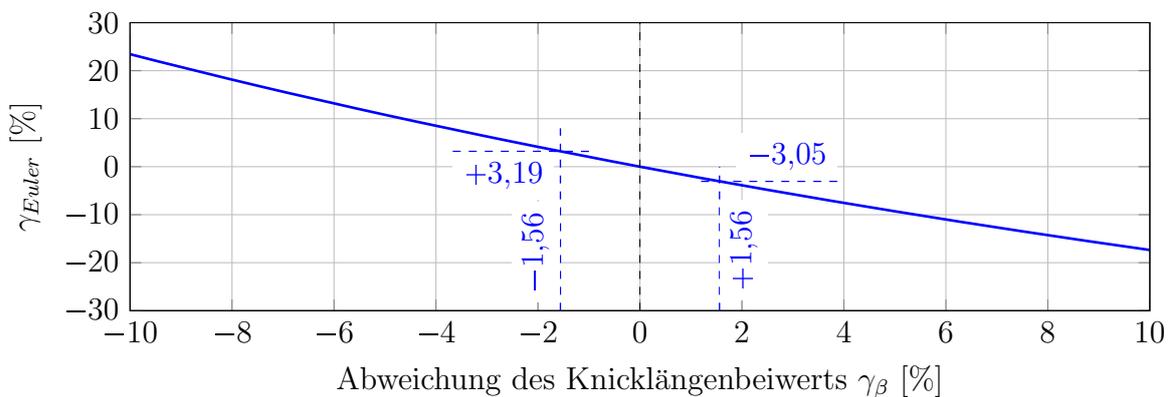


Abbildung 5.32: Abweichung  $\gamma_{Euler}$  in Abhängigkeit der Abweichung  $\gamma_\beta$

### 5.3.3 Einfluss der Normalkraft auf die Eigenfrequenzen

Im Zuge steigender Drucknormalkräfte kommt es der Theorie nach, aus einem nahezu linearen Zusammenhang zwischen der Normalkraft  $D$  und dem Eigenwert  $\omega_n^2$ , zu einem Fallen der Eigenfrequenz  $f_n$  (s. Abschnitt 4.1.1.4). Bei den Laborversuchen dieser Arbeit werden jedoch nur bei vereinzelt Prüfkörpern stetig fallende Frequenzen  $f_{ex,1}$  beobachtet (s. Abschnitt 5.2.2.2), da steigende Normalkräfte  $D$  mit einer gleichzeitigen Versteifung der Auflager einhergehen (s. Abschnitt 5.3.2). Der Einfluss steigender Normalkräfte und die Wirkung gleichzeitig versteifender Lager wirken für die Veränderung der Eigenfrequenz  $f_{ex,1}$  gegensätzlich, sodass die Frequenzen bei bestimmten Prüfkörpern im Lastverlauf sinken und bei anderen Proben steigen.

Um den Einfluss der Normalkraft  $D_{real}$  auf die Eigenfrequenzen  $f_{ex,1}$  sichtbar zu machen, werden für jede Untersuchung normalkraftfreie Frequenzen  $f_{ex,1,D=0}$  mit dem Softwareprogramm *DynamBasic* (s. Abschnitt 4.1.1.2) berechnet. Grundlage dafür sind die optimierten Lagersteifigkeiten nach Anhang C, die Querschnittssteifigkeiten  $EI$  und Massenverteilungen  $\mu$  nach Abschnitt 5.1.2.1 sowie die für die Systemidentifikation angesetzte Systemlänge  $L$ . Tabelle 5.21 stellt exemplarisch die Auswertung des theoretischen Frequenzabfalls für alle Laststufen des Prüfkörpers P3C3 bereit. Es werden die tatsächliche Last  $D_{real}$ , die aus den optimierten Randbedingungen berechnete Knicklast nach Euler  $D_{Euler}$  sowie die prozentuale Ausnutzung  $\nu_D$  von der tatsächlichen Last gegenüber der Eulerschen Knicklast angegeben. Letztere ist gleichbedeutend mit dem Abfall des

Tabelle 5.21: Auswertung der ersten Eigenfrequenzen des Prüfkörpers P3C2

LS	$D_{real}$ [kN]	$D_{Euler}$ [kN]	$\nu_D$ [%]	$f_{ex,1}$ [Hz]	$\omega_{ex,1}^2$ [ $\frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2}$ ]	$f_{ex,1,D=0}$ [Hz]	$\omega_{ex,1,D=0}^2$ [ $\frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2}$ ]	$u_f$ [%]
1	18,34	126,7	14,5	25,24	25 152	27,42	29 685	8,0
2	28,34	139,5	20,3	25,60	25 868	28,75	32 638	11,0
3	38,34	148,7	25,8	25,55	25 763	29,72	34 859	14,0
4	48,34	154,8	31,2	25,31	24 587	30,37	36 414	16,7
5	58,34	159,9	36,5	24,96	24 587	30,92	37 751	19,3
6	68,34	163,9	41,7	24,62	23 928	31,37	38 846	21,5

Tabelle 5.22: Maximaler Abfall der Eigenfrequenzen  $u_{f,max}$  [%] für jeden Prüfkörper

Stützenprofil	C1	C2	C3	C4
P1	22,8	21,5	26,3	27,9
P2	21,8	21,4	17,2	25,0
P3	25,6	21,5	23,3	20,8
P4	24,5	23,6	21,1	19,2
P5	23,4	23,5	19,1	14,6

Eigenwerts  $\omega_{ex,1}^2$ . Weiterhin angegeben sind die messtechnisch ermittelte Eigenfrequenz  $f_{ex,1}$  und das theoretisch berechnete Äquivalent ohne Normalkraftbeanspruchung  $f_{ex,1,D=0}$  sowie die entsprechenden Eigenwerte  $\omega_{ex,1,D=0}^2$ . Der prozentuale Frequenzabfall  $f_{ex,1}$  gegenüber  $f_{ex,1,D=0}$  wird mit  $u_f$  gekennzeichnet. Während der Lastzuwachs der Normalkraft von der ersten bis zur sechsten Laststufe 50 kN beträgt, steigern sich parallel die Eulerschen Knicklasten  $D_{Euler}$  um 37,2 kN auf einen maximalen Wert von 163,9 kN. Aufsteigend mit den Laststufen fallen die Frequenzen prozentual um einen maximalen Wert von 21,5 %. In Abschnitt 5.3.1 wird von einem zunehmend steileren Abfall der Frequenzen bei gleichbleibenden Laststufen gesprochen, der in Tabelle 5.21 nicht direkt zu erkennen ist. Während sich der Frequenzabfall von Laststufe LS 1 auf LS 2 um 3 % erhöht, beläuft sich der Zuwachs des prozentualen Abfalls von LS 5 auf LS 6 lediglich um 2,2 %. Grund dafür ist die Erhöhung der Eulerschen Knicklast, die wiederum einen geringeren prozentualen Lastabfall durch eine relative Verringerung des Lastniveaus zur Gesamtfolge hat.

Angelehnt an Tabelle 5.21 zeigt Tabelle 5.22 den für jeden Prüfkörper maximalen prozentualen Abfall  $u_{f,max}$  der Eigenfrequenzen  $f_{ex,1,D=0}$  im Zuge der einwirkenden Druckkraft  $D_{real}$ . Die maximalen Frequenzreduktionen schwanken zwischen 14,6 % und 27,9 %, wobei der größte Abfall bei dem Prüfkörper P1C4 festgestellt werden kann. Die messtechnisch ermittelte Eigenfrequenz  $f_{ex,1,D_{real}}$  beträgt dabei 20,79 Hz, während die theoretische Frequenz ohne Normalkrafteinwirkung  $f_{ex,1,D=0}$  bei 28,85 Hz liegt. Die Ergebnisse aus Tabelle 5.22 entsprechen, wie aus der Theorie bekannt (vgl. Abschnitt 4.1.1.4), einem nahezu linearen Abfall der Frequenzen  $f_n$  mit Bezug auf den Eigenwert  $\omega_n^2$  und den realen Druckbeanspruchungen  $D_{real}$  in Kombination mit den Knicklasten, ermittelt aus den optimierten Lagersteifigkeiten  $k_{opt}$  nach Anhang C.

## 5.4 Ergänzende Untersuchung mit einem elektrodynamischen Schwingungserreger

Für die messtechnische Ermittlung der modalen Parameter während der dynamischen Versuchsreihe wird ein Impulshammer verwendet. Voraussetzung für die Reliabilität der Ergebnisse des Identifikationsverfahrens ist ein lineares Verhalten zwischen der dynamischen Lasteinwirkung und Reaktion des angeregten Systems. Die Untersuchung mit einem elektrodynamischen Schwingungserreger ermöglicht im Gegensatz zu einem Impulshammer die Anregung fest definierter Lasten, sodass der Einfluss unterschiedlicher Lastamplituden auf die zu ermittelnden modalen Parameter geklärt werden kann.

Die ergänzende Untersuchung durch einen elektrodynamischen Schwingungserreger wird für die Laststufen LS 3 (38,34 kN) und LS 4 (78,34 kN) des Prüfkörper P3C4 durchgeführt. Der Versuchsstand aus Abschnitt 5.1.4.2 wird nach Abbildung 5.33 mit einem Schwingungserreger V406 der Firma Brüel & Kjær ergänzt. Dieser wird an der Stelle des Beschleunigungsaufnehmers BA-9 mit dem Prüfkörper verbunden, wodurch der Abstand zum Drehpunkt des unteren Gelenkanschluss C1 772,5 mm beträgt. Die dynamische Kraftanregung erfolgt über gekoppelte und durch den Prüfkörper geführter M4-Gewindestangen. Durch eine Verbindungsmutter zur Feinjustierung und einem Kraft-

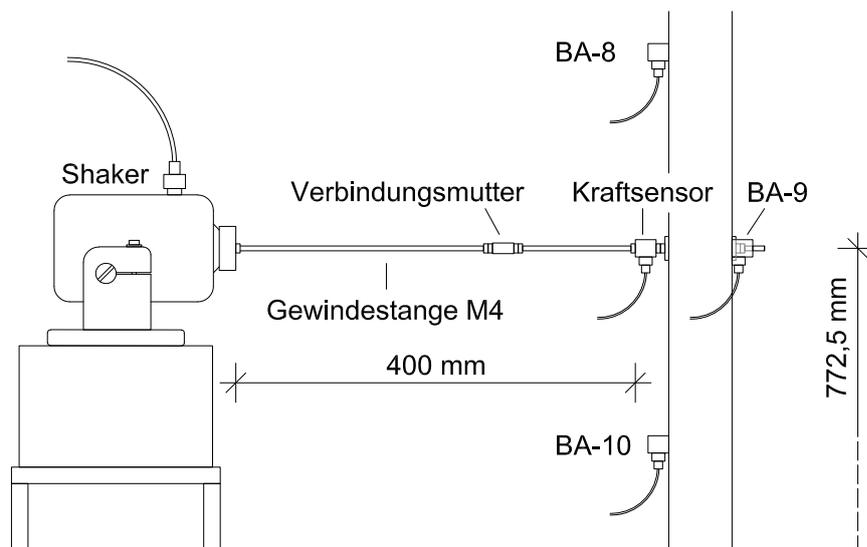


Abbildung 5.33: Versuchsaufbau mit elektrodynamischem Schwingungserreger

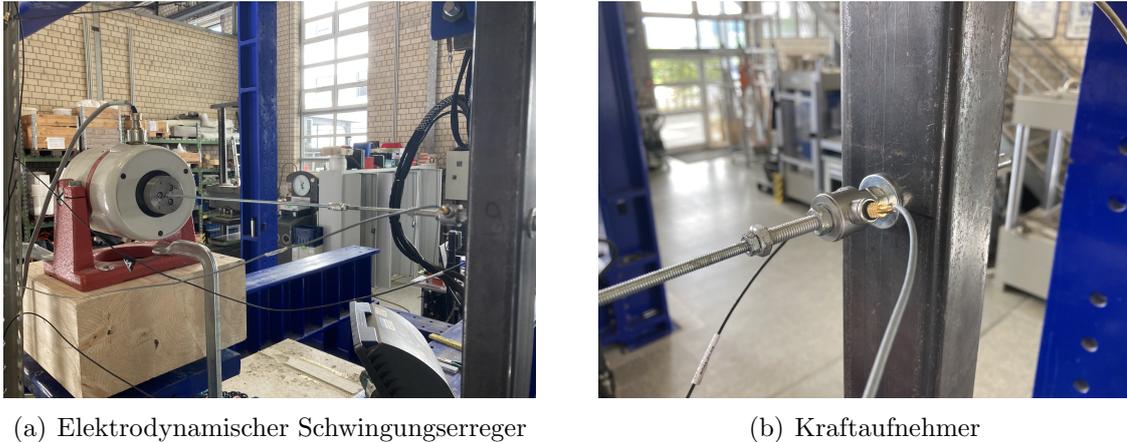


Abbildung 5.34: Ansichten Versuchsbau mit elektrodynamischem Schwingungserreger

aufnehmer zur Lastermittlung werden die Stangen aneinandergesetzt und kraftschlüssig von beiden Seiten mit dem Prüfkörper verbunden. Die messtechnische Ermittlung der einwirkenden dynamischen Anregung erfolgt durch einen Kraftaufnehmer des Typs 8230-001 (Brüel & Kjør) mit einer maximalen Kapazität von  $\pm 220$  N. Abbildung 5.34 zeigt Detailansichten des Schwingungserregers und der Lasteinleitungsstelle. Zur Anwendung des elektrodynamischen Schwingungserregers wird eine stufensinusförmige Anregung mit einer Startfrequenz von 22 Hz, einer Schrittweite von 0,025 Hz und einer Endfrequenz von 32 Hz gewählt. Es folgen sechs Messungen mit manuell gesteuerten Lastamplituden von 4 N bis 14 N in Abständen von 2 N. Zusätzlich zu den Untersuchungen mit dem elektrodynamischen Schwingungserreger wird der Prüfkörper im Anschluss ergänzend mit einem Impulshammer nach Abschnitt 5.2.2.2 untersucht.

Abbildungen 5.35 und 5.36 zeigen sämtliche messtechnisch ermittelten Übertragungsfunktionen der Stelle 8 (vgl. Abbildung 5.14 aus Abschnitt 5.1.4.2) für einwirkende Drucknormalkräfte  $D_{real}$  von 38,34 kN (LS 3) und 78,34 kN (LS 7). Die Auswertung der Übertragungsfunktionen ergibt höchst gemessene Eigenfrequenzen  $f_{ex,1}$  je Laststufe von 27,15 Hz (LS 3) bzw. 25,78 Hz (LS 7) bei einer jeweiligen Erregerlast von 4 N. Während die Amplituden der Übertragungsfunktionen nur geringfügige Änderungen aufzeigen, ist in beiden Abbildungen ein Abfall der Eigenfrequenzen im Zuge steigender Lastamplituden zu erkennen. Für eine Drucknormalkraft von 38,34 kN (LS 3) ergibt sich ein Gesamtfrequenzabfall von 0,18 Hz, für eine Last mit 78,34 kN (LS 7) von 0,35 Hz.

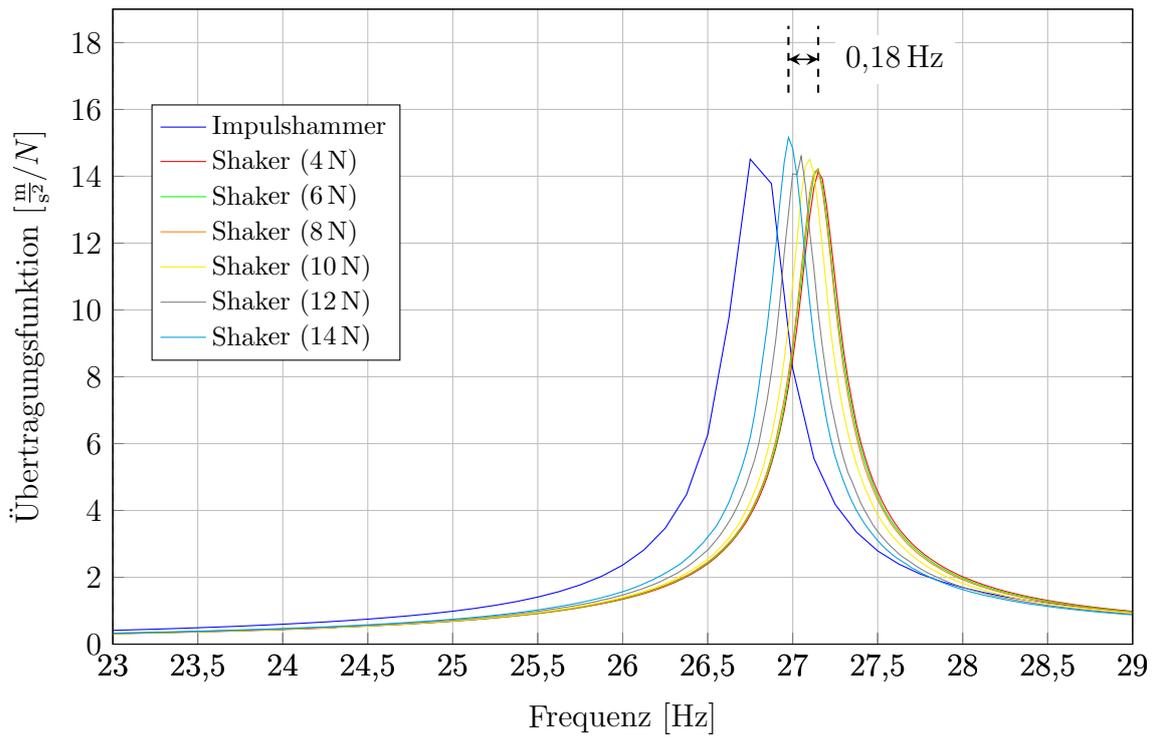


Abbildung 5.35: Übertragungsfunktionen an Stelle 8 (P3C4-LS 3)

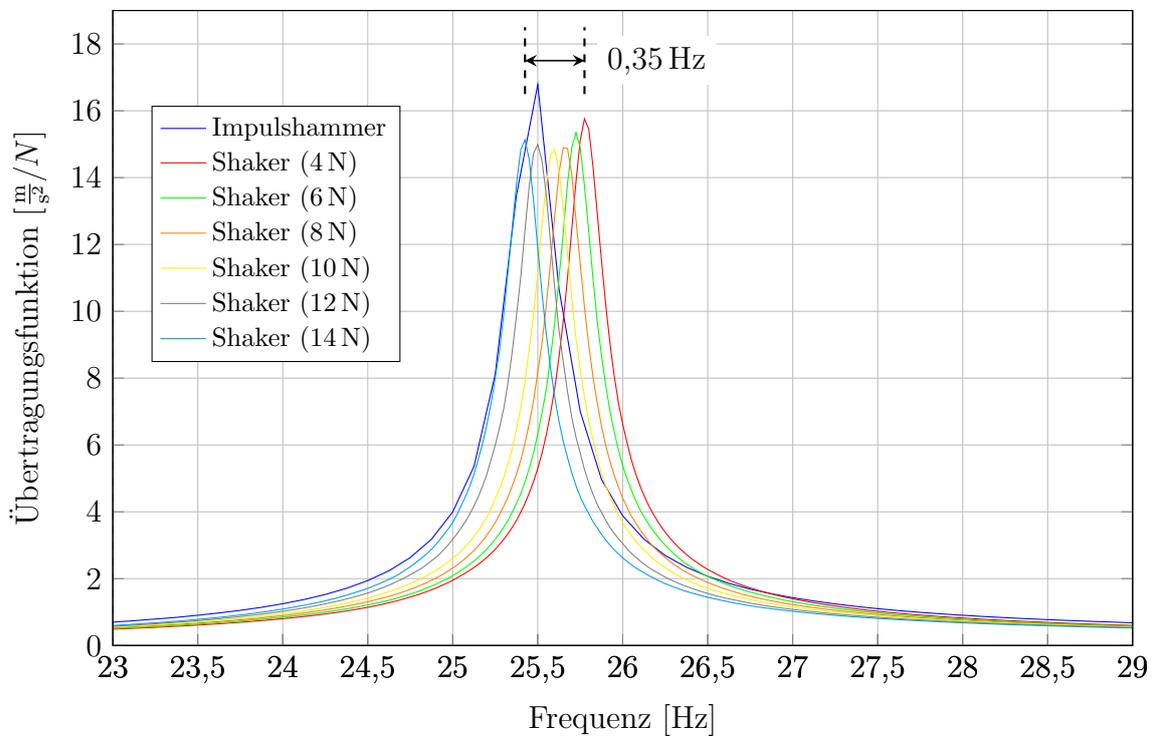


Abbildung 5.36: Übertragungsfunktionen an Stelle 8 (P3C4-LS 7)

Die Auswirkungen der aus den Abbildungen 5.35 und 5.36 extrahierten Varianzen der modalen Parameter auf die Optimierungsergebnisse werden im Folgenden ausgewertet. Nach Ermittlung der modalen Parameter erfolgt die Analyse der ersten Eigenfrequenz und Eigenform (Stellen 2 bis 13) mit dem dynamischen Verfahren zur Systemidentifikation (vgl. Abschnitt 5.1.4). Tabelle 5.23 listet neben Eigenfrequenzen  $f_{ex,1}$  die wesentlichen Ergebnisse des Identifikationsverfahrens. Neben den Werten des elektrodynamischen Schwingungserregers (S) sind die Vergleichswerte aus der modalen Analyse mit dem Impulshammer (H) gegeben. Bezogen auf die prozentualen Abweichungen zwischen den optimierten und realen Normalkräften  $\gamma_D$  belaufen sich die Varianzen innerhalb des Schwingungserregers (S) auf 10,37 % bis 9,68 % (LS 3) sowie 1,96 % bis 2,29 % (LS 7). Für Laststufe LS 3 fällt die Differenz der optimierten zur realen Normalkraft über alle Amplituden (A) des elektrodynamischen Schwingungserregers hinweg ab, während sich dieses

Tabelle 5.23: System- und Berechnungseigenschaften aus dem Optimierungsprozess

LS	$D_{real}$ [kN]	S/H	A [N]	$f_{ex,1}$ [Hz]	$D_{opt}$ [kN]	$\gamma_D$ [%]	$k_{ri,opt}$ [ $\frac{kNm}{rad}$ ]	$k_{rj,opt}$ [ $\frac{kNm}{rad}$ ]	$\beta$ [-]
3	38,34	S	4	27,15	42,32	10,37	405,3	10,56	0,6887
3	38,34	S	6	27,14	42,32	10,39	400,9	10,66	0,6887
3	38,34	S	8	27,14	42,19	10,03	397,7	10,63	0,6889
3	38,34	S	10	27,10	42,00	9,56	395,1	10,27	0,6901
3	38,34	S	12	27,03	41,88	9,24	393,5	9,73	0,6917
3	38,34	S	14	26,98	42,05	9,68	394,0	9,55	0,6922
3	38,34	H	-	26,79	42,62	11,17	399,6	8,74	0,6943
7	78,34	S	4	25,78	79,95	2,05	473,0	43,79	0,6230
7	78,34	S	6	25,72	80,11	2,26	472,4	43,53	0,6234
7	78,34	S	8	25,65	80,13	2,29	467,5	43,10	0,6241
7	78,34	S	10	25,59	79,98	2,09	463,5	42,44	0,6251
7	78,34	S	12	25,49	80,02	2,14	462,8	41,57	0,6263
7	78,34	S	14	25,42	79,88	1,96	460,8	40,78	0,6274
7	78,34	H	-	25,48	79,59	1,59	462,4	40,83	0,6273

Verhalten bei Laststufe LS 7 nicht einstellt. Tabelle 5.24 wertet die optimierten Kräfte  $D_{opt}$  aus allen Messungen des elektrodynamischen Schwingungserregers je Laststufe aus. Für eine Kraft von 38,34 kN (LS 3) ergibt sich eine über alle Lastamplituden gemittelte Drucknormalkraft  $D_{opt,\emptyset}$  von 36,11 kN mit einer Standardabweichung  $D_{opt,s}$  von 0,16 kN. Laststufe LS 7 zeigt einen entsprechenden Mittelwert von 68,58 kN und eine Standard-

Tabelle 5.24: Auswertung der optimierten Druckkraft  $D_{opt}$

LS	$D_{real}$ [kN]	$D_{opt,min}$ [kN]	$D_{opt,max}$ [kN]	$D_{opt,\emptyset}$ [kN]	$D_{opt,s}$ [kN]	$V_D$ [%]
3	38,34	41,88	42,32	36,11	0,16	0,4508
7	78,34	79,88	80,13	68,58	0,09	0,1386

abweichung von 0,09 kN. Unabhängig von der realen Lastbeanspruchung  $D_{real}$  und den darauf bezogenen Abweichungen ergibt sich ein Varianzkoeffizient  $V_D$  von 0,45 % (LS 3) bzw. 0,14 % (LS 7). In baupraktischen Zusammenhängen ist der beschriebene Einfluss einer wechselnden Erregeramplitude auf die Ergebnisse der optimierten Normalkräfte  $D_{opt}$  als vernachlässigbar einzustufen.

Bei den Auflagerbedingungen in Tabelle 5.23 ergeben sich im Zuge steigender Amplitudenlasten bis auf zwei Ausnahmen stetig fallende Drehfedersteifigkeiten  $k_{opt}$ . Tabelle 5.25 wertet die Ergebnisse des Schwingungserregers in Form des Knicklängenbeiwerts  $\beta$ , berechnet aus den vier optimierten Federsteifigkeiten  $k_{opt}$ , des Identifikationsverfahrens statistisch aus. Angegeben für die Messungen des Schwingungserregers sind unter anderem die

Tabelle 5.25: Auswertung des experimentellen Knicklängenbeiwerts  $\beta$

LS	$D_{real}$ [kN]	$\beta_{min}$ [-]	$\beta_{max}$ [-]	$\beta_{\emptyset}$ [-]	$\beta_s$ [-]	$V_{\beta}$ [%]
3	38,34	0,7238	0,7245	0,7242	0,0002	0,0345
7	78,34	0,7204	0,7209	0,7207	0,0002	0,0288

Mittelwerte  $\beta_{\emptyset}$  und Standardabweichungen  $\beta_s$ . Der Varianzkoeffizient  $V_{\beta}$  von maximal 0,035 % zeigt, dass der Einfluss unterschiedlicher Lastamplituden keine nennenswerte Auswirkung besitzt und die ermittelten Differenzen vernachlässigbar sind.

## **6 Phase III: Anwendung anhand einer realen Tragwerkskonstruktion**

Diese Forschungsarbeit entwickelt ein dynamisches Verfahren zur Systemidentifikation, das auf Basis der ersten modalen Eigenfrequenz und korrespondierenden Eigenform die Normalkraftbeanspruchung und die Lagersteifigkeiten eines druckbeanspruchten Stabs berechnet. Die ermittelten Parameter können anschließend für einen Stabilitätsnachweis herangezogen werden, um Tragreserven ausfindig zu machen. Nach der laborexperimentellen Validierung des Verfahrens in Phase II (s. Kapitel 5), erfolgt in Phase III die Anwendung der Methode unter Realbedingungen. Ziel der Untersuchung ist die Auswertung eines Druckstabs mit zu den Laborversuchen vergleichbaren Querschnitts- und Systemabmessungen aus Kapitel 5. Es werden beidseitig gelenkig idealisierte Druckstäbe untersucht und experimentelle Tragreserven definiert. Die Untersuchungen erfolgen auf dem Betriebsgelände eines nicht näher beschriebenen Industrieunternehmens. Abschnitt 6.1 beschreibt den Aufbau und das statische System der zu untersuchenden Stützen im sogenannten Kesselhaus und stellt die Messeinrichtung vor. Die Ergebnisse der Modalanalyse sowie die Resultate aus dem Optimierungsprozess des dynamischen Verfahrens zur Systemidentifikation werden in Abschnitt 6.2 erläutert. Abschnitt 6.3 wertet die Ergebnisse hinsichtlich ursprünglich unberücksichtigter Tragreserven aus.

### **6.1 Messobjekt**

Zur Erweiterung der Betriebsanlage eines Kesselhauses wurde vor längerer Zeit ein Sekundärtragwerk zur Durchführung eines Lüftungsrohrs installiert. Eine daran angeschlossene Reihe von fünf Stützen wird im Folgenden dynamisch untersucht und mit dem

Identifikationsverfahren analysiert. Die Stützen sind Teil einhüftiger Rahmen, welche auf der einen Seite auf einer Stahlbetondecke stehen und auf der anderen Seite an einer vorhandenen Mauerwerkswand befestigt sind (s. Abbildung 6.1). Die Haupttrag-elemente eines jeden Rahmens sind die 2,30 m hohe Quadratrohr-Stütze und der etwa 2,20 m lange horizontale HEB-Träger, der einseitig an das Mauerwerk und auf der anderen Seite auf der Stütze liegend angeschlossen ist. Detailansichten des oberen und unteren Stützenanschlusses können Abbildung 6.2 entnommen werden. Eine Konstruktionszeichnung mit wesentlichen Elemente und Maßangaben ist durch Abbildung 6.3 dargestellt. Der einhüftige Rahmen weist eine lichte Höhe von 2,31 m auf, wobei die Stützen des Profils QR 100 × 4mm (warmgefertigt) inklusive der 10 mm dicken Fuß- und Kopfplatten 2,30 m lang sind. Die lichte Breite des Durchgangs zwischen Mauerwerk und Stahlstützen beträgt 1,91 m. Die seitlich an eine Mauerwerkswand angeschlossenen horizontalen Träger (HEB 100) kragen auf der gegenüberliegenden Seite 16 cm über die Stütze aus.

Die Anwendung des in Abschnitt 4.1 dargestellten dynamischen Verfahrens zur Systemidentifikation gibt Aufschluss über die reale Normalkrafteinwirkung sowie die La-

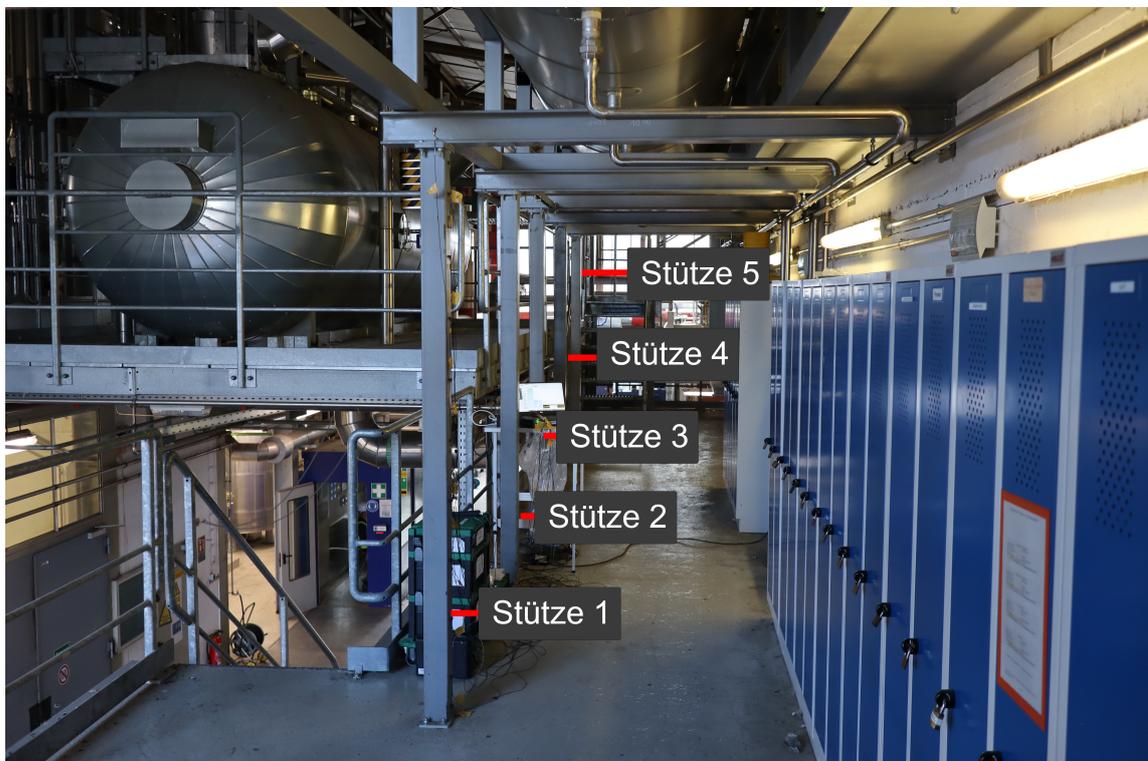
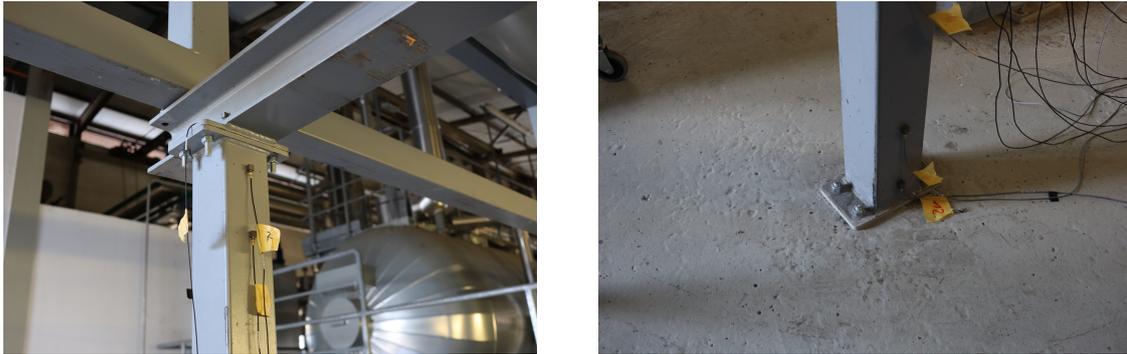


Abbildung 6.1: Stützenreihe zur Aufnahme der Lasten aus dem Lüftungsrohr



(a) Kopfpunkt

(b) Fußpunkt

Abbildung 6.2: Detailansichten der Stützenanschlüsse

gerungsbedingungen. Neben den allgemeinen Systemabmessungen, stellt Abbildung 6.3 ebenfalls die Geometrien des Kopf- und Fußanschlusses der Stütze bereit. Der untere Anschluss erfolgt über eine angeschweißte Fußplatte ( $d = 10 \text{ mm}$ ), die über eingeklebte Gewindestangen des Durchmessers  $12 \text{ mm}$  mit der vorhandenen Stahlbetonplatte verbunden ist. Der obere Anschluss ist mit vier Schrauben eines Durchmessers von  $12 \text{ mm}$  über eine angeschweißte Kopfplatte ( $d = 10 \text{ mm}$ ) mit einer ebenfalls an den HEB-Träger angeschweißten Platte ( $d = 10 \text{ mm}$ ) verbunden. Die Kopf- und Fußplatten, sowie die an den Querträgern angeschweißten Verbindungsplatten haben identische Geometrie- und Lochabmessungen. Die nicht näher definierte Verbindung des Querträgers zum Mauerwerk wird ebenfalls über einen Schraubenanschluss realisiert.

Die in Abbildung 6.3 dargestellte Tragkonstruktion wird durch ein Lüftungsrohr mit einem äußeren Durchmesser von  $1,20 \text{ m}$  sowie der entsprechenden Aufstellkonstruktion belastet. Mithilfe einer quer über den Rahmen verlaufenden Unterstützungskonstruktion werden die Lasten des Lüftungsrohrs an je zwei Stellen dem Querträger übergeben (vgl. Abbildung 6.1). Einseitig neben dem Rohraufbau existiert ein Laufsteg, der durch einen Bodenbelag und das angrenzende Gelände absturzsicher geschützt ist. Alle fünf Rahmen besitzen dieselben Abmessungen, Profilgrößen und Anschlussdetails. Über den Querträgern der Stützen 2, 4 und 5 existiert ein weiterer Träger zwischen den senkrechten Profilen des Abluftrohr-Ständerwerks, der nicht direkt auf dem HEB 100 aufliegt (vgl. Abbildung 6.1, Stütze 2). Die Systemabstände der Rahmen untereinander schwanken zwischen  $1,30 \text{ m}$  (Stütze 2/3),  $1,55 \text{ m}$  (Stütze 3/4 & 4/5) und  $2,02 \text{ m}$  (Stütze 1/2).

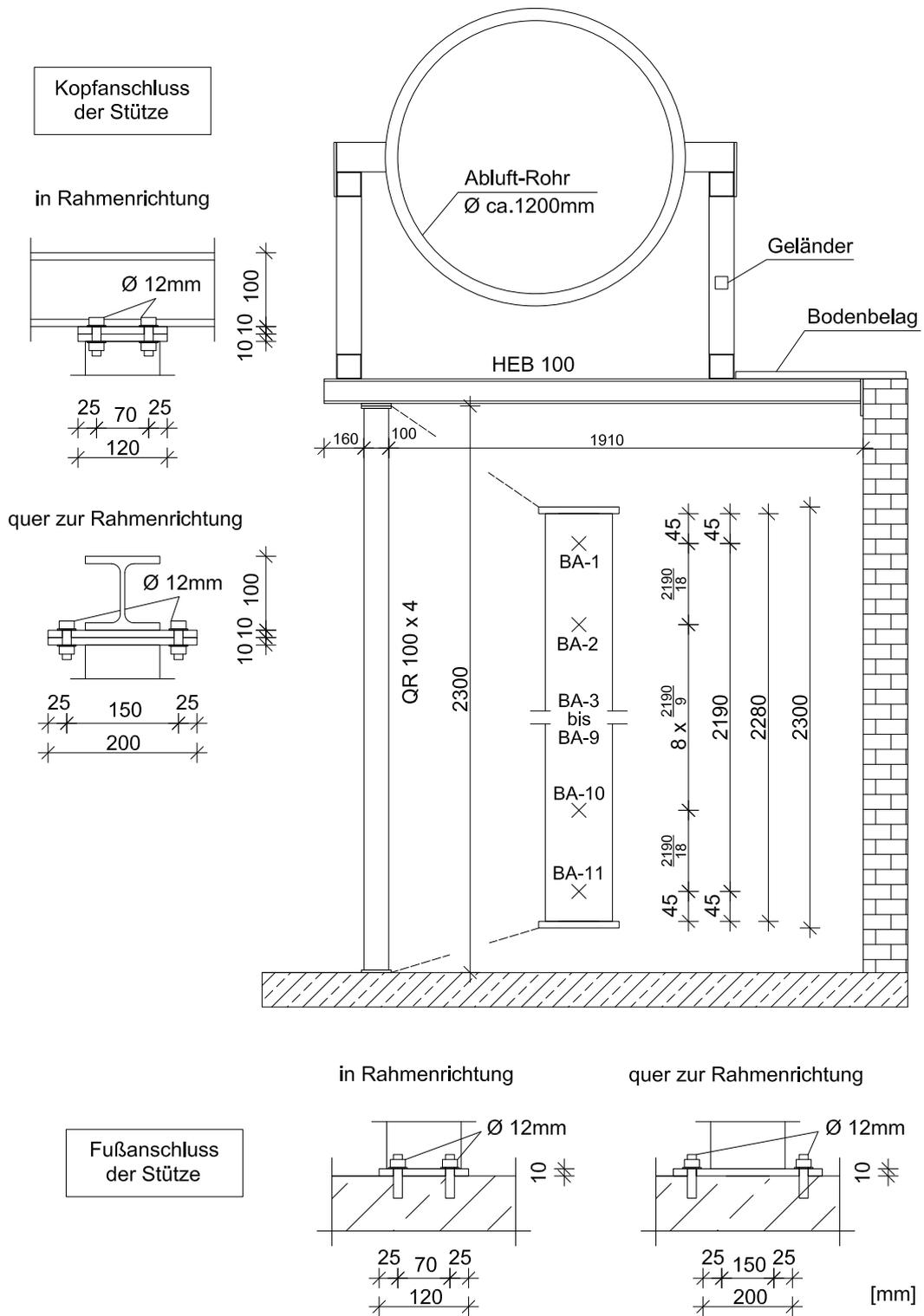


Abbildung 6.3: Konstruktionszeichnung der Lüftungsrohranlage im Kesselhaus

Für die Konkretisierung des Ziels dieser Untersuchung wird das in Abbildung 6.3 dargestellte Tragwerk in ein statisches Modell überführt. Abbildung 6.4 beschreibt zwei unterschiedliche Ansätze zur Berechnung der Stützen. Auf der linken Seite ist ein vereinfachtes statisches System dargestellt, welches die Grundlage der Berechnung des Sekundärtragwerks ohne genauere experimentelle Untersuchungen abbildet. Dabei werden die verwendeten Anschlüsse, hier in Rahmenrichtung abgebildet, als vollständig gelenkiger Übergang idealisiert. Gleiches gilt für die Berechnung der Stütze quer zur Rahmenrichtung. Durch den entsprechenden Knicklängenbeiwert  $\beta$  von 1,0 ergibt sich eine statische Ersatzlänge von 2,30 m. Es bleibt unberücksichtigt, dass die verwendeten Anschlüsse Teileinspannung erzeugen und eine vollständig freie Verdrehbarkeit nicht der Realität entspricht. Diese Art der Modellierung wird häufig als die sichere Seite verwendet, da mögliche Drehfedereinspannungen  $k$  negiert werden. Eine realistische Modellierung ist auf der rechten Seite von Abbildung 6.4 dargestellt. Die Stützenübergänge werden über zunächst unbekannte Dreh- und Wegfedersteifigkeiten an die Stahlbetondecke bzw. den Querträger angeschlossen. Bei dem Tragwerk handelt es sich durch den oberen horizontalen Anschluss in das Mauerwerk um einen unverschieblichen Rahmen.

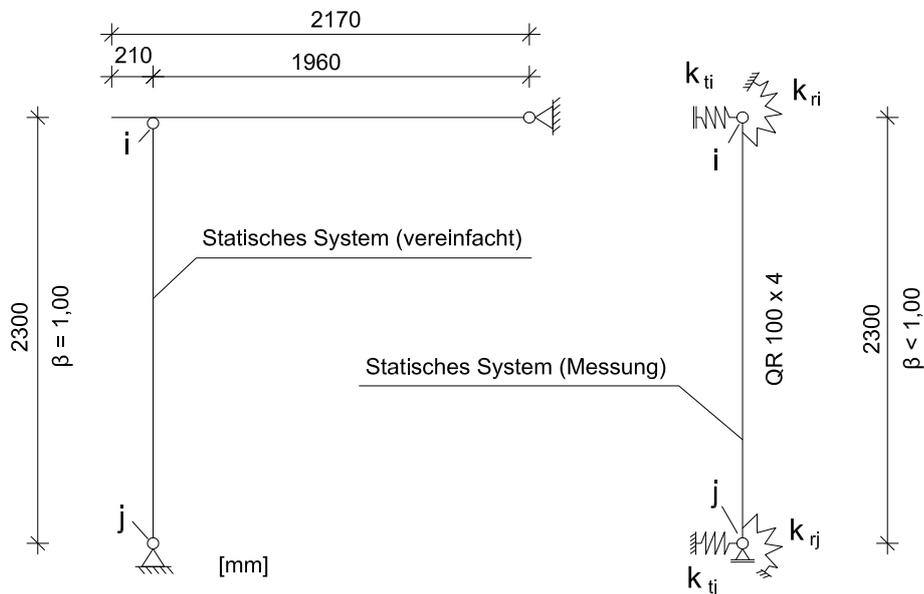


Abbildung 6.4: Statisches System der Lüftungsrohranlage im Kesselhaus

Die baodynamische Untersuchung der Stützen ermöglicht die Definition der Anschlussfedersteifigkeiten  $k$  sowie die Bestimmung von inneren Beanspruchungszuständen. Für das Verfahren zur Systemidentifikation werden die Eigenfrequenz  $\omega_{ex,1}$  und die Eigenform der ersten Mode  $\Psi_{ex,1}$  benötigt. Für die Ermittlung der modalen Parameter werden insgesamt elf Beschleunigungsaufnehmer des Typs DeltaTron 4507 B 002 (Brüel & Kjær) und der Impulshammer des Typs 8230-001 (Brüel & Kjær) verwendet. Zur Datenverarbeitung stehen die zwei Frontends des Typs 3160-A-042 bzw. 3053-B-120 und die Software *BK Connect* (Brüel & Kjær) zur Verfügung. Die Platzierung der Beschleunigungsaufnehmer kann Abbildung 6.3 entnommen werden. Der erste und letzte Sensor sind 45 mm von der jeweilig aufgeschweißten Platte entfernt (vgl. Abschnitt 5.1.4.2). Anschließend werden die übrigen Sensoren mit einem Abstand von 243 mm über die Stütze verteilt angeordnet, wobei die Sensoren BA-2 und BA-10 auflagernah den halben Abstand zu den letztplatzierten Sensoren aufweisen. Die dynamische Kraftanregung erfolgt durch den Impulshammer an den Stellen 8, 9 und 10. Die Übertragungsfunktionen werden aus zehn Hammerschlägen je Messstelle gemittelt und nach der Prüfung mit dem Programm *BK Connect* (Brüel & Kjær) hinsichtlich der Moden ausgewertet. Für die Anwendung des Identifikationsverfahrens wird die Systemlänge  $L$  über die Platzierung des ersten und letzten Messpunkts definiert und beträgt 2,19 m (vgl. Abschnitt 5.1.4.1). Die modalen Parameter werden sowohl für die Rahmenrichtung als auch quer dazu bestimmt, sodass je Stütze zwei Moden zur Auswertung verfügbar sind.

## 6.2 Ergebnisse

Nachfolgend werden die Ergebnisse aus der Modalanalyse sowie dem anschließenden Verfahren zur Systemidentifikation vorgestellt. Beginnend mit den dynamischen Eigenschaften stellt Abbildung 6.1 die gemessenen Eigenfrequenzen in Rahmenrichtung  $f_{ex,1,RR}$  und quer zur Rahmenrichtung  $f_{ex,1,qRR}$  aller Stützen bereit. Quer zur Rahmenrichtung ergeben sich Eigenfrequenzen  $f_{ex,1,qRR}$  zwischen 75,53 Hz (Stütze 1) und 76,17 Hz (Stütze 4). In Rahmenrichtung zeigen sich höhere Werte für die Eigenfrequenzen  $f_{ex,1,RR}$  von 90,24 Hz (Stütze 1) bis 106,35 Hz (Stütze 2). Abbildung 6.5 stellt exemplarisch die messtechnisch ermittelte Eigenform der Stütze 1 in und quer zur Rahmenrichtung dar. Während sich

Tabelle 6.1: Eigenfrequenzen  $f_{ex,1}$  [Hz] der Stützen im Kesselhaus

Stütze	$f_{ex,1,RR}$	$f_{ex,1,qRR}$
1	90,24	75,53
2	106,35	75,49
3	95,80	75,55
4	92,77	76,17
5	96,28	75,99

am Fußpunkt (Stelle 11 bei 2,19 m) geringfügige Wegverformungen ergeben, zeigt sich für die untere Auflagerverdrehung ein größerer Einspanneffekt quer zur Rahmenrichtung im Vergleich zu den Verkrümmungen in Rahmenrichtung. Am oberen Auflagerpunkt ergeben sich weichere Wegfedern als bei den, mit dem Stahlbeton deutlich steifer verbundenen, Fußpunkten.

Die modalen Parameter werden mit dem Programm *DynamOpti* zur Systemidentifikation analysiert (s. Abschnitt 4.1). Für die Anwendung des Verfahrens werden die tabellarischen Systemeigenschaften des QR 100 × 4mm herangezogen. Dabei beträgt die Massenbelegung  $11,9 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$ ; das Flächenträgheitsmoment wird für beide Achsen identisch mit  $231,8 \text{ cm}^4$  angesetzt. Tabelle 6.2 stellt die Ergebnisse der Systemidentifikation für alle fünf Stützen mit je zwei Querschnittsrichtungen bereit. Neben den optimierten Systemeigenschaften der Drucknormalkraft  $D_{opt}$ , den vier Federsteifigkeiten  $k_{opt}$  sowie den Optimierungseigenschaften der Fehlerabweichung  $f_{error}$  und der Anzahl der erforderlichen

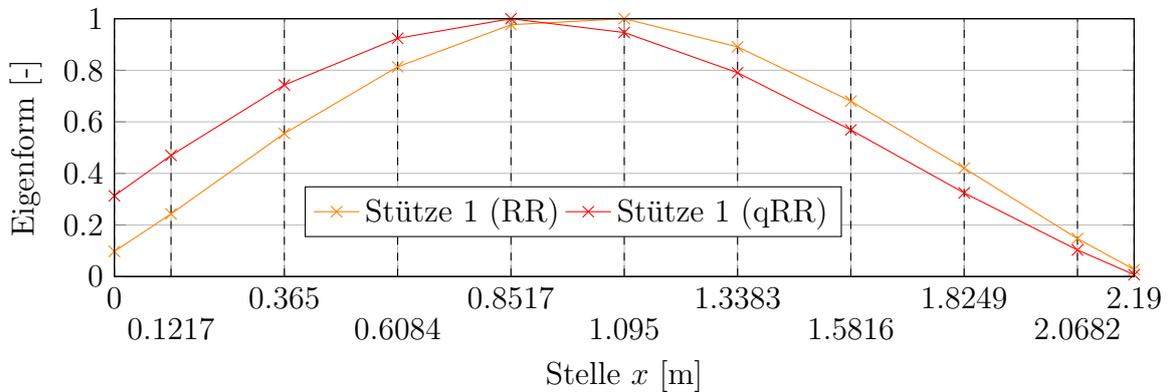


Abbildung 6.5: Eigenformen der ersten Mode von Stütze 1

Iterationsschritte  $n_{iter}$ , wird ebenso der Knicklängenbeiwert  $\beta$ , sowie die dazugehörige Eulersche Knicklast  $D_{Euler}$  gelistet. Die Ergebnisse der Drucknormalkräfte  $D_{opt}$  unterscheiden sich deutlich zwischen den Optimierungen in Rahmenrichtung und quer zur Rahmenrichtung. Während für vier von fünf Messungen in Rahmenrichtung die Drucknormalkraft  $D_{opt}$  zu 0 ermittelt wird, ergeben sich für die Messungen quer zur Rahmenrichtung Kräfte zwischen 272 kN und 406 kN. Einzig die Untersuchung von Stütze 3 weist in Rahmenrichtung eine geringere Drucknormalkraft von 50,16 kN auf.

Die Ergebnisse der optimierten Federsteifigkeiten  $k_{opt}$  werden, wie bereits für die labor-experimentellen Laborversuche aus Kapitel 5, in dimensionslose Knicklängenbeiwerte  $\beta$  zusammengefasst. Tabelle 6.2 präsentiert für alle Stützen in Rahmenrichtung geringere Knicklängenbeiwerte  $\beta$  verglichen zu den Werten quer zur Rahmenrichtung, wodurch ebenfalls höhere Eulersche Knicklasten in Rahmenrichtung resultieren. Der geringste experimentell ermittelte Wert  $\beta$  wird mit 0,6213 bei Stütze 2 erfasst. Der größte Knicklängenbeiwert  $\beta$  ergibt sich quer zur Rahmenrichtung mit 0,7397 für Stütze 1. Der geringste Wert liegt mit 0,7145 (Stütze 2) etwa auf einem ähnlichen Niveau zu dem Höchstwert für eine in Rahmenrichtung erreichte Messung mit 0,7138 (Stütze 1).

Tabelle 6.2: System- und Berechnungseigenschaften aus dem Optimierungsprozess

Stütze	$D_{opt}$ [kN]	$k_{ri,opt}$ [ $\frac{\text{kN m}}{\text{rad}}$ ]	$k_{rj,opt}$ [ $\frac{\text{kN m}}{\text{rad}}$ ]	$k_{ti,opt}$ [ $\frac{\text{kN}}{\text{m}}$ ]	$k_{tj,opt}$ [ $\frac{\text{kN}}{\text{m}}$ ]	$\beta$ [–]	$D_{Euler}$ [kN]	$f_{error}$ [–]	$n_{iter}$ [–]
1	0,00	371,6	1298	26285	83279	0,7138	1966	6,08e–5	737
2	0,00	1108	2453	50055	132038	0,6213	2595	6,24E–5	544
RR 3	50,16	542,8	2021	24576	182677	0,6692	2237	5,33E–5	1163
4	0,00	651,4	1061	29035	105438	0,6942	2079	5,71E–5	747
5	0,00	496,0	1985	26446	153918	0,6752	2198	8,43E–5	701
1	272,43	0,0	2287	6260	127454	0,7397	1831	1,46e–4	487
2	406,10	0,0	3837	5951	163990	0,7145	1963	1,42E–4	501
qRR 3	316,33	0,0	3155	5284	165953	0,7195	1935	2,07E–4	639
4	278,09	0,0	2396	6652	140965	0,7383	1838	1,91E–4	533
5	329,33	0,0	3227	5940	97132	0,7216	1924	1,77E–4	1101

### 6.3 Analyse und Diskussion

Nachfolgend werden die Ergebnisse des dynamischen Verfahrens zur Systemidentifikation diskutiert und für die Anwendbarkeit in der Praxis eingeordnet. Die Identifikation des inneren Kraftflusses von Tragelementen besitzt unterschiedliche Vorteile, wie die Früherkennung von Überlast oder das Offenlegen des realen Kraftflusses (s. Abschnitt 1.2). Dass eine sinnvolle Bestimmung von Zug- und Druckkräften ermöglicht werden kann, wird in unterschiedlichen Untersuchungen gezeigt (s. Abschnitt 2.1). Auch diese Abhandlung demonstriert anhand der laborexperimentellen Versuchsreihe (s. Kapitel 5) eine gute Übereinstimmung zwischen den tatsächlichen und den optimierten Druckkräften. Darüber hinaus zeigen die Laborergebnisse, dass die Abweichungen zwischen realer und optimierter Normalkraft umso kleiner werden, je näher die tatsächliche Last an der Eulerschen Knicklast liegt. Befindet sich die einwirkende Drucklast dagegen deutlich unterhalb der Eulerschen Knicklast, können größere Abweichungen resultieren (vgl. Abschnitt 5.3.1). Die Belastung der Stütze des in diesem Abschnitts vorgestellten einhüftigen Rahmens besteht überwiegend aus der Unterkonstruktion des Lüftungsrohrs und dem Eigengewicht des Rohrs selber. Da dieses ausschließlich mit Abluft und keinem anderen Medium gefüllt ist und die Last des angrenzenden begehbaren Bereichs überwiegend über das Mauerwerk abgetragen wird, ist die Ausnutzung der Stütze bei einer theoretischen Eulerschen Knicklast auf der ungünstigen Seite von 908,2 kN ( $\beta = 1,0$ ) als sehr gering einzuschätzen (<5%). Dadurch sind größere Abweichungen nicht auszuschließen, sodass die in Tabelle 6.2 dargestellten Ergebnisse für die optimierten Drucknormalkräfte nicht weitergehend diskutiert werden.

Der Fokus dieser Untersuchung liegt daher nicht auf der Ermittlung des inneren Kraftflusses, sondern auf der Bestimmung der Federsteifigkeiten  $k$  und des darauf aufbauenden Knicklängenbeiwerts  $\beta$ . Im Gegensatz zur Normalkraft  $D_{opt}$  zeigen die laborexperimentellen Untersuchungen aus Tabelle 6.2 für die optimierten Knicklängenbeiwerte über alle Kraftbereiche hinweg vergleichbare Werte. Beginnend mit der Auswertung der Drehfedersteifigkeiten  $k_{rj,opt}$  des unteren Anschlusspunkts lassen sich deutliche Differenzen zwischen den Werten in Rahmenrichtung und entgegen der Rahmenrichtung erkennen. Für das untere Auflager ergeben sich über alle fünf untersuchten Stützen hinweg größere Optimierungswerte quer zur Rahmenrichtung. Wird die Detailansicht des Fußpunkts aus

Abbildung 6.3 herangezogen, zeigt sich für den Systemabstand der Schraubenreihen in Rahmenrichtung ein Abstand von 70 mm und entgegen eine Distanz von 150 mm (vgl. Abbildung 6.3 (b)). Dies führt aufgrund des größeren geometrischen Hebelarms zu einer Erhöhung der Anschlusssteifigkeit, sodass die unterschiedlichen Differenzen in und quer zur Rahmenrichtung für  $k_{rj,opt}$  erwartbar sind.

Die Ergebnisse der optimierten Drehfedersteifigkeiten  $k_{ri,opt}$  des oberen Anschlusspunkts zeigen vertauschte Verhältnisse für die jeweiligen Werte in und quer zur Rahmenrichtung. Die größeren Drehfedersteifigkeiten  $k_{ri,opt}$  ergeben sich nach Tabelle 6.2, anders als am Fußpunkt, in Rahmenrichtung. Zwar ist der Anschluss mit den identischen Abmessungen des Schraubenbilds wie beim unteren Anschlusspunkt ausgeführt, jedoch führt die niedrige torsionale Steifigkeit des angrenzenden Querträgers (HE 100) zu einem starken Abfall der Drehfedersteifigkeiten  $k_{ri,opt}$ . Auch die Drehfedersteifigkeiten in Rahmenrichtung werden, anders als beim unteren Anschlusspunkt, reduziert. Dies erfolgt aufgrund der niedrigeren Biegesteifigkeit des HEB 100 verglichen zu der steifen Stahlbetondecke am unteren Anschlusspunkt. Die Wegfedersteifigkeiten  $k_{t,opt}$  liegen allgemein in einem hohen Bereich und werden an dieser Stelle nicht im Einzelnen diskutiert.

Die Dreh- und Wegfedersteifigkeiten  $k_{opt}$  lassen sich, wie in Tabelle 6.2 dargestellt, auch als dimensionsloser Knicklängenbeiwert  $\beta$  abbilden. Insgesamt führt dies für jede der fünf untersuchten Stützen zu geringeren Werten in Rahmenrichtung, verglichen zu der Betrachtung quer zur Rahmenrichtung. Der Knicklängenbeiwert  $\beta$  wird für die Ermittlung maßgebender Knicklasten im Stabilitätsfall herangezogen und ermöglicht Aussagen über vorhandene Lastreserven. Dazu wird der Nachweis nach DIN EN 1993 mit dem experimentell ermittelten Knicklängenbeiwert  $\beta$  aus Tabelle 6.2 mit einem vereinfacht statischen Nachweis und einem Beiwert  $\beta_{st} = 1,0$  verglichen (vgl. Abbildung 6.4). Tabelle 6.3 stellt die daraus folgenden Berechnungsergebnisse für alle untersuchten Stützen in und quer zur Rahmenrichtung bereit. Gelistet sind neben den Knicklängenbeiwerten  $\beta$  die Eulerschen Knicklasten der vereinfachten Berechnung  $D_{Euler,st}$  sowie die nach DIN EN 1993 ermittelten maximal aufnehmbaren Belastungen  $D_{EC3}$ , jeweils für das vereinfachte und messtechnisch erfasste System. Abschließend ergibt sich daraus eine Lastdifferenz zwischen dem statischen und dem experimentellen Ansatz, welche mit  $\gamma_{D,EC3}$  angegeben ist. Die in dieser Berechnung verwendete Systemlänge für die vereinfachte statische

Tabelle 6.3: Vergleich zwischen den experimentell ermittelten und rechnerisch angesetzten Knicklängenbeiwerten  $\beta$

Stütze	$\beta_{st}$	$D_{Euler,st}$	$D_{EC3,st}$	$\beta_{opt}$	$D_{Euler,dyn}$	$D_{EC3,opt}$	$\gamma_{D,EC3}$
	[–]	[kN]	[kN]	[–]	[kN]	[kN]	[%]
1				0,714	1966	306,9	+7,5
2				0,621	2595	311,7	+9,2
RR 3	1,000	908,2	285,4	0,669	2237	309,3	+8,4
4				0,694	2079	307,9	+7,9
5				0,675	2198	309,0	+8,3
1				0,740	1831	305,6	+7,1
2				0,715	1963	306,8	+7,5
nRR 3	1,000	908,2	285,4	0,720	1935	306,6	+7,4
4				0,738	1838	305,7	+7,1
5				0,722	1924	306,5	+7,4

Betrachtung ( $\beta_{st} = 1,0$ ) beträgt 2,30 m. Für die experimentellen Werte wird die ursprüngliche Länge von 2,30 m durch die Knicklängenbeiwerte nach Tabelle 6.2 reduziert (vgl. Abschnitt 4.3). Die vereinfacht statische Betrachtung führt zu einer maximal zulässigen Normalkraft  $D_{EC3,st}$  von 285,4 kN in beiden Querschnittsrichtungen. Werden die experimentellen Knicklängenbeiwerte  $\beta$  berücksichtigt, führen die angepassten Lasten  $D_{EC3,opt}$  allgemein zu einer Erhöhung der aufnehmbaren Normalkraft. Da die Knicklängenbeiwerte für die Richtung quer zum Rahmen stets größer und damit maßgebend für die Stabilitätsbewertung sind, ergibt sich für alle Stützen eine Steigerung der Belastungsgrenze von 7,1 % (Stütze 1 und 4) bis hin zu einer Steigerung von 7,5 % (Stütze 2). Die Eulersche Knicklast des rechnerischen Modells wird hingegen für alle Fälle um mehr als 100 % gesteigert.

Aufgrund des Nachweiskonzepts und der hier untersuchten gedrunenen Stützen kann die reine Steigerung der Eulerschen Knicklast begrenzt auf die maximale Tragfähigkeit übertragen werden. Auch wenn bei schlankeren Stabelementen eine stärkere Steigerung der maximal aufnehmbaren Last zu erwarten ist, wird bereits bei dieser Untersuchung eine Steigerung von durchschnittlich 20,8 kN (7,3 %) der Tragfähigkeit in der reinen Normal-

kraftbelastung ermöglicht. Die Anwendung des vorgestellten dynamischen Verfahrens zur Systemidentifikation zeigt anschaulich, dass mit experimentellen Untersuchungen rechnerische Lastreserven aufgedeckt werden können.

# 7 Schlussbemerkungen

Die Forschungsarbeit präsentiert die Entwicklung, Validierung und Anwendung eines dynamischen Verfahrens zur Systemidentifikation auf Basis der Modalanalyse. Eine inhaltliche Zusammenfassung der Ziele und Methoden dieser Abhandlung wird in Abschnitt 7.1 vorgestellt. Abschnitt 7.2 präsentiert die wesentlichen Erkenntnisse dieser Arbeit bezüglich der in Abschnitt 1.4 aufgestellten Arbeitshypothesen (Abschnitt 3.1). Anschließend wird eine Anwendungsempfehlung für die Vorgehensweise an einem realen Tragwerk in Abschnitt 7.3 aufgezeigt. Hinweise und Vorschläge für zukünftige Forschungsarbeiten sind in Abschnitt 7.4 zu finden.

## 7.1 Zusammenfassung

Die langfristig effiziente Nutzung vorhandener Bausubstanz ist ein wichtiger Mechanismus im Kampf gegen den Klimawandel. Das Bauwesen trägt zu einem erheblichen Teil zu den weltweiten Treibhausgasen bei und steht in einer verantwortlichen Rolle, einen geeigneten Beitrag zum Klimaschutz zu leisten. Dazu gehört nicht nur die energetische Sanierung vorhandener Bausubstanz, sondern ebenso die Entwicklung geeigneter Bewertungs- und Analyseverfahren von Tragelementen. Vor allem bei einer Umnutzung und anstehenden Umbauten müssen Bestandstragwerke oftmals größere Lasten aufnehmen als in der ursprünglichen Kalkulation vorgesehen. Die statischen Berechnungen vorhandener Bausubstanz beinhalten, neben den normgebundenen Sicherheiten, durch ingenieurmäßige Systemidealisationen Tragreserven unklarer Größenordnung. Die Kenntnisse über experimentell ermittelte Einwirkungen und Steifigkeitsverhältnisse können unterstützen, diese Tragreserven auf Basis einer experimentellen Messung zu erkennen und für eine Nachweisführung heranzuziehen.

Diese Arbeit leistet einen Beitrag, indem ein dynamisches Verfahren zur Systemidentifikation auf Basis der experimentellen Ermittlung der Eigenkreisfrequenz und Eigenform von Druckstäben entwickelt wird. Das Verfahren ermöglicht die Bestimmung von während der Messung vorhandenen Druckkräften und Lagersteifigkeiten. Auf Basis der Ergebnisse des Identifikationsverfahrens werden langfristig Stabilitätsnachweise mit realen Lastbeanspruchungen und tatsächlichen Knicklängenbeiwerten ermöglicht. Ziel der Forschungsarbeit ist es, die Genauigkeit des vorgestellten Verfahrens zu validieren und Aussagen über die tatsächliche Anwendbarkeit der Methode in der Baupraxis zu ermöglichen.

Nachdem zu Beginn der Arbeit die Forschungsfragen hergeleitet werden (Kapitel 1), erfolgt eine ausführliche Beschreibung des Stands der Wissenschaft mit gängigen Verfahren zur Identifikation von Normalkräften und Lagersteifigkeiten in Stabsystemen mit überwiegend axialer Lastbeanspruchungen (Kapitel 2). Nach den bisherigen Erkenntnissen werden die Arbeitshypothesen in Abschnitt 3.1 abgeleitet. Abschnitt 3.2 fasst die drei Hauptphasen der Arbeit I bis III, bestehend aus der theoretischen Entwicklung, der experimentellen Validierung und der realen Anwendung des dynamischen Verfahrens zur Systemidentifikation zusammen. Nachdem Grundkenntnisse der mathematischen Optimierung sowie der theoretischen und experimentellen Modalanalyse aufgezeigt werden (Abschnitt 3.3 und 3.4), startet Phase I die theoretische Entwicklung des dynamischen Identifikationsverfahrens (Kapitel 4). Grundlage des eigens entwickelten Programms *DynamOpti* ist ein Euler-Bernoulli-Balken mit Normalkraftbeanspruchung. Die Lagerungsbedingungen werden durch vier unabhängige Dreh- und Wegfedern an beiden Stabenden realisiert. Auf Basis der experimentell ermittelten Eigenkreisfrequenz und Eigenform der ersten Mode optimiert ein Partikelschwarmalgorithmus das Grundmodell des Euler-Bernoulli-Stabs bis ein bestmögliches digitales Ebenbild entsteht. Während die Normalkraft in späteren Laborversuchen mit einer Kraftmessdose validiert wird, sind weitere Untersuchungen erforderlich, um auch die Lagerungsbedingungen mit Vergleichswerten analysieren zu können. Daher wird in Phase I zusätzlich ein statisches Verfahren zur Systemidentifikation entwickelt und in das Programm *StaticOpti* überführt. Auf Basis einer experimentell ermittelten Verformungsfigur werden hiermit Vergleichswerte für die bereits aus der dynamischen Untersuchung bekannten Lagerungsbedingungen und die theoretisch angesetzten Querschnittssteifigkeiten ermittelt.

Im Anschluss an die theoretische Entwicklung und Programmierung des dynamischen und statischen Verfahrens zur Systemidentifikation, werden diese in Phase II labor-experimentell ausgewertet (Kapitel 5). Der entwickelte Versuchsstand ermöglicht den Einbau von Stützenprofilen in einem vorhandenen Prüfrahmen. Für die Durchführung der statischen und dynamischen Versuchsreihen werden Stützenprofile senkrecht in den Prüfrahmen eingebaut und mithilfe unterschiedlicher Lagerungsarten mit den Querträgern des Rahmens verbunden. Das untere Auflager wird durch eine Bolzenverbindung dauerhaft gelenkig ausgebildet. Über eine vertikal frei verschiebliche Führungskonstruktion wird die Lasteinleitung unterhalb des gelenkig angeschlossenen Prüfkörpers ermöglicht. Für den Stützenkopf stehen ein Gelenkanschluss sowie drei Anschlussprofile unterschiedlicher Biegesteifigkeiten zur Verfügung. Die fünf untersuchten Stützenprofile, jeweils kombiniert mit den vier verfügbaren oberen Anschlusstypen, ergeben insgesamt 20 Prüfkörper mit rechnerischen Systemlängen von 2,3975 m und 2,5450 m. Jede Probe wird zunächst statisch einer Querlast und anschließend dynamisch mit verschiedenen Normalkräften untersucht. Über alle Prüfkörper und Laststufen hinweg werden für die dynamischen Untersuchungen 117 Belastungsversuche mit Normalkraftbeanspruchungen zwischen 8,36 kN und 178,29 kN durchgeführt bzw. analysiert. Im Zuge der dynamischen Versuchsreihe werden Prüfkörper durch einen manuell gesteuerten Hydraulikzylinder stufenweise belastet und mit einem Impulshammer untersucht. Dabei werden 11 bis 13 über den Prüfkörper gleichmäßig verteilte Messstellen für die Modalanalyse und anschließende Systemidentifikation herangezogen. Die modalen Eigenschaften werden in der 20 Prüfkörper umfassenden laborexperimentellen dynamischen Versuchsreihe anhand eines Impulshammers ermittelt. In einer ergänzenden Untersuchung werden zwei Beanspruchungszustände eines bestimmten Prüfkörpers zusätzlich mit einem elektrodynamischen Schwingungserreger untersucht. Dadurch wird der Einfluss einer wechselnden Lastamplitude auf die Ergebnisse der Systemidentifikation geklärt. Insgesamt sechs unterschiedliche Anregungsamplituden werden für die jeweiligen Normalkraftzustände herangezogen.

Abschließend wird das dynamische Verfahren zur Systemidentifikation an einer realen Konstruktion in Phase III angewendet (Kapitel 6). Untersucht werden fünf Stützen auf dem Betriebsgelände eines Industrieunternehmens mit einer Länge von etwa 2,30 m. Die fünf identischen Stützen dienen zur Abstützung eines Lüftungsrohrs und dem da-

zugehörigen angrenzenden Laufsteg. In einer einfachen Modellidealisation werden sie als beidseitig gelenkige Pendelstäbe abgebildet. Die Anwendung des hier vorgestellten Verfahrens hat die Aufgabe, experimentelle Knicklängenbeiwerte zu ermitteln und Lastreserven durch Übergangsstifigkeiten aufzuzeigen.

Die experimentelle Bestimmung von inneren Normalkraftzuständen sowie die Klärung von realen Lagerungsbedingungen ist ein wichtiger Meilenstein, die ingenieurmäßigen Berechnungen und Annahmen mit den realen Konstruktionen abzugleichen. Unklarheiten innerhalb einer statischen Berechnung werden üblicherweise mit Modellidealisationen auf der sicheren Seite kompensiert. Die Anwendung des in dieser Arbeit vorgestellten dynamischen Verfahrens zur Systemidentifikation bietet das Potential, Kraftflüsse innerhalb des Tragwerks zu klären, Tragreserven ausfindig zu machen, statische Berechnungen zu validieren und Überlasten zu erkennen bevor sie entstehen. Während heutige Belastungsversuche von Stahlbetondecken häufig schweres Gerät und einen hohen Planungsaufwand erfordern, ist mit der dynamischen Auswertung der Eigenkreisfrequenz und Eigenform eine effiziente und zerstörungsfreie Analyse des Baubestands möglich. Alternative Verfahren zur Ermittlung innerer Belastungszustände müssen häufig bereits in der Planungsphase berücksichtigt werden. Das vorgestellte Verfahren ermöglicht auch im belasteten Zustand eine Erfassung der realen Beanspruchungen. Darüber hinaus stellt diese Forschungsarbeit neben den dynamischen, ein zusätzliches statisches Verfahren zur Systemidentifikation vor, sodass die dynamischen Ergebnisse hinsichtlich der Knicklängenbeiwerte an konkreten Zahlenwerten validiert werden.

Dynamische Identifikationsprozesse werden für druckbeanspruchte Bauteile häufig mithilfe kurzer Probekörper mit geringen Profilabmessungen und niedrigen Gesamtlasten untersucht. Das Besondere dieser Arbeit ist die Validierung des Verfahrens durch Prüfobjekte realistischer Stützenmaße und Normalkraftzustände. Dadurch können direkte Aussagen für die praktische Anwendung an realen Bauwerkskonstruktionen abgeleitet werden ohne die Einschränkung von Skalierbarkeit rechtfertigen zu müssen.

Die Forschungsarbeit stellt eine innovative Methode zur Systemidentifikation unbekannter Tragwerkszustände vor. Sie ist aufgrund der erzielten Genauigkeit hinsichtlich Bestimmung von Normalkräften und Lagerstifigkeiten als Teil zukünftiger Bauwerksanalyse im Bestand weiter zu vertiefen, stärker laborexperimentell zu validieren und

langfristig in der Bauwerksanalyse einzusetzen. Dynamische Bewertungsmethoden sind schnell, zerstörungsfrei und auch für Monitoringsysteme geeignet. Aufgrund der stark steigenden Leistungsfähigkeit technischer Einrichtungen sind Optimierungsprozesse zur Systemidentifikation auf Basis der Modalanalyse als wesentlicher Bestandteil moderner und innovativer Analyseverfahren zu verstehen.

## 7.2 Fazit

Diese Forschungsarbeit präsentiert ein dynamisches Verfahren zur Systemidentifikation zur experimentellen Ermittlung der Normalkraft  $D$  und der Lagersteifigkeiten  $k$  von Druckstäben aus Stahl. Das Verfahren auf Basis der ersten Eigenkreisfrequenz  $\omega_{ex,1}$  und Eigenform  $\Psi_{ex,1}$  wird laborexperimentell anhand von 117 Belastungsversuchen validiert. Die aus den Forschungsfragen (s. Abschnitt 1.4) entwickelten Forschungshypothesen aus Abschnitt 3.1 werden im Zuge der Arbeit beantwortet, um die Genauigkeit der optimierten Systemeigenschaften zu bestimmen und ihre Reliabilität für die praktische Anwendung zu klären.

Die optimierten Normalkraftbeanspruchungen  $D_{opt}$  aus dem dynamischen Identifikationsverfahren aus Abschnitt 5.2.2.3 werden in Abschnitt 5.3.1 analysiert. 59 (50,4 %) der insgesamt 117 Belastungsversuche weisen eine Abweichung von unter 10 % zwischen der realen und optimierten Normalkraft auf. 38 Versuche zeigen Abweichungen von unter 5,0 %, wobei die geringste Differenz aller Versuche einen Wert von 0,1 % demonstriert. Je näher die tatsächliche Last an der Eulerschen Knicklast des Prüfkörpers liegt, desto niedriger werden die messbaren Differenzen. Für Prüfkörper mit einer besonders starken Auslastung der Eulerschen Knicklast zwischen 40 % und 45 % (11 Prüfungen) können die Abweichungen auf eine durchschnittliche Differenz von bis zu 5,4 % mit einer Standardabweichung von 2,9 % reduziert werden.

Für die Auswertung der optimierten Lagerungsbedingungen werden die Federsteifigkeiten  $k_{opt}$  nach Abschnitt 5.3.2, sowohl aus der statischen Vergleichsuntersuchung als auch für die dynamische Prüfung, in dimensionslose Knicklängenbeiwerte  $\beta$  überführt. Dazu werden ausschließlich die oberen Drehfedersteifigkeiten der Profilanschlüsse  $k_{opt,kri}$  in die Analyse eingeschlossen. Abschnitt 5.3.2 stellt die Abweichungen zwischen den optimier-

ten dynamischen und statischen Knicklängenbeiwerten der 15 Prüfkörper und 94 Beanspruchungszustände bereit. Eine statistische Auswertung, zusammenfassend für alle Belastungsstufen je Prüfkörper, ergibt eine gruppierte durchschnittliche Abweichung von minimal 0,06 % und maximal 5,09 % gegenüber dem statischen Vergleichswert. Über alle Prüfkörper hinweg wird eine mittlere Abweichung von  $\pm 1,56$  % erreicht. Auf Basis dieses Werts beläuft sich die Differenz der Eulerschen Knicklast auf  $-3,05$  % bis  $+3,19$  %. Die ermittelten Abweichungen des Knicklängenbeiwerts aus der dynamischen Versuchsreihe sind über alle Laststufen hinweg im Verhältnis zu den Sicherheitsbeiwerten des Bauwesens als unbedenklich einzustufen.

Während der Normalkrafteinfluss nach dem theoretischen Modell aus Abschnitt 4.1.1.4 einen Abfall der Eigenfrequenzen  $f_n$  zur Folge hat, werden im Verlauf der experimentellen Versuchsreihe häufig steigende Frequenzen  $f_{ex,1}$  beobachtet (Abschnitt 5.2.2.2). Grund dafür ist die Erhöhung der Lagersteifigkeiten, vorwiegend in den Gelenkanschlüssen, im Zuge real steigender Druckkräfte  $D_{real}$  (Abschnitt 5.3.2). Nach einer rechnerischen Isolierung und dem Ausschluss der optimierten Normalkräfte  $D_{opt}$  werden über alle 20 Prüfkörper hinweg bei den jeweils höchsten Laststufen Frequenzabfälle von mindestens 14,6 % und höchstens 27,9 % festgestellt (Abschnitt 5.3.3).

Das Ziel von Abschnitt 5.4 ist es, eine mögliche Abhängigkeit zwischen der Anregkraft der dynamischen Untersuchung und den Ergebnissen der Modalanalyse bzw. denen des dynamischen Verfahrens zur Systemidentifikation zu klären. Die Ergebnisse zweier Beanspruchungszustände eines exemplarischen Prüfkörpers ergeben über alle sechs untersuchten Lastamplituden hinweg maximale Abweichungen bei den optimierten Normalkräften  $D_{opt}$  von 0,45 % und bei den aus der Optimierung errechneten Knicklängenbeiwerten  $\beta$  von 0,035 %. Die ermittelten Differenzen der optimierten Parameter zu den Vergleichswerten sind für die ingenieurmäßige Anwendung als unbedenklich einzuordnen.

Kapitel 6 stellt die praktische Anwendung des in dieser Forschungsarbeit entwickelten dynamischen Verfahrens zur Systemidentifikation vor. Ziel ist es, den Einsatz des Verfahrens zu validieren und rechnerische Tragreserven ausfindig zu machen. Die ursprüngliche Belastungsgrenze konnte mithilfe der Untersuchung rechnerisch über alle fünf Stützen hinweg um mindestens 7,1 % gesteigert werden.

## 7.3 Vorgehensweise an einem realen Tragwerk

Die praktische Anwendung des vorgestellten dynamische Verfahrens zur Systemidentifikation hat die Aufgabe, reale Lasten und Knicklängen von Druckstäben, die ursprünglich als Pendelstäbe modelliert wurden, für eine rechnerische Nachweisführung im Stabilitätsfall bereitzustellen. Auf Grundlage der laborexperimentellen Versuchsreihe aus Phase II sind zur Anwendung des Verfahrens die nachfolgenden Voraussetzungen hinsichtlich des zu untersuchenden Druckstabs festgelegt:

- Hohlprofile mit rechteckigem oder quadratischem Querschnitt für den Stahlbau aus unlegierten Baustählen und aus Feinkornbaustählen (warm- oder kaltgefertigt)
- Nenngrößen bis 120 mm, Nennwanddicken bis 4 mm
- Statische Systemlängen zwischen 2,0 m und 3,0 m
- Druckstab ist Teil eines unverschieblichen Rahmens
- kontinuierliche Massen- und Steifigkeitsverteilung
- keine Schädigungen oder Querschnittschwächungen
- planmäßig gerade Stabachse ohne Querbelastung

Sind die Voraussetzungen erfüllt, kann das Bauteil untersucht werden. Die folgenden wesentlichen Prozessschritte sind für die Anwendung des Verfahrens erforderlich:

1. Durchführung einer Modalanalyse mit elf maßgebenden Stellen:
  - evtl. Freilegen des Prüfkörpers
  - Anbringen des ersten und letzten Sensors auf dem Prüfkörper in einem Abstand von 4 cm bis 5 cm zu den jeweiligen Bauteilübergängen (z. B. vor einer Kopf- oder Fußplatte)
  - Anbringen der übrigen Sensoren in gleichmäßigen Abständen auf dem Prüfkörper; auflagernah erhält jeweils ein Sensor den halben Abstand zum Rand
  - Modalanalyse mit einem Impulshammer zur Bestimmung der ersten Eigenkreisfrequenz  $\omega_{ex,1}$  und Eigenmode  $\Psi_{ex,1}$  an elf Stellen

2. Auswertung mithilfe des Programms *DynamOpti*:

- Überführung der Modalparameter in das Programm  
(Eigenkreisfrequenz  $\omega_{ex,1}$ ; Eigenform  $\Psi_{ex,1}$ )
- Eingabe der Querschnittssteifigkeit  $EI$  und Massenverteilung  $\mu$ ;  
Profilangaben aus einer statischen Berechnung sind immer vor Ort anhand  
von Messungen zu überprüfen
- Durchführung der Systemidentifikation
- Auslesen der Ergebnisse des Optimierungsprozesses:
  - \* Optimierte Normalkraftbeanspruchung  $D_{opt}$
  - \* Optimierte Federsteifigkeiten  $k_{opt,ri}$ ,  $k_{opt,rj}$ ,  $k_{opt,ti}$ ,  $k_{opt,tj}$
  - \* Berechneter Knicklängenbeiwert  $\beta$
  - \* Parameter des Optimierungsprozesses

3. Bewertung der optimierten Systemeigenschaften:

- Bestimmung der Knicklänge  $l_0$  aus dem optimierten Knicklängenbeiwert  $\beta$   
und der während der Systemidentifikation angesetzten Systemlänge  $L$
- Durchführung einer statischen Berechnung zur Abschätzung der im Bauteil  
vorhandenen Normalkraft  $D_{th}$
- Berechnung der Eulerschen Knicklast  $D_{Euler}$  mithilfe des berechneten Knick-  
längenbeiwerts  $\beta$
- Liegt die Normalkraft  $D_{th}$  über 20 % der Eulerschen Knicklast  $D_{Euler}$ , ist die  
optimierte Normalkraft  $D_{opt}$  für eine Abschätzung verwendbar

Nachfolgend kann der Knicklängenbeiwert für die Nachweisführung im Stabilitätsfall für eine erste Abschätzung herangezogen werden. Es ist dabei zu überprüfen, inwieweit durch den Ansatz von experimentellen Federsteifigkeiten  $k_{opt}$  das Auftreten von Momentenbeanspruchungen zu berücksichtigen ist. Die optimierte Normalkraftbeanspruchung dient als Abschätzung der realen Ausnutzung des Bauteils und kann für eine rein theoretische Betrachtung herangezogen, jedoch nicht für eine Nachweisführung verwendet werden.

## 7.4 Forschungsdesiderate

Das in dieser Forschungsarbeit vorgestellte Verfahren zur Systemidentifikation auf Basis modaler Parameter wird anhand von 20 Prüfkörpern mit rechteckigen geschlossenen Stützenprofilen laborexperimentell validiert. Es werden gute Übereinstimmungen der optimierten Normalkraftbeanspruchungen und Lagersteifigkeiten mit den Vergleichswerten erzielt. Für die sichere Anwendung des Verfahrens in der Praxis sind jedoch deutlich mehr laborexperimentelle Versuche zur Validierung erforderlich. Dazu gehört nicht nur die Variation unterschiedlicher Stahlprofile, Systemlängen, Materialien, Normalkräfte und Auflagerkonstruktionen. Ebenso sind Überlegungen erforderlich, die Vorkrümmungen, Schädigungen und Fehlstellen des zu untersuchenden Druckstabs betreffen. Weitere experimentelle Versuche können erweiterte Anwendungsgrenzen des Verfahrens klären und sichere Nutzungsbereiche definieren. Darüber hinaus sei erwähnt, dass sich die Anwendung des dynamischen Identifikationsverfahren nicht rein auf druckbeanspruchte Bauteile beziehen kann, sondern ebenso Zugstäbe für eine Analyse und Auswertung der Kraftbeanspruchungen und Lagerungsbedingungen herangezogen werden können.

Im Zuge der experimentellen Laborversuchsreihe werden sowohl für die statischen, als auch für die dynamischen Versuche Streuanalysen durchgeführt, welche die Varianz bestimmter Eingangswerte, wie zum Beispiel abweichende Eigenformauslenkungen, berücksichtigt haben. Diese Art der Auswertung bedarf großer Rechenkapazität, kann zukünftig bei steigender Leistungsfähigkeit der Rechensysteme jedoch eine sinnvolle Ergänzung bisheriger Überlegungen sein. Es könnten nicht nur vereinzelt Eingangsparameter variiert werden; möglich wäre die Streuung aller messtechnisch ermittelten modalen Parameter und theoretisch festgelegter Eingangsparameter, wie die Querschnittssteifigkeit oder Massenbelegung. Eine entsprechende Auswertung kann im konkreten Anwendungsfall Wahrscheinlichkeitsbereiche der optimierten Parameter festlegen und mithilfe bestimmter Sicherheitskonzepte einen klar definierten Wert für die jeweiligen Systemeigenschaften festlegen. Dies betrifft wesentlich auch die Messungen in einem örtlich begrenzten Bereich hinsichtlich des Themengebiets der verschieblichen Rahmen (vgl. Abschnitt 5.1.4.5).

Das Verfahren zur Systemidentifikation ermittelt Eigenschaften auf Basis einer experimentellen Untersuchung der tatsächlichen Struktur. Die im Bauwesen angesetzten Sicher-

heitsbeiwerte basieren auf rein theoretischen Berechnungsansätzen und bieten zukünftiges Forschungspotential. Mit realen Tragwerkseigenschaften ist es möglich, die Zielsicherheiten des Konzepts durch geeignete Reduktion der Sicherheitsbeiwerte zu erhalten und gleichermaßen die rechnerischen Maximalbelastungen zu erhöhen.

Druckstäbe werden häufig zwar als Pendelstäbe mit beidseitig ideal gelenkiger Drehfederlagerung modelliert, verfügen jedoch häufig über ein gewisses Maß an Verdrehsteifigkeit, da eine vollständige Verdrehweichheit nur in Ausnahmefällen realisiert ist. Werden im Zuge der Systemidentifikation real vorhandene Drehfedersteifigkeiten optimiert und dadurch sichtbar, ist es erforderlich, den inneren Kraftfluss des statischen Systems neu zu bewerten, da die Drehfedersteifigkeiten mit zusätzlichen Momentenbeanspruchungen für den Druckstab einhergehen können. Gleichzeitig ergeben sich durch die zusätzlichen Einspanneffekte im Vergleich zum Pendelstab geringere Knicklängen. Zukünftige Forschungsarbeiten sollten diese Problematik vertiefend untersuchen.

Das vorgestellte Verfahren eröffnet nicht nur die Möglichkeit kurzfristig und vor allem einmalig Informationen hinsichtlich der Tragwerkseigenschaften zu generieren. Es ist ebenso möglich, regelmäßige und langfristige Messungen durchzuführen, welche die Entwicklung von Systemparametern aufzeigt. Auch wenn die Anwendung der Methode mit einer klassischen Modalanalyse auf den Impulshammer bzw. den elektrodynamischen Schwingungserreger zurückgreift, sind auch dynamische Auswertungen ohne externe Lastanregung durch die Operational Modal Analysis denkbar (vgl. Ewins, 2000b). Dies eröffnet die Möglichkeit, Sensoren fest an die zu untersuchenden Stabsysteme zu befestigen und ein dauerhaftes Monitoring zu gewährleisten, um Veränderungsprozesse innerhalb der Tragstruktur sichtbar zu machen.

# Literatur

- Albert, A. (Hrsg.). (2018). *Bautabellen für Ingenieure: Mit Berechnungshinweisen und Beispielen* (23. Aufl.). Bundesanzeiger Verlag.
- Altenbach, H. (2020). *Holzmann/Meyer/Schumpich Technische Mechanik Festigkeitslehre* (14. Aufl.). Springer Vieweg.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-658-32023-2>
- Amabili, M., Carra, S., Collini, L., Garziera, R., & Panno, A. (2010). Estimation of tensile force in tie-rods using a frequency-based identification method. *Journal of Sound and Vibration*, *329*(11), 2057–2067.  
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.12.009>
- Anderegg, P., Brönnimann, R., & Meier, U. (2018). Referenzmessdaten beim Langzeitmonitoring von Infrastrukturen. *Bautechnik*, *95*(7), 494–498.  
<https://doi.org/10.1002/bate.201700085>
- Arbelo, M. A., Kalnins, K., Ozolins, O., Skukis, E., Castro, S. G., & Degenhardt, R. (2015). Experimental and numerical estimation of buckling load on unstiffened cylindrical shells using a vibration correlation technique. *Thin-Walled Structures*, *94*, 273–279. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2015.04.024>
- Avitabile, P. (2018). *Modal testing: A practitioner's guide*. The Society for Experimental Mechanics & John Wiley & Sons Ltd. <https://doi.org/10.1002/9781119222989>
- Baandrup, M., Poulsen, P. N., Olesen, J. F., & Polk, H. (2020). Optimization of truss girders in cable-supported bridges including stability. *Journal of Bridge Engineering*, *25*(11). [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)BE.1943-5592.0001632](https://doi.org/10.1061/(ASCE)BE.1943-5592.0001632)
- Bargmann, H. (2008). *Historische Bautabellen: Normen und Konstruktionshinweise 1870-1960* (4. Aufl.). Werner.

- Bayón, A., Gascón, F., Medina, R., Nieves, F. J., & Salazar, F. J. (2012). On the flexural vibration of cylinders under axial loads: Numerical and experimental study. *Journal of Sound and Vibration*, *331*(10), 2315–2333.  
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.12.017>
- Bendtsen, C. (2012). pso: Particle swarm optimization. R package version 1.0.3.  
<http://cran.nexr.com/web/packages/pso/index.html>
- Beyond Zero Emissions (Hrsg.). (2017). *Zero Carbon Industry Plan: Rethinking cement*. Beyond Zero Emissions Inc. <https://bze.org.au/wp-content/uploads/2020/12/rethinking-cement-bze-report-2017.pdf>
- Böge, A. (2011). *Technische Mechanik: Statik - Dynamik - Fluidmechanik - Festigkeitslehre* (29. Aufl.). Vieweg + Teubner.
- Böge, A., & Böge, W. (2019). *Technische Mechanik: Statik, Reibung, Dynamik, Festigkeitslehre, Fluidmechanik* (33. Aufl.). Springer Vieweg.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-658-25724-8>
- Boller, C., Fox, C., Starke, P., Wu, H., Doktor, M., & Kurz, W. (2017). Zustandserfassung von Stahlbauwerken mithilfe akustischer und elektromagnetischer Verfahren der ZfP. *Bautechnik*, *94*(10), 717–725.  
<https://doi.org/10.1002/bate.201700067>
- Bosch, K. (2002). *Formelsammlung Mathematik*. De Gruyter Oldenbourg.
- Bundesstiftung Baukultur (Hrsg.). (2022). Baukultur Bericht 2022/23: Neue Umbaukultur.
- Cappello, C., Zonta, D., Laasri, H. A., Glisic, B., & Wang, M. (2018). Calibration of Elasto-Magnetic Sensors on In-Service Cable-Stayed Bridges for Stress Monitoring. *Sensors*, *18*(2), 466. <https://doi.org/10.3390/s18020466>
- Chan, T. H. T., Yu, L., Tam, H. Y., Ni, Y. Q., Liu, S. Y., Chung, W. H., & Cheng, L. K. (2006). Fiber Bragg grating sensors for structural health monitoring of Tsing Ma bridge: Background and experimental observation. *Engineering Structures*, *28*(5), 648–659. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2005.09.018>
- Darwin, C. (1859). *On the origin of species by means of natural selection, or the preservation of favoured races in the struggle for life*. John Murray.

- Deutsche Emissionshandelsstelle (DEHSt) im Umweltbundesamt. (2021).  
Treibhausgasemissionen 2020: Emissionshandelspflichtige stationäre Anlagen und  
Luftverkehr in Deutschland (VET-Bericht 2020) (Deutsche  
Emissionshandelsstelle (DEHSt) im Umweltbundesamt, Hrsg.).
- Die Autobahn GmbH des Bundes (Hrsg.). (2023). Ersatzneubau Talbrücke Rahmede.  
<https://www.autobahn.de/die-autobahn/projekte/detail/ersatzneubau-talbruecke-rahmede#uebersicht>
- DIN e.V. (2010-12). Eurocode 3: Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten - Teil  
1- 1: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau: Deutsche  
Fassung EN 1993-1-1:2005 + AC:2009.
- DIN e.V. (2021-10). Eurocode: Grundlagen der Tragwerksplanung: Deutsche Fassung  
EN 1990:2002 + A1:2005 + A1:2005/AC:2010.
- Ding, B., Liu, J., Huang, Z., Li, X., Wu, X., & Cai, L. (2020). Axial force identification  
of space grid structural members using particle swarm optimization method.  
*Journal of Building Engineering*, 32, 101674.  
<https://doi.org/10.1016/j.jobe.2020.101674>
- Dinkler, D. (2019). *Grundlagen der Baustatik: Modelle und Berechnungsmethoden für  
ebene Stabtragwerke* (5. Aufl.). Springer Vieweg.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-658-23839-1>
- Dittes, F.-M. (2015). *Optimierung: Wie man aus allem das Beste macht*. Springer  
Vieweg. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-53889-6>
- Doktor, M. S., Fox, C., Kurz, W., & Stockis, J.-P. (2018). Characterization of steel  
buildings by means of non-destructive testing methods. *Journal of Mathematics  
in Industry*, 8(10), 1–17. <https://doi.org/10.1186/s13362-018-0052-5>
- Dudenhausen, S., Waltering, M., & Kurz, W. (2023). The application of a force  
identification method based on Particle Swarm Optimization to compression  
steel bars. In M. Allen, S. Davaria & R. B. Davis (Hrsg.), *Special topics in  
structural dynamics & experimental techniques, Volume 5* (S. 69–79). Springer.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-031-05405-1>
- Eberhart, R., & Kennedy, J. (1995). A new optimizer using particle swarm theory. In  
Institute of Electrical and Electronics Engineers (Hrsg.), *MHS'95. Proceedings of*

- the Sixth International Symposium on Micro Machine and Human Science, Nagoya, Japan* (S. 39–43). IEEE. <https://doi.org/10.1109/MHS.1995.494215>
- Ehrgott, M. (2005). *Multicriteria optimization* (2. Aufl.). Springer. <https://doi.org/10.1007/3-540-27659-9>
- Eschenauer, H., Koski, J., & Osyczka, A. (Hrsg.). (1990). *Multicriteria design optimization: Procedures and applications*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-48697-5>
- Ewins, D. J. (2000a). Model validation: Correlation for updating. *Sadhana*, *25*(3), 221–234. <https://doi.org/10.1007/BF02703541>
- Ewins, D. J. (2000b). *Modal Testing: Theory, Practice and Application* (2. Aufl.). Research Studies Press.
- Feng, D., Scarangelo, T., Feng, M. Q., & Ye, Q. (2017). Cable tension force estimate using novel noncontact vision-based sensor. *Measurement*, *99*, 44–52. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2016.12.020>
- Fox, C., Doktor, M., Schneider, E., & Kurz, W. (2016). Bewertung von Stahlbauwerken durch zerstörungsfreie Bestimmung von Spannungszuständen. *Stahlbau*, *85*(1), 1–15. <https://doi.org/10.1002/stab.201610352>
- Geier, R. (2004). *Brückendynamik: Schwingungsuntersuchungen von Schrägseilen*. BoD Books on Demand.
- Geier, R., & Petz, J. (2004). Kraftbestimmung in Schrägseilen durch dynamische Messung. *Beton- und Stahlbetonbau*, *99*(12), 985–991. <https://doi.org/10.1002/best.200490285>
- Gläser, C., Brand, W., Kuhn, E., & Mack, T. (2014). Prüfung, Überwachung und Wartung von Litzenbündelseilen: Am Beispiel der Elbebrücke Schönebeck. *Beton- und Stahlbetonbau*, *109*(7), 463–472. <https://doi.org/10.1002/best.201400012>
- Go, C. G., Lin, Y. S., & Khor, E. H. (1997). Experimental determination of the buckling load of a straight structural member by using dynamic parameters. *Journal of Sound and Vibration*, *205*(3), 257–264. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1995.1047>
- Grimme, C., & Bossek, J. (2018). *Einführung in die Optimierung: Konzepte, Methoden und Anwendungen*. Springer Vieweg. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-21151-6>

- Gross, D., Hauger, W., Schröder, J., & Wall, W. A. (2016). *Technische Mechanik 1: Statik* (13. Aufl.). Springer Vieweg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-49472-1>
- Gross, D., Hauger, W., Schröder, J., & Wall, W. A. (2021). *Technische Mechanik 2: Elastostatik* (14. Aufl.). Springer Vieweg.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-61862-2>
- Gundelwein, H., & Zellweger, W. (2013). Entwicklung und Anwendung eines Baustellenmessgeräts zur Bestimmung der Spannung in Bewehrungsstählen. *Beton- und Stahlbetonbau*, 108(12), 835–844.  
<https://doi.org/10.1002/best.201300065>
- Gutermann, M., Gersiek, M., Löschmann, F., & Patrias, M. (2018). Der Löwenhof in Dortmund - experimentelle Statik zum Erhalt historischer Eisenbetondecken. *Bautechnik*, 95(1), 78–85. <https://doi.org/10.1002/bate.201700088>
- Hamme, M., Marzahn, G., Prehn, W., & Swadlo, J. (2006). Die Wupper-Talbrücke Oehde – eine moderne Verbundbrücke. *Stahlbau*, 75(7), 558–564.  
<https://doi.org/10.1002/stab.200610058>
- Hauk, V. (1997). *Structural and residual stress analysis by nondestructive methods: Evaluation - Application - Assessment*. Elsevier Science.
- Helwig, S. (2010). *Particle swarms for constrained optimization* [Dissertation]. Universität Erlangen-Nürnberg.
- Hemingway, E. (2003). *The old man and the sea*. Scribner.
- Herrmann, R., Stockmann, M., & Marx, S. (2015). Untersuchungsstrategie zur Bewertung der Langzeitstabilität von Dehnungsmessstreifen. *Bautechnik*, 92(7), 451–460. <https://doi.org/10.1002/bate.201500018>
- Heymann, J., & Lingener, A. (1986). *Meßverfahren der experimentellen Mechanik*. Springer.
- Hirschfeld, K. (2006). *Baustatik: Theorie und Beispiele* (5. Aufl.). Springer.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-540-36773-4>
- Jarre, F., & Stoer, J. (2019). *Optimierung: Einführung in mathematische Theorie und Methoden* (2. Aufl.). Springer Spektrum.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-58855-0>

- Kalameya, J., Anschütz, M., Ungermann, D., & Münch, M. (2017). Grundinstandsetzung der Müngstener Talbrücke. *Stahlbau*, 86(7), 619–631. <https://doi.org/10.1002/stab.201710502>
- Kangas, S., Helmicki, A., Hunt, V., Sexton, R., & Swanson, J. (2010). Identification of cable forces on cable-stayed bridges: A novel application of the MUSIC algorithm. *Experimental Mechanics*, 50(7), 957–968. <https://doi.org/10.1007/s11340-009-9263-4>
- Kernicky, T., Whelan, M., & Al-Shaer, E. (2018). Dynamic identification of axial force and boundary restraints in tie rods and cables with uncertainty quantification using Set Inversion Via Interval Analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 423, 401–420. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.02.062>
- Kim, B. H., & Park, T. (2007). Estimation of cable tension force using the frequency-based system identification method. *Journal of Sound and Vibration*, 304(3-5), 660–676. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.03.012>
- Kim, J., & Park, S. (2020). Field applicability of a machine learning–based tensile force estimation for pre-stressed concrete bridges using an embedded elasto-magnetic sensor. *Structural Health Monitoring*, 19(1), 281–292. <https://doi.org/10.1177/1475921719842340>
- Kramer, H. (2013). *Angewandte Baudynamik: Grundlagen und Praxisbeispiele* (2. Aufl.). Ernst & Sohn.
- Kuttner, T. (2015). *Praxiswissen Schwingungsmesstechnik*. Springer Vieweg. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-04638-5>
- Lagomarsino, S., & Calderini, C. (2005). The dynamical identification of the tensile force in ancient tie-rods. *Engineering Structures*, 27(6), 846–856. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2005.01.008>
- Lein, C., & Beitelschmidt M. (2014). Comparative study of model correlation methods with application to model order reduction. In *Proceedings of ISMA (International Conference on Noise and Vibration Engineering)*, Leuven, Belgien (S. 2683–2700).

- Li, H., Ou, J., & Zhou, Z. (2009). Applications of optical fibre Bragg gratings sensing technology-based smart stay cables. *Optics and Lasers in Engineering*, 47(10), 1077–1084. <https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2009.04.016>
- Lin, J., Leung, L. K. K., Xu, Y.-L., Zhan, S., & Zhu, S. (2018). Field measurement, model updating, and response prediction of a large-scale straight-bladed vertical axis wind turbine structure. *Measurement*, 130, 57–70. <https://doi.org/10.1016/J.measurement.2018.07.057>
- Lin, Y. B., Pan, C. L., Kuo, Y. H., Chang, K. C., & Chern, J. C. (2005). Online monitoring of highway bridge construction using fiber Bragg grating sensors. *Smart Materials and Structures*, 14(5), 1075–1082. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/14/5/046>
- Link, M. (1999). Updating of analytical models — Basic procedures and extensions. In J. M. M. Silva & N. M. M. Maia (Hrsg.), *Modal analysis and testing* (S. 281–304). Springer Dordrecht. <https://doi.org/10.1007/978-94-011-4503-9>
- Livingston, T., Béliveau, J. G., & Huston, D. R. (1995). Estimation of axial load in prismatic members using flexural vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 179(5), 899–908. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1995.0060>
- Lu, J. (Hrsg.). (1996). *Handbook of measurement of residual stresses*. Fairmont Press.
- LUBW Landesanstalt für Umwelt Baden-Württemberg (Hrsg.). (2023). Was sind CO<sub>2</sub>-Äquivalente (CO<sub>2</sub>e)? <https://www.nachhaltiger-warenkorb.de/was-sind-co2-aequivalente/>
- Luong, H. T., Zabel, V., Lorenz, W., & Rohrman, R. G. (2017). Vibration-based model updating and identification of multiple axial forces in truss structures. *Procedia Engineering*, 188, 385–392. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.04.499>
- Luong, T. M. H. (2018). *Identification of the state of stress in iron and steel truss structures by vibration-based experimental investigations* [Dissertation]. Brandenburgische Technische Universität Cottbus–Senftenberg.
- Mack, T., Geier, R., Kahl, T., & Kasper, M. (2016). Monitoring der neuen Schrägseilbrücke über den Chao Phraya, Nonthaburi, Thailand. *Bautechnik*, 93(10), 730–741. <https://doi.org/10.1002/bate.201600070>

- Magnus, K., Popp, K., & Sextro, W. (2016). *Schwingungen: Grundlagen - Modelle - Beispiele* (10. Aufl.). Springer Vieweg.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-658-13821-9>
- Mehrabi, A. B., & Tabatabai, H. (1998). Unified finite difference formulation for free vibration of cables. *Journal of Structural Engineering*, 124(11).  
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1998\)124:11\(1313\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1998)124:11(1313))
- Meskouris, K. (1999). *Baudynamik: Modelle, Methoden, Praxisbeispiele*. Ernst & Sohn.
- Meyer, M. (2017). *Signalverarbeitung: Analoge und digitale Signale, Systeme und Filter* (8. Aufl.). Springer Vieweg. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-18321-9>
- Möser, M. (2010). *Messtechnik der Akustik*. Springer.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-540-68087-1>
- Möser, M. (Hrsg.). (2018). *Digitale Signalverarbeitung in der Messtechnik*. Springer Vieweg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-56613-8>
- Möser, M. (2020). *Modalanalyse*. Springer Vieweg.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-60928-6>
- Mühl, T. (2017). *Elektrische Messtechnik: Grundlagen, Messverfahren, Anwendungen* (5. Aufl.). Springer Vieweg. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-15720-3>
- Nasisi, S., Valášek, M., & Vampola, T. (2015). An interpolation method for determining the frequencies of parameterized large-scale structures. *Acta Polytechnica*, 55(6), 407–441. <https://doi.org/10.14311/AP.2015.55.0407>
- Natke, H. G. (1989). *Baudynamik: Einführung in die Dynamik mit Anwendungen aus dem Bauwesen* (Bd. 66). Vieweg + Teubner.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-663-09343-5>
- Natke, H. G. (1992). *Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse: Identifikation schwingungsfähiger elastomechanischer Systeme* (3. Aufl.). Vieweg. <https://doi.org/10.1007/978-3-322-94266-1>
- Neubauer, U., & Gutsch, A.-W. (2003). Tragfähigkeitsnachweise an einem Postgebäude von 1907 unter Einbeziehung von Belastungsversuchen. *Bautechnik*, 80(7), 423–433. <https://doi.org/10.1002/bate.200303480>

- Papageorgiou, M., Leibold, M., & Buss, M. (2012). *Optimierung: Statische, dynamische, stochastische Verfahren für die Anwendung* (3. Aufl.). Springer Vieweg. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-34013-3>
- Papula, L. (2015). *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2: Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium* (14. Aufl., Bd. 2). Springer Vieweg. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-07790-7>
- Papula, L. (2017). *Mathematische Formelsammlung: Für Ingenieure und Naturwissenschaftler* (12. Aufl.). Springer Vieweg. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-16195-8>
- Pastor, M., Binda, M., & Harčarik, T. (2012). Modal Assurance Criterion. *Procedia Engineering*, 48, 543–548. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2012.09.551>
- Paultre, P. (2011). *Dynamics of Structures*. ISTE; John Wiley & Sons. <https://doi.org/10.1002/9781118599792>
- Petersen, C. (1982). *Statik und Stabilität der Baukonstruktionen: Elasto- und plasto-statische Berechnungsverfahren druckbeanspruchter Tragwerke: Nachweisformen gegen Knicken, Kippen, Beulen* (2. Aufl.). Vieweg. <https://doi.org/10.1007/978-3-663-20520-3>
- Petersen, C., & Werkle, H. (2017). *Dynamik der Baukonstruktionen* (2. Aufl.). Springer Vieweg. <https://doi.org/10.1007/978-3-8348-2109-6>
- Pieper, M. (2017). *Mathematische Optimierung: Eine Einführung in die kontinuierliche Optimierung mit Beispielen*. Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-16975-6>
- Posit PBC. (2021). RStudio: RStudio Version 2021.09.0. <https://posit.co/>
- Proske, D. (2021). *Baudynamik for Beginners*. Springer Vieweg. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-33584-7>
- R Core Team. (2020). R: A language and environment for statistical computing: R Version 4.0.1. <https://www.R-project.org/>
- Rebecchi, G., Tullini, N., & Laudiero, F. (2013). Estimate of the axial force in slender beams with unknown boundary conditions using one flexural mode shape. *Journal of Sound and Vibration*, 332(18), 4122–4135. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.03.018>

- Resta, C., Chellini, G., & de Falco, A. (2020). Dynamic assessment of axial load in tie-rods by means of acoustic measurements. *Buildings*, 10(2), 23.  
<https://doi.org/10.3390/buildings10020023>
- Riad, K. (2006). *Überwachung der Vorspannkraft Externer Spannglieder mit Hilfe der Modalanalyse* [Dissertation]. Universität Kassel.
- Rohrbach, C. (Hrsg.). (1989). *Handbuch für experimentelle Spannungsanalyse*. VDI.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-642-48659-3>
- Schacht, G., Bolle, G., & Marx, S. (2016). Belastungsversuche - Internationaler Stand des Wissens. *Bautechnik*, 93(2), 85–97. <https://doi.org/10.1002/bate.201500097>
- Schafferus, C. (2021). Anteil versiegelter und unversiegelter Siedlungs- und Verkehrsfläche (SuV) an der Gesamtfläche Deutschlands in den Jahren 1992 und 2018 (Statista GmbH, Hrsg.). <https://de-statista-com.ezproxy.fh-muenster.de/statistik/daten/studie/1262137/umfrage/versiegelte-und-unversiegelte-siedlungs-und-verkehrsflaeche-in-deutschland/>
- Schneider, E., Bindseil, P., Boller, C., & Kurz, W. (2012). Stand der Entwicklungen zur zerstörungsfreien Bestimmung der Längsspannung in Bewehrungsstäben von Betonbauwerken. *Beton- und Stahlbetonbau*, 107(4), 244–254.  
<https://doi.org/10.1002/best.201100083>
- Schumacher, A. (2020). *Optimierung mechanischer Strukturen: Grundlagen und industrielle Anwendungen* (3. Aufl.). Springer Vieweg.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-60328-4>
- Schwartz, H. (2015). *Building the Golden Gate Bridge: A workers' oral history*. University of Washington Press.
- Siegel, S. (2018). *Zustandsbestimmung von externen Spanngliedern und Schrägseilen mit Frequenzanalysen* [Dissertation]. Karlsruher Institut für Technologie.
- Sorace, S. (1996). Parameter models for estimating in-situ tensile force in tie-rods. *Journal of Engineering Mechanics*, 122(9), 818–825.  
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1996\)122:9\(818\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1996)122:9(818))
- Spura, C. (2019). *Technische Mechanik 2. Elastostatik: Nach fest kommt ab*. Springer Vieweg. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-19979-1>

- Stadler, M., Penka, E., & Zilch, K. (2007). Ermittlung der freien Schwingungslänge zur Bestimmung der Vorspannkraft externer Bandspannglieder durch dynamische Messungen. *Bauingenieur*, *82*(1), 25–29.
- Timár, I., & Horváth, P. (2017). Multiobjective optimization of planar truss girder. *MATEC Web of Conferences*, *126*, 01005.  
<https://doi.org/10.1051/mateconf/201712601005>
- Treysède, F. (2009). Free linear vibrations of cables under thermal stress. *Journal of Sound and Vibration*, *327*(1-2), 1–8. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.07.005>
- Tullini, N., & Laudiero, F. (2008). Dynamic identification of beam axial loads using one flexural mode shape. *Journal of Sound and Vibration*, *318*(1-2), 131–147.  
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.03.061>
- Türker, T., Kartal, M. E., Bayraktar, A., & Muvafik, M. (2009). Assessment of semi-rigid connections in steel structures by modal testing. *Journal of Constructional Steel Research*, *65*(7), 1538–1547.  
<https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2009.03.002>
- United Nations Environment Programme (Hrsg.). (2021). 2021 Global status report for building and construction: Towards a zero-emission, efficient and resilient buildings and construction sector. [https://globalabc.org/sites/default/files/2021-10/GABC\\_Buildings-GSR-2021\\_BOOK.pdf](https://globalabc.org/sites/default/files/2021-10/GABC_Buildings-GSR-2021_BOOK.pdf)
- Vismann, U. (Hrsg.). (2018). *Wendehorst - Bautechnische Zahlentafeln* (36. Auflage). Springer Vieweg; Beuth. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-17936-6>
- Wagner, R. (2016). *Bauen mit Seilen und Membranen*. Beuth.
- Waltering, M., Bungard, V., Waldmann, D., Maas, S., & Zürbes, A. (2009). Vergleich statischer und dynamischer Methoden zur Zustandsbewertung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken. *Beton- und Stahlbetonbau*, *104*(10), 628–641.  
<https://doi.org/10.1002/best.200900024>
- Waltering, M., Schnell, J., Weisleder, F., & Pancic, A. (2019). *Tragfähigkeitsanalyse im Bestand mittels Schwingungsanalyse*. Fraunhofer IRB.  
<https://www.irbnet.de/daten/rswb/19039005832.pdf>
- Williams, S. R. (1925). Magnetostriktion und ihre Bedeutung für die magnetischen Theorien. In Komitee über Theorien des Magnetismus des National Research

- Council in Washington (Hrsg.), *Theorien des Magnetismus* (S. 244–257). Vieweg + Teubner. <https://doi.org/10.1007/978-3-663-04515-1>
- WWF Deutschland (Hrsg.). (2019). Klimaschutz in der Beton- und Zementindustrie: Hintergrund und Handlungsoptionen. [https://www.wwf.de/fileadmin/fm-wwf/Publikationen-PDF/WWF\\_Klimaschutz\\_in\\_der\\_Beton-\\_und\\_Zementindustrie\\_WEB.pdf](https://www.wwf.de/fileadmin/fm-wwf/Publikationen-PDF/WWF_Klimaschutz_in_der_Beton-_und_Zementindustrie_WEB.pdf)
- Xue, S., & Shen, R. (2020). Real time cable force identification by short time sparse time domain algorithm with half wave. *Measurement*, *152*, 107355. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2019.107355>
- Zhao, Q., & Li, C. (2020). Two-stage multi-swarm particle swarm optimizer for unconstrained and constrained global optimization. *IEEE Access*, *8*, 124905–124927. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3007743>
- Zimmermann, J., & Reiser, M. (2021). Prognose des Verbrauchs grauer Energie über die Lebensdauer von Gebäuden. *Mauerwerk*, *25*(3), 120–130. <https://doi.org/10.1002/dama.202110015>

# A Biegelinie zur Berechnung theoretischer Lagersteifigkeiten

Im Zuge der Abhandlung werden die rechnerischen Modelle aus Phase I (s. Kapitel 4) in Phase II (s. Kapitel 5) laborexperimentell validiert. Dabei werden die Lagerungsbedingungen der gewählten Prüfkörper zur Vordimensionierung zunächst numerisch in Abschnitt 5.1.2 untersucht. Während die Auflagerbedingungen aller Prüfkörper mit einem Gelenkanschluss  $C_1$  als einfach gelagerter Balken mit übersichtlichem Aufwand festgelegt werden können (vgl. Abbildung 5.3), sind für Versuchsaufbauten mit einem Profilanschluss genauere Untersuchungen erforderlich. Abbildung A.1 zeigt das Ausgangsmodell der Prüfkörper mit Profilanschluss einschließlich dem Ansatz von Einheitslasten zur Ermittlung korrespondierender Lagersteifigkeiten des darunter dargestellten Basismodells der Verfahren zur Systemidentifikation. Eine analytische Berechnung des in

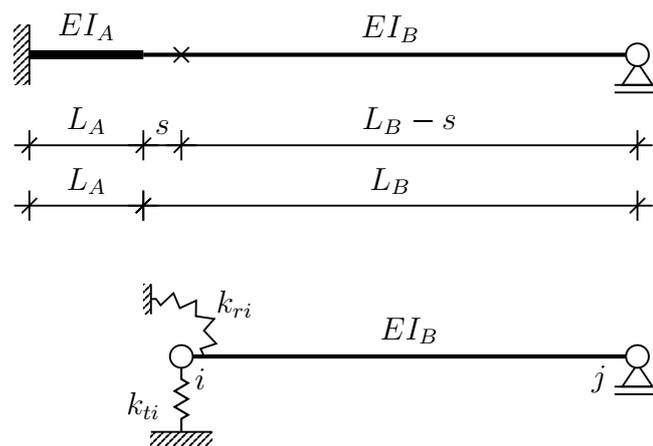


Abbildung A.1: Ausgangsmodell zur rechnerischen Bestimmung der Lagersteifigkeiten (oben) und das zur Vordimensionierung verwendete Zielmodell (unten)

Abbildung A.2 dargestellten Systems definiert die Steifigkeitsverhältnisse an der Stelle des letzten Sensors  $n$  und damit die Auflagerbedingungen des Basismodells für das Identifikationsverfahren. Die so erzeugten Drehfedersteifigkeiten  $k_{ri}$  und Wegfedersteifigkeiten  $k_{ti}$  werden für eine Vordimensionierung der statischen Versuche herangezogen.

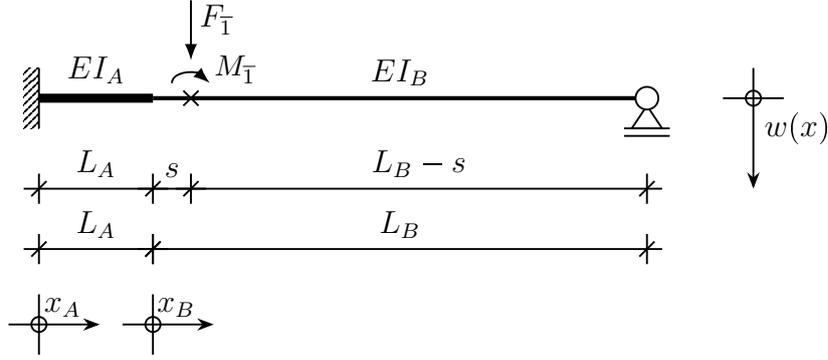


Abbildung A.2: Ausgangsmodell zur Bestimmung der Biegelinie

Für die Federsteifigkeiten  $k_{ri}$  und  $k_{ti}$  wird an der Position des zuletzt verwendeten Sensors lastfallgetrennt das Einheitsmoment  $M_{\bar{1}} = 1$  sowie die Einheitslast  $F_{\bar{1}} = 1$  angesetzt. Aus der Verdrehung bzw. der Verschiebung des Stabs an der lastangesetzten Stelle wird anschließend die Federsteifigkeit des Systems ermittelt und als Auflagerbedingung nach Abbildung A.1 (unten) angesetzt. Das in Abbildung A.2 (oben) dargestellte System wird analytisch mit den Biegelinien  $w_A$  und  $w_B$  berechnet:

$$EI_A w_A(x_A)'''' = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$EI_B w_B(x_B)'''' = M_{\bar{1}} \cdot \langle x_B - s \rangle^{-2} - F_{\bar{1}} \cdot \langle x_B - s \rangle^{-1} \quad (\text{A.2})$$

Die Verdrehung bzw. Verschiebung des Querschnitts ergibt die Drehfedersteifigkeit  $k_{ri}$  sowie Wegfedersteifigkeit  $k_{ti}$  des Systems an der Stelle  $x_B = s$  zu:

$$k_{ri} = \frac{M_{\bar{1}}}{w_B(s)} \quad (\text{A.3})$$

$$k_{ti} = \frac{F_{\bar{1}}}{\phi_B(s)} \quad (\text{A.4})$$

Im Folgenden werden die Indizes für das Einheitsmoment  $M_{\bar{1}}$  und für die Einheitskraft  $F_{\bar{1}}$

zur Wahrung der Übersichtlichkeit nicht weiter notiert. Die Biegelinien des in Abbildung A.2 dargestellten Systems lauten:

$$EI_A w_A(x_A)'''' = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$EI_A w_A(x_A)''' = C_1 \quad (\text{A.6})$$

$$EI_A w_A(x_A)'' = C_1 \cdot x_A + C_2 \quad (\text{A.7})$$

$$EI_A w_A(x_A)' = \frac{C_1}{2} \cdot x_A^2 + C_2 \cdot x_A + C_3 \quad (\text{A.8})$$

$$EI_A w_A(x_A) = \frac{C_1}{6} \cdot x_A^3 + \frac{C_2}{2} \cdot x_A^2 + C_3 \cdot x_A + C_4 \quad (\text{A.9})$$

$$EI_B w_B(x_B)'''' = M \langle x_B - s \rangle^{-2} + F \langle x_B - s \rangle^{-1} \quad (\text{A.10})$$

$$EI_B w_B(x_B)''' = M \langle x_B - s \rangle^{-1} + F \langle x_B - s \rangle^0 + C_5 \quad (\text{A.11})$$

$$EI_B w_B(x_B)'' = M \langle x_B - s \rangle^0 + F \langle x_B - s \rangle^1 + C_5 \cdot x_B + C_6 \quad (\text{A.12})$$

$$EI_B w_B(x_B)' = M \langle x_B - s \rangle^1 + \frac{F}{2} \langle x_B - s \rangle^2 + \frac{C_5}{2} \cdot x_B^2 + C_6 \cdot x_B + C_7 \quad (\text{A.13})$$

$$EI_B w_B(x_B) = \frac{M}{2} \langle x_B - s \rangle^2 + \frac{F}{6} \langle x_B - s \rangle^3 + \frac{C_5}{6} \cdot x_B^3 + \frac{C_6}{2} \cdot x_B^2 + C_7 \cdot x_B + C_8 \quad (\text{A.14})$$

Acht Randbedingungen sind zur Lösung der Konstanten  $C_1$  bis  $C_8$  erforderlich und können wie folgt definiert werden:

$$\text{I : } \quad w_A(0) = 0 \quad \Rightarrow C_4 = 0 \quad (\text{A.15})$$

$$\text{II : } \quad w_A(0)' = 0 \quad \Rightarrow C_3 = 0 \quad (\text{A.16})$$

$$\text{III : } \quad w_A(l_A) = w_B(0) \quad (\text{A.17})$$

$$\text{IV : } \quad w_A(l_A)' = w_B(0)' \quad (\text{A.18})$$

$$\text{V :} \quad EI_A w_A(l_A)'' = EI_B w_B(0)'' \quad (\text{A.19})$$

$$\text{VI :} \quad EI_A w_A(l_A)''' = EI_B w_B(0)''' \quad (\text{A.20})$$

$$\text{VII :} \quad w_B(l_B) = 0 \quad (\text{A.21})$$

$$\text{VIII :} \quad EI_B w_B(l_B)'' = 0 \quad (\text{A.22})$$

Die Randbedingungen I und II führen ohne ein Gleichungssystem direkt zu der Lösung  $C_3 = C_4 = 0$ . Dadurch entfallen die Integrationskonstanzen  $C_3$  und  $C_4$  in den Gleichungen A.8 und A.9.

Die sechs übrigen Randbedingungen A.17 bis A.22 führen durch Ansatz der Biegelinien einschließlich ihrer Ableitungen A.5 bis A.14 zu dem Gleichungssystem:

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} \frac{l_A^3}{6} & \frac{l_A^2}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{EI_A}{EI_B} \\ \frac{l_A^2}{2} & l_A & 0 & 0 & -\frac{EI_A}{EI_B} & 0 \\ l_A & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l_B^3}{6} & \frac{l_B^2}{2} & l_B & 1 \\ 0 & 0 & l_B & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\} * \left\{ \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{M}{2}(l_B - s)^2 - \frac{F}{6}(l_B - s)^3 \\ -M - F(l_B - s) \end{array} \right\} \quad (\text{A.23})$$

Sind die Integrationskonstanten  $C_1$  bis  $C_8$  ermittelt, führen die Gleichungen A.13 und A.14 zu den entsprechenden Lösungen für den Bereich B.

## B Einzelergebnisse der statischen Versuchsreihe

Nachfolgend werden in den Tabellen B.1 bis B.5 Detailergebnisse des statischen Optimierungsprozesses aller Prüfkörper mit jeweils fünf Versuchen dargestellt. Dazu zählen die optimierten Systemeigenschaften, bestehend auf der Querschnittssteifigkeit  $EI_{opt}$  und den Lagersteifigkeiten  $k_{ri,opt}$ ,  $k_{rj,opt}$ ,  $k_{ti,opt}$  und  $k_{tj,opt}$ , sowie die Eigenschaften des Optimierungsprozesses selbst  $f_{error}$  (Fehlerabweichung, vgl. Abschnitt 4.2.2.1) und  $n_{iter}$  (Anzahl erforderlicher Iterationen, vgl. Abschnitt 4.2.2.3).

B Einzelergebnisse der statischen Versuchsreihe

Tabelle B.1: System- und Berechnungseigenschaften aus dem Optimierungsprozess für alle Verformungskurven der Prüfkörper P1C1, P1C2, P1C3 und P1C4

Stütze	Versuch	$EI_{opt}$ [kN m <sup>2</sup> ]	$k_{ri,opt}$ [ $\frac{\text{kN m}}{\text{rad}}$ ]	$k_{rj,opt}$ [ $\frac{\text{kN m}}{\text{rad}}$ ]	$k_{ti,opt}$ [ $\frac{\text{kN}}{\text{m}}$ ]	$k_{tj,opt}$ [ $\frac{\text{kN}}{\text{m}}$ ]	$f_{error}$ [–]	$n_{iter}$ [–]
P1C1	a	16,62	0,46	0	> 99999	10728	5,99E–8	934
	b	16,66	0,83	0	39002	14506	6,36E–8	1281
	c	16,73	1,11	0	> 99999	18401	7,20E–8	1302
	d	16,81	0,60	0	> 99999	10400	6,34E–8	876
	e	16,94	0,62	0	46342	10892	5,96E–8	1388
	∅	16,75	0,72	0	77069	12985		
P1C2	a	15,65	62,75	0	834	12293	4,61E–8	761
	b	15,81	61,55	0	869	7530	3,74E–8	564
	c	15,75	62,73	0	870	9895	3,17E–8	768
	d	15,71	62,75	0	872	13229	2,90E–8	595
	e	15,76	60,46	0	901	11388	3,72E–8	569
	∅	15,74	62,05	0	869	10867		
P1C3	a	15,68	109,7	0	3619	14548	1,93E–8	627
	b	15,69	108,8	0	3752	13378	2,05E–8	733
	c	15,70	104,7	0	4310	11196	1,91E–8	919
	d	15,50	113,5	0	3805	89475	1,57E–8	1111
	e	15,65	107,5	0	4552	20780	1,67E–8	1158
	∅	15,64	108,9	0	4007	29875		
P1C4	a	15,39	246,7	0	6420	> 99999	1,90E–8	831
	b	15,59	241,2	0	9096	> 99999	1,95E–8	739
	c	15,20	240,2	0,59	7208	> 99999	7,99E–9	1186
	d	15,50	231,6	0	9643	> 99999	8,29E–9	843
	e	15,40	231,7	0,19	8539	> 99999	8,33E–9	1243
	∅	15,42	238,3	0,16	8181	> 99999		

*B Einzelergebnisse der statischen Versuchsreihe*

Tabelle B.2: System- und Berechnungseigenschaften aus dem Optimierungsprozess für alle Verformungskurven der Prüfkörper P2C1, P2C2, P2C3 und P2C4

Stütze	Versuch	$EI_{opt}$ [kN m <sup>2</sup> ]	$k_{ri,opt}$ [ $\frac{\text{kN m}}{\text{rad}}$ ]	$k_{rj,opt}$ [ $\frac{\text{kN m}}{\text{rad}}$ ]	$k_{ti,opt}$ [ $\frac{\text{kN}}{\text{m}}$ ]	$k_{tj,opt}$ [ $\frac{\text{kN}}{\text{m}}$ ]	$f_{error}$ [–]	$n_{iter}$ [–]
P2C1	a	37,83	0,49	2,18	5744	32104	1,98E–8	4444
	b	37,55	0,57	2,28	5904	20973	2,00E–8	3176
	c	38,15	0,01	1,82	8756	31289	2,53E–8	4159
	d	37,86	0	2,22	6860	28031	1,94E–8	1788
	e	37,86	0	2,09	8380	27057	2,09E–8	1765
	∅	37,85	0,22	2,12	7129	27891		
P2C2	a	37,49	65,86	0	1021	20496	1,93E–8	649
	b	37,51	64,30	0	1048	23431	1,73E–8	824
	c	37,56	64,00	0	1049	24248	1,79E–8	979
	d	37,56	64,58	0	1045	22508	1,32E–8	864
	e	37,66	63,66	0	1061	23649	1,60E–8	688
	∅	37,55	64,48	0	1045	22866		
P2C3	a	37,96	136,4	0	2253	23849	1,32E–8	636
	b	38,05	135,3	0	2347	20887	1,01E–8	1029
	c	37,93	135,2	0	2314	28822	1,21E–8	506
	d	37,87	135,4	0	2353	28533	1,23E–8	1148
	e	37,95	134,3	0	2343	31224	1,26E–8	559
	∅	37,95	135,29	0	2322	26663		
P2C4	a	37,85	279,4	0	10259	19266	9,57E–9	702
	b	37,72	289,1	0	9542	18911	1,19E–8	833
	c	37,78	277,9	0	11350	22397	8,77E–9	547
	d	37,58	296,7	0	9144	20353	6,74E–9	523
	e	37,48	304,2	0	9059	17192	1,01E–8	888
	∅	37,68	289,5	0	9871	19624		

B Einzelergebnisse der statischen Versuchsreihe

Tabelle B.3: System- und Berechnungseigenschaften aus dem Optimierungsprozess für alle Verformungskurven der Prüfkörper P3C1, P3C2, P3C3 und P3C4

Stütze	Versuch	$EI_{opt}$ [kN m <sup>2</sup> ]	$k_{ri,opt}$ [ $\frac{\text{kN m}}{\text{rad}}$ ]	$k_{rj,opt}$ [ $\frac{\text{kN m}}{\text{rad}}$ ]	$k_{ti,opt}$ [ $\frac{\text{kN}}{\text{m}}$ ]	$k_{tj,opt}$ [ $\frac{\text{kN}}{\text{m}}$ ]	$f_{error}$ [–]	$n_{iter}$ [–]
P3C1	a	43,24	0	0	> 99999	25137	1,01E–8	375
	b	43,31	0	0	> 99999	21485	1,12E–8	761
	c	43,30	0	0	> 99999	16339	8,53E–9	438
	d	43,40	0	0	> 99999	18892	1,20E–8	458
	e	43,23	0	0	> 99999	22796	9,70E–8	448
	∅	43,29	0	0	> 99999	20930		
P3C2	a	42,97	56,96	0	1020	> 99999	1,36E–8	615
	b	43,10	56,73	0	1017	76324	1,10E–8	867
	c	42,98	56,43	0	1045	89592	1,42E–8	1053
	d	42,96	56,59	0	1049	72967	1,43E–8	985
	e	42,95	56,84	0	1038	58389	1,75E–8	696
	∅	42,99	56,71	0	1034	79454		
P3C3	a	42,85	123,2	0	2283	> 99999	6,44E–9	551
	b	42,97	122,3	0	2327	> 99999	5,07E–9	636
	c	42,91	122,5	0	2336	> 99999	5,56E–9	513
	d	42,98	121,2	0	2371	> 99999	6,81E–9	572
	e	42,88	123,0	0	2361	89762	7,24E–9	1350
	∅	42,92	122,5	0	2336	97952		
P3C4	a	43,06	265,5	1,61	72439	7092	1,39E–8	1458
	b	43,70	264,3	0	83231	7056	1,33E–8	1095
	c	43,46	264,4	0,56	78680	6903	1,50E–8	1772
	d	43,26	266,8	0,80	64893	7290	1,46E–8	1920
	e	42,46	272,0	3,11	38844	3771	9,30E–9	1692
	∅	43,19	266,6	1,22	67617	6422		

*B Einzelergebnisse der statischen Versuchsreihe*

Tabelle B.4: System- und Berechnungseigenschaften aus dem Optimierungsprozess für alle Verformungskurven der Prüfkörper P4C1, P4C2, P4C3 und P4C4

Stütze	Versuch	$EI_{opt}$ [kN m <sup>2</sup> ]	$k_{ri,opt}$ [ $\frac{\text{kN m}}{\text{rad}}$ ]	$k_{rj,opt}$ [ $\frac{\text{kN m}}{\text{rad}}$ ]	$k_{ti,opt}$ [ $\frac{\text{kN}}{\text{m}}$ ]	$k_{tj,opt}$ [ $\frac{\text{kN}}{\text{m}}$ ]	$f_{error}$ [–]	$n_{iter}$ [–]
P4C1	a	105,3 <sup>1</sup>	0	0	> 99999	10334	8,33E–9	224
	b	105,3 <sup>1</sup>	0	0	> 99999	11081	8,03E–9	215
	c	105,3 <sup>1</sup>	0	0	> 99999	10642	7,83E–9	200
	d	105,3 <sup>1</sup>	0	0	> 99999	11182	7,58E–9	223
	e	105,3 <sup>1</sup>	0	0	> 99999	10737	7,36E–9	180
	∅	105,3 <sup>1</sup>	0	0	> 99999	10795		
P4C2	a	106,8	54,31	0	1395	7682	6,68E–9	636
	b	107,7	51,89	0	1402	11694	6,65E–9	744
	c	108,1	49,90	0	1409	12704	6,39E–9	736
	d	107,4	51,58	0	1420	12761	6,70E–9	1015
	e	108,0	49,76	0	1414	12745	6,20E–9	735
	∅	107,6	51,49	0	1408	11517		
P4C3	a	102,3	158,1	1,46	2492	9484	2,37E–8	2259
	b	103,8	153,1	0	2575	9534	2,18E–8	1046
	c	102,5	154,0	1,83	2537	9764	2,42E–8	2448
	d	102,4	154,7	1,86	2537	9782	2,23E–8	2286
	e	103,4	154,2	0	2570	9935	2,34E–8	1755
	∅	102,9	154,8	1,03	2542	9700		
P4C4	a	104,5	514,4	0	11398	15895	1,58E–8	533
	b	104,5	512,6	0	10949	15910	1,42E–8	822
	c	104,7	507,0	0	11433	15976	1,37E–8	476
	d	104,4	509,3	0	10895	16236	1,45E–8	692
	e	104,2	521,4	0	10827	17017	1,46E–8	890
	∅	104,5	512,9	0	11100	16207		

<sup>1</sup>Für den Prüfkörper P4C1 wird aufgrund diffiziler Optimierungsprobleme die Biegesteifigkeit  $EI$  auf den Wert 105,3 kN m<sup>2</sup> festgelegt. Dies entspricht dem Mittelwert der optimierten Biegesteifigkeit  $EI_{opt}$  aus den Prüfkörpern P4C2, P4C3 und P4C4.

*B Einzelergebnisse der statischen Versuchsreihe*

Tabelle B.5: System- und Berechnungseigenschaften aus dem Optimierungsprozess für alle Verformungskurven der Prüfkörper P5C1, P5C2, P5C3 und P5C4

Stütze	Versuch	$EI_{opt}$ [kNm <sup>2</sup> ]	$k_{ri,opt}$ [ $\frac{kNm}{rad}$ ]	$k_{rj,opt}$ [ $\frac{kNm}{rad}$ ]	$k_{ti,opt}$ [ $\frac{kN}{m}$ ]	$k_{tj,opt}$ [ $\frac{kN}{m}$ ]	$f_{error}$ [–]	$n_{iter}$ [–]
P5C1	a	172,3	0	0	> 99999	15745	1,07E–9	552
	b	172,4	0	0	> 99999	14972	1,20E–9	547
	c	172,3	0	0	> 99999	14813	1,10E–9	770
	d	172,1	0	0	> 99999	14636	1,14E–9	422
	e	172,2	0	0	> 99999	15529	1,07E–9	633
	∅	172,3	0	0	> 99999	15139		
P5C2	a	170,2	55,06	0	1846	10066	1,60E–9	993
	b	169,6	55,27	0	1858	11180	1,41E–9	684
	c	169,3	56,40	0	1875	11409	1,34E–9	642
	d	168,9	57,28	0	1883	11080	1,24E–9	706
	e	169,1	55,31	0	1880	10950	1,21E–9	578
	∅	169,4	55,9	0	1868	10937		
P5C3	a	178,3	121,2	0	2912	7875	9,76E–10	615
	b	177,2	124,2	0	3015	8246	7,99E–10	664
	c	177,4	122,6	0	2924	8352	8,80E–10	557
	d	176,7	126,3	0	2954	8294	6,86E–10	558
	e	176,8	125,0	0	2966	8497	7,35E–10	910
	∅	177,3	123,9	0	2954	8253		
P5C4	a	176,4	458,0	0	12315	5872	1,62E–9	565
	b	177,7	440,7	0	13727	7026	1,49E–9	538
	c	177,7	440,1	0	13764	7064	1,27E–9	586
	d	177,6	441,0	0	14381	7431	1,34E–9	519
	e	176,9	446,5	0	13684	7790	1,12E–9	549
	∅	177,3	445,3	0	13574	7037		

# C Einzelergebnisse der dynamischen Versuchsreihe

Nachfolgend werden in den Tabellen C.1 bis C.6 Detailergebnisse des dynamischen Optimierungsprozesses aller Prüfkörper und Laststufen dargestellt. Dazu zählen die optimierten Systemeigenschaften, bestehend auf der Normalkraftbeanspruchung  $D_{opt}$  und den Lagersteifigkeiten  $k_{ri,opt}$ ,  $k_{rj,opt}$ ,  $k_{ti,opt}$  und  $k_{tj,opt}$ , sowie die Eigenschaften des Optimierungsprozesses selbst  $f_{error}$  (Fehlerabweichung, vgl. Abschnitt 4.1.2.1) und  $n_{iter}$  (Anzahl erforderlicher Iterationen, vgl. Abschnitt 4.1.2.3).

Tabelle C.1: System- und Berechnungseigenschaften aus dem Optimierungsprozess für die Prüfkörper P1C1, P1C2, P1C3 und P1C4

	LS	$D_{real}$ [kN]	$D_{opt}$ [kN]	$Dif_D$ [%]	$k_{ri,opt}$ [ $\frac{kNm}{rad}$ ]	$k_{rj,opt}$ [ $\frac{kNm}{rad}$ ]	$k_{ti,opt}$ [ $\frac{kN}{m}$ ]	$k_{tj,opt}$ [ $\frac{kN}{m}$ ]	$f_{error}$ [-]	$n_{iter}$ [-]
C1	1	8,36	8,09	-3,2	3,58	6,68	26067	3175	1,86E-5	2394
	2	13,36	13,26	-0,8	8,13	16,27	16160	4784	2,14E-5	5937
	3	18,36	17,02	-7,3	11,28	22,01	10239	5811	2,10E-5	2272
C2 <sup>2</sup>	1	18,36	21,02	+14,5	48,42	162,7	1033	2876	1,73E-5	1327
	2	23,36	25,72	+10,1	48,44	168,4	1034	3077	1,67E-5	1073
	3	28,36	30,03	+5,9	49,18	171,8	1030	3137	1,88E-5	1240
	4	33,36	35,18	+5,5	51,43	178,6	1021	3102	1,83E-5	1228
C3	1	18,36	16,44	-10,5	101,9	13,76	2128	< 99999	6,11E-5	1093
	2	23,36	22,38	-4,2	106,8	18,92	2069	< 99999	5,88E-5	1128
	3	28,36	27,63	-2,6	107,5	24,66	2014	< 99999	5,95E-5	1173
	4	33,36	32,12	-3,7	107,8	29,91	1982	< 99999	6,41E-5	1487
C4	1	18,36	18,73	+2,0	214,9	12,79	10985	6879	3,20E-5	1501
	2	23,36	24,59	+5,3	215,8	21,78	11115	7205	2,69E-5	1565
	3	28,36	29,18	+2,9	213,2	26,23	11516	10413	4,00E-5	1414
	4	33,36	37,38	+12,0	229,5	40,71	8950	5904	3,34E-5	1242

<sup>2</sup>Für den Prüfkörper P1C2 wird aufgrund während der Laborversuche auftretender starker Reibungskräfte der Optimierungsprozess ohne Messstelle 13 durchgeführt. Demnach stehen für die Auswertung insgesamt elf Stellen der Eigenformmessung, Messpunkte 2 bis 12, zur Verfügung.

Tabelle C.2: System- und Berechnungseigenschaften aus dem Optimierungsprozess für die Prüfkörper P2C1, P2C2, P2C3 und P2C4

	LS	$D_{real}$ [kN]	$D_{opt}$ [kN]	$Dif_D$ [%]	$k_{ri,opt}$ [ $\frac{kNm}{rad}$ ]	$k_{rj,opt}$ [ $\frac{kNm}{rad}$ ]	$k_{ti,opt}$ [ $\frac{kN}{m}$ ]	$k_{tj,opt}$ [ $\frac{kN}{m}$ ]	$f_{error}$ [-]	$n_{iter}$ [-]
C1	1	18,34	24,15	+31,7	15,90	22,73	> 99999	7418	6,20E-5	1529
	2	28,34	30,24	+6,7	19,67	32,69	> 99999	9049	5,91E-5	1520
	3	38,34	37,47	-2,3	25,52	42,13	> 99999	9592	5,85E-5	1932
C2 <sup>3</sup>	1	18,34	20,46	+11,6	37,90	265,9	1268	3064	1,50E-4	1047
	2	28,34	31,03	+9,5	41,56	253,9	1282	3628	4,11E-5	1169
	3	38,34	41,44	+8,1	43,77	247,9	1289	3412	1,55E-5	1450
	4	48,34	53,21	+10,1	49,10	260,2	1320	3064	3,20E-5	1273
	5	58,34	60,46	+3,6	46,46	262,9	1322	3318	1,91E-5	1516
	6	68,34	68,94	+0,9	46,75	269,6	1334	3424	2,10E-5	1421
C3 <sup>3</sup>	1	18,34	14,40	-21,5	114,2	189,9	2578	2325	2,90E-5	896
	2	28,34	28,40	+0,2	119,2	233,8	2619	3033	2,15E-5	924
	3	38,34	37,80	-1,4	118,7	253,7	2580	3362	2,64E-5	904
	4	48,34	48,54	+0,4	121,4	270,6	2557	3546	3,49E-5	883
	5	58,34	57,98	-0,6	123,2	262,9	2483	3217	7,28E-6	1076
	6	68,34	68,98	+0,9	126,9	300,1	2506	3938	2,05E-5	1125
C4	1	18,34	19,30	+5,3	394,4	0	10382	5563	3,77E-5	1129
	2	28,34	27,01	-4,7	389,0	8,45	11368	7547	3,72E-5	1103
	3	38,34	36,35	-5,2	398,6	17,35	11986	8389	3,71E-5	1634
	4	48,34	43,43	-10,2	402,6	20,66	13569	6815	1,63E-5	1342
	5	58,34	53,73	-7,9	402,7	31,46	13224	11785	3,82E-5	1491
	6	68,34	62,39	-8,7	403,0	38,87	13750	13533	4,07E-5	1355
	7	78,34	69,95	-10,7	396,0	45,29	14776	12301	3,18E-5	2131

<sup>3</sup>Für die Prüfkörper P2C2 und P2C3 werden aufgrund während der Laborversuche auftretender starker Reibungskräfte der Optimierungsprozess ohne Messstelle 13 durchgeführt. Demnach stehen für die Auswertung insgesamt elf Stellen der Eigenformmessung, Messpunkte 2 bis 12, zur Verfügung.

Tabelle C.3: System- und Berechnungseigenschaften aus dem Optimierungsprozess für die Prüfkörper P3C1, P3C2, P3C3 und P3C4

	LS	$D_{real}$ [kN]	$D_{opt}$ [kN]	$\gamma_D$ [%]	$k_{ri,opt}$ [ $\frac{kNm}{rad}$ ]	$k_{rj,opt}$ [ $\frac{kNm}{rad}$ ]	$k_{ti,opt}$ [ $\frac{kN}{m}$ ]	$k_{tj,opt}$ [ $\frac{kN}{m}$ ]	$f_{error}$ [-]	$n_{iter}$ [-]
C1	1	18,34	27,42	+49,5	15,14	21,79	> 99999	10887	6,20E-5	1940
	2	28,34	36,83	+30,0	23,20	32,54	> 99999	13229	6,03E-5	1481
	3	38,34	47,17	+23,0	31,39	42,88	> 99999	15041	5,87E-5	1633
	4	48,34	55,98	+15,8	39,99	51,50	> 99999	14383	5,46E-5	1696
C2	1	18,34	19,80	+8,0	50,33	23,91	1292	7729	3,34E-5	1367
	2	28,34	29,60	+4,4	50,43	44,24	1317	8765	3,23E-5	1399
	3	38,34	39,61	+3,3	50,98	62,41	1344	9732	3,02E-5	1347
	4	48,34	48,29	-0,1	51,46	77,08	1364	10965	3,19E-5	985
	5	58,34	56,90	-2,5	52,36	90,90	1386	11808	3,11E-5	2056
	6	68,34	64,27	-6,0	52,95	103,7	1403	12821	2,98E-5	1528
C3	1	18,34	18,82	+2,6	123,3	5,83	2508	7940	3,46E-5	1400
	2	28,34	30,46	+7,5	125,5	18,86	2506	10121	3,57E-5	1460
	3	38,34	40,85	+6,6	126,4	28,44	2507	11892	3,57E-5	2885
	4	48,34	50,58	+4,6	126,6	35,54	2495	13838	3,42E-5	1449
	5	58,34	60,60	+3,9	127,1	42,65	2479	17101	3,17E-5	1446
	6	68,34	70,71	+3,5	130,6	49,91	2471	21970	2,93E-5	1855
C4	1	18,34	16,31	-11,0	355,3	3,95	11219	6688	1,66E-5	1335
	2	28,34	27,25	-3,9	370,3	18,31	12002	8131	1,74E-5	17710
	3	38,34	37,36	-2,6	384,5	30,29	12914	9787	1,76E-5	1147
	4	48,34	47,73	-1,3	398,3	41,43	13748	11490	1,82E-5	1369
	5	58,34	57,42	-1,6	410,4	51,21	14403	12617	1,57E-5	1358
	6	68,34	67,31	-1,5	417,1	60,76	15012	13313	1,30E-5	1323
	7	78,34	77,13	-1,5	419,2	68,02	15510	14057	1,13E-5	1518

*C Einzelergebnisse der dynamischen Versuchsreihe*

Tabelle C.4: System- und Berechnungseigenschaften aus dem Optimierungsprozess für die Prüfkörper P4C1, P4C2, P4C3 und P4C4

	LS	$D_{real}$ [kN]	$D_{opt}$ [kN]	$Dif_D$ [%]	$k_{ri,opt}$ [ $\frac{kN \cdot m}{rad}$ ]	$k_{rj,opt}$ [ $\frac{kN \cdot m}{rad}$ ]	$k_{ti,opt}$ [ $\frac{kN}{m}$ ]	$k_{tj,opt}$ [ $\frac{kN}{m}$ ]	$f_{error}$ [-]	$n_{iter}$ [-]
C1	1	18,29	33,60	+83,7	9,31	10,15	> 99999	12074	2,74E-5	2294
	2	38,29	53,50	+39,7	25,07	28,23	> 99999	15368	4,16E-5	2027
	3	58,29	72,11	+23,7	38,40	46,88	> 99999	16611	4,14E-5	1840
	4	78,29	90,94	+16,2	51,37	64,25	> 99999	17473	3,93E-5	1529
	5	88,29	98,86	+12,0	57,91	71,39	> 99999	18299	4,16E-5	2304
C2	1	18,29	25,40	+38,9	26,67	14,65	1579	9253	2,65E-5	2505
	2	38,29	43,47	+13,5	27,14	35,78	1630	12730	2,53E-5	2590
	3	58,29	60,48	+3,8	27,29	53,36	1673	14391	2,46E-5	2941
	4	78,29	76,53	-2,2	26,58	70,92	1702	14888	2,88E-5	3855
	5	98,29	94,35	-4,0	28,51	88,15	1737	17836	3,00E-5	3350
	6	108,29	104,47	-3,5	30,33	96,18	1756	18391	3,00E-5	2985
C3	1	18,29	38,93	+112,9	119,8	8,20	2812	4832	3,03E-5	1995
	2	38,29	57,24	+49,5	125,7	27,70	2851	6057	2,98E-5	1743
	3	58,29	68,97	+18,3	125,9	38,79	2860	7377	2,64E-5	1425
	4	78,29	87,70	+12,0	132,3	52,54	2880	8186	2,89E-5	2142
	5	98,29	97,76	-0,5	127,9	58,14	2842	9293	2,50E-5	1736
	6	118,29	110,51	-6,6	131,3	65,71	2895	10296	2,64E-5	1572
C4	1	18,29	43,51	137,9	471,7	0	11090	6735	4,96E-5	897
	2	38,29	53,85	40,7	492,1	12,07	12640	8608	4,84E-5	1127
	3	58,29	71,58	22,8	543,8	27,18	14095	10613	4,24E-5	1105
	4	78,29	87,54	11,8	610,2	39,66	16273	11302	4,53E-5	1598
	5	98,29	105,46	7,3	705,2	51,92	18780	12315	4,34E-5	1353
	6	118,29	123,15	4,1	767,7	63,90	20280	13189	4,06E-5	1179
	7	128,29	132,21	3,1	786,8	69,89	20396	13624	3,90E-5	1298

Tabelle C.5: System- und Berechnungseigenschaften aus dem Optimierungsprozess für die Prüfkörper P5C1, P5C2 und P5C3 (für P5C4 s. Tabelle C.6)

	LS	$D_{real}$ [kN]	$D_{opt}$ [kN]	$Dif_D$ [%]	$k_{ri,opt}$ [ $\frac{kNm}{rad}$ ]	$k_{rj,opt}$ [ $\frac{kNm}{rad}$ ]	$k_{ti,opt}$ [ $\frac{kN}{m}$ ]	$k_{tj,opt}$ [ $\frac{kN}{m}$ ]	$f_{error}$ [-]	$n_{iter}$ [-]
C1	1	18,29	39,70	+117,1	22,23	14,36	> 99999	10561	3,73E-5	2340
	2	38,29	63,91	+66,9	40,44	36,80	> 99999	12797	3,94E-5	1590
	3	58,29	85,98	+47,5	57,65	54,33	> 99999	14063	4,41E-5	1982
	4	78,29	105,06	+34,2	71,35	68,26	> 99999	15166	4,45E-5	1739
	5	98,29	123,87	+26,0	85,20	81,32	> 99999	16427	4,41E-5	1764
	6	118,29	143,20	+21,1	100,2	97,48	> 99999	18330	4,30E-5	1775
	7	138,29	164,21	+18,8	114,8	112,6	> 99999	19269	4,25E-5	1906
	8	148,29	174,39	+17,6	122,3	120,1	> 99999	20267	4,24E-5	1409
C2	1	18,29	37,67	+106,0	33,02	22,08	2459	9796	3,34E-5	2924
	2	38,29	60,81	+58,8	33,51	58,85	2535	11465	3,18E-5	2717
	3	58,29	79,48	+36,4	32,83	82,52	2586	15577	3,35E-5	2944
	4	78,29	99,92	+27,6	33,65	100,3	2630	16824	3,38E-5	3009
	5	98,29	122,55	+24,7	36,12	120,2	2685	16415	3,77E-5	3249
	6	118,29	142,74	+20,7	37,38	135,4	2734	19659	3,98E-5	3264
	7	138,29	161,53	+16,8	38,12	148,9	2774	21015	3,89E-5	3653
	8	158,29	180,60	+14,1	38,69	163,2	2814	22650	3,47E-5	3092
C3	1	18,29	36,10	+97,4	125,7	0	3823	5318	3,05E-5	1478
	2	38,29	48,47	+26,6	122,2	17,16	3840	6841	2,83E-5	2065
	3	58,29	68,21	+17,0	125,1	33,39	3896	7862	2,96E-5	2511
	4	78,29	88,99	+13,7	130,4	49,85	3965	8690	3,01E-5	1990
	5	98,29	108,75	+10,6	134,6	65,69	3989	10597	3,16E-5	2469
	6	118,29	128,73	+8,8	140,7	79,97	4018	11762	3,42E-5	2181
	7	138,29	147,65	+6,8	147,1	91,22	4059	12937	3,56E-5	1969
	8	158,29	166,45	+5,2	154,8	103,2	4150	14105	3,78E-5	2198

Tabelle C.6: System- und Berechnungseigenschaften aus dem Optimierungsprozess für den Prüfkörper P5C4

LS	$D_{real}$ [kN]	$D_{opt}$ [kN]	$Dif_D$ [%]	$k_{ri,opt}$ [ $\frac{kNm}{rad}$ ]	$k_{rj,opt}$ [ $\frac{kNm}{rad}$ ]	$k_{ti,opt}$ [ $\frac{kN}{m}$ ]	$k_{tj,opt}$ [ $\frac{kN}{m}$ ]	$f_{error}$ [-]	$n_{iter}$ [-]	
	1	18,29	78,36	+329	791,1	0	14062	3313	1,37E-4	935
	2	38,29	57,72	+50,7	736,0	0	15889	7557	5,50E-5	435
	3	58,29	56,98	-2,3	739,6	0	17430	8478	3,57E-5	972
	4	78,29	58,96	-24,7	779,4	0	20089	9216	3,01E-5	637
C4	5	98,29	79,44	-19,2	871,3	0	23206	5451	3,68E-5	1008
	6	118,29	98,42	-16,8	928,3	11,88	25358	6073	3,55E-5	1661
	7	138,29	119,64	-13,5	981,6	25,94	26785	6673	3,62E-5	1603
	8	158,29	142,97	-9,7	1035	40,36	27862	7348	3,51E-5	1551
	9	178,29	166,05	-6,9	1123	54,28	28064	7927	3,33E-5	1221

---

# Lebenslauf

## Persönliche Daten

Name: Stefan Dudenhausen (geb. Oertker)

## Akademische Ausbildung

07/2020 – 05/2024 Doktor-Ingenieur, Rheinland-Pfälzische Technische Universität  
Kaiserslautern-Landau (RPTU), Bauingenieurwesen

09/2014 – 01/2017 Master of Science, FH Münster, Bauingenieurwesen,  
Vertiefung: Hoch- und Ingenieurbau

09/2011 – 08/2014 Bachelor of Engineering, FH Münster, Bauingenieurwesen,  
Vertiefung: Konstruktiver Ingenieurbau

## Schulische Ausbildung

08/2007 – 06/2010 Abitur am Augustin-Wibbelt-Gymnasium in Warendorf