Integrationstheorie

Skriptmitschrift

Vorlesung im Wintersemester 1997/1998
Dozent: Prof. Dr. Rosenberger
Skriptmitschrift von Thomas Feher
Überarbeitet von Wolfgang Eiden

Inhaltsverzeichnis

1. Integration von Funktionen einer Reellen Veränderlichen

Bei vielen Problemen in der Physik und Technik tritt die Frage auf, ob man Aussagen über das Änderungsverhalten einer Funktion in einem Intervall I machen kann, wenn man ihre Änderungsrate (also ihre Ableitung) in jedem Punkt von I kennt, ja ob man die Funktion nicht sogar aus ihrer Änderungsrate wiedergewinnen, rekonstruieren kann. Man steht dann vor dem folgenden Problem: Auf I ist eine Funktion gegeben, von der man weiß, daß sie die Ableitung einer (zunächst noch unbekannten) Funktion ist, d.h. gegeben ist f auf I, gesucht ist F mit F'=f. Dieses Problem läuft im wesentlichen auf die Frage hinaus, wie man zu einer gegebenen Funktion f auf I eine Stammfunktion F bestimmen kann.
Bei vielen Untersuchungen drängt sich eine weitere Frage auf, nämlich die, ob eine vorgelegte Funktion f, von der man nicht a priori weiß, ob sie eine Ableitungsfunktion ist, doch als solche aufgefaßt werden kann, die Frage also, ob f überhaupt eine Stammfunktion besitzt.
In diesem Kapitel sollen diese beiden Probleme ausführlich erörtert werden. Dabei werden nur Stammfunktionen von Regelfunktionen eingeführt, wobei die Klasse der Regelfunktionen zwischen der Klasse der stetigen und der der Riemann-integrierbaren Funktionen liegt. Die Stammfunktion wird zunächst für gewisse einfache Funktionen, die sogenannten Treppenfunktionen, direkt erklärt und dann über einen Approximationsprozeß auf allgemeine Funktionen ausgedehnt.
Falls nicht ausdrücklich etwas anderes erwähnt wird, sollen alle auftretenden Zahlen und Funktionen reell sein, obwohl die meisten Aussagen auch für komplexwertige Funktionen einer reellen Variablen gültig sind.

§ 1 Treppenfunktionen, Regelfunktionen und ihre Integration über kompakte Intervalle

In diesem Abschnitt wird das Integral für die Klasse der Regelfunktionen eingeführt, indem es zunächst für gewisse einfache Funktionen, die sogenannten Treppenfunktionen, direkt erklärt und dann über einen Approximationsprozeß auf allgemeine Funktionen ausgedehnt wird.

(1.1) ***Definition:*** Sei I ein Intervall mit den Endpunkten a und b, a<b.

1) Eine Menge $Z:=\{x_0, x_1, ..., x_m\}$, $m \in \mathbf{N}$ mit $x_0:=a<x_1<...<x_m:=b$ heißt eine **Zerlegung von I**. x_k heißt **Zerlegungspunkt**.
2) Jede Zerlegung Z_1 von I mit $Z \subseteq Z_1$ heißt eine **Verfeinerung von Z**.
3) Eine Funktion $T: I \to \mathbf{R}$ heißt eine **Treppenfunktion**, wenn es eine Zerlegung $Z=\{x_0, x_1, ..., x_m\}$ von I gibt, so daß T auf jedem offenen Teilintervall (x_{j-1},x_j), $j \in \{1, ..., m\}$ konstant ist. $\mathscr{T}(I)$ bezeichne die Gesamtheit aller Treppenfunktionen auf I.

(1.2) ***Lemma:*** Sei T eine Treppenfunktion auf [a,b]. Sei $Z=\{x_0, x_1, ..., x_m\}$ eine Zerlegung von [a,b], so daß $T(x)=c_k$ für $x \in (x_{k-1},x_k)$, $k \in \{1, .., m\}$. Dann gilt:

1) T ist beschränkt auf [a,b], d.h. es gibt ein M>0 mit $|T(x)| \leq M$ für alle $x \in [a,b]$.
2) Der Wert $\sum_{k=1}^{m} c_k (x_k - x_{k-1})$ ist unabhängig von der Wahl der Zerlegung von [a,b].

Beweis:

ad 1): Setze M:=max{ $|c_j|, |T(x_j)|, |T(x_0)|$: $j \in \{1, ..., m\}$}

ad 2): Sei $Z_0=\{y_0, y_1, ..., y_n\}$ eine weitere Zerlegung von [a,b], dann ist $Z_0 \cup Z$ eine Verfeinerung von Z_0 und Z.
Sei $k \in \{1, ..., m\}$, dann habe (x_{k-1},x_k) weitere Teilungspunkte $t_i, t_{i+1}, ..., t_{r+i}$,
d.h. $x_{k-1}<t_i<t_{i+1}< ...<t_{r+i}<x_k$.

Dann gilt: $c_k\cdot(x_k-x_{k-1})= c_k\cdot(x_k-t_{r+i}) + \sum_{s=1}^{r} c_k \cdot (t_{i+s} - t_{i+s-1}) + c_k\cdot(t_i-x_{k-1})$.

Setzt man für $f: I\to\mathbf{R}$

$$\|f\|_\infty := \begin{cases} \sup_{x\in I} |f(x)| & \text{falls f auf I beschränkt ist} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

dann gilt für jede Treppenfunktion $T:[a,b]\to\mathbf{R}$ stets $\|T\|_\infty < \infty$. q.e.d.

(1.3) ***Definition:*** Sei $T:[a,b]\to\mathbf{R}$ eine Treppenfunktion auf [a,b], $Z=\{x_0, x_1, ..., x_m\}$ eine Zerlegung von [a,b] mit $T(x)=c_k$ für $x \in (x_{k-1},x_k)$, $k \in \{1,..., m\}$. Dann heißt die Zahl

$\int_a^b T(x)\,dx := \sum_{k=1}^{m} c_k \cdot (x_k - x_{k-1})$ das **Integral von T auf [a,b]**.

Für Treppenfunktionen gelten folgende einfach nachzuweisende Eigenschaften:

(1.4) ***Lemma:*** Sind T und S Treppenfunktionen auf [a,b], $\alpha,\beta \in \mathbf{R}$, so gilt:

1) $\alpha\cdot S+\beta\cdot T$ ist eine Treppenfunktion auf [a,b] und es gilt
$$\int_a^b (\alpha \cdot S + \beta \cdot T)(x)\,dx = \alpha \cdot \int_a^b S(x)\,dx + \beta \cdot \int_a^b T(x)\,dx$$
2) $$\left|\int_a^b T(x)\,dx\right| \le \int_a^b |T(x)|\,dx \le (b-a)\cdot\|T\|_\infty$$
3) $\int_a^b T(x)\,dx \le \int_a^b S(x)\,dx$, wenn $T(x) \le S(x)$, für $x \in [a,b]$

Wir wollen nun den Integralbegriff auf eine größere Klasse von Funktionen ausdehnen, nämlich auf die Klasse der Regelfunktionen, und zwar so, daß die Aussagen von Lemma (1.4) auch weiterhin sinngemäß gelten.

(1.5) ***Definition:*** Sei $I\subseteq\mathbf{R}$ ein Intervall mit den Randpunkten a und b, wobei $-\infty \le a < b \le \infty$. Eine Funktion $f: I\to\mathbf{R}$ heißt eine **Regelfunktion auf I**, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

1) für $x_0 \in (a,b)$ existieren $\lim_{x\to x_0^+} f(x) := \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x)$ und $\lim_{x\to x_o^-} f(x) := \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x)$
2) ist $a \in I$, so existiert $\lim_{x\to a^+} f(x)$
3) ist $b \in I$, so existiert $\lim_{x\to b^-} f(x)$

$\mathfrak{R}(I)$ bezeichne die Menge aller Regelfunktionen auf I.

Sind f und g Regelfunktionen auf dem Intervall I, so werden durch sie eine ganze Reihe neuer Regelfunktionen auf I erzeugt. Der folgende Satz faßt einige davon zusammen und kann als Übungsaufgabe bewiesen werden.

(1.6) ***Satz:*** Sei $I \subseteq \mathbf{R}$ ein Intervall mit den Randpunkten a und b, a<b. Sind f und g Regelfunktionen auf I, so sind auch die folgenden Funktionen Regelfunktionen auf I:
1) $|f|: I \to \mathbf{R}$ mit $|f|(x) := |f(x)|$ für $x \in I$
2) $f \cdot g: I \to \mathbf{R}$ mit $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ für $x \in I$
3) $\max(f,g): I \to \mathbf{R}$ mit $\max(f,g)(x) := \max\{f(x), g(x)\}$, $x \in I$
4) $\min(f,g): I \to \mathbf{R}$ mit $\min(f,g)(x) := \min\{f(x), g(x)\}$, $x \in I$
5) $f_+: I \to \mathbf{R}$ mit $f_+(y) := \lim\limits_{x \to y^+} f(x)$ für $y \neq b$ und $f_+(b) := f(b)$, wenn $b \in I$
6) $f_-: I \to \mathbf{R}$ mit $f_-(y) := \lim\limits_{x \to y^-} f(x)$ für $y \neq a$ und $f_-(a) := f(a)$, wenn $a \in I$

(1.7) ***Satz:*** Ist $I \subseteq \mathbf{R}$ ein Intervall, $f: I \to \mathbf{R}$ stetig oder monoton, so ist f eine Regelfunktion auf I.

Beweis:

Ist $f: I \to \mathbf{R}$ stetig, so folgt die Behauptung unmittelbar aus der Definition.
Ist f monoton wachsend auf I und $x_0 \in I$ mit $x_0 > a$, wobei a linker Randpunkt von I ist, dann gilt: $f(x_0) \geq f(x)$ für $x \in (a, x_0)$, d.h. $s := \sup\{f(x) : x \in (a, x_0)\}$ existiert.
Sei $\varepsilon > 0$, wir wählen $\xi \in (a, x_0)$ mit $s - \varepsilon < f(\xi)$, dann gilt: $s - \varepsilon < f(x) \leq s$ für alle $x \in (\xi, x_0)$.
Also gilt $s = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.
Ähnlich zeigt man für $x_0 < b$, b rechter Randpunkt von I, daß
$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = t := \inf\{f(x) : x \in (x_0, b)\}$.

(1.8) ***Definition:*** Sei $I \subseteq \mathbf{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f: I \to \mathbf{R}$ heißt **stückweise monoton** bzw. **stückweise stetig**, wenn es eine Zerlegung $Z = \{x_0, x_1, ..., x_m\}$ zu $[a,b] \subseteq I$ mit a<b gibt, so daß f in jedem Teilintervall (x_{j-1}, x_j), $j \in \{1, ..., m\}$ monoton bzw. stetig ist und in jedem Punkt $x \in I$ der linksseitige und rechtsseitige Grenzwert existiert.

Unmittelbar aus dem Beweis zu Satz (1.7) ergibt sich

(1.9) ***Korollar:*** Sei $I \subseteq \mathbf{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbf{R}$ stückweise stetig oder stückweise monoton. Dann ist f eine Regelfunktion auf I.

Grundlage für die beabsichtigte Erweiterung des Integralbegriffes auf eine größere Klasse von Funktionen ist der folgende Approximationssatz, der zeigt, daß sich Regelfunktionen durch Treppenfunktionen approximieren lassen.

(1.10) ***Satz:*** Für eine Funktion $f: [a,b] \to \mathbf{R}$ sind folgende Aussagen äquivalent:
1) f ist eine Regelfunktion auf [a,b]
2) zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Treppenfunktion $T: [a,b] \to \mathbf{R}$ mit $|f(x) - T(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in [a,b]$
3) zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Treppenfunktion $T: [a,b] \to \mathbf{R}$ mit $\|f - T\|_\infty < \varepsilon$
4) es gibt eine Folge $(T_j)_{j \in \mathbf{N}}$ von Treppenfunktionen T_j auf [a,b] mit $\lim\limits_{j \to \infty} \|f - T\|_\infty = 0$

Bemerkung: Die Eigenschaft $\|f-T\|_\infty \le \varepsilon$ bedeutet geometrisch, daß der Graph von T in dem „ε-Streifen" von f verläuft, die Treppenfunktion T also in ihrem ganzen Verlauf auf I dicht genug bei f bleibt.

Beweis:

1) $\Rightarrow$ 2):
Angenommen, 2) gilt nicht: es gibt $\varepsilon_0>0$, so daß für *jede* Treppenfunktion T: $[a,b]\to\mathbf{R}$ ein $x_T \in [a,b]$ mit $|f(x_T)-T(x_T)|>\varepsilon_0$ existiert.
Durch Halbierung des Intervalles erhalten wir $\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\left[\frac{a+b}{2},b\right]$.
Auf einem dieser Teilintervalle gilt 2) ebenfalls nicht, dieses Teilintervall sei $[a_1,b_1]$. Durch Halbierung von $[a_1,b_1]$ erhalten wir $[a_2,b_2]$, auf dem 2) wieder nicht gilt.
Wir konstruieren also eine Folge $([a_n,b_n])_{n\in\mathbf{N}}$ von Intervallen mit $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$ und $[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$ für $n\in\mathbf{N}$ und der Eigenschaft
(*) zu jedem $n\in\mathbf{N}$ und zu jeder Treppenfunktion T_n: $[a_n,b_n]\to\mathbf{R}$ existiert ein Punkt $x_{T,n}\in[a_n,b_n]$ mit $|f(x_{T,n})-T_n(x_{T,n})|>\varepsilon_0$.
Die Intervallschachtelung definiert einen Punkt $x_0\in(a,b)$. Da f Regelfunktion ist, existieren $c_r:=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ und $c_l:=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$. Zu ε_0 existiert ein $\delta>0$ mit
$|f(x)-c_r|<\varepsilon$ für $x\in(x_0,x_0+\delta]$ und $|f(x)-c_l|<\varepsilon_0$ für $x\in[x_0-\delta,x_0)$.
Wähle $N\in\mathbf{N}$ so groß, daß $[a_N,b_N]\subseteq[x_0-\delta,x_0+\delta]$. Auf $[a_N,b_N]$ betrachte Treppenfunktion S:

$$S(x):=\begin{cases} c_l & x\in[a_N,x_0) \\ f(x_0) & x=x_0 \\ c_r & x\in(x_0,b_N] \end{cases}$$

, dann gilt:
$|f(x)-S(x)|<\varepsilon_0$ für alle $x\in[a_N,b_N]$ ist im Widerspruch zu (*).

2) $\Rightarrow$ 3)
Aus $|f(x)-T(x)|<\varepsilon$ für alle $x\in[a,b]$ folgt $\|f-T\|_\infty=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)-T(x)|\le\varepsilon$

3) $\Rightarrow$ 4)
Zu $j\in\mathbf{N}$ existiert eine Treppenfunktion T_j auf [a,b] mit $\|f-T\|_\infty\le\frac{1}{j}$, so daß $\lim\limits_{j\to\infty}\|f-T\|_\infty=0$.

4) $\Rightarrow$ 1)
Wir beweisen nur $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ für $x_0\in[a,b)$ beliebig.

Sei $\varepsilon>0$, dann existiert eine Treppenfunktion T: $[a,b]\to\mathbf{R}$ mit $\|f-T\|_\infty<\frac{\varepsilon}{2}$. Sei (x_0,t) ein Intervall, auf dem T konstant ist. Dann gilt für alle $x,y\in(x_0,t)$:
$|f(x)-f(y)|\le|f(x)-T(x)|+|T(x)-f(y)|<\varepsilon$. Nach dem Cauchy-Kriterium existiert der rechtsseitige Grenzwert. q.e.d.

(1.11) ***Korollar:*** Sei $I\subseteq\mathbf{R}$ ein Intervall: f: $I\to\mathbf{R}$ ist genau dann eine Regelfunktion auf I, wenn zu jedem Intervall $[a,b]\subseteq I$ eine Folge von Treppenfunktionen T_n: $[a,b]\to\mathbf{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|f\,|[a,b]-T_n\right\|_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)-T_n(x)|=0$ (d.h. T_n konvergiert auf [a,b] gleichmäßig gegen f)

Auch folgende Charakterisierung von Regelfunktionen erweist sich als nützlich:

(1.12) ***Korollar:*** Eine Funktion f: $[a,b]\to\mathbf{R}$ ist genau dann eine Regelfunktion auf [a,b], wenn eine Folge $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ von Treppenfunktionen auf [a,b] existiert, so daß

1) $\|T_n\|_\infty < \infty$ für $n \in \mathbf{N}$
2) $\sum_{j=1}^{\infty}\|T_j\|_\infty < \infty$
3) $f(x)=\sum_{j=1}^{\infty} T_j(x)$ für jedes $x \in [a,b]$

Beweis:

„⇒“: Sei f eine Regelfunktion, zu $j \in \mathbf{N}$ existiert Treppenfunktion S_j mit $\|f-S_j\|_\infty < \frac{1}{2^j}$.

Wir setzen $S_0:= 0$, $T_j:= S_j-S_{j-1}$, $j \in \mathbf{N}$. Dann gilt: $\|T_j\|_\infty = \|S_j-S_{j-1}\|_\infty \le \|S_j\|_\infty + \|S_{j-1}\|_\infty < \infty$

$$|f(x)-\sum_{j=1}^{n} T_j(x)| = |f(x)-\sum_{j=1}^{n} S_j(x)-S_{j-1}(x)| = |f(x)-S_n(x)| \le \|f-S_n\|_\infty < \frac{1}{2^n}.$$

$n\to\infty$ liefert $f(x)=\sum_{j=1}^{\infty} T_j(x)$.

Da $\|T_j\|=\|S_j-S_{j-1}\|\le\|S_j-f\|+\|f-S_{j-1}\|<\frac{1}{2^j}+\frac{1}{2^{j-1}}=\frac{3}{2^j}$, gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty}\|T_j\| \le 3\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j} < \infty .$$

„⇐“: f habe die angegebene Darstellung, wir betrachten die Folge $(S_n)_n$ der Partialsummen $S_n=\sum_{j=1}^{n} T_j$ von $f(x)=\sum_{j=1}^{\infty} T_j(x)$.

Sei $\varepsilon>0$, dann existiert wegen 2) ein $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ mit $\sum_{j=m+1}^{n}\|T_j\|_\infty < \varepsilon$ für alle $m,n \ge N_\varepsilon$ (n>m)

$$\Rightarrow \|S_n-S_m\|_\infty = \left\|\sum_{j=m+1}^{n} T_j\right\|_\infty \le \sum_{j=m+1}^{n}\|T_j\|_\infty < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ $(\|S_n\|_\infty)_{n\in\mathbf{N}}$ ist Cauchyfolge bzgl. $\|.\|_\infty$, insbesondere ist $(S_n(x))_n$ eine Cauchyfolge in $\mathbf{R}$ für jedes x, also konvergent in $\mathbf{R}$

$\Rightarrow |S_m(x)-S_n(x)| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)-S_n(x)| \le \varepsilon$ für $m\to\infty$ und alle $x \in [a,b]$

$\Rightarrow \|f-S_n\|_\infty \to 0$, $n\to\infty$. q.e.d.

(1.13) ***Korollar:*** Sei I ein Intervall mit den Randpunkten a und b. Dann gilt für jede Regelfunktion f: $I\to\mathbf{R}$:

1) f ist beschränkt auf I, wenn I=[a,b]
2) f ist stetig auf $I \setminus I_0$, wobei $I_0\subseteq I$ eine höchstens abzählbare Teilmenge ist

Beweis:

ad 2)

Da $(a,b) = \bigcup_{n\in N}\left[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right]$ $(-\infty,b) = \bigcup_{n\in N}\left[-n, b-\frac{1}{n}\right]$

$(a,\infty) = \bigcup_{n\in N}\left[a+\frac{1}{n}, n\right]$ $\mathbf{R} = \bigcup_{n\in N}[-n, n]$,

genügt es, die Behauptung für [a,b] zu zeigen. Da f Regelfunktion ist, gibt es eine Folge $(T_j)_j$ von Treppenfunktionen auf [a,b] mit $f(x)=\sum_{j=1}^{\infty} T_j(x)$, $x \in [a,b]$.

f ist in $x_0 \in [a,b]$ höchstens dann unstetig, wenn mindestens eine der Treppenfunktionen T_j in x_0 unstetig ist.
Da jede Treppenfunktion nur endlich viele Unstetigkeitsstellen hat, folgt die Behauptung.

q.e.d.

Für die Definition des Integrals von Regelfunktionen über kompakte Intervalle ist das folgende Ergebnis von entscheidender Bedeutung:

(1.14) ***Satz:*** Sei f eine Regelfunktion auf [a,b]. Seien $(T_j)_j$ und $(S_k)_k$ Folgen von Treppenfunktionen auf [a,b] mit $\lim_{k\to\infty}\|f-S_k\|_\infty = 0$ und $\lim_{j\to\infty}\|f-T_j\|_\infty = 0$. Dann existieren die Grenzwerte $\lim_{j\to\infty}\int_a^b T_j(x)\,dx$ und $\lim_{k\to\infty}\int_a^b S_k(x)\,dx$, und es gilt:

$$\lim_{j\to\infty}\int_a^b T_j(x)\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_a^b S_k(x)\,dx.$$

Beweis:

Da

$$\left|\int_a^b T_j(x)\,dx - \int_a^b T_l(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b \big(T_j(x)-T_l(x)\big)dx\right| \le \int_a^b \big|T_j(x)-T_l(x)\big|\,dx \le \int_a^b \|T_j - T_l\|_\infty\,dx$$

$$\le (b-a)\cdot\|T_j - T_l\|_\infty \le (b-a)\cdot\big(\|T_j - f\|_\infty + \|f - T_l\|_\infty\big),$$

bilden die Zahlen $I_n := \int_a^b T_n(x)\,dx$ eine Cauchyfolge in **R**, die in **R** gegen einen Grenzwert konvergiert. Ebenso konvergiert $J_m := \int_a^b S_m(x)\,dx$ gegen einen Grenzwert in **R**.

Wir mischen die Folgen $(S_j)_j$, $(T_k)_k$ (*Reißverschlußprinzip*), etwa $S_1,T_1,S_2,T_2,S_3,T_3,\ldots$; die neue Folge von Treppenfunktionen sei $(R_p)_{p\,\in\,\mathbf{N}}$ genannt. Es ist $\lim_{p\to\infty}\|f - R_p\| = 0$. Der Grenzwert $\lim_{p\to\infty}\int_a^b R_p(x)\,dx$ existiert ebenfalls, etwa gegen I. Deshalb konvergieren die Teilfolgen I_n und J_m ebenfalls gegen I.

q.e.d.

Dieses Ergebnis rechtfertigt erst die folgende Definition:

(1.15) ***Definition:*** Sei I ein Intervall, f: I→**R** eine Regelfunktion. Seien a,b ∈ I mit a<b. Ist $(T_j)_j$ eine Folge von Treppenfunktionen auf [a,b] mit $\lim_{n\to\infty}\|f - T_n\|_\infty = 0$, dann heißt der Grenzwert $\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{n\to\infty}\int_a^b T_n(x)\,dx$ das **Integral von f über [a,b]** und f **über [a,b] integrierbar**. Wir setzen:

$$\int_a^a f(x)\,dx := 0 \quad \text{und} \quad \int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$$

Das Integral ist somit für jede auf [a,b]⊆I stückweise stetige bzw. stückweise monotone Funktion erklärt.

Beispiel:

Sei f: [0,1]→**R** mit $f(x) := \begin{cases} 1 & x \in Q \cap [0,1] \\ 0 & x \in (R - Q) \cap [0,1] \end{cases}$ Ist f integrierbar? Nein!

Es gelten die folgenden Grundregeln, die wir in einem Satz zusammenfassen und deren Beweise als leichte Übungsaufgaben bearbeitet werden können.

(1.16) ***Satz:*** Sei I⊆**R** ein Intervall. Seien f: I→**R**, g: I→**R** Regelfunktionen, $\alpha,\beta \in$ **R**. Dann sind $\alpha\cdot f+\beta\cdot g$, f·g und – falls $|g(x)| \geq c > 0$ für x ∈ I ist – auch $\frac{f}{g}$ Regelfunktionen auf I. Für beliebige a,b ∈ I gilt:

1) $\int_a^b (\alpha\cdot f + \beta\cdot g)(x)\,dx = \alpha\cdot\int_a^b f(x)\,dx + \beta\cdot\int_a^b g(x)\,dx$

2) $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$ für c ∈ I mit a<b<c

   (eigentlich c beliebig, da $\int_b^a \ldots$ für a<b auch definiert ist)

3) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \leq (b-a)\cdot\|f\|_\infty = (b-a)\cdot\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$

4) $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$, wenn f(x)≤g(x) für x ∈ [a,b]. Sind f und g stetig auf [a,b] und gilt $f(x_0)<g(x_0)$ für ein $x_0 \in [a,b]$, dann gilt $\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$

5) Ist $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine gleichmäßig konvergente Folge von Regelfunktionen auf [a,b], dann ist die Grenzfunktion f: [a,b]→**R** mit $f(x):=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ eine Regelfunktion auf [a,b]. Es gilt: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$.

Satz (1.16) liefert ohne große Schwierigkeiten den Mittelwertsatz, der in einem Spezialfall geometrisch wie folgt gedeutet werden kann: Der Flächeninhalt unter dem Graphen einer (positiven) Funktion f ist gleich dem Flächen-inhalt eines Rechtecks über [a,b] mit einem geeigneten mittleren Funktionswert von f als Höhe. Die Schwierigkeit dabei wird angedeutet durch das Wort „geeignet", da man nicht genau weiß, an welcher Stelle im Intervall [a,b] der Funktionswert zu berechnen ist.

(1.17) ***Satz:*** (**verallgemeinerter Mittelwertsatz der Integralrechnung**):
Sei I⊆**R** ein Intervall. Sei f: I→**R** stetig. Sei p: I→**R** eine Regelfunktion mit p(x)≥0 für $x\in[a,b]\subseteq I$. Dann gibt es ein $\xi\in[a,b]$, so daß $\int_a^b f(x)\cdot p(x)\,dx = f(\xi)\cdot\int_a^b p(x)\,dx$.

Insbesondere gibt es ein $\xi\in[a,b]$ mit $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\cdot(b-a)$.

Die Funktion p: [a,b]→R heißt oftmals auch **Gewichtsfunktion**.

Beweis:

f ist stetig auf [a,b]. Also existieren $M:=\max_{x\in[a,b]} f(x)$ und $m:=\min_{x\in[a,b]} f(x)$. Ebenso gilt $m\cdot p(x)\le f(x)\cdot p(x)\le M\cdot p(x)$ für $x\in[a,b]$ und damit $m\cdot\int_a^b p(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\cdot p(x)\,dx \le M\cdot\int_a^b p(x)\,dx$.

Also gibt es $\mu\in[m,M]$ mit $\mu\cdot\int_a^b p(x)\,dx = \int_a^b f(x)\cdot p(x)\,dx$. Da f auf [a,b] stetig, gilt nach dem Zwischenwertsatz:
es gibt $\xi\in[a,b]$ mit $\mu=f(\xi)$. q.e.d.

Beispiel:

$$\int_a^b x^m\,dx = \frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$$

Beweis:

f: [a,b]→**R** mit $f(x)=x^m$ ist stetig, damit eine Regelfunktion auf [a,b], a<b.
Sei $Z=\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ die Zerlegung von [a,b] mit $x_j = a+\frac{b-a}{n}\cdot j$, setze $T_n(x):=x_{j-1}^m$ für $x\in[x_{j-1},x_j) \Rightarrow \int_a^b T_n(x)\,dx = \sum_{j=1}^n x_{j-1}^m\cdot(x_j-x_{j-1}) = \sum_{j=1}^n\left(\left(a+\frac{b-a}{n}\right)(j-1)\right)^m\frac{b-a}{n}$.

Es gilt: $\|f-T_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} \left|x^m - T_n(x)\right| = \sup\limits_{\substack{[x_{j-1},x_j)\\ j\in\{1,\dots,n\}}} \left|x^m - T_n(x)\right| \leq \sup\limits_{j\in\{1,\dots,n\}} \left|x_j^m - x_{j-1}^m\right|$

$$= \sup_{j\in\{1,\dots,n\}} \left|\left(a+\frac{b-a}{n}\cdot j\right)^m - \left(a+\frac{b-a}{n}\cdot(j-1)\right)^m\right|$$

Speziell für a=0, b>0:

$\Rightarrow \int\limits_0^b T_n(x)\,dx = \sum\limits_{j=1}^{n-1}\left(\frac{b}{n}\right)^{m+1}\cdot j^m$ und $\|f-T_n\|_\infty \leq \sup\limits_{j\in\{1,\dots,n\}}\left(\frac{b}{n}\right)^m\cdot\left(j^m-(j-1)^m\right)$

Setze $g(x):= x^m-(x-1)^m \Rightarrow g'(x) = m\cdot x^{m-1}-m\cdot(x-1)^{m-1} = m\cdot(x^{m-1}-(x-1)^{m-1}) \geq 0$

$\Rightarrow$ g(x) monoton steigend

$\Rightarrow \|f-T_n\|_\infty \leq \left(\frac{b}{n}\right)^m\cdot(n^m-(n-1)^m) = b^m\cdot\left(1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^m\right)$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\|f-T_n\|_\infty = 0$

$\Rightarrow \int\limits_a^b x^m\,dx = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^b T_n(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n-1}\left(\frac{b}{n}\right)^{m+1}\cdot j^m = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{b}{n}\right)^{m+1}\cdot\sum\limits_{j=1}^{n-1} j^m$

Nun gilt: $\frac{1}{n^{m+1}}\sum\limits_{j=1}^{n-1} j^m \leq \frac{1}{m+1} \leq \frac{1}{n^{m+1}}\sum\limits_{j=1}^{n} j^m$ für alle $n \in \mathbf{N}$

$\Rightarrow \frac{1}{n^{m+1}}\sum\limits_{j=1}^{n-1} j^m \leq \frac{1}{m+1} \leq \frac{1}{n^{m+1}}\sum\limits_{j=1}^{n-1} j^m + \frac{1}{n^{m+1}}n^m = \frac{1}{n^{m+1}}\sum\limits_{j=1}^{n-1} j^m + \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \int\limits_0^b x^m\,dx = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{b}{n}\right)^{m+1}\cdot\sum\limits_{j=1}^{n-1} j^m = \frac{b^{m+1}}{m+1}$

$\Rightarrow \int\limits_a^b x^m\,dx = \int\limits_0^b x^m\,dx - \int\limits_0^a x^m\,dx = \frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$ q.e.d.

§ 2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung bringt die theoretisch sehr wichtige Erkenntnis, daß jede Regelfunktion eine Stammfunktion besitzt. Er gibt eine solche Stammfunktion an in Gestalt eines Integrals mit variabler oberer Grenze bei beliebig fixierter unterer Grenze. Der Hauptsatz vermittelt darüber hinaus bei Kenntnis einer Stammfunktion die wichtige Information, wie der Wert des Integrals mit Hilfe einer Stammfunktion berechnet werden kann.
Wir geben eine sehr allgemeine Definition einer Stammfunktion:

(1.18) ***Definition:*** Sei $I \subseteq \mathbf{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $F: I \to \mathbf{R}$ heißt eine **Stammfunktion von f**: $I \to \mathbf{R}$ auf I, wenn
1) F stetig auf I ist
2) $F'(x)=f(x)$ für alle $x \in I \setminus I_0$, wobei I_0 eine höchstens abzählbare Teilmenge ist

In den meisten Lehrbüchern wird für eine Stammfunktion F die Differenzierbarkeit und Identität F'=f auf ganz I verlangt. Aber bereits einfachste Anwendungen, zum Beispiel bei Differentialgleichungen mit unstetigen Steuerungsfunktionen, wie sie in Naturwissenschaft und Technik oft auftreten, rechtfertigen den genannten etwas allgemeineren und flexibleren Begriff Stammfunktion im Sinne der Definition (1.18).
Für Stammfunktionen gelten die folgenden Aussagen:

(1.19) ***Satz:*** Seien $F: I \to \mathbf{R}$ und $G: I \to \mathbf{R}$ Stammfunktionen von $f: I \to \mathbf{R}$ bzw. $g: I \to \mathbf{R}$, $I \subseteq \mathbf{R}$ ein Intervall, $a,b \in \mathbf{R}$. Dann ist
1) $a \cdot F + b \cdot G$ eine Stammfunktion von $a \cdot f + b \cdot g$ auf I
2) F+c eine Stammfunktion von f auf I für jede Konstante c
3) $F-F_1$ konstant, wenn F_1 eine Stammfunktion von f auf I ist

Beweis:

1) + 2) folgen unmittelbar aus der Definition
3) folgt aus (1.20)

(1.20) ***Lemma:*** Sei $I \subseteq \mathbf{R}$ ein Intervall, $I_0 \subseteq I$ eine höchstens abzählbare Teilmenge. Sei F stetig auf I und differenzierbar auf $I \setminus I_0$. Ferner gebe es eine Konstante $L>0$ mit $|F'(x)| \leq L$ für alle $x \in I \setminus I_0$. Dann gilt $|F(x_1)-F(x_2)| \leq L \cdot |x_1-x_2|$ für *alle* $x_1,x_2 \in I$.

(1.21) ***Korollar:*** Seien F,G stetige Funktionen auf I, die auf $I \setminus I_0$ differenzierbar sind, wobei I_0 eine höchstens abzählbare Teilmenge des Intervalles $I \subseteq \mathbf{R}$ ist. Gilt $F'(x) = G'(x)$ für alle $x \in I \setminus I_0$, dann gilt $F(x)=G(x)+c$ für *alle* $x \in I$, c eine Konstante.

Ist F eine Stammfunktion von f, so nennt man die Gesamtheit der Funktionen F+c, c $\in$ **R**, das unbestimmte Integral von f und beschreibt dies durch das Symbol $\int f(x)\,dx$ im Unterschied zum bestimmten Integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

<u>Beweis zu (1.20):</u>

Seien $x_1,x_2 \in I$ mit $x_1<x_2$. Für $\varepsilon>0$ definiere $F_\varepsilon(x):=|F(x)-F(x_1)|-(L+\varepsilon)\cdot|x-x_1|$, $x \in I$.
Zu zeigen: $F_\varepsilon(x_2)\le 0$ für jedes $\varepsilon>0$.

Angenommen, es gibt ein ε_0 mit $F_{\varepsilon_0}(x_2)>0$. Da I_0 höchstens abzählbar ist, ist auch $F_{\varepsilon_0}(I_0)$ höchstens abzählbar, also existiert ein $\gamma \notin F_{\varepsilon_0}(I_0)$ mit $F_{\varepsilon_0}(x_1)=0<\gamma<F_{\varepsilon_0}(x_2)$. Sei c die größte Zahl in $[x_1,x_2]$ mit $F_{\varepsilon_0}(c)=\gamma$, dann gilt $\gamma<F_{\varepsilon_0}(x)$ für alle $x \in (c,x_2]$.

Ferner gilt für $x \in (c,x_2]$

$$(*)\qquad \varphi(x):=\frac{F_{\varepsilon_0}(x)-F_{\varepsilon_0}(c)}{x-c}=\frac{F_{\varepsilon_0}(x)-\gamma}{x-c}>0$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi(x)&=\frac{|F(x)-F(x_1)|-(L+\varepsilon_0)\cdot|x-x_1|-|F(c)-F(x_1)|+(L+\varepsilon_0)\cdot|c-x_1|}{x-c}\\
&=\frac{|F(x)-F(x_1)|-|F(c)-F(x_1)|-(L+\varepsilon_0)\cdot(|x-x_1|-|c-x_1|)}{x-c}\\
&=\frac{|F(x)-F(x_1)|-|F(c)-F(x_1)|-(L+\varepsilon_0)\cdot(x-x_1-c+x_1)}{x-c}\\
&=\frac{|F(x)-F(x_1)|-|F(c)-F(x_1)|}{x-c}-(L+\varepsilon_0)\\
&\le\frac{|F(x)-F(x_1)-F(c)+F(x_1)|}{x-c}-(L+\varepsilon_0)\\
&=\left|\frac{F(x)-F(c)}{x-c}\right|-L-\varepsilon_0
\end{aligned}$$

Da $\gamma \notin F_{\varepsilon_0}(I_0) \Rightarrow c \notin I_0$ mit $F_{\varepsilon_0}(c)=\gamma$
$\Rightarrow$ F ist in c differenzierbar

Da $|F'(x)|\le L$ für alle $x \in I \setminus I_0$, gibt es ein offenes Intervall (c,d) mit
$\left|\frac{F(x)-F(c)}{x-c}\right|\le L+\varepsilon_0$ für alle $x \in (c,d)$

$\Rightarrow \varphi(x)\le 0$ für alle $x \in (c,d)$ im Widerspruch zu (*).

Also ist die Annahme falsch

$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(x_2) \le 0 \Rightarrow \left|\frac{F(x_2)-F(x_1)}{x_2 - x_1}\right| \le L$ q.e.d.

Bemerkung:

f: I→**R** und g: I→**R** F'(x)=f(x) $x \in I \setminus I_0$ F= $\int f(x)\,dx$

$\int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx \quad \not\Rightarrow \quad F=G$

$\Rightarrow$ F=G+c

Welche Funktionen besitzen denn überhaupt Stammfunktionen? Geht man dabei von Regelfunktionen aus, da für diese Funktionen Integrale erklärt werden, so erhalten wir die Antwort in dem folgenden Hauptsatz:

(1.22) ***Satz:*** (**Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**):
Sei I⊆**R** ein Intervall, sei a ∈ I beliebig. Sei f: I→**R** eine Regelfunktion auf I.

Sei F: I→**R** definiert durch $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ für x ∈ I. Dann gilt:

1) F ist stetig in I
2) In jedem Punkt x_0 ∈ I ist F linksseitig und rechtsseitig differenzierbar mit

$f_+(x_0) = F_+'(x_0) := \lim_{x \to x_0^+} \frac{F(x)-F(x_0)}{x - x_0}$ und

$f_-(x_0) = F_-'(x_0) := \lim_{x \to x_0^-} \frac{F(x)-F(x_0)}{x - x_0}$

3) F ist eine Stammfunktion von f auf I
4) Für jede Stammfunktion G von f auf I und jedes a,b, ∈ I gilt $\int_a^b f(x)\,dx$ =G(b)-G(a)

<u>Beweis:</u>

ad 1)
Sei x ∈ I; sei h ∈ **R**, so daß x+h ∈ I

$$F(x+h)-F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow |F(x+h)-F(x)| = \left|\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right| \le \int_x^{x+h} |f(t)|\,dt \le \|f\|_\infty \cdot \left|\int_x^{x+h} dt\right| \le |h| \cdot \|f\|_\infty$$

[$|F(x)-F(y)| \le L\cdot|x-y|$ **Lipschitz-Stetigkeit]**

$\Rightarrow \lim_{|h| \to 0} |F(x+h)-F(x)| = 0 \quad \Rightarrow$ F stetig in I

ad 2)
gezeigt wird die rechtsseitige Differenzierbarkeit in $x \in I$:
Sei $\varepsilon>0$, wähle $\delta>0$ mit $|f(y)-f_+(x)| < \varepsilon$ für alle $y \in (x,x+\delta)$

$$\Rightarrow \left|\frac{F(y)-F(x)}{y-x} - f_+(x)\right| = \left|\frac{1}{y-x}\cdot\big(F(y)-F(x)-(y-x)\cdot f_+(x)\big)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{y-x}\cdot\int_x^y f(t)\,dt - \int_x^y f_+(x)\,dt\right| = \frac{1}{|y-x|}\cdot\left|\int_x^y f(t)-f_+(x)\,dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{|y-x|}\cdot\int_x^y |f(t)-f_+(x)|\,dt \leq \frac{1}{|y-x|}\cdot\varepsilon\cdot|y-x| = \varepsilon$$

für alle $y \in (x,x+\delta)$

$\Rightarrow F_+'(x) = f_+(x)$

Ebenso zeigt man $F_-'(x) = f_-(x)$

Ist f in x stetig $\Rightarrow F'(x) = f(x)$

ad 3)
f Regelfunktion $\Rightarrow$ f stetig in $I \setminus I_0 \Rightarrow F'(x) = f(x)$ für $x \in I \setminus I_0$, $I_0 \subseteq I$ höchstens abzählbar
$\Rightarrow$ F Stammfunktion auf I.

ad 4)
Die Behauptung ist trivial für F. Ist G eine Stammfunktion von f auf I, so existiert eine Konstante c mit G=F+c (Satz (1.19)). Dann gilt

$$G(b)-G(a) = F(b)+c-F(a)-c = F(b)-F(a) = \int_a^b f(t)\,dt$$ q.e.d.

(1.23) ***Korollar:*** Sei $I\subseteq\mathbf{R}$ ein Intervall. Sei $f: I\to\mathbf{R}$ eine Regelfunktion auf I. f besitzt genau dann eine Stammfunktion $F: I\to\mathbf{R}$ auf I mit $F'(x) = f(x)$ für *alle* $x \in I$, wenn f auf I stetig ist.

<u>Beweis:</u>

„$\Rightarrow$“:
Sei f eine Regelfunktion auf I mit $F'(x) = f(x)$für alle $x \in I$. Sei $x \in I$, sei $(x_n)_n\subseteq I$ eine Folge mit $x_n>x$ und $\lim x_n= x$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existiert für $n \in \mathbf{N}$ ein $\xi_n \in (x,x_n)$ mit $\dfrac{F(x_n)-F(x)}{x_n-x} = F'(\xi_n) = f(\xi_n)$

$\Rightarrow f(x) = F'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} F'(\xi_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_n) = f_+(x)$

Ebenso für den linksseitigen Grenzwert

$\Rightarrow f_-(x) = f_+(x) = f(x)$ $\Rightarrow$ f stetig in x, wenn x innerer Punkt ist. Ist x Randpunkt von I, so gelten die analogen Aussagen entsprechend.

„$\Leftarrow$“: klar q.e.d.

Die folgenden Beispiele ergeben sich unmittelbar aus den Differentiationsregeln:

Beispiele: (Grundintegrale)

f = F‘	**F=$\int$ f dx**
a	$a \cdot x$
x^a $(a \neq -1)$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$
$x^{-1} = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$	$\ln \lvert x \rvert$
e^x	e^x
a^x $(a>0 \text{ und } a \neq 1)$	$\frac{a}{\ln a}$
cos x	sin x
sin x	-cos x
$\frac{1}{\sin x^2}$	-cot x
$\frac{1}{\cos x^2}$	tan x

Für die Hyperbelfunktionen gilt (man beachte die Ähnlichkeit mit den trigonometrischen Fkt.)

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

f = F‘	**F=$\int$ f dx**
cosh x	sinh x
sinh x	cosh x
$\frac{1}{\sinh^2 x}$	-coth x
$\frac{1}{\cosh^2 x}$	tanh x

Umkehrfunktionen:

$f^{(-1)}(f(x)) = x \quad \overset{\text{ableiten}}{\Rightarrow} \quad f^{(-1)}(f(x))f'(x) = 1$

Fortsetzung: (Grundintegrale)

F	F
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	arcsin x = -arccos x
$\frac{1}{1+x^2}$	arctan x = -arccot x
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arsinh} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$
$\frac{1}{\pm\sqrt{x^2-1}} \quad \lvert x\rvert>1$	$\operatorname{arcosh} x = \pm\ln(x+\sqrt{x^2-1})$
$\frac{1}{1-x^2} \quad \lvert x\rvert<1$	$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2}\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}$
$\frac{1}{1-x^2} \quad \lvert x\rvert>1$	$\operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2}\cdot\ln\frac{x+1}{x-1}$

Die nächsten beiden Folgerungen aus dem Hauptsatz zeigen, daß ein Integrand in einem gewissen Umfang modifiziert werden kann, ohne daß der Wert des Integrals sich dabei verändert.

(1.24) ***Korollar:*** Sei $I\subseteq\mathbf{R}$ ein Intervall. Seien f: $I\to\mathbf{R}$ und g: $I\to\mathbf{R}$ Regelfunktionen mit $f(x)=g(x)$ für alle $x \in I \setminus I_0$, wobei $I_0\subseteq I$ höchstens abzählbar ist. Dann gilt:

1) $\int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx$

2) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx \qquad a,b \in I$

Insbesondere gilt für Regelfunktionen $\int f(x)\,dx = \int f_+(x)\,dx = \int f_-(x)\,dx$

(1.25) ***Korollar:*** Sei $I\subseteq\mathbf{R}$ ein Intervall, $I_0 \in I$ höchstens abzählbar. Sei f: $I\setminus I_0\to\mathbf{R}$ eine Funktion. Sind $\hat{f}_1: I\to\mathbf{R}$ und $\hat{f}_2: I\to\mathbf{R}$ Regelfunktionen auf I mit $\hat{f}_1(x) = \hat{f}_2(x) = f(x)$ für $x \in I \setminus I_0$, dann gilt:

1) $\int \hat{f}_1\,dx = \int \hat{f}_2\,dx$

2) $\int_a^b \hat{f}_1\,dx = \int_a^b \hat{f}_2\,dx \qquad a,b \in I$

Mit Hilfe dieses Ergebnisses läßt sich der Integralbegriff auf Funktionen erweitern, die mit einer Regelfunktion bis auf eine höchstens abzählbare Menge übereinstimmen.

(1.26) ***Definition:*** Sei $I \subseteq \mathbf{R}$ ein Intervall, $I_0 \in I$ höchstens abzählbar. Sei $f: I \setminus I_0 \to \mathbf{R}$ eine Funktion, zu der eine Regelfunktion $\hat{f}: I \to \mathbf{R}$ existiert mit $f(x) = \hat{f}(x)$ für $x \in I \setminus I_0$. Dann heißt $\int f(x)\,dx = \int \hat{f}(x)\,dx$ eine **Stammfunktion von f auf I**.

Regelfunktionen sind also immer Ableitungsfunktionen einer fast überall differenzierbaren Funktion. Doch gibt es auch Ableitungen von differenzierbaren Funktionen, die keine Regelfunktionen sind, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel:

Sei F: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definiert durch

$$F(x) := \begin{cases} x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad F'(x) = \begin{cases} 2 \cdot x \cdot \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \text{, da}$$

$$0 \leq \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \left| \frac{F(x) - F(0)}{x} \right| = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \left| \frac{x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} - 0}{x} \right| = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \left| x \cdot \sin\frac{1}{x} \right| \leq \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} |x| = 0$$

f=F' ist keine Regelfunktion

Behauptung: f besitzt in $x_0=0$ keinen rechtsseitigen Grenzwert:

$$x_k = \frac{1}{2k\pi} \quad \Rightarrow \quad x_k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0 \qquad (k \in \mathbf{N})$$

$$\lim_{k \to \infty} F'(x_k) = \lim_{k \to \infty} \left(2 \cdot \frac{1}{2k\pi} \sin(2k\pi) - \cos(2k\pi) \right) = -1$$

$$y_j = \frac{1}{(2j+1)\pi} \qquad y_j \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} 0 \qquad (j \in \mathbf{N}) \text{ , aber}$$

$$\lim_{j \to \infty} F'(y_j) = \lim_{j \to \infty} \left(2 \cdot \frac{1}{(2j+1)\pi} \sin((2j+1)\pi) - \cos((2j+1)\pi) \right) = 1$$

Dieses Beispiel zeigt auch, daß die Stammfunktion F zu f mit $f(x) = \begin{cases} 2 \cdot x \cdot \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \\ 0 \end{cases}$

nicht mit Hilfe eines Integrals für Regelfunktionen erzeugt werden kann. f ist somit eine Funktion, die keine Regelfunktion ist, und dennoch eine Stammfunktion besitzt, d.h. die Menge aller Funktionen, die eine Stammfunktion besitzen, ist eine echte Obermenge der Menge der Regelfunktionen, d.h.:

$\{f: [a,b]\to\mathbf{R}: f \text{ stückweise stetig / stückweise monoton}\}$
$\subsetneq \{f: [a,b]\to\mathbf{R}: f \text{ Regelfunktion}\}$
$\subsetneq \{f: [a,b]\to\mathbf{R}: f \text{ besitzt eine Stammfunktion}\}$

(1.27) ***Definition:*** Sei $I\subseteq\mathbf{R}$ ein Intervall; $F: I\to\mathbf{R}$ heißt **fast überall differenzierbar** (bzw. **fast überall stetig differenzierbar**), wenn F in $I \setminus I_0$ differenzierbar ist (in $I \setminus I_0$ stetig differenzierbar ist und F‘ in $x \in I_0$ sowohl den linksseitigen als auch den rechtsseitigen Grenzwert besitzt), wobei $I_0\subseteq I$ höchstens abzählbar ist.

Ergebnis: $F: I\to\mathbf{R}$ ist also genau dann fast überall stetig differenzierbar, wenn F Stammfunktion einer Regelfunktion auf I ist (Regelfunktionen sind ja „fast überall“ stetig)

§ 3 Integrationsmethoden

Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung läßt sich das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ für eine Regelfunktion f: $I\to\mathbf{R}$ mit $[a,b]\subseteq I$ dann einfach berechnen, wenn eine Stammfunktion F von f auf I bekannt ist.
In diesem Abschnitt sollen mehrere Verfahren und Regeln hergeleitet werden, mit denen sich Stammfunktionen angeben lassen. Diese Regeln resultieren aus den entsprechenden Regeln für die Differentiation.

Produktregel der Differentiation $(f\cdot g)' = f'\cdot g + g'\cdot f$ liefert

(1.28) ***Satz:*** (**Regel für Produktintegration – partielle Integration**):
Seien f: $I\to\mathbf{R}$ und g: $I\to\mathbf{R}$ fast überall stetig differenzierbar (d.h. f und g sind Stammfunktionen von Regelfunktionen). Dann ist $f\cdot g$: $I\to\mathbf{R}$ fast überall stetig differenzierbar auf I und es gilt:

1) $\int (f'\cdot g)(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int (g'\cdot f)(x)\,dx$

2) $\int_a^b \big(f'(x)\cdot g(x)\big)dx = \big[f(x)\cdot g(x)\big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b g'(x)\cdot f(x)\,dx$,

wobei $a,b\in I$ und $\big[f(x)\cdot g(x)\big]_{x=a}^{x=b} := f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot f(b)$

<u>Beweis:</u>

F ist stetig differenzierbar in $I \setminus I_0$, g ist stetig differenzierbar in $I \setminus I_1$, wobei $I_0\subseteq I$ und $I_1\subseteq I$ höchstens abzählbar sind, und f ‘ bzw. g‘ besitzen in jedem Punkt $x\in I$ einen rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwert. Damit haben auch f und g in jedem $x\in I$ einen rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwert. $f\cdot g$ ist in $I \setminus (I_0\cup I_1)$ stetig differenzierbar und es gilt in $I \setminus (I_0\cup I_1)$ die Produktregel $(f\cdot g)' = f'\cdot g + g'\cdot f$.
Da $f'\cdot g$ und $g'\cdot f$ Regelfunktionen auf I sind, besitzen $f'\cdot g$ und $g'\cdot f$ Stammfunktionen auf I und es gilt die Behauptung. q.e.d.

Beispiele:

1) $\int x\cdot e^x\,dx = x\cdot e^x - \int 1\cdot e^x\,dx = x\cdot e^x - e^x = (x-1)\cdot e^x$

2) $\int x^n\cdot e^x\,dx = x^n\cdot e^x - n\cdot\int x^{n-1}\cdot e^x\,dx \qquad ; n\in\mathbf{N}$

3) $\int \ln x\,dx = \int 1\cdot\ln x\,dx = x\cdot\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\cdot\ln x - x = x\cdot(\ln x - 1)$

4)
$$\begin{aligned}\int \cos^2 x\,dx &= \int \cos x\cdot\cos x\,dx = \sin x\cdot\cos x - \int \sin x\cdot(-\sin x)\,dx\\ &= \sin x\cdot\cos x + \int \sin^2 x\,dx = \sin x\cdot\cos x + \int (1-\cos^2 x)\,dx\\ &= \sin x\cdot\cos x + x - \int\cos^2 x\,dx\end{aligned}$$
$$\Rightarrow\ 2\cdot\int\cos^2 x\,dx = \sin x\cdot\cos x + x$$
$$\Rightarrow\ \int\cos^2 x\,dx = \frac{\sin x\cdot\cos x + x}{2}$$

5) $\int \cos^n x\,dx = \ldots = \frac{1}{n}\cdot\cos^{n-1} x\cdot\sin x + \frac{n-1}{n}\cdot\int\cos^{n-2} x\,dx$; $n\geq 2$

6) $\int \sin^n x\,dx = \ldots = -\frac{1}{n}\cdot\sin^{n-1} x\cdot\cos x + \frac{n-1}{n}\cdot\int\sin^{n-2} x\,dx$

7) $\int x^n\cdot\ln x\,dx = \frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1}\cdot(\ln x - \frac{1}{n+1})$

Mit Hilfe der folgenden Regel und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erhält man die Methode der Substitution:

Kettenregel der Differentiation: H(x)=F(g(x))
$\Rightarrow$ H'(x) = F'(g(x))·g'(x) = f(g(x))·g'(x), wenn F'=f
liefert Substitutionsregel

(1.29) ***Satz:*** Sei f: I→**R** eine Regelfunktion und F: I→**R** eine Stammfunktion von f.
Sei a,b ∈ I, a≤b. Sei g: [a,b]→**R** stetig differenzierbar mit g([a,b])⊆I. Dann ist F∘g eine Stammfunktion von f(g(x))·g'(x) auf [a,b] und es gilt:

$$\int_a^b f(g(t))\cdot g'(t)\,dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx$$

Beispiele:

1) $\int_a^b f(t+c)\,dt \underset{x=g(t)=t+c}{=} \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx \qquad \left(\frac{dx}{dt}=1 \quad\Rightarrow dx=dt\right)$

2) $c\neq 0$: $\int_a^b f(c\cdot t)\,dt \underset{x=g(t)=c\cdot t}{=} \frac{1}{c}\cdot\int_a^b f(c\cdot t)\cdot c\ dt = \frac{1}{c}\cdot\int_{c\cdot a}^{c\cdot b} f(x)\,dx \qquad \left(\frac{dx}{dt}=c \Rightarrow dx = c\cdot dt\right)$

3) $\int\frac{g'(t)}{g(t)}\,dt \underset{x=\ln|g(t)|}{=} \ln|g(x)|$ Setze $f(x)=\frac{1}{x} \quad\Rightarrow\quad F(x)=\ln|x|$

4) $a\neq 0$:

$$\int\frac{B\cdot x+C}{a\cdot x^2+b\cdot x+c}\,dx = \frac{1}{a}\cdot\int\frac{B\cdot x+C}{x^2+\frac{b}{a}\cdot x+\frac{c}{a}}\,dx$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\frac{B}{2}\cdot\int\frac{2\cdot x+\frac{b}{a}}{x^2+\frac{b}{a}\cdot x+\frac{c}{a}}\,dx+\frac{1}{a}\cdot\left(C-B\cdot\frac{b}{2\cdot a}\right)\cdot\int\frac{1}{x^2+\frac{b}{a}\cdot x+\frac{c}{a}}\,dx \qquad (*)$$

Setze $Q(x)=x^2+\frac{b}{a}\cdot x+\frac{c}{a} \qquad\Rightarrow Q'(x)=2\cdot x+\frac{b}{a}$

$$\Rightarrow \frac{B}{2}\cdot\frac{Q'(x)}{Q(x)}+\left(C-B\cdot\frac{b}{2\cdot a}\right)\cdot\frac{1}{Q(x)}=\frac{B\cdot x+C}{Q(x)}=\frac{B\cdot x+C}{x^2+\frac{b}{a}\cdot x+\frac{c}{a}}$$

Fortsetzung von (*)

$$\int \frac{B \cdot x + C}{a \cdot x^2 + b \cdot x + c}\, dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{B}{2} \cdot \ln\left|x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}\right| + \frac{1}{a} \cdot \left(C - B \cdot \frac{b}{2 \cdot a}\right) \cdot \int \frac{1}{x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}}\, dx$$

Untersuche $\int \frac{1}{x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}}\, dx$

Quadratische Ergänzung:

$$0 = x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \left(\frac{b}{2 \cdot a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2 \cdot a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2 \cdot a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{4 \cdot a^2}$$

1. Fall:

$4 \cdot a \cdot c > b^2$, d.h. $x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}$ hat keine reellen Nullstellen

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}}\, dx = \int \frac{1}{(x+\alpha)^2 + \beta^2}\, dx \quad \text{mit } \alpha = \frac{b}{2 \cdot a}\ , \quad \beta^2 = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a^2}$$

$$= \frac{1}{\beta^2} \cdot \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x+\alpha}{\beta}\right)^2}\, dx \underset{y = \frac{x+\alpha}{\beta}}{=} \frac{1}{\beta^2} \cdot \int \frac{1}{1 + y^2} \cdot \beta\, dy = \frac{1}{\beta} \cdot \arctan y$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{a \cdot x^2 + b \cdot x + c}\, dx = \frac{2}{\sqrt{4 \cdot a \cdot c - b^2}} \cdot \arctan \frac{2 \cdot a \cdot x + b}{\sqrt{4 \cdot a \cdot c - b^2}}, \text{ wenn } 4 \cdot a \cdot c - b^2 > 0 .$$

2. Fall:

$4 \cdot a \cdot c = b^2 \qquad \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}$ hat doppelte Nullstelle

$$\Rightarrow \int \frac{1}{a \cdot x^2 + b \cdot x + c}\, dx = \frac{1}{a} \cdot \int \frac{1}{\left(x^2 + \frac{b}{2 \cdot a}\right)^2}\, dx$$

$$= -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{x + \frac{b}{2 \cdot a}} = -\frac{2}{2 \cdot a \cdot x + b}$$

3.Fall:

$a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ habe zwei verschiedene reelle Nullstellen ($b^2 > 4 \cdot a \cdot c$)

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} \right) = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{b^2}{4 \cdot a^2} - \frac{b^2}{4 \cdot a^2} + \frac{c}{a} \right)$$

$$a \cdot \left(\left(a + \frac{b}{2 \cdot a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{4 \cdot a^2} \right) = a \cdot \left((x + \alpha)^2 - \gamma^2 \right)$$

$$\text{mit } \alpha = \frac{b}{2 \cdot a} \quad ; \quad \gamma = \frac{\sqrt{b^2 - 4 \cdot a}}{\sqrt{4 \cdot a^2}}$$

$$= a \cdot \gamma^2 \cdot \left(\left(\frac{x + \alpha}{\gamma} \right)^2 - 1 \right) = -a \cdot \gamma^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{x + \alpha}{\gamma} \right)^2 \right)$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{a \cdot x^2 + b \cdot x + c} = -\frac{1}{a \cdot \gamma^2} \cdot \int \frac{1}{1 - \left(\frac{x + \alpha}{\gamma} \right)^2} dx$$

Setze $y = \dfrac{x + \alpha}{\gamma}$: $\quad \Rightarrow \displaystyle\int \frac{dx}{a \cdot x^2 + b \cdot x + c} = -\frac{1}{a \cdot \gamma^2} \cdot \int \frac{1}{1 - y^2} dy = -\frac{1}{2 \cdot a \cdot \gamma} \cdot \ln \left| \frac{1 + y}{1 - y} \right|$

ZUSAMMENFASSUNG:

$$\int \frac{dx}{a \cdot x^2 + b \cdot x + c} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{4 \cdot a \cdot c - b^2}} \cdot \arctan \dfrac{\left(x + \frac{b}{2 \cdot a} \right) \cdot \sqrt{4 \cdot a^2}}{\sqrt{4 \cdot a \cdot c - b^2}} & ; 4 \cdot a \cdot c - b^2 > 0 \text{ (keine reelle NS)} \\ -\dfrac{2}{2 \cdot a \cdot x + b} & ; 4 \cdot a \cdot c - b^2 = 0 \text{ (doppelte reelle NS)} \\ \dfrac{1}{\sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}} \cdot \ln \left| \dfrac{\sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c} - 2 \cdot a \cdot x - b}{\sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c} + 2 \cdot a \cdot x + b} \right| & ; b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0 \text{ (zwei reelle NS)} \end{cases}$$

5) Integration rationaler Funktionen $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$; p,q Polynome.

Schritt 1:

Wenn grad p $\geq$ grad q, dann Polynomdivision $\Rightarrow$ $f(x)=u(x)+\frac{r(x)}{q(x)}$, wobei grad r < grad q und u ein Polynom ist.

Schritt 2:

$$\frac{r(x)}{q(x)}=\frac{a_0+a_1\cdot x+\ldots+a_m\cdot x^m}{b_0+b_1\cdot x+\ldots+b_n\cdot x^n} \text{ mit } a_m\neq 0,\ b_n\neq 0,\ n>m$$
$$=\frac{a_0+a_1\cdot x+\ldots+a_m\cdot x^m}{b_n\cdot q^*(x)} \text{ mit } q^*(x)=\frac{b_0}{b_n}+\frac{b_1}{b_n}\cdot x+\ldots+x^n$$

Bestimme Nullstellen von $q^*(x)$ als Produkt von Polynomen $(x-\alpha)^r$ und $(x^2+\beta\cdot x+\gamma)^s$, wobei $r,s\in\mathbf{N}$, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$ und $x^2+\beta\cdot x+\gamma$ keine reellen Nullstellen mehr hat $(4\cdot\gamma-\beta^2>0)$

Schritt 3:

$\frac{r(x)}{q(x)}$ sei in der Form von Schritt 2 dargestellt, jedem Faktor $(x-\alpha)^r$ ordne man zu:

$$\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\ldots+\frac{A_r}{(x-\alpha)^r}$$

Jedem Faktor $(x^2+\beta\cdot x+\gamma)^s$ ordne man zu:

$$\frac{B_1\cdot x+C_1}{x^2+\beta\cdot x+\gamma}+\frac{B_2\cdot x+C_2}{(x^2+\beta\cdot x+\gamma)^2}+\ldots+\frac{B_s\cdot x+C_s}{(x^2+\beta\cdot x+\gamma)^s}$$

wobei die Koeffizienten A_1, ..., A_r, B_1, ..., B_s, C_1, ..., C_s zu bestimmen sind.

Beispiel:

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 1}{2 \cdot x^5 + 2 \cdot x^4 - 4 \cdot x^2}\, dx$$

Schritt 1: Polynomdivision

$$\begin{array}{l} (x^5 + x^4 - 1) : (2 \cdot x^5 + 2 \cdot x^4 - 4 \cdot x^2) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2 \cdot x^2 - 1}{2 \cdot x^5 + 2 \cdot x^4 - 4 \cdot x^2} \\ -(x^5 + x^4 - 2 \cdot x^2) \\ \hline \qquad 2 \cdot x^2 - 1 \end{array}$$

Schritt 2:

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{2 \cdot x^2 - 1}{2 \cdot x^5 + 2 \cdot x^4 - 4 \cdot x^2} = \frac{2 \cdot x^2 - 1}{2 \cdot (x^5 + x^4 - 2 \cdot x^2)} = \frac{x^2 - \frac{1}{2}}{x^2 \cdot (x^3 + x^2 - 2)} = \frac{x^2 - \frac{1}{2}}{x^2 \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + 2 \cdot x + 2)}$$

wobei $x^2+2x+2 = (x+1)^2 +1$ keine reellen Nullstellen hat

Schritt 3:

$$\frac{x^2 - \frac{1}{2}}{x^2 \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + 2 \cdot x + 2)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{B_1}{x - 1} + \frac{C_1 \cdot x + D_1}{x^2 + 2 \cdot x + 2}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{1}{2} = {} & A_1 \cdot x \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + 2 \cdot x + 2) + A_2 \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + 2 \cdot x + 2) \\ & + B_1 \cdot x^2 \cdot (x^2 + 2 \cdot x + 2) + (C_1 \cdot x + D_1) \cdot x^2 \cdot (x - 1) \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{1}{2} = {} & A_1 \cdot (x^4 + x^3 - 2 \cdot x) + A_2 \cdot (x^3 + x^2 - 2) + B_1 \cdot (x^4 + 2 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2) \\ & + C_1 \cdot (x^4 - x^3) + D_1 \cdot (x^3 - x^2) \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$x^2-\frac{1}{2}=x^4\cdot(A_1+B_1+C_1)+x^3\cdot(A_1+A_2+2\cdot B_1-C_1+D_1)$$
$$+x^2\cdot(A_2+2\cdot B_1-D_1)+x\cdot(-2\cdot A_1)-2\cdot A_2$$

$\Rightarrow$

$$0=A_1+B_1+C_1$$
$$0=A_1+A_2+2\cdot B_1-C_1+D_1$$
$$1=A_2+2\cdot B_1-D_1$$
$$0=-2\cdot A_1$$
$$-\frac{1}{2}=-2\cdot A_2$$

Löse lineares Gleichungssystem !!!

$$\Rightarrow \quad A_1=0 \quad / \quad A_2=\frac{1}{4} \quad / \quad B_1=\frac{1}{10} \quad / \quad C_1=-\frac{1}{10} \quad / \quad D_1=-\frac{11}{20}$$

$$\frac{x^5+x^4-1}{2\cdot x^5+2\cdot x^4-4\cdot x^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4\cdot x^2}+\frac{1}{10\cdot(x-1)}-\frac{\frac{1}{10}x+\frac{11}{20}}{x^2+2\cdot x+2}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4\cdot x^2}+\frac{1}{10\cdot(x-1)}-\frac{2\cdot x+11}{20\cdot(x^2+2\cdot x+2)}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4\cdot x^2}+\frac{1}{10\cdot(x-1)}-\frac{1}{20}\cdot\frac{2\cdot x+2}{x^2+2\cdot x+2}-\frac{9}{20}\cdot\frac{1}{x^2+2\cdot x+2}$$

$\Rightarrow$

$$\int\frac{x^5+x^4-1}{2\cdot x^5+2\cdot x^4-4\cdot x^2}dx=\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{4\cdot x}+\frac{1}{10}\cdot\ln|x-1|-\frac{1}{20}\cdot\ln|x^2+2\cdot x+2|-\frac{9}{20}\cdot\underbrace{\int\frac{1}{x^2+2\cdot x+2}dx}_{\substack{\text{keine reelle NS}\Rightarrow\\ \text{1. Fall von Bsp. 4}}}$$

6) (1) $\int R\left(x,(a\cdot x+b)^{\frac{1}{n}}\right)dx$ $\qquad$ a,b $\in$ **R**, a≠0, m $\in$ **N**, R rationale Funktion

Substitution: $y=g(x)=(a\cdot x+b)^{\frac{1}{n}}$

$$\Rightarrow \frac{n}{a}\cdot\int R\left(\frac{y^n-b}{a},y\right)\cdot y^{n-1}\,dy=\int R\left(x,(a\cdot x+b)^{\frac{1}{n}}\right)dx$$

(2) $\int R(e^{ax})\,dx$ $\quad$ a≠0

Substitution: $y=g(x)=e^{ax}$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}\cdot\int R(y)\cdot\frac{1}{y}dy=\int R\left(e^{ax}\right)dx$$

(3) $\int R(\cos t, \sin t)\, dt \qquad y = g(t) = \tan\frac{t}{2}$

$\Rightarrow \cos t = \dfrac{1-y^2}{1+y^2} \qquad \sin t = \dfrac{2\cdot y}{1+y^2} \qquad g'(t) = \dfrac{2}{1+(g(t))^2} \quad \left(= \dfrac{2}{1+y^2} \right)$

liefert: $\int R\left(\dfrac{1-y^2}{1+y^2}, \dfrac{2\cdot y}{1+y^2}\right)\cdot \dfrac{2}{1+y^2}\, dy$

(4) $\int R(x, \sqrt{a\cdot x^2 + 2\cdot b\cdot x + c})\, dx \qquad a,b,c \in \mathbf{R} \quad , \quad b^2 \neq 4\cdot a\cdot c$

quadratische Ergänzung liefert folgende Typen

(4a) $\int R(t, \sqrt{t^2+1})\, dt \qquad$ Substitution $t = \sinh u$ liefert $\sqrt{t^2+1} = \cosh u \quad (dt = \cosh u\, du)$

(4b) $\int R(t, \sqrt{t^2-1})\, dt \quad (|t| \geq 1)$ Substitution $t = \pm\cosh u$ liefert $\sqrt{t^2-1} = \sinh u$

$(dt = \pm\sinh u\, du)$

(4c) $\int R(t, \sqrt{1-t^2})\, dt \quad (|t| \leq 1)$ Substitution $t = \pm\cos u$ liefert $\sqrt{1-t^2} = \sin u$,

$(dt = \mp\sin u\, du)$

Zur Untersuchung und numerischen Berechnung nicht-elementarer Stammfunktionen stehen oft Reihendarstellungen zur Verfügung, die aus Reihendarstellungen der Integranden gewonnen werden können. Die zur Herleitung erforderliche gliedweise Integration einer Reihe rechtfertigt man in vielen Fällen mit Hilfe von:

(1.30) ***Satz:*** Für $n \in \mathbf{N}$ sei f_n: $[a,b] \to \mathbf{R}$ eine Regelfunktion mit

$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < \infty$. Dann ist $f := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} f_k$ eine Regelfunktion auf [a,b], und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\, dx$$

<u>Beweis:</u>

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)| = \|f_n\|_\infty \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| < \infty .$$

Sei $\varepsilon > 0$, dann existiert $N = N(\varepsilon)$ mit $\sum_{k=N+1}^{\infty} \|f_k\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow \forall\ p \geq N: \quad \left\| f - \sum_{k=1}^{p} f_k \right\|_\infty = \left\| \sum_{k=p+1}^{\infty} f_k \right\|_\infty \leq \sum_{k=p+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$$

Da $\sum_{k=1}^{N} f_k$ eine Regelfunktion ist, existiert eine Treppenfunktion T: $[a,b] \to \mathbf{R}$ mit

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} f_k - T \right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \|f - T\|_\infty \leq \left\| f - \sum_{k=1}^{N} f_k \right\|_\infty + \left\| \sum_{k=1}^{N} f_k - T \right\|_\infty < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ f ist Regelfunktion und $\int_a^b f(x)\,dx$ existiert.

Für p≥N gilt $\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{p} \int_a^b f_k(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \sum_{k=1}^{p} f_k(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=1}^{p} f_k(x) \right) dx \right|$

$$\leq \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^{p} f_k(x) \right| dx \leq \int_a^b \left\| f - \sum_{k=1}^{p} f_k \right\|_\infty dx < \frac{\varepsilon}{2} \cdot (b-a)$$

$\Rightarrow$ Behauptung q.e.d.

Beispiel:

Potenzreihen: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$

Konvergenzradius R>0: $x \in \mathbf{R}$ mit $|x - x_0| < R$, d.h. $[x_0 - x, x_0 + x]$:

$$\int_{x_0}^{x_0+x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (t - x_0)^n \,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \int_{x_0}^{x_0+x} (t - x_0)^n \,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

§ 4 Uneigentliche Integrale

Bisher: Integration von Regelfunktionen über einem kompakten Intervall [a,b]. Man möchte nun auch – falls möglich – Regelfunktionen über nicht kompakte Intervalle, z.B. [a,b), $a<b\leq\infty$ integrieren.

Das bisherige Verfahren kann nicht direkt angewandt werden, da der Approximationssatz (1.10) nur für kompakte Intervalle [a,b] gültig ist.

Das neue Verfahren besteht in der Kombination aus Ausschöpfung des nicht kompakten Intervalls durch Kompakta und aus Integration über diese Kompakta.

(1.31) ***Definition:*** Sei $I\subseteq\mathbf{R}$ ein Intervall mit Randpunkten a und b, wobei $-\infty\leq a<b\leq\infty$. Eine Regelfunktion $f\colon I\to\mathbf{R}$ heißt

1) **uneigentlich integrierbar über [a,b)**, $a\in\mathbf{R}$, wenn der Grenzwert $\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\beta\to b^-}\int_a^\beta f(x)\,dx$ existiert.
2) **uneigentlich integrierbar über (a,b]**, $b\in\mathbf{R}$, falls der Grenzwert $\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\alpha\to a^+}\int_\alpha^b f(x)\,dx$ existiert.
3) **uneigentlich integriebar über (a,b)**, wenn $c\in(a,b)$ existiert, so daß f über (a,c] und [c,b] uneigentlich integrierbar ist. Man setzt dann $\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.
4) **uneigentlich absolut-integrierbar**, wenn $|f|$ über I uneigentlich integrierbar ist.

Ist f uneigentlich integrierbar (bzw. uneigentlich absolut integrierbar), so heißt das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ **konvergent** (bzw. **absolut konvergent**).

<u>Bemerkung:</u>

Ist I=[a,b] kompaktes Intervall und $f\colon [a,b]\to\mathbf{R}$ Regelfunktion, dann stimmt das in (1.15) eingeführte Integral über [a,b] mit den uneigentlichen Integralen über [a,b), (a,b], (a,b) überein.
Denn wegen der Stetigkeit der Stammfunktion von f auf [a,b] (1.22) gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\beta\to b^-}\int_a^\beta f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to a^+}\int_\alpha^b f(x)\,dx.$$

Beispiele:

1) $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & ,p>1 \\ \infty & ,p\le 1\end{cases}$, da für β>1 $\int_1^\beta \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{p-1}\cdot(1-\beta^{1-p}) & p\ne 1 \\ \ln\beta & p=1\end{cases}$

2) $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-p} & p<1 \\ \infty & p\ge 1\end{cases}$, da für 0<α<1 $\int_\alpha^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-p}\cdot(1-\alpha^{1-p}) & p\ne 1 \\ -\ln\alpha & p=1\end{cases}$

(Folglich: $\int_0^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \infty$)

3) $\int_0^\infty \cos x\,dx$ konvergiert nicht, da $\int_0^\beta \cos x\,dx = \sin\beta$ und $\sin\left((2\cdot n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{n+1}$

4) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$, denn $\int_0^\beta \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan\beta \to \frac{\pi}{2}$ für $\beta\to\infty$ und

$\int_\alpha^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx = -\arctan\alpha \quad \to \frac{\pi}{2}$ für $\alpha\to-\infty$

5) $\int_0^\infty e^{-kx}\,dx = \frac{1}{k}$ für k>0, denn $\int_0^\beta e^{-kx}\,dx = \frac{1}{k}\cdot\left(1-e^{-k\beta}\right) \underset{\beta\to\infty}{\to} \frac{1}{k}$

Zum Nachweis der absoluten Konvergenz läßt sich häufig ein Majorantenkriterium anwenden. Es wird hier zwar lediglich für den ersten Typ uneigentlicher Integrale formuliert; sinngemäß gilt es aber auch für die beiden anderen:

(1.32) ***Satz:*** (**Vergleichskriterium**):

Sei f: [a,b)→**R** eine Regelfunktion. Sei g: [a,b)→**R** eine Funktion.

1) Ist g uneigentlich integrierbar und gilt $|f(t)|\le g(t)$, t ∈ [a,b), dann ist f uneigentlich absolut-integrierbar (und damit uneigentlich integrierbar) über [a,b) mit

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt \le \int_a^b g(t)\,dt$$

2) Divergiert $\int_a^b g(t)\,dt$ und gilt 0≤g(t)≤f(t), t ∈ [a,b), dann divergiert auch $\int_a^b f(t)\,dt$

Beweis:

ad 1)

Für $x \in [a,b)$ seien $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$, $H(x) := \int_a^x |f(t)|\,dt$ und $G(x) := \int_a^x g(t)\,dt$. Dann gilt

für $x,y \in [a,b)$ $|F(x)-F(y)| \le |G(x)-G(y)|$ und ebenso $|H(x)-H(y)| \le |G(x)-G(y)|$.
Da $\lim_{\beta\to b^-} G(\beta)$ existiert, erfüllen F und H bezüglich $\beta \to b^-$ die Cauchy-Konvergenzkriterien.

Also existiert $\lim_{\beta\to b^-} \int_a^\beta |f(t)|\,dt = \int_a^b |f(t)|\,dt$. Weiterhin gilt nach (1.16)

$$\lim_{\beta\to b^-} \left| \int_a^\beta f(t)\,dt \right| \le \lim_{\beta\to b^-} \int_a^\beta |f(t)|\,dt \le \lim_{\beta\to b^-} \int_a^\beta g(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt .$$

ad 2)

Angenommen $\int_a^b f(t)\,dt$ konvergiert, dann konvergiert nach 1) wegen $0 \le g(t) \le f(t)$ auch

$\int_a^b g(t)\,dt$ $\Rightarrow$ Widerspruch. q.e.d.

Beispiele:

1) $\int_0^\infty \frac{t}{t^2+2\cdot t+5}\,dt = \int_0^\infty \frac{t}{t^2+2\cdot t+4+1}\,dt = \int_0^\infty \frac{t}{(t+1)^2+4}\,dt$ divergiert, denn für $t \ge 5$ gilt

$$\frac{t}{t^2+2\cdot t+5} = \frac{1}{t+2+\frac{5}{t}} \ge \frac{1}{t+3} \ge \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{t}{t^2+2\cdot t+5}\,dt = \int_0^5 \frac{t}{t^2+2\cdot t+5}\,dt + \int_5^\infty \frac{t}{t^2+2\cdot t+5}\,dt \ge \frac{1}{2}\cdot\int_5^\infty \frac{dt}{t} = \infty$$

2) $\int_0^\infty e^{-t}\cdot \sin t\,dt$ ist absolut konvergent, da $\left|e^{-t}\cdot \sin t\right| \le e^{-t}$ und $\int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1$ (nach (1.31))

3) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ konvergiert, da $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ **(**weil $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin(0)}{x-0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$**)**

ist $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \ne 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ stetig.

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx$ existiert. Nach (1.24) existiert auch $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Sei β>1: $\int_1^\beta \frac{\sin x}{x}\,dx = \cos(1) - \frac{\cos\beta}{\beta} - \int_1^\beta \frac{\cos t}{t^2}\,dt$.

Wegen $\left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \le \frac{1}{t^2}$ und $\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,dt < \infty$, ist auch $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx < \infty$

4) $\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ existiert nicht, denn für $x \in (k\cdot\pi,(k+1)\cdot\pi)$, $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ ist

$\frac{1}{x} \ge \frac{1}{(k+1)\cdot\pi}$, daher ist

$\int_{k\cdot\pi}^{(k+1)\cdot\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \ge \frac{1}{(k+1)\cdot\pi} \cdot \int_{k\cdot\pi}^{(k+1)\cdot\pi} |\sin x|\,dx = \frac{2}{(k+1)\cdot\pi}$ und daraus folgt

$\int_0^{(k+1)\cdot\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \ge \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j+1}$; die harmonische Reihe divergiert aber.

(Also ist $\frac{\sin x}{x}$ auf $[0,\infty)$ uneigentlich integrierbar, aber nicht absolut uneigentlich integrierbar).

(1.33) ***Satz:*** (**Grenzwertkriterium**):
Seien f,g: $[a,b)\to\mathbf{R}$ Regelfunktionen mit $g(x)>0$, $x \in [a,b)$.
Falls $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ und $\lim_{\beta\to b^-} \int_0^\beta g(x)\,dx$ existieren, dann existiert auch

$\lim_{\beta\to b^-} \int_a^\beta f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

Beweis:

Sei $\lambda := \lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$, dann existiert ein $\alpha \in [a,b)$ mit $|f(x)| \le (1+|\lambda|)\cdot g(x)$ für $x \in [a,b)$.

Nach dem Vergleichskriterium (1.32) existieren dann auch $\int_\alpha^b f(x)\,dx$ und damit auch $\int_a^b f(x)\,dx$. q.e.d.

Beispiel:

Für $\alpha>0$ ist die Gammafunktion definiert als $\Gamma(\alpha):=\int_0^\infty t^{\alpha-1}\cdot e^{-t}\,dt$; das uneigentliche Integral ist konvergent und hat die Eigenschaften:

1) $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\cdot\Gamma(\alpha)$
2) $\Gamma(1)=1$
3) $\Gamma(n+1)=n!$ für $n\in\mathbf{N}\cup\{0\}$

Beweis:

$\int_0^1 t^{\alpha-1}\cdot e^{-t}\,dt$ ist für $\alpha\geq 1$ ein eigentliches Integral und somit konvergent.

Für $0<\alpha<1$ gilt $0<t^{\alpha-1}\cdot e^{-t}<\frac{1}{t^{1-\alpha}}$, für $t\in(0,1)$, da $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-\alpha}}\,dt<\infty$ für $0<\alpha<1$ gilt

$\Rightarrow \int_0^1 t^{\alpha-1}\cdot e^{-t}\,dt<\infty$ für $0<\alpha<1$.

Für $\alpha\in\mathbf{R}$ gilt

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t^{\alpha-1}\cdot e^{-t}}{e^{-\frac{t}{2}}}=\lim_{t\to\infty} t^{\alpha-1}\cdot e^{-\frac{t}{2}}=0 \text{ und } \int_1^\infty e^{-\frac{t}{2}}\,dt<\infty$$

Wegen (1.33) folgt die Konvergenz von $\int_1^\infty t^{\alpha-1}\cdot e^{-t}\,dt$.

Die Eigenschaften 1) – 3) lassen sich nachrechnen. q.e.d.

Einen Zusammenhang zwischen uneigentlichen Integralen und Reihen stellt das folgende Kriterium her:

(1.34) ***Satz:*** (**Integralkriterium**):
Sei f: $[1,\infty)\to\mathbf{R}$ monoton fallend mit $f(x)\geq 0$ für $x\in[1,\infty)$. Dann gilt:

1) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ der Abweichungen $a_n:=\sum_{k=1}^{n} f(k)-\int_1^{n+1} f(x)\,dx$, $n\in\mathbf{N}$, konvergiert mit $0\leq\lim_{n\to\infty} a_n\leq f(1)$
2) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergiert genau dann, wenn das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x)\,dx$ konvergiert.

Beweis:

Für $x \in [k,k+1]$ gilt $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$, damit $f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \geq f(k+1)$. Durch vollständige Induktion zeigt man, daß die Folge $(a_n)_n$ monoton wächst und daß $0 \leq a_n \leq f(1)-f(n+1)$ gilt
$\Rightarrow$ Behauptung q.e.d.

Beispiele:

1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ *harmonische Reihe*

Betrachte $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \int_1^{n+1} f(x)\,dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln(n+1)$

Da f monoton fällt, existiert

$$\lim_{n\to\infty} c_n := \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) = c$$ *Eulersche Konstante*

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ ist für $\alpha > 1$ konvergent.

§ 5 Riemannsche Summen, Riemannsche Integrale

In den vorliegenden Abschnitten wurde nicht mit dem Riemannschen Integral begonnen, wie vielfach üblich, sondern das Integral von Treppen- und Regelfunktionen eingeführt. Man spricht bei diesem Integralbegriff gelegentlich auch vom Cauchyschen Integral. Da so gut wie alle praktisch vorkommenden Funktionen Regelfunktionen sind (vgl. Definition (1.5)), bedeutet dies kaum einen Verlust an Allgemeinheit.. Tatsächlich sind die Funktionen, die zwar Riemann-integrierbar sind aber keine Regelfunktionen, als Ausnahmen zu betrachten. So ist f: $[-1,1]\to\mathbf{R}$ mit $f(x):=\sin\frac{1}{x}$ für $x\neq 0$ und $f(0)=0$ eine solche Funktion.

Die Einführung des Integrals über Treppen- und Regelfunktionen erscheint etwas durchsichtiger als über das Riemannsche Integral, da man die meisten Integraleigenschaften bei Treppenfunktionen unmittelbar einsieht und sie dann für Regelfunktionen durch Grenzübergang leicht gewinnt. Die Einführung des Cauchyschen Integrals hat auch einen gewissen Modellcharakter für ein häufiges Vorgehen in der modernen Analysis. Insbesondere in der Funktionalanalysis verfährt man auch vielfach so, daß man einen Begriff zunächst für eine kleinere überschaubare Menge von Funktionen erklärt und ihn dann in geeigneter Weise, etwa durch Grenzübergang, auf eine umfassendere Funktionenmenge überträgt. In der Funktionalanalysis, der Distributionentheorie, der Maßtheorie und der Wahrscheinlichkeitslehre stützt man sich auf das Lebesguesche Integral, das für eine noch weitere Funktionenklasse als das Riemannsche Integral erklärt ist.

In diesem Abschnitt soll nun der Zusammenhang zwischen dem Integral einer Regelfunktion f: $[a,b]\to\mathbf{R}$ und den Riemannschen Summen näher untersucht werden. Insbesondere wird eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür hergeleitet, wann für eine Funktion f: $[a,b]\to\mathbf{R}$ jede Folge von Riemannschen Summen von f gegen ein und denselben Grenzwert konvergiert (Lebesguesches Integrabilitätskriterium).

(1.35) ***Definition:*** Sei f: $[a,b]\to\mathbf{R}$ eine Funktion. Sei $Z=\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ eine Zerlegung von [a,b]. Sei $B=\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ mit $\xi_j \in [x_{j-1},x_j]$, $j \in \{1, ..., n\}$, eine Besetzung zur Zerlegung Z. Dann heißt

1) $R(Z,B,f):=\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\cdot(x_j - x_{j-1})$ eine **Riemannsche Summe von f bezüglich der Zerlegung Z und der Besetzung B**.

2) Ist f beschränkt auf [a,b], dann heißen $U(Z,f):=\sum_{j=1}^{n} m_j\cdot(x_j - x_{j-1})$ mit $m_j=\inf\{f(x): x \in [x_{j-1},x_j]\}$, $j \in \{1, ..., n\}$, **Untersumme von f bezüglich Z** und $O(Z,f):=\sum_{j=1}^{n} M_j\cdot(x_j - x_{j-1})$ mit $M_j=\sup\{f(x): x \in [x_{j-1},x_j]\}$, $j \in \{1, ..., n\}$, **Obersumme von f bezüglich Z.**

Bei Verfeinerungen nehmen Untersummen zu und Obersummen ab, wie das folgende Lemma zeigt:

(1.36) ***Lemma:*** Sei f: $[a,b]\to\mathbf{R}$ beschränkt. Seien Z, Z_1, Z_2 Zerlegungen von [a,b], sei Z' eine Verfeinerung von Z. Dann gilt:

1) $U(Z,f) \le U(Z',f) \le R(Z',B',f)$ für jede Besetzung B' zu Z'
2) $R(Z',B',f) \le O(Z',f) \le O(Z,f)$ für jede Besetzung B' zu Z'
3) $O(Z',f)-U(Z',f) \le O(Z,f)-U(Z,f)$
4) $U(Z_1,f) \le U(Z_0,f) \le R(Z_0,B_0,f) \le O(Z_0,f) \le O(Z_2,f)$, wobei $Z_0=Z_1 \cup Z_2$ und B_0 eine beliebige Besetzung von Z_0 ist

(1.37) ***Definition:*** Sei $Z=\{x_0, x_1, ..., x_m\}$ eine Zerlegung von [a,b].
$\mu(Z):=\max\{x_j-x_{j-1}: j \in 1, ..., m\}$ heißt **Feinheit der Zerlegung**.
Eine Folge $(Z_k)_{k\in\mathbf{N}}$ von Zerlegungen Z_k von [a,b] heißt eine **ausgezeichnete Zerlegungsfolge**, wenn $\lim\limits_{k\to\infty}\mu(Z_k)=0$.

Die enge Beziehung zwischen Untersummen, Obersummen und Riemannschen Summen erläutert

(1.38) ***Satz:*** Für eine Funktion f: $[a,b]\to\mathbf{R}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1) Zu jedem $\varepsilon>0$ existiert ein $\delta>0$, so daß für alle Zerlegungen Z_1, Z_2 von [a,b] mit $\mu(Z_1)<\delta$ und $\mu(Z_2)<\delta$ sowie für jede Besetzung B_1 zu Z_1 und B_2 zu Z_2 gilt: $|R(Z_1,B_1,f)-R(Z_2,B_2,f)|<\varepsilon$
2) Für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge $(Z_k)_{k\in\mathbf{N}}$ von [a,b] und für jede Besetzung B_k zu Z_k gilt $\lim\limits_{k\to\infty}R(Z_k,B_k,f)=: I_R(f)<\infty$
3) f ist beschränkt und zu jedem $\varepsilon>0$ existiert eine Zerlegung Z von [a,b] mit $O(Z,f)-U(Z,f)<\varepsilon$

<u>Beweis:</u>

1) $\Rightarrow$ 2)
Sei $\varepsilon>0$, dann existiert ein $\delta>0$ mit den Eigenschaften von 1). Sei $(Z_k)_{k\in\mathbf{N}}$ eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge, dann existiert ein $n=n(\delta)$ mit $\mu(Z_k)<\delta$ für alle $k\ge n(\delta)$
$\Rightarrow$ für $n,m \ge n(\delta)$: $|R(Z_n,B_n,f)-R(Z_m,B_m,f)|<\varepsilon$
$\Rightarrow$ $\big(R(Z_k,B_k,f)\big)_k$ ist eine Cauchyfolge in **R**, die in **R** konvergiert.
Sei $(Z_k')_{k\in\mathbf{N}}$ eine weitere ausgezeichnete Zerlegungsfolge mit den Besetzungen B_k' zu Z_k'. Dann gilt für die „gemischte Folge“ $\tilde{Z}_k$ (Z_1, Z_1', Z_2, Z_2', Z_3, Z_3', ...) und die Besetzungsfolge $\tilde{B}_k$ (B_1, B_1', B_2, B_2', ...) $\lim\limits_{k\to\infty}\mu(\tilde{Z}_k)=0$, damit konvergiert auch $\big(R(\tilde{Z}_k,\tilde{B}_k,f)\big)_{k\in\mathbf{N}}$ in **R**, und die Teilfolgen $\big(R(Z_k,B_k,f)\big)_{k\in\mathbf{N}}$ und $\big(R(Z_k',B_k',f)\big)_{k\in\mathbf{N}}$ konvergieren gegen denselben Grenzwert $I_k(f)$.

2) $\Rightarrow$ 3)

Angenommen, f ist nicht beschränkt auf [a,b], dann sei o.B.d.A. $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)=\infty$. Da [a,b] kompakt ist (=beschränkt + abgeschlossen), existiert $\xi \in$ [a,b], so daß für jede ε-Umgebung U_ε von ξ auch $\sup\limits_{x\in U\cap[a,b]} f(x)=\infty$. Wir nehmen an, daß $\xi \in$ (a,b).

Sei $Z=\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ eine Zerlegung von [a,b] mit $\xi \notin Z$, dann liegt ξ etwa in (x_{k-1},x_k);

Für $j \in \{1, .., n\}$, $j\neq k$, wähle $\xi_j \in [x_{j-1},x_j]$ beliebig. Sei $R=\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} f(\xi_j)\cdot(x_j - x_{j-1})$.

Da $\xi \in (x_{k-1},x_k)$ und da $\sup\limits_{x\in(x_{k-1},x_k)} f(x)=\infty$, kann man zu jedem M>0 ein $\xi_{k,M} \in (x_{k-1},x_k)$ finden.

$$f(\xi_{k,M})>\frac{M-R}{x_k - x_{k-1}} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\cdot(x_j - x_{j-1}) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} f(\xi_j)\cdot(x_j - x_{j-1}) + f(\xi_{j,M})\cdot(x_k - x_{k-1})$$

$$> R + \frac{M-R}{x_k - x_{k-1}}\cdot(x_k - x_{k-1}) = M$$

Also läßt sich eine Folge $(R(Z_k,B_k,f))_{k\in\mathbf{N}}$ von Riemannschen Summen konstruieren mit $\lim\limits_{k\to\infty}\mu(Z_k)=0$ und $\lim\limits_{k\to\infty} R(Z_k,B_k,f)=\infty$

$\Rightarrow$ f ist beschränkt auf [a,b] und es existieren Ober- und Untersumme von f bezüglich jeder Zerlegung Z von [a,b]. Ähnlich läßt es sich argumentieren, wenn ξ Randpunkt von [a,b] ist.

Sei $(Z_k)_{k\in\mathbf{N}}$ eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge. Sei ε>0, dann existiert k_ε mit

$I_R(f)-\frac{\varepsilon}{3} < R(Z_{n_\varepsilon}, B_{n_\varepsilon}, f) < I_R(f)+\frac{\varepsilon}{3}$, wobei B_{n_ε} eine beliebige Besetzung von Z_{n_ε} ist.

$\Rightarrow I_R(f)-\frac{\varepsilon}{3} \le U(Z_{n_\varepsilon},f) \le O(Z_{n_\varepsilon},f) \le I_R(f)+\frac{\varepsilon}{3}$

$\Rightarrow O(Z_{n_\varepsilon},f)-U(Z_{n_\varepsilon},f) < \varepsilon$.

3) $\Rightarrow$ 1)

Sei ε>0, dann existiert eine Zerlegung Z_0 von [a,b] mit $O(Z_0,f)-U(Z_0,f)<\frac{\varepsilon}{5}$.

Da f beschränkt auf [a,b], ist $D:=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) - \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) > 0$

(für konstante Funktionen folgt 1) unmittelbar**)**

Sei $\delta:=\frac{1}{5\cdot D\cdot m}\cdot\varepsilon$, wobei m die Anzahl der Teilintervalle von Z_0 ist.

Sei $Z_1=\{x_0^{(1)}, ..., x_r^{(1)}\}$ eine Zerlegung von [a,b] mit $\mu(Z_1)<\delta$, B_1 eine beliebige Besetzung zu Z_1. $Z_{1,0}:=Z_1\cup Z_0$ ist eine Verfeinerung von Z_1, die aus Z_1 durch Hinzunahme von höchstens m Teilintervallen entsteht. Sei $B_{1,0}$ eine beliebige Besetzung zu $Z_{1,0}$, dann gilt:

$$\left|R\left(Z_1\Big|_{[x_{k-1}^{(1)},x_k^{(1)}]}, B_1, f\right) - R\left(Z_{1,0}\Big|_{[x_{k-1}^{(1)},x_k^{(1)}]}, B_{1,0}, f\right)\right| \le D\cdot(x_k^{(1)}-x_{k-1}^{(1)}) \le D\cdot\mu(Z_1)$$

$\Rightarrow$ $|R(Z_1,B_1,f)-R(Z_{1,0},B_{1,0},f)| \le m\cdot D\cdot\mu(Z_1)$, ebenso gilt für die Zerlegung Z_2 von [a,b] mit $\mu(Z_2)<\delta$

$|R(Z_2,B_2,f)-R(Z_{2,0},B_{2,0},f)| \le m\cdot D\cdot\mu(Z_2)$, wobei B_2, $B_{2,0}$ beliebige Besetzungen von Z_2, $Z_{2,0}:=Z_2\cup Z_0$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow |R(Z_1,B_1,f)-R(Z_2,B_2,f)| &\le |R(Z_1,B_1,f)-R(Z_{1,0},B_{1,0},f)| + |R(Z_{1,0},B_{1,0},f)-R(Z_0,B_0,f)| \\
&\quad + |R(Z_0,B_0,f)-R(Z_{2,0},B_{2,0},f)| + |R(Z_{2,0},B_{2,0},f)-R(Z_2,B_2,f)| \\
&\le m\cdot D\cdot\mu(Z_1) + |R(Z_{1,0},B_{1,0},f)-R(Z_0,B_0,f)| \\
&\quad + |R(Z_0,B_0,f)-R(Z_{2,0},B_{2,0},f)| + m\cdot D\cdot\mu(Z_2);
\end{aligned}$$

da $B_{2,0}$, $B_{1,0}$ und B_0 beliebig sind, gilt

$$\begin{aligned} |R(Z_1,B_1,f)-R(Z_2,B_2,f)| &\le m\cdot D\cdot\mu(Z_1)+O(Z_{1,0},f)-U(Z_0,f)+O(Z_0,f)-U(Z_{2,0},f)+m\cdot D\cdot\mu(Z_2)\\ &\le m\cdot D\cdot\mu(Z_1)+O(Z_0,f)-U(Z_0,f)+O(Z_0,f)-U(Z_0,f)+m\cdot D\cdot\mu(Z_2)\\ &\le m\cdot D\cdot\delta+2\cdot(O(Z_0,f)-u(Z_0,f))+m\cdot D\cdot\delta\\ &\le m\cdot D\cdot\frac{\varepsilon}{5\cdot D\cdot m}+2\cdot\frac{\varepsilon}{5}+m\cdot D\cdot\frac{\varepsilon}{5\cdot D\cdot m}<\varepsilon \qquad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

In der Literatur wird dieses Kriterium als das Riemannsche Integrabilitätskriterium für die Riemann-Integrierbarkeit von Funktionen f: $[a,b]\rightarrow\mathbf{R}$ bezeichnet.

(1.39) ***Definition:*** Eine Funktion f: $[a,b]\rightarrow\mathbf{R}$ heißt **Riemann-integrierbar über [a,b]**, wenn für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ und jede Besetzung B_k zu Z_k, $k\in\mathbf{N}$, $\lim_{n\to\infty} R(Z_n,B_n,f)=:I_R(f)<\infty$.

Die Zahl $I_R(f)$ heißt das **Riemann-Integral von f über [a,b]**.

Wir werden zeigen, daß jede Regelfunktion f auf [a,b] auch Riemann-integrierbar ist und daß das Riemann-Integral von f über [a,b] mit dem Integral der Regelfunktion f über [a,b] übereinstimmt. Dennoch gibt es Riemann-integrierbare Funktionen über einem Intervall [a,b], die keine Regelfunktionen sind wie die Funktion
im Beispiel unten zeigt. Was die Existenz einer Stammfunktion und die Existenz eines Riemann-Integrals angehen, so sei hier betont, daß Existenz einer Stammfunktion und Existenz des Riemann-Integrals begrifflich zwei völlig verschiedene Dinge sind und deshalb sorgfältig auseinandergehalten werden müssen. So braucht die Ableitung einer Funktion nicht Riemann-integrierbar sein, obwohl diese Ableitungsfunktion (trivialerweise) eine Stammfunktion besitzt.

Beispiel:

$f:[-1,1]\rightarrow\mathbf{R}$ $\quad f(x):=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ ist Riemann-integrierbar, aber keine Regelfunktion.

(1.40) ***Satz:*** Sei f: $[a,b]\rightarrow\mathbf{R}$ eine Regelfunktion. Zu jedem $\varepsilon>0$ existiert ein $\delta>0$ mit $|R(Z,B,f)-\int_a^b f(x)\,dx|<\varepsilon$ für jede Zerlegung Z von [a,b] mit $\mu(Z)<\delta$ und jede Besetzung B zu Z.

Beweis:

1) Ist f konstant, so ist die Aussage unmittelbar klar.
2) Sei f eine Treppenfunktion auf [a,b] mit genau einer Sprungstelle x_1. Sei $\varepsilon>0$, sei $\delta := \frac{\varepsilon}{4\cdot\|f\|_\infty}$. Sei Z eine Zerlegung von [a,b] mit $\mu(Z)<\delta$, sei B eine Besetzung zu Z, dann gilt:
$$\left|R(Z,B,f)-\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \left|R(Z|_{[a,x_1]},B,f)-\int_a^{x_1} f(x)\,dx\right| + \left|R(Z|_{[x_1,b]},B,f)-\int_{x_1}^{b} f(x)\,dx\right|$$
$$\le 2\cdot\|f\|_\infty\cdot\mu(Z) + 2\cdot\|f\|_\infty\cdot\mu(Z) < \varepsilon.$$
3) Die Behauptung sei richtig für jede Treppenfunktion mit höchstens m Sprungstellen. Sei S eine Treppenfunktion auf [a,b] mit m+1 Sprungstellen, dann existieren eine Treppenfunktion S_m auf [a,b] mit m Sprungstellen und eine Treppenfunktion S_1 auf [a,b] mit einer Sprungstelle. Sei $\varepsilon>0$, wähle $\delta_m\left(\frac{\varepsilon}{2},S_m\right)$ und $\delta_1\left(\frac{\varepsilon}{2},S_1\right)$ derart, daß die Behauptung mit $\frac{\varepsilon}{2}$ gilt. Nun wähle $\delta:=\min(\delta_m,\delta_1)$.
   Also gilt die Behauptung für alle Treppenfunktionen auf [a,b].
4) Sei f: $[a,b]\to\mathbf{R}$ eine Regelfunktion. Sei $\varepsilon>0$, dann existiert eine Treppenfunktion T: $[a,b]\to\mathbf{R}$ mit $\|f-T\|_\infty<\frac{\varepsilon}{3\cdot(b-a)}$. Ferner existiert ein $\delta=\delta\left(\frac{\varepsilon}{3},T\right)>0$, so daß für jede Zerlegung Z von [a,b] mit $\mu(Z)<\delta$ und jede Besetzung B zu Z gilt:
$$\left(Z=\{x_0, x_1, ..., x_r\},\ B=\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_r\}: \left|\sum_{j=1}^{r} T(\xi_j)\cdot(x_j-x_{j-1})-\int_a^b T(x)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}\right)$$
$$\Rightarrow \left|\sum_{j=1}^{r} f(\xi_j)\cdot(x_j-x_{j-1})-\int_a^b f(x)\,dx\right|$$
$$\le \left|\sum_{j=1}^{r} f(\xi_j)\cdot(x_j-x_{j-1})-\sum_{j=1}^{r} T(\xi_j)\cdot(x_j-x_{j-1})\right| + \left|\sum_{j=1}^{r} T(\xi_j)\cdot(x_j-x_{j-1})-\int_a^b T(x)\,dx\right|$$
$$+\left|\int_a^b T(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\right|$$
$$\le \sum_{j=1}^{r}\|f-T\|_\infty\cdot(x_j-x_{j-1})+\frac{\varepsilon}{3}+\int_a^b\|T-f\|_\infty\,dx = 2\cdot(b-a)\cdot\|T-f\|_\infty+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon \qquad \text{q.e.d.}$$

(1.41) ***Korollar:*** Sei f: $[a,b]\to\mathbf{R}$ eine Regelfunktion. Sei $(Z_n)_{n\,\in\,\mathbf{N}}$ eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge von Zerlegungen Z_k von [a,b]. Sei B_k eine beliebige Besetzung zu Z_k, $k \in \mathbf{N}$. Dann ist $I_R(f) = \lim_{k\to\infty} R(Z_k,B_k,f) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Hölder-Ungleichung:

Cauchy-Schwarz: $$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k \cdot y_k| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$l_2=\{(x_k)_{k \in \mathbf{N}}: \sum |x_k|^2 < \infty\}$$

↪ Hölder-Ungleichung: $$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k \cdot y_k| \le \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}}_{=\|x\|_p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$;$1<p<\infty$

$$l_p=\{(x_k)_{k \in \mathbf{N}}: \sum |x_k|^p < \infty\};\ 1\le p<\infty$$

$$\int_a^b |f(x) \cdot g(x)|\, dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

(1.42) ***Satz:*** Seien f: $[a,b]\to\mathbf{R}$ und g: $[a,b]\to\mathbf{R}$ Regelfunktionen.

Seien $p,q \in \mathbf{R}$ mit $p\ge1$, $q\ge1$ und $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Dann gilt mit $\|f\|_p:=\left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$

$\int_a^b |f(x) \cdot g(x)|\, dx \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q$ (Höldersche Ungleichung für Integrale)

Das folgende Kriterium von Lebesgue dringt wesentlich tiefer in die Beziehung ein, die zwischen Stetigkeitseigenschaften einer Funktion und der Riemann-Integrierbarkeit der Funktion bestehen. Die entscheidende Klärung wird der Begriff der Nullmenge bringen, ein Begriff, der gerade bei der Einführung des Lebesgue-Integrals eine noch größere Bedeutung haben wird (vgl. Definition (3.31)).

(1.43) ***Definition:*** Eine Menge $M\subseteq\mathbf{R}$ heißt eine **Menge vom Lebesgue-Maß 0** (kurz: **Lebesgue-Nullmenge**), wenn zu jedem $\varepsilon>0$ höchstens abzählbar viele Intervalle $I_1, I_2, \ldots$ existieren mit

1) $M\subseteq\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ und

2) $\sum_{j=1}^{\infty}|I_j| < \varepsilon$, wobei $|I_j|$ die Intervallänge von I_j bezeichne.

Die Intervalle I_j können offen oder abgeschlossen sein.

Das folgende Lemma beschreibt eine Fülle von Mengen, die vom Lebesgue-Maß 0 sind:

(1.44) ***Lemma:***

1) Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge
2) Die Vereinigung von höchstens abzählbar vielen Nullmengen ist eine Nullmenge
3) Jede höchstens abzählbare Teilmenge von **R** ist eine Nullmenge
4) Eine kompakte Teilmenge K von **R** ist genau dann eine Nullmenge, wenn zu jedem $\varepsilon>0$ endlich viele Intervalle existieren, die K überdecken und deren Längensumme $\leq\varepsilon$ ist

Beweis:

ad 2)
Seien M_j, $j \in \mathbf{N}$ höchstens abzählbar viele Nullmengen, sei außerdem $\varepsilon>0$. Zu M_j existieren höchstens abzählbar viele abgeschlossene Intervalle $I_{j1}, I_{j2}, \ldots$ mit $M_j \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{jk}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} |I_{jk}| < \frac{\varepsilon}{2^j}$

Dann gilt $\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} I_{jk}$ und $\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |I_{jk}| < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon$

ad 3)
Sei $M:=\{r_j,\ j \in \mathbf{N}\} \subseteq \mathbf{R}$ eine abzählbare Teilmenge. Sei $\varepsilon>0$, dann gilt für $k \in \mathbf{N}$

$r_k \in (r_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}, r_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}})$ und damit $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} (r_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}, r_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}})$. Ferner gilt für

$I_k := (r_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}, r_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}})$ stets $|I_k| = \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$, so daß $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \frac{\varepsilon}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} - 1\right) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

ad 4)
Sei $K \subseteq \mathbf{R}$ eine kompakte Nullmenge, sei außerdem $\varepsilon>0$, dann existieren höchstens abzählbar viele offene Intervalle $I_1, I_2, \ldots$ mit $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ und $\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| < \varepsilon$. Da K kompakt ist, reichen nach dem Überdeckungssatz von Heine-Borel bereits endlich viele der Intervalle I_j zur Überdeckung aus, und deren Längensumme ist erst recht $< \varepsilon$.
In umgekehrter Richtung ist die Aussage trivial. q.e.d.

(1.45) ***Satz:*** (**Lebesguesches Integrabilitätskriterium**)::

Für eine Funktion $f: [a,b] \to \mathbf{R}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1) f ist beschränkt auf [a,b] und stetig auf [a,b] \ M, wobei $M \subseteq [a,b]$ eine Lebesgue-Nullmenge ist
2) Für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge $(Z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ von [a,b] und jede Besetzung B_n zu Z_n, $n \in \mathbf{N}$, gilt: $\lim_{n\to\infty} R(Z_n,B_n,f) = I_R(f)$
3) F ist auf [a,b] Riemann-integrierbar

Beweis:

1) $\Rightarrow$ 2)
f ist auf [a,b] beschränkt, d.h. $|f(x)| \leq k$ für alle $x \in [a,b]$. Für die Menge M der Unstetigkeitsstellen von f und zu $\varepsilon>0$ existieren höchstens abzählbare offene Intervalle $I_1, I_2, \ldots$ mit $M \subseteq \bigcup_{j\in N} I_j$ und $\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| < \varepsilon$

$\Rightarrow M \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{I_j}$ und $\sum_{j=1}^{\infty} |\overline{I_j}| < \varepsilon$

Sei $x_0 \in [a,b] \setminus M$, dann ist f in x_0 stetig und es existiert ein Intervall J_{x_0} mit $x_0 \in J_{x_0}$ und $\sup\limits_{x,y\in[a,b]\cap \overline{J_{x_0}}} |f(x)-f(y)| < \varepsilon$; $\overline{J_{x_0}}$ abgeschlossenes Intervall. Das System aller Intervalle J_{x_0}, $x_0 \in [a,b] \setminus M$ und aller $I_1, I_2, \ldots$ ist eine offene Überdeckung von [a,b]. Nach Heine-Borel existiert ein endliches System $I_{j_1}, I_{j_2}, \ldots, I_{j_r}, J_{x_1}, \ldots, J_{x_s}$ von offenen Intervallen, das [a,b] überdeckt. Dann wird [a,b] auch überdeckt durch $\overline{I_{j_1}}, \overline{I_{j_2}}, \ldots, \overline{I_{j_r}}, \overline{J_{x_1}}, \ldots, \overline{J_{x_s}}$.
Wähle eine so feine Zerlegung Z von [a,b], etwa $Z=\{x_0, x_1, \ldots, x_p\}$, daß jedes der Teilintervalle $[x_{j-1},x_j]$in einem der abgeschlossenen Intervalle $\overline{I_{j_1}}, \overline{I_{j_2}}, \ldots, \overline{I_{j_r}}, \overline{J_{x_1}}, \overline{J_{x_2}} \ldots, \overline{J_{x_s}}$ liegt.
Dann gilt:
O(Z,f)-U(Z,f)

$$= \sum_{l=1}^{p} (M_l - m_l)\cdot(x_l - x_{l-1}) = \sum_{\substack{l=1 \\ [x_{l-1},x_l]\subseteq \bigcup_{k=1}^{r} \overline{I_{jk}}}}^{p} (M_l - m_l)\cdot(x_l - x_{l-1}) + \sum_{\substack{l=1 \\ [x_{l-1},x_l]\subseteq \bigcup_{k=1}^{s} \overline{J_{xk}}}}^{p} (M_l - m_l)\cdot(x_l - x_{l-1})$$

$\leq 2\cdot k\cdot\varepsilon+\varepsilon\cdot(b-a) = \big(2\cdot k+(b-a)\big)\cdot\varepsilon$, wenn $M_l=\sup\{f(x): x \in [x_{l-1},x_l]\}$ und $m_l=\inf\{f(x): x \in [x_{l-1},x_l]\}$
$\Rightarrow$ Satz (1.38) liefert Behauptung

2) $\Rightarrow$ 1)
f ist beschränkt auf [a,b]. M sei die Menge der Unstetigkeitsstellen von f, sei $x \in [a,b]$, sei $W_f(x) := \lim\limits_{\delta\to 0^+} \sup\limits_{s,t\in[a,b]\cap J_\delta(x)} |f(s)-f(t)|$, wobei $J_\delta(x)=(x-\delta,x+\delta)$ (*Oszillation*)

Für $m \in \mathbf{N}$ gilt $M \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m$, wobei $D_m := \{x \in [a,b]: W_f(x) \geq \frac{1}{m}\}$.

Wir zeigen: Für $m \in \mathbf{N}$ ist D_m eine Lebesgue-Nullmenge.
Sei $m \in \mathbf{N}$ und $D_m \neq \emptyset$. Zu $\varepsilon>0$ existiert eine Zerlegung $Z_{\varepsilon,m}$ von [a,b] mit
$O(Z_{\varepsilon,m},f)-U(Z_{\varepsilon,m},f) < \frac{\varepsilon}{2\cdot m}$.

Sei *J* die Menge aller Teilintervalle I_k von $Z_{\varepsilon,m}$ und $I_k \cap D_m \neq \emptyset$, dann gilt $D_m \subseteq \bigcup_{I_k\in J} I_k$.

Enthält I_k einen inneren Punkt ξ_k, dann existiert $\delta>0$ mit $I_\delta(\xi_k)\subseteq I_k$ und $\sup\limits_{s,t\in J_\delta(\xi_k)} |f(s)-f(t)| \geq \frac{1}{m}$.

Sei $J^*\subseteq J$ die Menge aller Teilintervalle I_k von $Z_{\varepsilon,m}$ deren Inneres mindestens einen Punkt von D_m enthält.

$$\Rightarrow \frac{1}{m}\cdot \sum_{I_k\in J^*} |I_k| \leq \sum_{I_k\in J^*} (M_k - m_k)\cdot |I_k| \leq O(Z_{\varepsilon,m},f)\text{-}U(Z_{\varepsilon,m},f) < \frac{\varepsilon}{2\cdot m}$$

Zu den Teilpunkten $x_0, x_1, \ldots, x_r$ der Zerlegung $Z_{\varepsilon,m}$ findet man abgeschlossene Intervalle $\overline{I_0}', \overline{I_1}', \ldots, \overline{I_r}'$ mit $x_j \in \overline{I_j}'$ und $\sum\limits_{j=1}^{r} |\overline{I_j}'| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann wird D_m überdeckt von dem endlichen System $J^* \cup \{\overline{I_0}', \overline{I_1}', \ldots, \overline{I_r}'\}$, deren Längensumme $< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ist.

2) $\Leftrightarrow$ 3) entspricht Definition (1.39) q.e.d.

2. Kurven und Kurvenintegrale

Wir wollen nun den Integralbegriff etwas erweitern, indem wir das Integrationsintervall [a,b] erweitern zu einer Kurve in der Ebene bzw. einer Kurve im $\mathbf{R}^n$. Auf diese Weise wollen wir physikalische Begriffe wie Arbeit oder Masse erläutern. Im Mittelpunkt der Untersuchungen werden zunächst die Kurven im $\mathbf{R}^n$ stehen und anschließend die Integrale, deren Integrationsbereich gerade die geeigneten Kurven sind.

§ 1 Kurven im $\mathbf{R}^n$

Wir verwenden einen Kurvenbegriff, der in der Kinematik wurzelt. Er ist die mathematische Abstraktion der Bewegung eines Punktes im Raum, die durch die Angabe des Ortes $\gamma(t) = (\gamma_1(t),\gamma_2(t),\gamma_3(t))$ zum Zeitpunkt t beschrieben wird.

(2.1) ***Definition:***

1) Eine **Kurve im $\mathbf{R}^n$** ist eine stetige Abbildung $\gamma: I\to\mathbf{R}^n$ mit $t\mapsto\gamma(t)=(\gamma_1(t),..., \gamma_n(t))$ eines Intervalles $I\subseteq\mathbf{R}$. I heißt der **Parameterbereich der Kurve** und t der **Parameter**
2) Ist I=[a,b], so heißt $\gamma(a)$ der **Anfangspunkt** und $\gamma(b)$ der **Endpunkt** der Kurve
3) γ heißt **differenzierbar** (bzw. **stetig differenzierbar**), wenn jede Koordinatenfunktion γ_i, $i \in \{1,...,n\}$ differenzierbar (bzw. stetig differenzierbar) ist
4) Der Wertebereich $\gamma(I)$ heißt **Spur der Kurve**
5) Eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma: I\to\mathbf{R}^n$ heißt **glatt** (=**regulär**) **an der Parameterstelle** $t_0 \in I$, wenn $\gamma'(t_0)=(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t),..., \gamma_n'(t))\neq(0,0,...,0)$
6) Die Kurve heißt **glatt** (=**regulär**) wenn sie in jedem Punkt $t_0 \in I$ glatt ist

Wir fügen dieser Definition noch einige ergänzende Bemerkungen und Erklärungen bei. Zunächst sei betont, daß die Bezeichnungsweise nicht ganz einheitlich ist. Bei Heuser wird eine Kurve ein Weg genannt und die Spur einer Kurve ein Bogen. Eine Kurve ist nicht bloß eine Punktmenge, nämlich der Wertebereich $\gamma(I)$, also die Spur; zu ihr gehört wesentlich der durch die Parameterdarstellung γ vermittelte „Zeitplan“ der Durchlaufung der Spur. Die Kurve ist sozusagen „orientiert“, in dem Sinne, daß $\gamma(t_1)$ „vor“ $\gamma(t_2)$ kommt, wenn $t_1<t_2$ ist.

Beispiele:

1) $\gamma: [0,2\pi]\to\mathbf{R}^2$ $\quad\gamma(t)=(\cos(t),\sin(t))$
$\Rightarrow \gamma(0)=(1,0)$ und $\gamma(2\pi)=(1,0)$ $\quad$ Spur von $\gamma=S_1(0)$,
im mathematisch positiven Sinn durchlaufen
2) $\gamma: [0,2\pi]\to\mathbf{R}^2$ $\quad\gamma(t)=(\cos(t),-\sin(t))$
$\Rightarrow \gamma(0)=(1,0)=\gamma(2\pi)$ $\quad$ Spur von $\gamma=S_1(0)$,
im mathematisch negativen Sinn durchlaufen

3) γ: $[0,\pi]\to\mathbf{R}^2$ $\gamma(t)=(\cos(2\cdot t),\sin(2\cdot t))$
$\Rightarrow$ Spur von $\gamma=S_1(0)$ mathematisch positiv durchlaufen, aber „doppelt so schnell“ durchlaufen
4) γ: $[0,6\pi]\to\mathbf{R}^2$ $\gamma(t)=(\cos(t),\sin(t))$
$\Rightarrow$ Spur von $\gamma=S_1(0)$, aber dreimal durchlaufen
5) γ: $[a,b]\to\mathbf{R}^n$
γ^-: $[a,b]\to\mathbf{R}^n$ $\gamma^-(t):=\gamma(a+b-t)$
$\Rightarrow$ $\gamma^-(a)=\gamma(b)$ und $\gamma^-(b)=\gamma(a)$
γ^- ist die umgekehrt durchlaufene Kurve zu γ.

(2.2) ***Definition:*** Seien $x\in\mathbf{R}^n$, $y\in\mathbf{R}^n$, $x\neq y$. Unter der **Verbindungsstrecke $\overline{xy}$ von x nach y** versteht man die Kurve γ: $[0,1]\to\mathbf{R}^n$ mit $\gamma(t) = x+t\cdot(y-x)$. Sind die Punkte $x_1, x_2, ..., x_p\in\mathbf{R}^n$ gegeben, so heißt die Vereinigung der Verbindungsstrecken $\overline{x_1x_2}\cup\overline{x_2x_3}\cup\ldots\cup\overline{x_{p-1}x_p}$ **Polygonzug von x_1 nach x_p durch $x_1, x_2, ..., x_{p-1}, x_p$**.
Sei Z eine Zerlegung von [a,b] für die stetig differenzierbare Kurve.
γ: $[a,b]\to\mathbf{R}^n$, etwa $Z=\{t_0, t_1, ..., t_r\}$, dann ist $s(Z,\gamma)=\sum_{j=1}^{r}\left\|\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})\right\|$ die **Länge des Polygonzuges von $\gamma(t_0)$ nach $\gamma(t_r)$ über $\gamma(t_0)$, $\gamma(t_2)$, $\gamma(t_r)$**.

Den Polygonzug benutzen wir, um zu einer sinnvollen Längendefinition für eine stetige (differenzierbare) Kurve γ: $[a,b]\to\mathbf{R}^n$ zu gelangen. Ist γ: $I\to\mathbf{R}^n$ eine stetige Kurve, dann definiert jede Zerlegung $Z=\{t_0,t_1, ... ,t_m\}$ von I den Polygonzug $\gamma(t_0)\in\mathbf{R}^n$ nach $\gamma(t_m)\in\mathbf{R}^n$ durch die Punkte $\gamma(t_1), ... ,\gamma(t_{m-1})$. Die Länge dieses Polygonzuges beträgt $s(Z,\gamma) = \sum_{j=1}^{m}\left\|\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})\right\|$ wobei $\|.\|$ die euklidische Norm auf $\mathbf{R}^n$ mit $\|x\|_2=\left(\sum_{j=1}^{n}\left|x_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ für $x = (x_1, ... ,x_n)\in\mathbf{R}^n$ bezeichne. Ist $Z_1\supseteq Z$ eine Verfeinerung von Z, so gilt $s(Z_1 , \gamma)\supseteq s(Z , \gamma)$.
Insbesondere gilt für zwei Zerlegungen Z_1 und Z_2 von [a,b] stets $s(Z_1\cup Z_2) , \gamma)\supseteq\max\{s(Z_1 , \gamma) , s(Z_2 , \gamma)\}$.

(2.3) ***Definition:*** Eine stetige Kurve γ: $I\to\mathbf{R}^n$ heißt **rektifizierbar** (=**von endlicher Länge**), wenn die Menge der Längen aller Polygonzüge $s(Z,\gamma)$, Z Zerlegung von I, beschränkt ist.
Gegebenenfalls heißt $s(\gamma)=\sup_Z s(Z,\gamma)$ die **Länge von γ**.

Wir wollen zeigen, daß die Länge einer stetig differenzierbaren Kurve γ: $[a,b]\to\mathbf{R}^n$ gerade $s(\gamma)=\int_a^b\left\|\gamma'(t)\right\|dt$ beträgt. Im Beweis verwenden wir das Integral eines n-Tupels von Regelfunktionen.

(2.4) ***Lemma:*** Sei $f=(f_1, ..., f_n)$ ein n-Tupel von Regelfunktionen f_j: $[a,b]\to\mathbf{R}$.

Sei $\int\limits_a^b \mathrm{f}(\mathrm{x})\,dx := \left(\int\limits_a^b \mathrm{f}_1(\mathrm{x})\,dx, \int\limits_a^b \mathrm{f}_2(\mathrm{x})\,dx, \ldots, \int\limits_a^b \mathrm{f}_\mathrm{n}(\mathrm{x})\,dx\right)$. Dann gilt:

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\int\limits_a^b \mathrm{f}_\mathrm{j}(\mathrm{x})\,dx\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left\|\int\limits_a^b \mathrm{f}(\mathrm{x})\,dx\right\| \le \int\limits_a^b \|\mathrm{f}(\mathrm{x})\|\,dx = \int\limits_a^b\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\mathrm{f}_\mathrm{j}(\mathrm{x})\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} dx\,.$$

<u>Beweis:</u>

Im Fall eines n-Tupels von Treppenfunktionen handelt es sich um eine Abschätzung zwischen Summen und diese ergibt sich unmittelbar mit der Dreiecksungleichung der Norm. Dabei darf o.B.d.A. angenommen werden, daß alle Treppenfunktionen dieselben Sprungstellen haben. Im allgemeinen Fall folgt dann die Behauptung wörtlich wie in Satz (1.14) für n=1.

q.e.d.

(2.5) ***Satz:*** Sei γ: [a,b]→$\mathbf{R}^\mathbf{n}$ eine Kurve mit dem (kompakten) Parameterintervall [a,b] und $\gamma=(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, so daß für j ∈ {1,...,n} eine Regelfunktion γ_j‘: [a,b]→**R** existiert, die γ_j als Stammfunktion besitzt. Dann ist γ rektifizierbar, und es gilt

$$s(\gamma)=\int\limits_a^b \|\gamma'(\mathrm{t})\|\,dt = \int\limits_a^b\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\gamma_j{}'(\mathrm{t})\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} dt\,.$$

<u>Beweis:</u>

Sei Z={t_0, t_1, ..., t_m} eine Zerlegung von [a,b]. Dann gilt für den Polygonzug von $\gamma(t_0)$ nach $\gamma(t_m)$ über $\gamma(t_1)$, ..., $\gamma(t_{m-1})$:

$$s(Z,\gamma) = \sum_{j=1}^{m}\left\|\gamma(\mathrm{t}_j) - \gamma(\mathrm{t}_{j-1})\right\| = \sum_{j=1}^{m}\left\|\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\gamma'(\mathrm{t})\,dt\right\| \overset{(2.4)}{\le} \sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\|\gamma'(\mathrm{t})\|\,dt = \int\limits_a^b\|\gamma'(\mathrm{t})\|\,dt$$

$\Rightarrow s(\gamma) \le \int\limits_a^b \|\gamma'(\mathrm{t})\|\,dt$. Also ist γ rektifizierbar.

Sei ε>0: Zu γ_k‘ gibt es eine Treppenfunktion T_k mit $|\gamma_k{}'(t)-T_k(t)|^2 < \dfrac{\varepsilon^2}{4\cdot \mathrm{n}\cdot(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}$

für alle t ∈ [a,b]

$\Rightarrow \|\gamma'(t)-T(t)\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n}\left|\gamma_k{}'(\mathrm{t}) - T_k(\mathrm{t})\right|^2 < \dfrac{\varepsilon^2}{4\cdot(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}$, d.h. $\|\gamma'(t)-T(t)\| \le \dfrac{\varepsilon}{2\cdot(\mathrm{b}-\mathrm{a})}$

für T=(T_1, ..., T_n).
Wir wählen eine Zerlegung Z={t_0, t_1, ..., t_m} von [a,b] so fein, daß T=(T_1, ..., T_n) konstant ist auf jedem Teilintervall [t_{j-1},t_j], j ∈ {1,...,m}.

Dann gilt: $\left\|\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\gamma'(\mathrm{t})\,dt\right\| \ge \left\|\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\mathrm{T}(\mathrm{t})\,dt\right\| - \left\|\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\gamma'(\mathrm{t}) - \mathrm{T}(\mathrm{t})\right)dt\right\|$.

Da T in $[t_{j-1},t_j]$ konstant ist, gilt

$$\left\|\int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathrm{T(t)}\,dt\right\| = \left(\sum_{k=1}^{n}\left|\int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathrm{T_k(t)}\,dt\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{n}\left|\mathrm{c_k}\cdot(\mathrm{t_j}-\mathrm{t_{j-1}})\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left|\mathrm{t_j}-\mathrm{t_{j-1}}\right|\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\mathrm{c_k}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \int_{t_{j-1}}^{t_j}\left\|\mathrm{T(t)}\right\|dt\,.$$

Wegen Lemma (2.4) gilt

$$\left\|\int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(\mathrm{t}) - \mathrm{T(t)}\,dt\right\| \le \int_{t_{j-1}}^{t_j}\left\|\gamma'(\mathrm{t})-\mathrm{T(t)}\right\|dt \le \frac{\varepsilon}{2\cdot(\mathrm{b}-\mathrm{a})}\cdot(\mathrm{t_j}-\mathrm{t_{j-1}})$$

$$\Rightarrow \mathrm{s}(\mathrm{Z},\gamma) = \sum_{j=1}^{m}\left\|\int_{t_{j-1}}^{t_j}\gamma'(\mathrm{t})\,dt\right\| \ge \int_a^b\left\|\mathrm{T(t)}\right\|dt - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Weiter folgt mit $\|\mathrm{T(t)}\|\ge\|\gamma'(\mathrm{t})\|-\|\mathrm{T(t)}-\gamma'(\mathrm{t})\|$

$$\int_a^b\left\|\mathrm{T(t)}\right\|dt \ge \int_a^b\left\|\gamma'(\mathrm{t})\right\|dt - \int_a^b\left\|\mathrm{T(t)}-\gamma'(\mathrm{t})\right\|dt \ge \int_a^b\left\|\gamma'(\mathrm{t})\right\|dt - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{s}(\mathrm{Z},\gamma) \ge \int_a^b\left\|\gamma'(\mathrm{t})\right\|dt - \varepsilon$$

$$\Rightarrow \mathrm{s}(\gamma) = \int_a^b\left\|\gamma'(\mathrm{t})\right\|dt$$

q.e.d.

Bemerkung: Die Folgerung nach (1.27) zeigt, daß γ: $[a,b]\to\mathbf{R}^n$ eine fast überall stetig differenzierbare Kurve ist

(2.6) ***Korollar:*** Sei f: $[a,b]\to\mathbf{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Sei γ: $[a,b]\to\mathbf{R}^2$ mit $\gamma(t)=(t,f(t))$ die zugehörige stetig differenzierbare Kurve, deren Spur mit dem Graphen von f zusammenfällt. Dann gilt für die Länge der Kurve

$$\mathrm{s}(\gamma) = \int_a^b\sqrt{(1+\mathrm{f}'(\mathrm{t}))^2}\,dt\,.$$

Beispiele:

1) Ellipse mit Hauptachsen a und b:

γ: $[0,2\pi]\to\mathbf{R}^2$ $\quad\gamma(t)=(a\cdot\cos(t),b\cdot\sin(t))$

$\gamma'(t)=(-a\cdot\sin(t),b\cdot\cos(t))$, γ ist glatt.

Spur-Gleichung: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

2) Hyperbeläste:

$\gamma(t)=(\pm a\cdot\cosh(t),b\cdot\sinh(t))$, $t\in\mathbf{R}$

Spur-Gleichung: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, γ ist glatt.

3) Neilsche Parabel:
γ: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ $\quad \gamma(t)=(t^2,t^3)$
Spur-Gleichung: $y^2=x^3$
Wegen $\gamma'(t)=(2\cdot t, 3\cdot t^2)$ ist γ in t=0 nicht glatt.

4) Zykloide:
γ: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ $\quad \gamma(t)=(t-\sin(t), 1-\cos(t))$
$\gamma'(t)=(1-\cos(t), \sin(t))$, nicht glatt für $t=2\cdot k\cdot\pi$

5) Spiralen:
γ: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ $\quad \gamma(t)=(f(t)\cdot\cos(t)\ ,\ f(t)\cdot\sin(t))$, wobei f streng monoton ist.

6) Schraubenlinie:
γ: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ $\quad \gamma(t)=(r\cdot\cos(t), r\cdot\sin(t), h\cdot t)$, $2\cdot\pi\cdot h$ Ganghöhe
Spur liegt auf einem Zylinder $Z=\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3: x^2+y^2=r^2\}$ [z ist beliebig!]
Die Kurve ist glatt.

Ist eine stetig differenzierbare Kurve in einem Punkt $t_0 \in [a,b]$ nicht glatt, so gilt für die Parameterdarstellung γ: $[a,b] \to \mathbf{R}^n$, $\gamma'(t_0) = 0$; dies bedeutet, daß im Falle n=3 die Geschwindigkeit der Bewegung $t \mapsto \gamma(t)$ im Zeitpunkt t_0 Null ist. Die Tatsache, daß die Kurve im Punkt $\gamma(t_0)$ nicht glatt ist, muß sich nicht an der Spur der Kurve zeigen, sie ist also abhängig von der gewählten Parameterdarstellung.

(2.7) ***Definition:*** Sei γ: $[a,b] \to \mathbf{R}^n$ eine differenzierbare Kurve. Dann heißt
1) $\gamma'(t)=(\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t))$ der **Tangentialvektor** oder auch **Geschwindigkeitsvektor** der Kurve γ an der Parameterstelle t
2) $\|\gamma'(t)\|$ die **Geschwindigkeit der Kurve an der Stelle t**
3) $T(t) := \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ der **Tangentialeinheitsvektor** an der Stelle t, wenn $\gamma'(t) \neq 0$.

Der Tangentialvektor ist also zu einer Parameterstelle, nicht zu einem Ort der Kurve definiert.

Beispiele:

1) $\gamma(t) = (t^2-1, t^3-t)$, $t \in [-2,2]$ $\quad \gamma(1) = (0,0) = \gamma(-1)$
$\gamma'(t) = (2\cdot t\ , 3\cdot t^2-1)$ $\quad \gamma'(1) = (2,2)$
$\gamma'(-1) = (-2,2)$

2) γ: $[0,\pi] \to \mathbf{R}^2$ mit $\gamma(t)=(\cos(t),\sin(t))$ $\quad \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,1)$ $\quad \gamma'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1,0)$
$\tilde{\gamma}$: $[-1,1] \to \mathbf{R}^2$ mit $\tilde{\gamma} = (t, \sqrt{1-t^2})$ $\quad \tilde{\gamma}(0) = (0,1)$

$$\tilde{\gamma}'(0) = (1,0) \neq \gamma'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Der folgende Satz zeigt, daß die Spur einer glatten Kurve im $\mathbf{R}^2$ ohne vertikale Tangenten lokal als Graph einer stetig-differenzierbaren Funktion f aufgefaßt werden kann. Dieser Satz ist ein einfacher Fall des Satzes über implizite Funktionen.

(2.8) ***Satz:*** Sei γ: $I \to \mathbf{R}^2$ eine stetig differenzierbare Kurve mit $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$. In I habe $\gamma_1'(t)$ keine Nullstelle. Dann gibt es eine stetig differenzierbare Funktion
f**:** $J := \gamma_1(I) \to \mathbf{R}$, deren Graph die Spur von γ ist.
Es gilt in $x_0 := \gamma_1(t_0)$ $f'(x_0) = \dfrac{\gamma_2'(t_0)}{\gamma_1'(t_0)}$ und (gegebenenfalls)
$$f''(x_0) = \frac{\gamma_1'(t_0)\cdot\gamma_2''(t_0) - \gamma_1''(t_0)\cdot\gamma_2'(t_0)}{(\gamma_1'(t_0))^3}$$

Beweis:

γ_1' ist stetig auf I und γ_1 streng monoton auf I. γ_1 besitzt eine Umkehrfunktion τ_1: $J \to I$
$\Rightarrow \gamma(t) = \gamma_1(t)$, $\gamma_2(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(\tau_1(\gamma_1(t)))) =: (\gamma_1(t), f(\gamma_1(t)))$ mit $f = \gamma_2 \circ \tau_1$
$\Rightarrow$ in $x_0 = \gamma_1(t_0)$ $f'(x_0) = \gamma_2'(\tau_1(x_0))\cdot\tau_1'(x_0) = \dfrac{\gamma_2'(t_0)}{\gamma_1'(t_0)}$ **(**da $\tau_1(\gamma_1(t_0)) = t_0$**)**

$f''(x_0) = \gamma_2''(\tau_1'(x_0))^2 + \tau_1''(x_0)\cdot\gamma_2'(\tau_1(x_0))$, wobei $\tau_1''(x_0) = -\dfrac{\gamma_1''(t_0)}{(\gamma_1'(t_0))^3}$. q.e.d.

Nicht immer hat der Parameter t für eine Kurve γ: $I \to \mathbf{R}^n$ eine natürliche Bedeutung. Für manche Fragen ist es zweckmäßig, zu einer Kurve β überzugehen, welche dieselbe Spur hat, diese Spur aber mit einem neuen Zeitplan $s \mapsto \beta(s)$ durchläuft. Geometrische Begriffe sind dann dadurch ausgezeichnet, daß sie einen Parameterwechsel ohne Änderung überstehen.

(2.9) ***Definition:*** Eine stetige (bzw. k-mal stetig differenzierbare) Abbildung σ: $I \to J$ eines Intervalles $I \subseteq \mathbf{R}$ auf ein Intervall J heißt

1) eine **stetige** (bzw. $\mathbf{C^k}$**-**) **Parametertransformation**, $k \in \mathbf{N}$, wenn sie bijektiv ist und die Umkehrfunktion σ^{-1}: $J \to I$ ebenfalls stetig ist (bzw. zur Klasse C^k gehört)
2) **orientierungstreu**, wenn sie streng monoton wächst
3) **orientierungsumkehrend**, wenn sie streng monoton fällt

Ist γ: $I \to \mathbf{R}^n$ eine Kurve und σ: $I \to J$ eine stetige Parametertransformation, dann ist β: $J \to \mathbf{R}^n$ mit $\beta(s) := \gamma(\sigma^{-1}(s))$, $s \in J$, eine neue (parametrisierte) Kurve, diese hat dieselbe Spur. Die Kurve β nennt man auch die **Umparametrisierung von γ mittels σ**.

Eigenschaften:

Gehören γ sowie σ und σ^{-1} zur Klasse C^k, so auch β. Ist σ eine C^1-Parametertransformation, so gilt $\sigma'(t)\neq 0$ für alle $t \in I$. In diesem Fall ist σ orientierungstreu für $\sigma'(t)>0$ und orientierungsumkehrend für $\sigma'(t)<0$.

Beispiel:

Ist γ: $[a,b]\rightarrow\mathbf{R}^n$ eine Kurve und σ: $[a,b]\rightarrow[-b,-a]$ mit $\sigma(t)=-t$ die orientierungsumkehrende Parametertransformation, so gilt $\beta(s):=\gamma(\sigma^{-1}(s))=\gamma(-s)$, $s \in [-b,-a]$, d.h. β hat dieselbe Spur wie γ, wird aber entgegengesetzt durchlaufen.

Invarianten bei Parameterwechsel sind:

1) die Länge der Kurve, da eine Parametertransformation σ: $I\rightarrow J$ mindestens stetig und streng monoton ist und die Menge der einbeschriebenen Polygonzüge sich beim Parameterwechsel nicht ändert (falls $\gamma \in C^1$ oder γ Stammfunktion zur Regelfunktion γ' ist, dann folgt die Behauptung mit der Substitutionsregel).

2) Tangenten, da für C^1-Parametertransformation σ: $I\rightarrow J$ stets $\beta'(s)=\gamma'(\sigma^{-1}(s))\cdot\dfrac{1}{\sigma'(\sigma^{-1}(s))}$ für $s \in J$, d.h. mit $\sigma=\sigma(t)$, $\beta'(\sigma(t))=\gamma'(t)\cdot\dfrac{1}{\sigma'(t)}$ die Tangentialvektoren $\beta'(\sigma)$ und $\gamma'(t)$ parallel sind.

§ 2 Kurvenintegrale für Vektorfelder

Vektorfelder treten in Mathematik und Physik in mannigfacher Weise auf. Sie werden oft im Zusammenhang mit krummlinigen Koordinatensystemen und als Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen benutzt.

(2.10) ***Definition:*** Sei $U\subset\mathbf{R}^n$, ein **Vektorfeld v auf U** ist eine Funktion, die jedem $x \in U$ einen Vektor $v(x) \in \mathbf{R}^n$ zuordnet.
$v: U\to\mathbf{R}^n$. Ist v k-mal stetig differenzierbar, so heißt v ein **C^k-Vektorfeld**, $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$.

Physikalische Interpretation:
Ein Vektorfeld v auf $U \subseteq\mathbf{R}^3$ wird oft als Geschwindigkeitsfeld einer stationären, also einer zeitunabhängigen Strömung, oder als Kraftfeld gedeutet, wobei v(x) der Geschwindigkeitsvektor am Punkt $x \in U$ ist.

Beispiele:

1) *konstante Felder* definiert durch $v(x):=v \in \mathbf{R}^n$ für alle $x \in U$
2) *Zentralfelder* sind auf einer Kugelschale $K_I(0)\subset\mathbf{R}^n$ definiert, wobei $I\subseteq\mathbf{R}$ ein Intervall mit Randpunkten r_1,r_2 ($r_1\le r_2$) und $f: I\to\mathbf{R}$ eine Funktion $v: K_I(0)\to\mathbf{R}^n$ mit $v(x):=f(\|x\|)\cdot x$.
   Es gilt also $K_I(0)=\overline{K_{r_2}}(0)\setminus K_{r_1}(0)$, $I=[r_1,r_2]$, oder
   $K_I(0)=\overline{K_{r_2}}(0)\setminus \overline{K_{r1}}(0)$, $I=(r_1,r_2]$, usw.
3) *Rotationsfelder* auf einem Kreisring $K_I(0)\subset\mathbf{R}^2$, $v: K_I(0)\to\mathbf{R}^2$ mit $v(x):=f(\|x\|)\cdot(-x_2,x_1)$ für $x=(x_1,x_2) \in K_I(0)$, wobei $f: I\to\mathbf{R}$, I Intervall mit Randpunkten $r_1\le r_2$
4) *Gradientenfelder* Ist $f: U\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einer offenen Menge $U\subset\mathbf{R}^n$, so wird das Gradientenfeld grad $f: U\to\mathbf{R}^n$ definiert durch
   $\operatorname{grad} f(x)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$ für alle $x=(x_1,...,x_n) \in U$

Wir wollen nun Vektorfelder längs einer Kurve integrieren.

Physikalische Motivation:
Sei im $\mathbf{R}^3$ ein Kraftfeld $\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ gegeben und ein Partikel P bewegt sich längs einer Kurve γ in diesem Feld. Seien $\gamma(t_{j-1})$ und $\gamma(t_j)$ nahe beieinanderliegende Punkte, so leistet das Kraftfeld bei der Bewegung von $\gamma(t_{j-1})$ nach $\gamma(t_j)$ Arbeit, die näherungsweise $<k(\xi_j),\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})>$ ist, wobei $\xi_j=\gamma(t_j)$ ein Punkt auf der Kurve ist. Die Gesamtheit ist dann

$$\sum_{j=1}^{n} < k(\xi_j), \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) > .$$

Durch infinitesimale Verfeinerung – Grenzwert der Summen – wird die gesuchte Arbeit definiert.

(2.11) ***Definition:*** Sei γ: [a,b]→$\mathbf{R}^n$ eine Kurve. Eine Vektorfeld v: U:=γ([a,b])→$\mathbf{R}^n$ heißt **längs γ integrierbar**, wenn eine Zahl I existiert mit der Eigenschaft: zu jedem ε>0 existiert ein δ>0, so daß für jede Zerlegung Z={t_0,t_1,...,t_p}, p ∈ **N**, von [a,b] mit Feinheit μ(Z)<δ und zu jeder Besetzung B={τ_1,...,τ_p} zur Zerlegung Z gilt:

$|S(Z,B,v)-I| < \varepsilon$, wobei $S(Z,B,v) := \sum_{j=1}^{n} < v(\gamma(\tau_j)), \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) >$. I heißt dann **Integral von v längs γ**, in Zeichen $\int_\gamma < v, dt >$

Bemerkung:

Ist γ:= id: [a,b]→**R**, γ(t)=t und v: U=γ([a,b])=[a,b]→**R** eine Funktion, so sind die Riemannschen Summen identisch mit S(Z,B,v) [nach Satz (1.35)]. Ist v eine Regelfunktion auf [a,b], so existiert das Kurvenintegral $\int_\gamma v\, dt$, und es gilt $\int_\gamma v\, dt = \int_a^b v(t)\, dt$.

Stetige Vektorfelder sind nicht längs beliebiger Kurven integrierbar.

(2.12) ***Definition:*** Eine Kurve γ: [a,b]→$\mathbf{R}^n$ heißt **Integrationsweg**, wenn zu γ=(γ_1,...,γ_n) Regelfunktionen γ_j‘ existieren, γ_j‘: [a,b]→**R**, so daß γ_j Stammfunktion zu γ_j‘ ist, j ∈ {1,...,n}.

Bemerkung:

Aus Bemerkung zu Satz (2.5) folgt, daß jeder Integrationsweg rektifizierbar ist mit

$s(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$

(2.13) ***Satz:*** Sei γ: [a,b]→$\mathbf{R}^n$ ein Integrationsweg. Sei v: U⊆$\mathbf{R}^n$→$\mathbf{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld mit γ([a,b])⊂U. Dann ist v längs γ integrierbar, und es gilt $\int_\gamma < v, dt > = \int_a^b < v(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt = \sum_{j=1}^{n} \int_a^b v_j(\gamma(t)) \cdot \gamma_j'(t)\, dt$.

<u>Beweis:</u>

Der Integrationsweg hat endliche Länge s(γ). Da v stetig und γ_j Stammfunktion zu γ_j‘ ist, ist γ und damit auch $v_j \circ \gamma$ auf [a,b] stetig. Zu ε>0 wähle man δ>0, so daß für alle s,t ∈ [a,b] mit $|s-t|<\delta$ gilt:

$|v_j(\gamma(s))-v_j(\gamma(t))| < \frac{\varepsilon}{n \cdot s(\gamma)}$ für j ∈ {1,...,n}. Ferner sei Z={t_0,...,t_p} eine Zerlegung von [a,b] mit Feinheit μ(Z)<δ und B={τ_1,...,τ_p} eine Besetzung zu Z.

Sei I:= $\sum_{j=1}^{n}\int_a^b \mathrm{v}_j(\gamma(t))\gamma_j'(t)\,dt$, dann gilt wegen $\gamma_j(t_{r-1})-\gamma_j(t_r) = \int_{t_{r-1}}^{t_r}\gamma_j'(t)\,dt$ mit

$$S(Z,B,v):=\sum_{j=1}^{p}<\mathrm{v}(\gamma(t_j)),\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})>$$

$$\begin{aligned}
|S(Z,B,v)-I| &= \left|\sum_{j=1}^{p}<\mathrm{v}(\gamma(t_j)),\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})>-\sum_{j=1}^{n}\int_a^b \mathrm{v}_j(\gamma(t))\gamma_j'(t)\,dt\right|\\
&= \left|\sum_{r=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{v}_j(\gamma(t_r))(\gamma_j(t_r)-\gamma(t_{r-1}))-\sum_{r=1}^{p}\int_{t_{r-1}}^{t_r}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{v}_j(\gamma(t))\gamma_j'(t)\right|\\
&= \left|\sum_{r=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{r-1}}^{t_r}\mathrm{v}_j(\gamma(t_r))\gamma_j'(t)\,dt-\sum_{r=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{r-1}}^{t_r}\mathrm{v}_j(\gamma(t))\gamma_j'(t)\,dt\right|\\
&= \left|\sum_{r=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{r-1}}^{t_r}(\mathrm{v}_j(\gamma(t_r))-\mathrm{v}_j(\gamma(t)))\gamma_j'(t)\,dt\right|\\
&\le \sum_{r=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{r-1}}^{t_r}\left|(\mathrm{v}_j(\gamma(t_r))-\mathrm{v}_j(\gamma(t)))\right|\left|\gamma_j'(t)\right|dt\\
&\le \frac{\varepsilon}{n\cdot s(\gamma)}\sum_{j=1}^{n}\int_a^b\left|\gamma_j'(t)\right|dt<\frac{\varepsilon}{s(\gamma)}\int_a^b\left\|\gamma_j'(t)\right\|dt=\varepsilon
\end{aligned}$$

Hierbei gilt für $x \in \mathbf{R}^n$ und $x = (x_1,x_2,...,x_n)$ die Ungleichung (Cauchy-Schwarz)

$$\sum_{j=1}^{n}|x_j|=\sum_{j=1}^{n}|x_j|\cdot 1\le\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}1^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{n}=\sqrt{n}\|x\|$$

q.e.d.

Beispiele:

1) $\alpha\ge 1$, $\gamma_\alpha: [0,1]\to\mathbf{R}$ $\gamma_\alpha(t) = (t,t^\alpha)$ $\gamma_\alpha(0) = (0,0)$

$\gamma_\alpha(1) = (1,1)$

$v(x,y) = (y^2,1)$

$$\int_{\gamma_\alpha}<\mathrm{v},dt>=\int_0^1<\mathrm{v}(\gamma_\alpha(t)),\gamma_\alpha'(t)>$$

$$\gamma_\alpha'(t) = (1,\ \alpha\cdot t^{\alpha-1}) \quad\Rightarrow\quad \int_{\gamma_\alpha}<\mathrm{v},dt>=\int_0^1\left(t^{2\alpha}\cdot 1+1\cdot\alpha\cdot t^{\alpha-1}\right)dt=\frac{1}{2\cdot\alpha+1}+1$$

Alle Kurven haben denselben Anfangs- und Endpunkt, die Integrale aber haben verschiedene Werte

2) $\gamma: [a,b]\to\mathbf{R}^2$ sei eine Kurve mit $\gamma(t)\neq 0$, als Vektorfeld sei gewählt das Windungsfeld / die Windungsform

$$v(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}\cdot(-y,x) \qquad v: \mathbf{R}^2\setminus\{0\}\to\mathbf{R}^2$$

$$\int_\gamma<\mathrm{v},dt>=\int_a^b\frac{-\gamma_2(t)\cdot\gamma_1'(t)+\gamma_1(t)\cdot\gamma_2'(t)}{(\gamma_1(t))^2+(\gamma_2(t))^2}dt$$

Wir stellen nun einige sehr einfache Eigenschaften von Kurvenintegralen zusammen:

(2.14) ***Satz:* (Rechenregeln für Kurvenintegrale):**

1) Sind v und w längs einer Kurve γ integrierbar, so ist auch $\alpha\cdot$v+$\beta\cdot$w längs γ integrierbar mit $\int\limits_\gamma <\alpha\cdot \mathrm{v}+\beta\cdot \mathrm{w}\,, dt> = \alpha\cdot\int\limits_\gamma <\mathrm{v}, dt> + \beta\cdot\int\limits_\gamma <\mathrm{w}, dt>$
2) Sei a<b<c und γ: [a,b]→$\mathbf{R}^n$ stetig. Ist v längs der Teilkurve $\gamma_1 := \gamma_{[a,b]}$ und längs der Teilkurve $\gamma_2 := \gamma_{[b,c]}$ integrierbar, so ist v längs γ integrierbar mit $\int\limits_\gamma <\mathrm{v}, dt> = \int\limits_{\gamma_1} <\mathrm{v}, dt> + \int\limits_{\gamma_2} <\mathrm{v}, dt>$
3) Sei t: $[\alpha,\beta]$→[a,b] eine bijektive, stetige Funktion mit t=t(s). Sei v längs der Kurve γ: [a,b]→$\mathbf{R}^n$ integrierbar. Dann ist v auch längs der Kurve $\gamma\circ$ t integrierbar, und es gilt: $\int\limits_{\gamma\circ t} <\mathrm{v}, ds> = \pm\int\limits_\gamma <\mathrm{v}, dt>$.
   Dabei gilt „+“, wenn t monoton wächst, und „–“, wenn t monoton fällt. Insbesondere gilt $\int\limits_{\gamma^-} <\mathrm{v}, dt> = -\int\limits_\gamma <\mathrm{v}, dt>$
4) $\left|\int\limits_\gamma <\mathrm{v}, dt>\right| \leq s(\gamma)\cdot \max\limits_{t\in[a,b]} \|\mathrm{v}(\gamma(t))\|$, wenn γ: [a,b]→U⊆$\mathbf{R}^n$

<u>Beweis:</u>

1) – 3) lassen sich leicht anhand der Definition nachweisen

ad 4)

Sei M:= $\max\limits_{t\in[a,b]} \|\mathrm{v}(\gamma(t))\|$, dieses Maximum ist vorhanden, da v und γ stetige Funktionen sind und [a,b] kompakt ist. Für die Riemannschen Summen ergibt sich mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\left|\sum_{j=1}^{p} <\mathrm{v}(\gamma(t_j)), \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})>\right| \leq \sum_{j=1}^{p} \left|<\mathrm{v}(\gamma(t_j)), \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})>\right| \leq \sum_{j=1}^{p} \|\mathrm{v}(\gamma(t_j))\| \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|$$

$$\leq M\cdot\sum_{j=1}^{p} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \leq M\cdot s(\gamma)$$ q.e.d.

§ 3 Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen, Gradientenfelder und Potentiale

Jede stetige Funktion f: [a,b]→**R** besitzt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung eine Stammfunktion F: [a,b]→**R**, so daß F'(x) = f(x) für alle $x \in [a,b]$ (siehe (1.22) und (1.23)). Im Gegensatz zum eindimensionalen Fall existiert nicht zu jedem stetigen Vektorfeld v auf einer offenen Menge U eine Stammfunktion.

Wir diskutieren die Integration von Vektorfeldern, die eine Stanmmfunktion besitzen und zeigen, daß die Existenz von Stammfunktionen zur Wegunabhängigkeit der Kurvenintegrale gleichwertig ist.

In **R**: $\int_a^b \mathrm{f(t)}\,dt = \mathrm{F(b)} - \mathrm{F(a)}$, wenn F'= f.

Gegeben seien

$v = (v_1,v_2,...,v_n)$ $\qquad f = f(x_1,...,x_n)$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial x_j} = v_j$

grad f = $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ ist die adäquate Verallgemeinerung zu F'

(2.15) ***Definition:*** Sei $U\subseteq\mathbf{R}^n$ eine offene Menge, v: $U\to\mathbf{R}^n$ ein Vektorfeld mit $v=(v_1,...,v_n)$. Eine differenzierbare Funktion f: U→**R** heißt eine **Stammfunktion** oder ein **Potential** von v auf U, wenn grad f(x) = v(x) für alle $x \in U$, d.h.

$$\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1},\frac{\partial f(x)}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right) = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \text{ gilt für alle } x \in U.$$

v heißt dann **Gradientenfeld**, **Potentialfeld** oder **konservatives Vektorfeld**.
v heißt **exakt** auf U, wenn v stetiges Potentialfeld auf U ist.

Bei der Frage, ob ein Vektorfeld eine Stammfunktion besitzt, ist genau auf den Definitionsbereich zu achten. Es gibt Vektorfelder, die auf einer offenen Menge U keine Stammfunktion besitzen, jedoch auf geeigneten Teilmengen von U.

(2.16) ***Definition:*** Eine nichtleere Teilmenge $U\subseteq\mathbf{R}^n$ heißt

1) **zusammenhängend**, wenn je zwei Punkte aus U durch eine Kurve verbunden werden können, die ganz in U liegt
2) **sternförmig**, wenn es ein $a \in U$ gibt, **Zentrum** genannt, so daß für jedes $x \in U$ die Verbindungsstrecke $\overline{ax}$ von a nach x in U liegt
3) **konvex**, wenn sie mit je zwei ihrer Punkte auch die Verbindungsstrecke enthält
4) ein **Gebiet**, wenn U offen und zusammenhängend ist

(2.17) ***Satz:*** Ist f auf der offenen Menge $U\subseteq\mathbf{R}^n$ eine Stammfunktion des stetigen Vektorfeldes $v: U\to\mathbf{R}^n$, so gilt für jeden in U verlaufenden Integrationsweg γ mit dem Anfangs-punkt $a \in U$ und dem Endpunkt $b \in U$
$$\int_\gamma < v, dt > = \int_\gamma < \operatorname{grad} f, dt > = f(b) - f(a)$$

Beweis:

γ: $[\alpha,\beta]\to U$ mit $\gamma(\alpha)=a$, $\gamma(\beta)=b$, $\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$, da γ_j Stammfunktion zu γ_j‘: $[\alpha,\beta]\to\mathbf{R}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, ist γ stetig. f ist Stammfunktion von v, d.h. $\frac{\partial f}{\partial x_j} = v_j$ sind stetig, $j \in \{1,\ldots,n\}$, f stetig partiell differenzierbar $\Rightarrow$ f ist stetig.

Betrachte φ: $[\alpha,\beta]\to\mathbf{R}$ mit $\varphi(t)=f(\gamma(t))$
$\Rightarrow \varphi'(t) = <\operatorname{grad} f(\gamma(t)),\gamma'(t)>$ *(Kettenregel)*

$$f(b)-f(a) = \varphi(\beta)-\varphi(\alpha) = \int_\alpha^\beta \varphi'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta < \operatorname{grad} f(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt = \int_\gamma < \operatorname{grad} f, dt > = \int_\gamma < v, dt >$$

q.e.d.

(2.18) ***Korollar:*** Besitzt das stetige Vektorfeld $v: U\to\mathbf{R}^n$ auf der offenen Menge $U\subseteq\mathbf{R}^n$ eine Stammfunktion, so gilt

1) für jeden geschlossenen Integrationsweg γ (d.h. Anfangspunkt gleich Endpunkt) in U $\int_\gamma < v, dt > = 0$
2) für zwei Integrationswege γ_1 und γ_2 in U mit demselben Anfangspunkt und demselben Endpunkt $\int_{\gamma_1} < v, dt > = \int_{\gamma_2} < v, dt >$

(2.19) ***Definition:*** Sei $U\subseteq\mathbf{R}^n$ offen, $v: U\to\mathbf{R}^n$ stetig. Gilt für beliebige Integrationswege γ_1 und γ_2 in U mit demselben Anfangspunkt und demselben Endpunkt $\int_{\gamma_1} < v, dt > = \int_{\gamma_2} < v, dt >$, so heißt das Kurvenintegral von v in U **wegunabhängig**.

Man schreibt auch $\int_\gamma < v, dt > = \int_a^b < v, dt >$

Ein exaktes Vektorfeld kann also wegunabhängig integriert werden. Die Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals ist somit für die Existenz einer Stammfunktion für ein stetiges Vektorfeld notwendig. Interessanterweise gilt hiervon auch die Umkehrung. Der folgende Satz gibt in Analogie zum Hauptsatz der Differential- und Integral-rechnung eine Stammfunktion an in Gestalt eines Kurvenintegrals mit fest gewähltem Anfangspunkt und variablem Endpunkt (vgl. dazu Satz 1.22)).

(2.20) ***Satz:*** Sei $U \subseteq \mathbf{R}^n$ ein Gebiet. Ein stetiges Vektorfeld v: $U \to \mathbf{R}^n$ besitzt genau dann eine Stammfunktion auf U, wenn es in U wegunabhängig integriert werden kann. Im Falle der Wegunabhängigkeit ist eine Stammfunktion von f: $U \to \mathbf{R}$ gegeben durch

$f(x) := \int_a^x < v, dt >$ für $x \in U$, wobei $a \in U$ ein fester Punkt ist.

Beweis:

$U \subseteq \mathbf{R}^n$ Gebiet $\Rightarrow$ U offen, $x \in U$. Es existiert ein r>0 mit $K_r(x)=\{y \in \mathbf{R}^n: \|y-x\| < r\} \subseteq U$, sei h mit $\|h\|<r$, dann liegt die Verbindungsstrecke von x nach x+h in U, die Verbindungsstrecke habe die Parameterdarstellung $\gamma(t):=x+th$, $t \in [0,1] \Rightarrow \gamma'(t)=h$

$$\Rightarrow f(x+h)-f(x) = \int_\gamma < v, dt > = \int_0^1 < v(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt = \int_0^1 < v(x+th), h > dt$$

$$\Rightarrow f(x+h)-f(x)-<v(x),h> = \int_0^1 < v(x+th) - v(x) > dt$$

$$| f(x+h)-f(x)-<v(x),h> | \leq \int_0^1 |< v(x+th) - v(x) >| \, dt \overset{C.S.}{\leq} \int_0^1 \|v(x+th) - v(x)\| \cdot \|h\| \, dt$$

$$\leq \max_{t \in [0,1]} \|v(x+th) - v(x)\| \cdot \|h\| \cdot \int_0^1 dt$$

$$\Rightarrow \frac{f(x+h) - f(x) - < v(x), h >}{\|h\|} \leq \max_{t \in [0,1]} \|v(x+th) - v(x)\| \to 0 \text{ für } h \to 0$$

$\Rightarrow$ v(x) totales Differential von f in x q.e.d.

Das stetige Vektorfeld v auf dem Gebiet $U \subseteq \mathbf{R}^n$ ist also genau dann ein Gradientenfeld, wenn das Integral über v wegunabhängig ist. Vom praktischen Standpunkt aus gesehen wird diese Antwort nicht voll befriedigen, da die Berechnung eines Kurvenintegrals sehr schwierig sein kann und darüberhinaus alle möglichen Kurvenintegrale berechnet werden müssen. Weitaus zweckmäßiger wäre es, statt eines „Integralkriteriums" ein „Differential-kriterium" benutzen zu können. Folgende leicht nachprüfbare Bedingung ist sehr nützlich:

(2.21) ***Satz:*** Sei $U \subseteq \mathbf{R}^n$ ein Gebiet. Das stetig differenzierbare Vektorfeld $v: U \to \mathbf{R}^n$ besitze auf U eine Stammfunktion. Dann gilt für alle $x \in U$:

$$\frac{\partial v_k(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j(x)}{\partial x_k} \quad ; \quad j,k \in \{1,...,n\} \qquad (\textit{Integrabilitätsbedingungen})$$

Beweis:

Satz von Schwarz, v = grad f, d.h. $v_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}$

$$\Rightarrow \frac{\partial v_k(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j x_k} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k x_j} = \frac{\partial v_j(x)}{\partial x_k}$$

q.e.d.

n=2: zu zeigen: $$\frac{\partial v_1(x)}{\partial x_2} = \frac{\partial v_2(x)}{\partial x_1}$$

n=3: zu zeigen:
$$\frac{\partial v_3(x)}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2(x)}{\partial x_3} = 0$$
$$\frac{\partial v_1(x)}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3(x)}{\partial x_1} = 0 \qquad \Leftrightarrow \text{rot } v(x) = 0$$
$$\frac{\partial v_2(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1(x)}{\partial x_2} = 0$$

(2.22) ***Satz:*** (**Poincaré**):
Sei $U \subseteq \mathbf{R}^n$ ein sternförmiges Gebiet. Das stetig differenzierbare Vektorfeld $v: U \to \mathbf{R}^n$ besitzt genau dann eine Stammfunktion auf U, wenn die Integrabilitätsbedingungen $\frac{\partial v_k(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j(x)}{\partial x_k}$ für alle U und $j,k \in \{1,...,n\}$ erfüllt sind.

Beweis:

o.B.d.A. sei a=0 Zentrum von U, sei $\gamma(t):=tx$, $t \in [0,1]$ die Verbindungsstrecke von 0 nach x, $\gamma'(t)=x$.

Sei $f(x)=\int_\gamma < v, dt > = \int_0^1 < v(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^n v_j(\gamma(t)) x_j \, dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^n v_j(tx) x_j \, dt$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \int_0^1 \sum_{j=1}^n v_j(tx) x_j \, dt \overset{(2.23)}{=} \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(v_j(tx) x_j \right) dt = \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial v_j(tx)}{\partial x_k} \cdot t \cdot x_j + v_k(tx) \right) dt$$
$$\overset{\substack{Integr.- \\ bеding.}}{=} \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial v_k(tx)}{\partial x_j} \cdot t \cdot x_j + v_k(tx) \right) dt \left(= \int_0^1 t \cdot \frac{d}{dt} \left(v_k(tx) + v_k(tx) \right) dt \right)$$
$$= \int_0^1 \frac{d}{dt} \left(t v_k(tx) \right) dt = \left[t v_k(tx) \right]_0^1 = v_k(x) \qquad \text{q.e.d.}$$

Im Beweis wurden Differentiation und Integration in ihrer Reihenfolge vertauscht. Dies ist im allgemeinen nicht ohne weiteres möglich. Der folgende Differentiationssatz parameterunabhängiger Integrale gibt jedoch eine hinreichende Bedingung an, wie sie auch in Satz (2.22) erfüllt wird.

(2.23) ***Satz:*** (**Differentiation parameterabhängiger Integrale**):
Sei $U \subseteq \mathbf{R}^n$ eine offene Menge, $[a,b] \subseteq \mathbf{R}$ ein kompaktes Intervall. Sei $f: U \times [a,b] \to \mathbf{R}$ stetig. Sei $F: U \to \mathbf{R}$ definiert durch $F(x) := \int_a^b f(x,t)\,dt$.
Ist für jedes $t \in [a,b]$ die Funktion $x \mapsto f(x,t)$ nach x_k partiell differenzierbar und die Funktion $(x,t) \mapsto \frac{\partial f(x,t)}{\partial x_k}$ stetig auf $U \times [a,b]$, dann ist F stetig partiell differenzierbar nach x_k, und es gilt für $x \in U$ $\frac{\partial F(x)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \int_a^b f(x,t)\,dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_k} f(x,t)\,dt$.

Beweis:

$U \subseteq \mathbf{R}$: Sei $x_0 \in U$ beliebig, $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir setzen $\varphi(x,t) := \frac{\partial f(x,t)}{\partial x_k} - \frac{\partial f(x_0,t)}{\partial x_k}$

$\Rightarrow$ φ ist stetig auf $U \times [a,b]$ mit $\varphi(x_0,t)=0$
$\Rightarrow$ $W := \{(x,t) \in U \times [a,b] : |\varphi(x,t)| < \varepsilon\}$ ist offene Umgebung von $\{x_0\} \times [a,b]$; also existiert offenes Intervall $I \subseteq U$ mit $x_0 \in I$ und $I \times [a,b] \subseteq W$. Sei $x \in I$, $x \neq x_0$.
Nach dem Mittelwertsatz gibt es zwischen x und x_0 Stellen $\xi(t)$ mit

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \int_a^b \frac{f(x,t) - f(x_0,t)}{x - x_0}\,dt = \int_a^b \frac{\partial f(\xi(t),t)}{\partial x}\,dt$$

$$\Rightarrow \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - \int_a^b \frac{\partial f(x_0,t)}{\partial x}\,dt \right| = \left| \int_a^b \frac{\partial f(\xi(t),t)}{\partial x} - \frac{\partial f(x_0,t)}{\partial x}\,dt \right| \le \int_a^b \left| \frac{\partial f(\xi(t),t)}{\partial x} - \frac{\partial f(x_0,t)}{\partial x} \right| dt$$

$$= \int_a^b |\varphi(\xi(t),t)|\,dt < \varepsilon \cdot (b-a)$$ q.e.d.

Beispiele:

1) $v: \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbf{R}^2$ $\quad v(x,y) := \frac{1}{x^2 + y^2}(-y, x)$

$$\Rightarrow \frac{\partial v_1(x,y)}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial v_2(x,y)}{\partial x}$$ für alle $(x,y) \neq (0,0)$

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$; $t \in [0, 2\pi]$
$\langle v, dt \rangle = \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \langle(-\sin t, \cos t), (-\sin t, \cos t)\rangle = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$

$$\int_\gamma \langle v, dt \rangle = \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi \neq 0$$

Das Integral verschwindet deshalb nicht – obwohl γ eine geschlossene Kurve ist –, weil $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ kein sternförmiges Gebiet ist. Allerdings ist die längs der negativen x-Achse geschlitzte Ebene

$\mathbf{R}^2 \setminus \{(x,0) \in \mathbf{R}^2: x\leq 0\}$ sternförmig und besitzt dort eine Stammfunktion. Insbesondere gilt dann $\int_\gamma < v, dt > = 0$ für jede in $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x,0): x\leq 0\}$ liegende Kurve.

2) $v(x_1,x_2,x_3):=(x_2^2\cdot\cos x_1 \,,\, 2\cdot x_2\cdot\sin x_1+e^{2x_3} \,,\, 2\cdot x_2\cdot e^{2x_3})$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 2\cdot x_2\cdot\cos x_1 = \frac{\partial v_2}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_3} = 0 = \frac{\partial v_3}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_3} = 2\cdot e^{2x_3} = \frac{\partial v_3}{\partial x_2}$$

gesucht: f mit grad f = v , d.h. $v_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}, v_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}, v_3 = \frac{\partial f}{\partial x_3}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = v_1 = x_2^2\cdot\cos x_1 \quad\Rightarrow\quad f(x_1,x_2,x_3) = x_2^2\cdot\sin x_1 + g(x_2,x_3)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2\cdot x_2\cdot\sin x_1 + \frac{\partial g(x_2,x_3)}{\partial x_2} \overset{!}{=} v_2 = 2\cdot x_2\cdot\sin x_1 + e^{2x_3}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g(x_2,x_3)}{\partial x_2} = e^{2x_3}$$

$\Rightarrow g(x_2,x_3) = x_2\cdot e^{2x_3} + h(x_3)$

$\Rightarrow f(x_1,x_2,x_3) = x_2^2\cdot\sin x_1 + x_2\cdot e^{2x_3} + h(x_3)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 2\cdot x_2\cdot e^{2x_3} + h'(x_3) \overset{!}{=} v_3 = 2\cdot x_2\cdot e^{2x_3}$$

$\Rightarrow h'(x_3) = 0 \quad\Rightarrow\quad h(x_3) = \text{const.}$

$\Rightarrow f(x_1,x_2,x_3) = x_2^2\cdot\sin x_1 + x_2\cdot e^{2x_3} + c$

3) $v(x_1,x_2) = (2\cdot x_1+x_2^3 \,,\, 3\cdot x_1\cdot x_2^2+4)$

gesucht: Stammfunktion $f=f(x_1,x_2)$ mit $f(0,0)=5$

$$\frac{\partial v_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 3x_2^2 = \frac{\partial v_2(x_1,x_2)}{\partial x_1}$$

Integrabilitätsbedingung in $\mathbf{R}^2$ ist erfüllt, daher existiert eine Stammfunktion !!!

gesucht: f mit $\frac{\partial f}{\partial x_1} = v_1 = 2x_1 + x_2^3 \quad\Rightarrow\quad f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^3\cdot x_1 + g(x_2)$

und $\frac{\partial f}{\partial x_2} = v_2 \Leftrightarrow 3\cdot x_1\cdot x_2^2 + 4 = 3\cdot x_2^2\cdot x_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} \quad\Rightarrow\quad g'(x_2) = 4 \Rightarrow g(x_2) = 4\cdot x_2 + c$

$\Rightarrow f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^3\cdot x_1 + 4\cdot x_2 + c$

Aus $f(0,0)=5 \Rightarrow c=5$.

Ist v: $U \subseteq R^n \rightarrow R^n$ ein Potentialfeld, so kann man zur Konstruktion einer Stammfunktion f: $U \rightarrow R^n$ einen beliebigen Punkt $x_0 \in U$ wählen, etwa das Zentrum des sternförmigen Gebietes U, und zu jedem $x \in U$ das Integral $f(x) = \int_{\gamma_x} < v, dt >$ berechnen, wobei γ_x eine Kurve mit dem Anfangspunkt x_0 und dem Endpunkt x in U ist, die möglichst so gewählt wird, daß die Berechnung des Integrals sehr einfach ist.

Zusatz:

$$\int_a^x < v, dt > = \int_0^1 < v(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt$$

In vielen Fällen: direkter Weg: $\gamma(t) = a+t\cdot(x-a)$; $t \in [0,1]$, $a \in \mathbf{R}^n$ $\gamma'(t) = x-a$, $x-a \in \mathbf{R}^n$

3. Lebesgue-Integral im R^n

1902 führte H. Lebesgue (1875-1941) einen Integralbegriff ein, der für viele Probleme der Integralrechnung wesentliche neue Gesichtspunkte brachte und insbesondere eine leistungsfähige Theorie zur Vertauschung von Limesbildung und Integration ermöglichte. Die Einführung des Lebesgue-Integrals geschieht hier analog zu Kapitel 1: ein für Treppenfunktionen in naheliegenderweise definiertes Integral wird auf Funktionen ausgedehnt, die beliebig genau durch Treppenfunktionen approximiert werden. Allerdings geschieht diese Approximation nicht wie bei der Einführung des Integrals von Regelfunktionen mit Hilfe der Supremumsnorm, sondern mit Hilfe der L_1-Halbnorm. Die Verwendung dieser Halbnorm führt unter anderem dazu, daß das Lebesgue-Integral mit Hilfe einer einzigen Definition sofort für Funktionen mit kompaktem Träger als auch für Funktionen mit nicht kompaktem Träger eingeführt werden kann. Im Gegensatz zu Kapitel 1 werden in diesem Kapitel komplexwertige Funktionen betrachtet, im übrigen kann die vorliegende Definition des Lebesgue-Integrals ohne große Mühe auch auf Funktionen mit Werten in einem Banachraum ausgedehnt werden.

§ 1 Treppenfunktionen, L_1-Halbnorm, Definition des Lebesgue-Integrals

(3.1) ***Definition:*** Seien H,Q,W Teilmengen des $\mathbf{R}^n$. Dann heißt

1) H eine **Hyperebene des $\mathbf{R}^n$**, wenn es ein $j \in \{1,...,n\}$ und ein $c \in \mathbf{R}$ gibt, so daß $H=\{(x_1,...,x_n) \in \mathbf{R}^n: x_j=c\}$
2) Q ein **Quader des $\mathbf{R}^n$**, wenn es n Intervalle $I_j \subseteq \mathbf{R}$, $j \in \{1,...,n\}$ mit den Randpunkten a_j, b_j gibt, wobei $-\infty < a_j \leq b_j < \infty$ gilt, so daß $Q = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$
3) Q ein **ausgearteter Quader des $\mathbf{R}^n$**, wenn Q ein Quader ist, der in einer Hyperebene liegt
4) W ein **Würfel des $\mathbf{R}^n$**, wenn $W = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$ ein Quader ist mit $b_j-a_j = l$ für $j \in \{1,...,n\}$ [man spricht von einem **ausgearteten Würfel**, wenn dieser aus nur einem Punkt besteht!]
5) H eine **Figur im $\mathbf{R}^n$**, wenn H die Vereinigung von endlich vielen Quadern ist
6) $V_n(Q):= (b_n-a_n)\cdot ...\cdot (b_1-a_1) = |I_n|\cdot ...\cdot |I_1|$ das **Volumen des Quaders** $Q = I_1 \times ... \times I_n$

Ausgeartete Quader des R^n haben stets das (n-dimensionale) Volumen 0.

(3.2) ***Definition:*** Eine Funktion $T: \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ heißt eine **Treppenfunktion auf dem $\mathbf{R}^n$**, wenn es endlich viele paarweise disjunkte Quader $Q_1, ..., Q_s$ gibt, so daß

1) T auf jedem Quader Q_j, $j \in \{1,...,s\}$, konstant ist
2) $T(x)=0$ für alle $x \in \mathbf{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^{s} Q_j$

n=1:

$T: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ Treppenfunktion nach (3.2). Es gibt endlich viele paarweise disjunkte Intervalle $J_1,...,J_s$, J_j habe Randpunkte $a_j \leq b_j$. Man setze

$a:=\min\{a_j, j \in \{1,...,s\}\}$, $b:=\max\{b_j, j \in \{1,...,s\}\}$, dann ist T eine Treppenfunktion auf [a,b] im Sinne von (1.1) mit $T(x)=0$ für $x \in \mathbf{R} \setminus \bigcup_{k=1}^{s} J_k$.

Auf der anderen Seite kann jede Treppenfunktion T: [a,b]→**C** auf [a,b] zu einer Treppenfunktion $\hat{T}$ auf **R** durch $\hat{T}(x)=T(x)$ für $x \in [a,b]$ und $\hat{T}(x)=0$ für $x \in \mathbf{R} \setminus [a,b]$ erweitert werden.
Mit T: $\mathbf{R^n}\to\mathbf{C}$ ist auch $|T|: \mathbf{R^n}\to\mathbf{R}$ mit $|T|(x):= |T(x)|$ eine Treppenfunktion auf $\mathbf{R^n}$.

(3.3) ***Definition:*** Sei $A\subseteq\mathbf{R^n}$ eine Teilmenge. Die Funktion $\mathbf{1}_A: \mathbf{R^n}\to\mathbf{R}$ mit $\mathbf{1}_A(x):=1$ für $x \in A$ und $\mathbf{1}_A(x)=0$ für $x \in \mathbf{R^n} \setminus A$ heißt die **charakteristische Funktion von A**.

Darstellung von Treppenfunktionen als Linearkombination von charakteristischen Funktionen

$T = \sum_{j=1}^{s} c_j \cdot \mathbf{1}_{Q_j}$ $\qquad$ $c_j \in \mathbf{C}$ $Q_1,...,Q_s$ paarweise disjunkte Quader

(3.4) ***Definition:*** Sei T: $\mathbf{R^n}\to\mathbf{C}$ eine Treppenfunktion mit der Darstellung
$T = \sum_{j=1}^{s} c_j \cdot \mathbf{1}_{Q_j}$, wobei $Q_1,...,Q_s$ paarweise disjunkte Quader des $\mathbf{R^n}$ sind, $c_j \in \mathbf{C}$. Dann heißt die Zahl $\int_{\mathbf{R^n}} T(x)\,dx = \sum_{j=1}^{s} c_j \cdot V_n(Q_j)$ das **Integral der Treppenfunktion T**.

Treppenfunktionen haben die folgenden Eigenschaften (vgl. (1.4)):

(3.5) ***Lemma:*** Sind T und S Treppenfunktionen auf dem $\mathbf{R^n}$, $\alpha,\beta \in \mathbf{C}$, so gilt:
1) die in (3.4) angegebene Definition des Integrals hängt nicht von der gewählten Darstellung von T ab
2) $\alpha\cdot T+\beta\cdot S$ ist eine Treppenfunktion auf $\mathbf{R^n}$ mit $\int (\alpha \cdot T + \beta \cdot s)dx = \alpha \cdot \int T(x)\,dx + \beta \cdot \int S(x)\,dx$
3) $\left|\int T(x)\,dx\right| \le \int |T(x)|\,dx$
4) $\int T(x)\,dx \le \int S(x)\,dx$, wenn $T(x) \le S(x)$ für alle $x \in \mathbf{R^n}$ gilt

<u>Beweis:</u>

Beweis über Induktion bzgl. n: $\qquad$ für n=1: (1.4)
n>1: $\mathbf{R^n} = \mathbf{R^p} \times \mathbf{R^{n-p}}$ $\qquad$ $1\le p<n$
Quader $Q\subseteq\mathbf{R^n}$ läßt sich darstellen: $Q=Q_p \times Q_{n-p}$, $Q_p\subseteq\mathbf{R^p}$, $Q_{n-p}\subseteq\mathbf{R^{n-p}}$.
Für z=(x,y), $x \in \mathbf{R^p}$, $y \in \mathbf{R^{n-p}}$ gilt $\mathbf{1}_Q(z) = \mathbf{1}_{Q_p}(x) \cdot \mathbf{1}_{Q_{n-p}}(y)$

Sei nun $T = \sum_{j=1}^{s} c_j \cdot \mathbf{1}_{Q_j}$ eine Treppenfunktion auf $\mathbf{R^n}$:

Für $y \in \mathbf{R^{n-p}}$ ist T_y: $\mathbf{R^p}\to\mathbf{C}$ mit $T_y(x) := \sum_{j=1}^{s} c_j \cdot \mathbf{1}_{Q_{j,p}}(x) \cdot \mathbf{1}_{Q_{j,n-p}}(y)$, d.h.

$T_y := \sum_{j=1}^{s} c_j \cdot \mathbf{1}_{Q_{j,n-p}}(y) \cdot \mathbf{1}_{Q_{j,p}}$, eine Treppenfunktion auf $\mathbf{R^p}$.

Für T_y ist das Integral sinnvoll definiert als

(Induktionsvoraussetzung) $\int\limits_{\mathbf{R}^p} T_y(x)\,dx = \sum\limits_{j=1}^{s} c_j \cdot \mathbf{1}_{Q_{j,n-p}}(y) \cdot V_p(Q_{j,p}) =: S(y)$

Damit ist S: $\mathbf{R}^{n-p} \to \mathbf{C}$ mit $S(y) = \sum\limits_{j=1}^{s} c_j \cdot \mathbf{1}_{Q_{j,n-p}}(y) \cdot V_p(Q_{j,p})$ eine Treppenfunktion auf $\mathbf{R}^{n-p}$.

Nach Induktionsannahme ist auch das Integral von S sinnvoll definiert durch

$$\int\limits_{\mathbf{R}^{n-p}} S(y)\,dy := \sum_{j=1}^{s} c_j \cdot V_p(Q_{j,p}) \cdot V_{n-p} \cdot (Q_{j,n-p}) = \sum_{j=1}^{s} c_j \cdot V_n(Q_j)$$

$$\Rightarrow \int\limits_{\mathbf{R}^{n-p}} \left(\int\limits_{\mathbf{R}^p} T_y(x)\,dx \right) dy = \sum_{j=1}^{s} c_j \cdot V_n(Q_j);$$

die linke Seite hängt nicht von der Darstellung von T ab, also

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} T(z)\,dz = \int\limits_{\mathbf{R}^{n-p}} \left(\int\limits_{\mathbf{R}^p} T_y(x)\,dx \right) dy$$ q.e.d.

Anhand dieser Darstellung des Integrals im R^n gewinnt man schließlich auch die Rechenregeln in der Dimension n aus den Rechenregeln im Falle kleinerer Dimension.

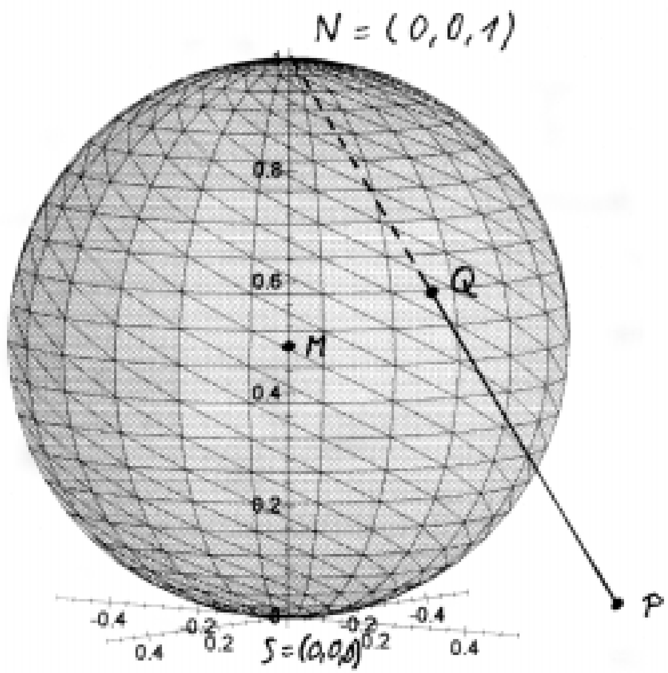
(3.6) ***Korollar:*** (**Satz von Fubini für Treppenfunktionen**):
Sei T: $\mathbf{R}^{n+m} \to \mathbf{C}$ eine Treppenfunktion auf $\mathbf{R}^{n+m}$, dann gilt mit z=(x,y), $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}^m$:

$$\int\limits_{\mathbf{R}^{n+m}} T(x,y)\,d(x,y) = \int\limits_{\mathbf{R}^m} \left(\int\limits_{\mathbf{R}^n} T(x,y)\,dx \right) dy.$$

Wir wenden uns nun der Approximation der Treppenfunktionen zu. Da hierbei auch „Werte im Unendlichen" zugelassen werden sollen, müssen wir zunächst erläutern, was Werte im Unendlichen bei komplexen Zahlen bedeuten sollen und wie wir das Rechnen im Unendlichen ohne Grenzwertbertrachtung regeln wollen.

Einschub:

komplexe Zahlen: z(x,y) , $x,y \in \mathbf{R}$ z=x+iy , $i^2 = -1$



Q Durchstoßpunkt

M=(0,0,½)

$P \simeq z=(x,y) = x+iy$ sei ein Punkt in der komplexen Zahlenebene.

S: $\mathbf{C} \rightarrow S_{½}\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$ durch z=x+iy $\mapsto$ $S(z) := \left(\frac{x}{1+x^2+y^2}, \frac{y}{1+x^2+y^2}, \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\right)$ heißt **stereographische Projektion** von P auf die Kugel.

$\Rightarrow$ S: $\mathbf{C} \rightarrow S_{½}\left(0,0,\frac{1}{2}\right) \setminus (0,0,1)$ ist bijektiv.

Die Umkehrabbildung S^{-1}: $S_{½}\left(0,0,\frac{1}{2}\right) \setminus (0,0,1) \rightarrow \mathbf{C}$ ist gegeben durch:

S^{-1}: $(\xi,\eta,\zeta) \mapsto (x,y)$ mit $x := \frac{\xi}{1-\zeta}$, $y := \frac{\eta}{1-\zeta}$

Definiere $z_\infty := S^{-1}(0,0,1)$ [z_∞ ist keine komplexe Zahl!]

$\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{z_\infty\}$ **erweiterte komplexe Zahlenebene**

$\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ **erweiterte reelle Achse / Zahlengerade**

Rechenregeln:
1) $z + z_\infty = z_\infty + z = z_\infty$, $z \in \mathbf{C}$
2) $z \cdot z_\infty = z_\infty \cdot z = z_\infty$, $z \in \overline{\mathbf{C}}$, $z \neq 0$
3) $z_\infty + z_\infty = z_\infty$
4) $|z_\infty| = \infty$
5) $\dfrac{z}{z_\infty} = 0$ falls $z \in \mathbf{C}$
6) $\dfrac{z}{0} = z_\infty$ für $z \in \overline{\mathbf{C}}$, $z \neq 0$

Vereinbarung:

$\sum_{j=1}^{\infty} c_j = \infty$ für $c_j \geq 0$, $c_j \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, falls $\sum c_j$ nicht konvergiert.

(3.7) ***Definition:*** Sei f: $\mathbf{R^n} \to \overline{\mathbf{C}}$ eine Funktion. Dann heißt

1) $\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \cdot \mathbf{1}_{Q_j}$ eine **Hüllreihe zu f**, wenn Q_j offene Quader des $\mathbf{R^n}$, $c_j \geq 0$ sind und für jedes $x \in \mathbf{R^n}$ gilt: $|f(x)| \leq |\varphi(x)| = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \cdot \mathbf{1}_{Q_j}(x)$

2) $I(\varphi) := \sum_{j=1}^{\infty} c_j \cdot V_n(Q_j)$ der **Inhalt der Hüllreihe** $\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \cdot \mathbf{1}_{Q_j}$

3) $\|f\|_1 := \inf \{I(\varphi): \varphi$ Hüllreihe zu f$\}$ die **L_1-Halbnorm der Funktion f**

Bemerkungen:

1) Jede Funktion f: $\mathbf{R^n} \to \overline{\mathbf{C}}$ besitzt eine Hüllreihe φ, nämlich $\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} 1 \cdot \mathbf{1}_{Q_j}$, wobei $Q_j := \left(-\frac{j}{2}, \frac{j}{2}\right) \times \left(-\frac{j}{2}, \frac{j}{2}\right) \times \ldots \times \left(-\frac{j}{2}, \frac{j}{2}\right)$ für $j \in \mathbf{N}$, denn für $x \in \mathbf{R^n}$ existiert ein $k \in \mathbf{N}$ mit $x \in Q_{k+r}$ für alle $r \in \mathbf{N}$

$$\Rightarrow |f(x)| \leq \sum_{j=k+r}^{\infty} 1 \cdot \mathbf{1}_{Q_{k+r}}(x) = \infty$$

$\|f\|_1$ ist also definiert.

2) f: $\mathbf{R^n} \to \overline{\mathbf{C}}$, daher ist auch $|f(x)| = \infty$ zugelassen, es kann auch $I(\varphi) = \infty$ sein, da Hüllreihe $\sum_{j=1}^{\infty} 1 \cdot \mathbf{1}_{Q_j}(x) =: \varphi(x)$ nicht konvergieren muß.

Darüberhinaus gelten die folgenden Eigenschaften:

(3.8) ***Lemma:*** Sei $c \in \mathbf{C}$, f: $\mathbf{R^n} \to \overline{\mathbf{C}}$, g: $\mathbf{R^n} \to \overline{\mathbf{C}}$, dann gilt:

1) $0 \leq \|f\|_1 \leq \infty$
2) $\|c \cdot f\|_1 = |c| \cdot \|f\|_1$
3) $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$
4) $\|f\|_1 \leq \|g\|_1$, wenn $|f(x)| \leq |g(x)|$, $x \in \mathbf{R^n}$

Beweis:

Da für jede Hüllreihe $\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \cdot \mathbf{1}_{Q_j}$ wegen $c_j \geq 0$ stets $I(\varphi) \geq 0$ gilt, folgt 1) unmittelbar.

2) und 4) sind leicht eizusehen, während 3) ein Spezialfall der folgenden allgemeinen Dreiecksungleichung (3.9) ist. q.e.d.

Beispiel:

$A := I_1 \times ... \times I_{j-1} \times \underbrace{\{c\}}_{\substack{\text{j-tes} \\ \text{Intervall}}} \times I_{j+1} \times ... \times I_n$ ist ein Quader in der Hyperebene

$H := \{(x_1,...,x_n) \in \mathbf{R^n}: x_j = c\} \Rightarrow V_n(A) = 0$

Sei $\varepsilon > 0$, $Q_\varepsilon := \mathring{I}_1 \times ... \times \mathring{I}_{j-1} \times \left(c - \frac{\varepsilon}{3 \cdot M}, c + \frac{\varepsilon}{3 \cdot M} \right) \times ... \times \mathring{I}_n$, $\mathring{I}_k$ Inneres von I_k, wobei

$M := \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (b_k - a_k)$, wenn I_k die Randpunkte $a_k < b_k$ hat.

Dann gilt: $V_n(Q_\varepsilon) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (b_k - a_k) \cdot \frac{2 \cdot \varepsilon}{3 \cdot M} = \frac{2}{3} \cdot \varepsilon < \varepsilon$

Betrachte $f := \mathbf{1}_A \neq 0$, dann ist $\varphi_\varepsilon := 1 \cdot \mathbf{1}_{Q_\varepsilon}$ eine Hüllreihe zu f mit $I(\varphi_\varepsilon) < \varepsilon \Rightarrow \|f\|_1 = 0$.

Das Beispiel zeigt, daß $\|.\|_1$ keine Norm auf dem Vektorraum aller Funktionen f: $\mathbf{R^n} \to \overline{\mathbf{C}}$ definiert. Die Bedeutung von $\|f\|_1 = 0$ wird im Zusammenhang mit der Diskussion über Nullmengen noch näher untersucht.

(3.9) ***Satz:*** (**Verallgemeinerte Dreiecksungleichung**):

Für $j \in \mathbf{N}$ sei f_j: $\mathbf{R^n} \to \overline{\mathbf{R}}$ eine Funktion mit $f_j(x) \geq 0$ für $x \in \mathbf{R^n}$. Dann gilt:

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} f_j \right\|_1 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_1$$

Beweis:

Sei $\varepsilon>0$, sei $j \in \mathbf{N}$. Zu f_j wählen wir eine Hüllreihe $\varphi_j = \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} \cdot \mathbf{1}_{Q_{j,k}}$ mit dem Inhalt $I(\varphi_j) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} \cdot V_n(Q_{j,k}) \leq \|f_j\|_1 + \frac{\varepsilon}{2^j}$. Dann ist $\varphi := \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} \cdot \mathbf{1}_{Q_{j,k}}$ eine Hüllreihe der Funktion $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ mit $I(\varphi) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} \cdot V_n(Q_{j,k}) = \sum_{j=1}^{\infty} I(\varphi_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty}\left(\|f\|_1 + \frac{\varepsilon}{2^j}\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|f\|_1 + \varepsilon$,

da $\varepsilon>0$ beliebig und $I(\varphi) \geq \left\| \sum_{j=1}^{\infty} f_j \right\|_1$, folgt die Behauptung. q.e.d.

$\int_{\mathbf{R^n}} \mathbf{1}_A(x)\, dx = \|\mathbf{1}_A\|_1$ Sei T Treppenfunktion auf $\mathbf{R^n}$; wir werden zeigen, daß

$\|T\|_1 = \int_{\mathbf{R^n}} |T(x)|\, dx < \infty$.

Erinnerung:

Treppenfunktion: $T: \mathbf{R^n} \to \mathbf{C}$, $T = \sum_{j=1}^{s} c_j \cdot \mathbf{1}_{Q_j}$

Q_j disjunkte Quader, endliche Summe

charakteristische Funktion: $\mathbf{1}_{Q_j} := \begin{cases} 1 & x \in Q_j \\ 0 & x \notin Q_j \end{cases}$

$\int_{\mathbf{R^n}} T\, dx = \sum_{j=1}^{s} c_j \cdot V_n(Q_j)$ $V_n(Q_j)$ n-dimensionales Volumen des Quaders Q_j

$\|.\|_1$ L_1-Halbnorm auf der Menge der Treppenfunktionen

$f: \mathbf{R^n} \to \overline{\mathbf{C}}$ Funktion

Dann ist die unendliche Reihe $\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \cdot \mathbf{1}_{Q_j}$, wobei $c_j \geq 0$, Q_j offene Quader, aber nicht notwendig disjunkt, eine Hüllreihe zu f, falls $|f(x)| \leq \varphi(x)$, $I(\varphi) := \sum_{j=1}^{\infty} c_j \cdot V_n(Q_j)$,

$\|f\|_1 := \inf \{I(\varphi) \mid \varphi \text{ Hüllreihe zu f}\} = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} c_j \cdot V_n(Q_j) \,\middle|\, |f(x)| \leq \varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \cdot \mathbf{1}_{Q_j} \right\}$

Wir werden nun zeigen: die L_1-Halbnorm $\|T\|_1$ einer Treppenfunktion T ist gleich dem Integral der Treppenfunktion $|T|$. Zunächst wird diese Tatsache für die charakteristische Funktion eines abgeschlossenen Quaders bewiesen, wobei die Vollständigkeit des $\mathbf{R^n}$ verwendet wird.

(3.10) ***Fundamental-Lemma:*** Sei A abgeschlossener Quader im $\mathbf{R^n}$. Dann gilt für die charakteristische Funktion $\mathbf{1}_A$

$$\|\mathbf{1}_A\|_1 = V_n(A) = \int_{\mathbf{R^n}} \mathbf{1}_A(x)\,dx\,.$$

Beweis:

„≤":
Sei $Q\subseteq\mathbf{R^n}$ ein offener Quader mit $A \subset Q$. Dann ist $\varphi_0{:=}1\cdot\mathbf{1}_Q$ eine Hüllreihe zu $f=\mathbf{1}_A$, so daß $\|f\|_1 = \|\mathbf{1}_A\|_1 = \inf\{I(\varphi)\colon \varphi \text{ Hüllreihe zu } f\} \le I(\varphi_0) = I(\mathbf{1}_Q) = V_n(Q)$.

Zu jedem $\varepsilon>0$ existiert ein offener Quader Q_ε mit $V_n(Q_\varepsilon) \le V_n(A)+\varepsilon$, daher gilt:
$\|\mathbf{1}_A\|_1 \le V_n(Q_\varepsilon) \le V_n(A)+\varepsilon$ und damit $\|\mathbf{1}_A\|_1 \le V_n(A)$.

„≥":
Um $\inf\{I(\varphi) \mid \varphi \text{ Hüllreihe zu } f=\mathbf{1}_A\} = \|\mathbf{1}_A\|_1 \ge V_n(A)$ zu zeigen, zeigen wir, daß für jede Hüllreibhe φ von $f=\mathbf{1}_A$ gilt: $I(\varphi) \ge V_n(A)$.
Also, sei $\varepsilon>0$, dann gibt es zu $x \in A$ wegen $\varphi(x) \ge |f(x)| = |\mathbf{1}_A(x)| = 1$ einen Index $N_\varepsilon(x)$ mit

$$\sum_{j=1}^{N_\varepsilon} c_j \cdot \mathbf{1}_{Q_j}(x) \ge 1-\varepsilon\,.$$

Da alle Quader Q_j offen sind und obiges eine endliche Summe ist, gibt es eine offene Umgebung U(x), so daß für alle $y \in U(x)$ ebenso gilt: $\displaystyle\sum_{j=1}^{N_\varepsilon} c_j \cdot \mathbf{1}_{Q_j}(y) \ge 1-\varepsilon$.
Da A kompakt, existieren endlich viele Punkte $x_1,\dots,x_p \in A$, so daß die Umgebungen $U(x_1),\dots,U(x_p)$ ganz A überdecken. Wähle $N{:=}\max\{N_\varepsilon(x_1),\dots, N_\varepsilon(x_p)\}$, dann folgt

$\displaystyle\sum_{j=1}^{N} c_j \cdot \mathbf{1}_{Q_j} \ge (1-\varepsilon)\cdot\mathbf{1}_A$ und wegen Lemma (3.8) / 4) (Monotonie) gilt:

$$I(\varphi)=\sum_{j=1}^{\infty} c_j \cdot V_n(Q_j) \ge \sum_{j=1}^{N} c_j \cdot V_n(Q_j) \ge (1-\varepsilon)\cdot V_n(A).$$

Mit $\varepsilon\to 0$ folgt $I(\varphi)\ge V_n(A)$. q.e.d.

(3.11) ***Lemma:*** Für jede Treppenfunktion T auf $\mathbf{R^n}$ gilt

$$\|T\|_1 = \int_{\mathbf{R^n}} |T(x)|\,dx < \infty\,.$$

Beweis:

o.B.d.A.: Sei $T(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbf{R}^n$, da nach Definition von $\|.\|_1$ (3.7) die Treppenfunktionen T und $|T|$ dieselbe L_1-Halbnorm haben.

„≤“:

Sei also $T = \sum_{j=1}^{s} a_j \cdot \mathbf{1}_{\tilde{Q}_j}$ mit $a_j \geq 0$ und $\tilde{Q}_j$ paarweise disjunkt (möglicherweise abgeschl.) Quader. Falls $\tilde{Q}_j$ nicht offen ist, so zerlege $\tilde{Q}_j$ disjunkt in $\tilde{Q}_j = Q_j \cup R_k$, wobei Q_j der offene Kern von $\tilde{Q}_j$ und R_k Quader, die auf dem Rand von Q_j liegen, sind.

Für diese gilt $V_n(R_k)=0$. Also

$T = \sum_{j=1}^{s} c_j \cdot \mathbf{1}_{Q_j} + \sum_{k=1}^{t} d_k \cdot \mathbf{1}_{R_k}$. Da $T(x) \geq 0$ und alle Quader disjunkt, folgt $c_j \geq 0$, $d_k \geq 0$.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da jeder Quader R_k in einer Hyperebene liegt, existiert wegen $V_n(R_k)=0$ ein offener Quader R_k^* mit $R_k \subseteq R_k^*$ und $V_n(R_k^*) \leq \varepsilon$.

Dann ist $\varphi := \sum_{j=1}^{s} c_j \cdot \mathbf{1}_{Q_j} + \sum_{k=1}^{t} d_k \cdot \mathbf{1}_{R_k^*}$ eine Hüllreihe zu T und

$\|T\|_1 \leq I(\varphi) = \sum_{j=1}^{s} c_j \cdot V_n(Q_j) + \sum_{k=1}^{t} d_k \cdot V_n(R_k^*) \leq \sum_{j=1}^{s} c_j \cdot V_n(Q_j) + \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{t} d_k$. Mit $\varepsilon \to 0$ erhält man $\|T\|_1 \leq \sum_{j=1}^{s} c_j \cdot V_n(Q_j) \leq \int_{\mathbf{R}^n} T(x)\, dx$.

„≥“:

Da T eine Treppenfunktion, existiert ein abgeschlossener Quader A mit $\bigcup_{j=1}^{s} \tilde{Q}_j \subseteq A$, so daß $T(x)=0$, für $x \notin A$.

Sei $m := \max\{T(x) : x \in \mathbf{R}^n\} = \max\{T(x) : x \in A\}$

Dann ist $S := m \cdot \mathbf{1}_A - T$ eine Treppenfunktion auf $\mathbf{R}^n$ mit $S(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbf{R}^n$ und nach oben gezeigtem („≤“) gilt:

$\|S\|_1 \leq \int_{\mathbf{R}^n} S(x)\, dx$. Mit dem Fundamental-Lemma (3.10) folgt:

$$\int_{\mathbf{R}^n} T(x)\, dx = \int_{\mathbf{R}^n} (m \cdot \mathbf{1}_A - S)(x)\, dx = \int_{\mathbf{R}^n} m \cdot \mathbf{1}_A\, dx - \int_{\mathbf{R}^n} S(x)\, dx$$

$$\overset{(3.10)}{\leq} \|m \cdot \mathbf{1}_A\|_1 - \|S\|_1 = \|S+T\|_1 - \|S\|_1 = \|T\|.$$ q.e.d.

In der Tat ist $\|T\|_1$ auf der Menge der Treppenfunktionen auf $\mathbf{R}^n$ eine Halbnorm.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir zur Definition des Lebesgue-Integrals. Das Lebesgue-Integral wird zunächst für Funktionen auf $\mathbf{R}^n$ eingeführt und dann für Funktionen auf Teilmengen des $\mathbf{R}^n$. Dabei betrachten wir Funktionen, die bzgl. der L_1-Halbnorm durch Treppenfunktionen beliebig genau approximiert werden können.

(3.12) ***Definition:*** Eine Funktion f: $\mathbf{R}^n \to \overline{\mathbf{C}}$ heißt **Lebesgue-integrierbar über $\mathbf{R}^n$** (kurz: **integrierbar**), wenn es eine Folge $(T_j)_{j \in \mathbf{N}}$ von Treppenfunktionen T_j auf $\mathbf{R}^n$ gibt mit $\lim\limits_{j\to\infty} \|f-T_j\|_1=0$. Die komplexe Zahl $\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x)\,dx = \lim\limits_{j\to\infty} \int\limits_{\mathbf{R}^n} T_j(x)\,dx$ heißt dann das **Lebesgue-Integral** von f.

Schreibweisen sind ebenfalls $\int f(x)\,d^n x$ oder $\int f\,dx$.
Da für Treppenfunktionen T: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$, S: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ stets gilt
$\left| \int\limits_{\mathbf{R}^n} T(x)\,dx - \int\limits_{\mathbf{R}^n} S(x)\,dx \right| \le \int\limits_{\mathbf{R}^n} |T(x) - S(x)|\,dx \overset{(3.11)}{=} \|T-S\|_1 \le \|T-f\|_1 + \|f-S\|_1$, ist die Folge $\left(\int\limits_{\mathbf{R}^n} T_j(x)\,dx \right)_{j\in \mathbf{N}}$ eine Cauchyfolge in **C**, also konvergent in **C** (da **C** vollständig) und der Grenzwert $\lim\limits_{j\to\infty} \int\limits_{\mathbf{R}^n} T_j(x)\,dx$ ist unabhängig von der approximierten Folge $(T_j)_j$. Somit ist (3.12) wohldefiniert.

Bemerkung:

1) Jede Treppenfunktion T auf $\mathbf{R}^n$ ist auch Lebesgue-integrierbar auf $\mathbf{R}^n$ und das Lebesgue-Integral stimmt mit dem Integral der Treppenfunktion im Sinne der Definition (3.4) überein.
2) Aus $\lim\limits_{j\to\infty} \|f - T_j\|_1 = 0$ kann i.a. <u>nicht</u> $\lim\limits_{j\to\infty} |f(x) - T_j(x)| = 0$ für jeden Punkt $x \in \mathbf{R}^n$ gefolgert werden (d.h.: $\|f\|_1 \not\Rightarrow f=0$).
   Später wird gezeigt, daß jedoch eine geeignete Teilfolge von $(T_j)_j$ existiert, die <u>fast überall</u> punktweise gegen f konvergiert $\big(f(x)=0$ für alle $x \in \mathbf{R}^n \setminus M$, M Nullmenge$\big)$

Eigenschaften Lebesgue-integrierbarer Funktionen (vgl. (1.4) und (3.5))

(3.13) ***Satz:*** Seien f: $\mathbf{R}^n \to \overline{\mathbf{C}}$, g: $\mathbf{R}^n \to \overline{\mathbf{C}}$ Lebesgue-integrierbar über $\mathbf{R}^n$ und $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$.
Dann gilt:

1) $|f|$: $\mathbf{R}^n \to \overline{\mathbf{R}}$ mit $|f|(x) := |f(x)|$, $x \in \mathbf{R}^n$ ist Lebesgue-integrierbar über $\mathbf{R}^n$ und es gilt: $\left| \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x)\,dx \right| \le \int\limits_{\mathbf{R}^n} |f(x)|\,dx = \|f\|_1 < \infty$
2) $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ und $\bar{f}$ mit $\bar{f}(x) := \overline{f(x)}$, $x \in \mathbf{R}^n$ sind Lebesgue-integrierbar über $\mathbf{R}^n$ mit
   $\int\limits_{\mathbf{R}^n} (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(x)\,dx = \alpha \cdot \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x)\,dx + \beta \cdot \int\limits_{\mathbf{R}^n} g(x)\,dx$ sowie
   $\int\limits_{\mathbf{R}^n} \bar{f}(x)\,dx = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \overline{f(x)}\,dx$
3) Sind f und g reellwertig mit $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in \mathbf{R}^n$, so gilt $\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x)\,dx \le \int\limits_{\mathbf{R}^n} g(x)\,dx$
4) Wenn g beschränkt ist (d.h. es existiert M>0, so daß $|g(x)| \le M$, $x \in \mathbf{R}^n$), so ist $f \circ g$ Lebesgue-integrierbar

Beweis:

ad 1)
Sei $(T_j)_j$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $\lim\limits_{j\to\infty}\left\|f - T_j\right\|_1 = 0$. Da $|\,|f| - |T_j|\,| \le |f - T_j|$ folgt aus der Monotonie von $\|.\|_1$ (Lemma (3.8)) $\|\,|f| - |T_j|\,\|_1 \le \|f - T_j\|_1$, also $\lim\limits_{j\to\infty} \|\,|f| - |T_j|\,\|_1 = 0$.
Somit ist $|f|$ auf $\mathbf{R^n}$ Lebesgue-integrierbar und
$\left|\int\limits_{\mathbf{R^n}} f(x)\,dx\right| = \left|\lim\limits_{j\to\infty}\int\limits_{\mathbf{R^n}} T_j(x)\,dx\right| \le \lim\limits_{j\to\infty}\int\limits_{\mathbf{R^n}}\left|T_j(x)\right| dx = \int\limits_{\mathbf{R^n}}|f|\,dx$.
Da $\|f\|_1 - \|f - T_j\|_1 \le \|T_j\| \le \|f\|_1 + \|f - T_j\|_1$ und $\lim\limits_{j\to\infty}\left\|T_j\right\|_1 = \lim\limits_{j\to\infty}\int\limits_{\mathbf{R^n}}\left|T_j(x)\right| dx = \int\limits_{\mathbf{R^n}}|f|(x)\,dx$, folgt unmittelbar $\|f\|_1 \le \int\limits_{\mathbf{R^n}}|f|(x)\,dx \le \|f\|_1$.

ad 2)
Seien $(T_j)_j$ und $(S_k)_k$ Folgen von Treppenfunktionen mit $\lim\limits_{j\to\infty}\|f - T_j\|_1 = 0$ und $\lim\limits_{k\to\infty}\|g - S_k\|_1 = 0$, dann gilt $\lim\limits_{j\to\infty}\|\alpha\cdot f + \beta\cdot g - (\alpha\cdot T_j + \beta\cdot S_j)\|_1 = \lim\limits_{j\to\infty}\|\alpha\cdot f - \alpha\cdot T_j + \beta\cdot g - \beta\cdot S_j\|_1$

$\le \lim\limits_{j\to\infty}|\alpha|\cdot\|f - T_j\|_1 + \lim\limits_{j\to\infty}|\beta|\cdot\|g - S_j\|_1 = 0$ sowie

$\lim\limits_{j\to\infty}\|\overline{f} - \overline{T_j}\|_1 = 0$, ferner gilt $\int\limits_{\mathbf{R^n}}\overline{T_j}(x)\,dx = \overline{\int\limits_{\mathbf{R^n}} T_j(x)\,dx}$

ad 3)
Wegen 1) gilt $0 \le \|g - f\|_1 = \int\limits_{\mathbf{R^n}}|g - f|(x)\,dx = \int\limits_{\mathbf{R^n}}\big(g(x) - f(x)\big)dx$

ad 4)
Sei $\varepsilon>0$, wir wählen eine Treppenfunktion T auf $\mathbf{R^n}$ mit $\|f - T\|_1 \le \dfrac{\varepsilon}{2\cdot M}$ sowie eine Treppenfunktion S auf $\mathbf{R^n}$ mit $\|g - S\|_1 \le \dfrac{\varepsilon}{2\cdot\mu}$, wobei $\mu>0$ eine Konstante mit $|T(x)| \le \mu$ für alle $x \in \mathbf{R^n}$ ist. Dann gilt

$\|f\cdot g - T\cdot S\|_1 = \|f\cdot g - T\cdot g + T\cdot g - T\cdot S\|_1 \le \|f\cdot g - T\cdot g\|_1 + \|T\cdot g - T\cdot S\|_1 \le M\cdot\|f - T\|_1 + \mu\cdot\|g - S\|_1$

$\le \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, also ist $f\cdot g$ integrierbar q.e.d.

(3.14) ***Korollar:*** $f: \mathbf{R^n} \to \overline{\mathbf{C}}$ ist genau dann über $\mathbf{R^n}$ Lebesgue-integrierbar, wenn Re(f) und Im(f) über $\mathbf{R^n}$ Lebesgue-integrierbar sind. In diesem Fall gilt
$\int\limits_{\mathbf{R^n}} f\,dx = \int\limits_{\mathbf{R^n}}\mathrm{Re}(f)\,dx + i\cdot\int\limits_{\mathbf{R^n}}\mathrm{Im}(f)\,dx$.

(3.15) ***Korollar:*** Sind f: $\mathbf{R^n}\to\mathbf{R}$ und g: $\mathbf{R^n}\to\mathbf{R}$ über $\mathbf{R^n}$ Lebesgue-integrierbar, so sind auch folgende Funktionen über $\mathbf{R^n}$ Lebesgue-integrierbar:

1) $\max(f,g):=\frac{1}{2}\left((f+g)+|f-g|\right)$
2) $\min(f,g):=\frac{1}{2}\left((f+g)-|f-g|\right)$
3) $f^+:=\max(f,0)$ positiver Anteil von f
4) $f^-:=\max(-f,0)$ negativer Anteil von f

Es gilt: $f = f^+ - f^-$ (wobei $f^+\geq 0$ und $f^-\geq 0$)

Triviale Fortsetzung von f_A:

f: $A\subseteq\mathbf{R^n}\to\overline{\mathbf{C}}$, dazu f_A: $\mathbf{R^n}\to\mathbf{C}$ mit $f_A(x):=\begin{cases} f(x) & \text{wenn } x\in A \\ 0 & \text{wenn } x\in \mathbf{R^n}\setminus A\end{cases}$

(3.16) ***Definition:*** Sei $A\subseteq\mathbf{R^n}$ eine Teilmenge. Eine Funktion f: $A\to\overline{\mathbf{C}}$ heißt **über A Lebesgue-integrierbar**, wenn ihre triviale Fortsetzung f_A: $\mathbf{R^n}\to\overline{\mathbf{C}}$ über $\mathbf{R^n}$ Lebesgue-integrierbar ist. In diesem Fall heißt $\int_A f\,dx = \int_{\mathbf{R^n}} f_A\,dx$ das **Lebesgue-Integral von f über A**. Wir setzen dann: $\|f\|_{1,A}:=\|f_A\|_1$.

Satz (3.13) sowie Korollar (3.14) und (3.15) gelten sinngemäß auch bei der Integration über eine Menge $A\subseteq R^n$. Insbesondere bildet die Menge $\mathcal{L}_1(A)$ aller über A Lebesgue-integrierbaren komplexwertigen Funktionen einen Vektorraum über C. Für jede über $A\subseteq R^n$ Lebesgue-integrierbare Funktion f gilt $\|f\|_{1,A}=\int_A |f(x)|\,dx$.

Der folgende Satz zeigt, daß für Regelfunktionen f: $[a,b]\to C$ das in Kapitel 1 eingeführte Integral mit dem Lebesgue-Integral über $A:=[a,b]$ übereinstimmt.

(3.17) ***Satz:*** Eine Regelfunktion f: $[a,b]\to\mathbf{C}$ ist über $A:=[a,b]$ Lebesgue-integrierbar und es gilt: $\int_A f\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

Beweis:

Sei g: $A=[a,b]\to\mathbf{C}$ eine beliebige Funktion, sei g_A: $\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ ihre triviale Fortsetzung. Dann gilt $\|g_A\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |g(x)| = \|g\|_\infty$.

Ferner gilt für $x\in\mathbf{R}$ $|g_A(x)|\leq\|g_A\|_\infty\cdot|\mathbf{1}_A(x)|\leq\|g_A\|_\infty\cdot\mathbf{1}_A(x) \Rightarrow |g_A|\leq\|g\|_\infty\cdot\mathbf{1}_A$.

Mit Lemma (3.8) 4) $\Rightarrow \|g_A\|_1\leq\|g\|_\infty\cdot\|\mathbf{1}_A\|_1$

$\Rightarrow$ (Fundamental-Lemma (3.10)) $\|g_A\|_1\leq\|g\|_\infty\cdot V(A) = \|g\|_\infty\cdot V([a,b]) = \|g\|_\infty\cdot(b-a)$.

Für eine Regelfunktion f: $[a,b]\to\mathbf{C}$ und eine Folge von Treppenfunktionen T_j auf $[a,b]=A$ mit $\|f-T_j\|_\infty\to 0$ für $j\to\infty$ gilt dann entsprechend für ihre trivialen Fortsetzungen die Abschätzung $\|f_A-T_{j,A}\|_1\leq(b-a)\cdot\|f-T_j\|_\infty \Rightarrow \lim_{j\to\infty}\|f_A-T_{j,A}\|_1 = 0$

$\Rightarrow$ f_A ist über **R** Lebesgue-integrierbar mit
$\int_A f\ dx = \int_{\mathbf{R}} f_A\ dx = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbf{R}} T_{j,A}\ dx = \lim_{j\to\infty} \int_a^b T_j\ dx = \int_a^b f(x)\ dx$. q.e.d.

Da jede Regelfunktion f: [a,b]→R (bzw. C) auch Riemann-integrierbar über [a,b] ist und das Riemann-Integral mit dem Integral der Regelfunktionen übereinstimmt, fallen für Regelfunktionen die drei Integralbegriffe zusammen, d.h. es gilt

$$I_R(f) = \lim_{n\to\infty} R(Z_n,B_n,f) = \int_a^b f(x)\ dx = \int_{A=[a,b]} f(x)\ dx.$$

§ 2 Uneigentliche Integrale und Lebesgue-Integral, die „kleinen" Sätze von Beppo Levi und Fubini

In diesem Abschnitt wird ein einfaches hinreichendes Kriterium entwickelt, das eine umfangreiche Klasse integrierbarer Funktionen liefert und als Vorstufe des Satzes von B. Levi angesehen werden kann. Es ermöglicht, den Zusammenhang zwischen der Lebesgue-Integrierbarkeit und der uneigentlichen Integrierbarkeit zu klären. Ferner wird mit Hilfe einer Vorstufe des Satzes von Fubini ein Reduktionsverfahren zur Berechnung eines Lebesgue-Integrals hergeleitet.

(3.18) ***Satz:*** (**„kleiner" Satz von B. Levi**):
Sei f: $\mathbf{R}^n \to \overline{\mathbf{R}}$ eine Funktion. Es gebe eine monoton wachsende Folge $(T_j)_j$ von Treppenfunktionen auf $\mathbf{R}^n$ mit den Eigenschaften:
1) für jedes $x \in \mathbf{R}^n$ gilt $f(x)=\lim\limits_{j\to\infty} T_j(x)$
2) es gibt eine Konstante M>0, so daß $\left|\int\limits_{\mathbf{R}^n} T_j\, dx\right| \le M$ für $j \in \mathbf{N}$. Dann ist f Lebesgue-integrierbar über $\mathbf{R}^n$ mit $\int\limits_{\mathbf{R}^n} f\, dx = \lim\limits_{j\to\infty} \int\limits_{\mathbf{R}^n} T_j\, dx$

<u>Beweis:</u>

$$f-T_j = \lim_{m\to\infty} (T_{m+1}-T_j) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=j}^{m} \left(T_{k+1} - T_k\right) = \sum_{k=j}^{\infty} \left(T_{k+1} - T_k\right)$$

$\Rightarrow$ (Dreiecksungleichung (3.9) und (3.11))

$$\|f-T_j\|_1 = \left\|\sum_{k=j}^{\infty} T_{k+1} - T_k\right\|_1 \overset{(3.9)}{\le} \sum_{k=j}^{\infty} \|T_{k+1} - T_k\|_1 = \sum_{k=j}^{\infty} \int\limits_{\mathbf{R}^n} |T_{k+1}(x) - T_k(x)|\, dx$$

$$= \sum_{k=j}^{\infty} \left(\int\limits_{\mathbf{R}^n} T_{k+1}(x)\, dx - \int\limits_{\mathbf{R}^n} T_k(x)\, dx \right).$$

Die Folge $\left(\int\limits_{\mathbf{R}^n} T_{k+1}(x)\, dx \right)_k$ ist monoton wachsend und beschränkt, konvergiert also gegen eine Zahl I $\Rightarrow$ $\|f-T_j\| \le I - \int\limits_{\mathbf{R}^n} T_j\, dx$ $\Rightarrow 0 \le \lim\limits_{j\to\infty} \|f-T_j\|_1 \le \lim\limits_{j\to\infty} (I - \int T_j\, dx) = 0.$ q.e.d.

Als Folge dieses Satzes können wir das Verhältnis von Lebesgue-Integral und uneigentlichem Integral von Regelfunktionen genauer untersuchen. Dabei stützen wir uns auf das folgende

(3.19) ***Lemma:*** Sei $I \subseteq \mathbf{R}$ ein Intervall. Sei f: $I \to \mathbf{R}$ eine Regelfunktion mit $f(x) \ge 0$. Sei $(I_j)_j$ eine Folge von kompakten Teilintervallen $I_j \subseteq I$ mit $I_j \subseteq I_{j+1}$ und $I = \bigcup\limits_j I_j$. Dann existiert eine Folge $(T_j)_j$ von Treppenfunktionen auf $\mathbf{R}$ mit
1) $T_j(x) \le T_{j+1}(x)$, $x \in \mathbf{R}$
2) $f(x) - \frac{1}{j} \le T_j(x) \le f(x)$ für $x \in I_j$
3) $T_j(x) = 0$ für $x \in \mathbf{R} \setminus I_j$

Beweis:

Sei $j \in \mathbf{N}$. Dann existiert auf dem kompakten Intervall I_j eine Treppenfunktion S_j mit $f(x)-\frac{1}{j} \le S_j(x) \le f(x)$ für alle $x \in I_j$ (Approximationssatz (1.10)). Sei $\tilde{S}_j$ die triviale Fortsetzung von S_j auf $\mathbf{R}$. Die Funktion $T_j:=\max\{\tilde{S}_1, \dots, \tilde{S}_j\}$, $j \in \mathbf{N}$, leistet das Behauptete.

q.e.d.

(3.20) ***Satz:*** Sei $I:=(a,b)$ mit $-\infty\le a<b\le\infty$ ein offenes Intervall. Sei $f: I\to\mathbf{C}$ eine Regelfunktion auf I. f ist genau dann über I Lebesgue-integrierbar, wenn f über I uneigentlich absolut-integrierbar ist. In diesem Fall gilt: $\int_I f\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

Beweis:

Wegen (3.12) sei o.B.d.A. f reellwertig. Sei f über I Lebesgue-integrierbar. Seien $I_j:=[a_j,b_j]$, $j \in \mathbf{N}$, mit $I_j\subseteq I_{j+1}$, $I_j\subseteq I$ und $I=\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$.

Dann ist $|f|$ nach (3.13) über I Lebesgue-integrierbar.

Mit (3.17) $\Rightarrow \int_{a_j}^{b_j} |f(x)|\,dx = \int_{I_j} |f(x)|\,dx \le \int_I |f(x)|\,dx$ für $j \in \mathbf{N}$

$\Rightarrow \int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_I |f(x)|\,dx$.

Existiert umgekehrt das Regelintegral $\int_a^b |f(x)|\,dx$, dann existieren auch $\int_a^b f^+(x)\,dx$ und $\int_a^b f^-(x)\,dx$.

Also ist zu zeigen, daß f Lebesgue-integrierbar ist für den Spezialfall, daß $f\ge 0$.

Nach Lemma (3.19) wählen wir eine Folge $(T_j)_j$ von Treppenfunktionen auf $\mathbf{R}$ mit den drei angegebenen Eigenschaften. Da $T_j(x)\le f(x)$ und $f(x)-\frac{1}{j} \le T_j(x)$, ist auch die Folge $\left(\int_{\mathbf{R}} T_j\,dx\right)_j$ beschränkt mit $\int_{\mathbf{R}} T_j\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx$

$\overset{\text{Teil 1}}{\Rightarrow} \int_a^b f(x)\,dx \le \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbf{R}} T_j(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx$. q.e.d.

Beispiel:

f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ mit $f(x):=\begin{cases} 1 & \text{wenn } x=0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & \text{wenn } x\neq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ f ist über **R** uneigentlich integrierbar, da für R>1 $\int_1^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \cos 1 - \frac{\cos R}{R} - \int_1^R \frac{\cos x}{x^2}\,dx$

und $\lim_{R\to\infty}\left|\int_1^R \frac{\cos x}{x^2}\,dx\right| \leq \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x^2}\,dx < \infty$, so daß $\lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx + \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{\sin x}{x}\,dx < \infty$,

und da $\int_{-R}^0 \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^R \frac{\sin y}{y}\,dy$ und somit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{1} f(x)\,dx + \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}}\int_{-1}^{-\alpha} f(x)\,dx + \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}}\int_{\alpha}^{1} f(x)\,dx + \lim_{R\to\infty}\int_{1}^{R} f(x)\,dx$$

f ist nicht uneigentlich absolut-integrierbar, denn für $x \in (k\pi, (k+1)\pi)$ gilt:

$$\frac{1}{x} \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \quad\Rightarrow\quad \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \frac{1}{(k+1)\pi}\cdot\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin x|\,dx = \frac{2}{(k+1)\pi}$$

$$\Rightarrow \int_0^{(k+1)\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \frac{2}{\pi}\cdot\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j+1}.$$

Es folgen nun Anwendungen des kleinen Satzes von B. Levi zur mehrdimensionalen Integration. Dabei benutzen wir die folgende Sprechweise:

(3.21) ***Definition:*** Sei $\mathcal{F}(A, \overline{\mathbf{R}})$ die Menge aller Funktionen auf $A\subseteq\mathbf{R}^n$ in $\overline{\mathbf{R}}$.
Sei $\emptyset \neq \mathcal{F}_0 \subseteq F(A, \overline{\mathbf{R}})$ eine Teilmenge. Eine Funktion h: $A\to\overline{\mathbf{R}}$ mit $h(x):=\sup\{f(x): f\in\mathcal{F}_0\}$ für $x\in A$ heißt die **obere Einhüllende von $\mathcal{F}_0$**.

Ist $\mathcal{F}_0=\{f_j: j\in\mathbf{N}\}\subseteq\mathcal{F}(A,\overline{\mathbf{R}})$ eine abzählbare Teilmenge und ist g_j: $A\to\overline{\mathbf{R}}$ definiert durch $g_j(x):=\max\{f_1(x),\ldots,f_j(x)\}$ für $x\in A$, so gilt $g_j(x)\leq g_{j+1}(x)$ für $x\in A$ und $j\in\mathbf{N}$.
$h(x)=\lim_{j\to\infty} g_j(x)$ für $x\in A$ ist dann die obere Einhüllende zu $\mathcal{F}_0$.

(3.22) ***Lemma:*** Sei $U\subseteq\mathbf{R}^n$ offen. Sei f: $U\to\mathbf{R}$ stetig mit $f(x)\geq 0$ für $x\in U$. Dann gibt es eine Folge $(T_j)_j$ von Treppenfunktionen T_j auf $\mathbf{R}^n$ mit $T_j(x)\leq T_{j+1}(x)$, $x\in\mathbf{R}^n$, $j\in\mathbf{N}$, so daß $f_U(x)=\lim_{j\to\infty}T_j(x)$ für $x\in\mathbf{R}^n$, f_U triviale Fortsetzung von f.

Beweis:

Sei $a \in \mathbf{R^n}$, $r>0$, sei $W_r(a):= [a_1-r,a_1+r] \times ... \times [a_n-r,a_n+r]$ ein achsenparalleler abgeschlossener Würfel. $W_r(a)$ heiße rational, wenn $a \in \mathbf{Q^n}$, $r \in \mathbf{Q}$.
Sei $\mathscr{T}_0$ die Menge aller Treppenfunktionen auf $\mathbf{R^n}$ der Gestalt $T_{r,a} = m_{r,a} \cdot \mathbf{1}_{W_r(a)}$, wobei $W_r(a) \subseteq U$ ein rationaler Würfel und $m_{r,a} = \min\{f(x): x \in W_r(a)\}$.

Zu zeigen: Für alle $T \in \mathscr{T}_0$ gilt $T(x) \le f_k(x)$, $x \in \mathbf{R^n}$, denn:
$x \in \mathbf{R^n}$, $x \notin U$, $\Rightarrow T_{r,a}(x) = 0 \le f_U(x)$, da $W_r(a) \subseteq U$.
Ist $x \in U \Rightarrow$ für alle rationalen Würfel $W_r(a) \subseteq U$.
$T_{r,a} = m_{r,a} \cdot \mathbf{1}_{W_r(a)}(x) \le f(x) \le f_U(x)$.
f ist stetig,, zu $x \in \mathbf{R^n}$ und $\varepsilon>0$ existiert $\delta>0$ mit $\delta \in \mathbf{Q}$, so daß $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ für alle
$y \in K_\delta(x)=\{z \in \mathbf{R^n}: \|x-z\|_2<\delta\}$.

Zu zeigen: $K_\delta(x)$ enthält einen rationalen Würfel $W_r(a)$: denn zu $x \in \mathbf{R^n}$ wähle $a \in \mathbf{Q^n}$ mit
$|x_j-a_j| < \frac{\delta}{2\sqrt{n}}$; $j \in \{1,...,n\}$
$\Rightarrow \|x-a\|_2<\frac{\delta}{2}$. Sei $y \in W_{r_0}(a)$
$\Rightarrow \|x-y\|_2 \le \|x-a\|_2 + \|a-y\|_2 < \delta$ wenn $r_0:=\frac{\delta}{4\sqrt{n}}$
Da für $r_1 \in \mathbf{Q}$ mit $r_1<r_0:=\frac{\delta}{4\sqrt{n}}$ stets $x \in W_{r_1}(a) \subseteq K_\delta(x) \subseteq U$,
gilt für alle $y \in W_{r_1}(a)$ $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$
$\Rightarrow f(x)-\varepsilon < f(y)$ für alle $y \in W_{r_1}(a) \Rightarrow f(x)-\varepsilon \le m_{r_1,a}$
$\Rightarrow f(x)-\varepsilon \le m_{r_1,a} \cdot \mathbf{1}_{W_{r_0}(a)} = T_{r_1,a}$
$\Rightarrow f_U(x)-\varepsilon \le T_{r_1,a}(x) \le f_U(x)$, $x \in \mathbf{R^n}$
Wegen $T(x) \le f_U(x)$ für alle $T \in \mathscr{T}_0$ folgt dann $f_U=\sup\{T: T \in \mathscr{T}_0\}$, also ist f_U obere Einhüllende einer abzählbaren Teilmenge von Treppenfunktionen. Nach den Bemerkungen im Anschluß an Definition (3.21) folgt deshalb die Behauptung. q.e.d.

(3.23) ***Satz:*** Sei A eine offene (oder abgeschlossene) Teilmenge, die beschränkt ist.
Sei $f: A \to \mathbf{C}$ stetig und beschränkt. Dann ist f über A Lebesgue-integrierbar.

Beweis:

o.B.d.A. gelte $f(x) \ge 0$:
1. Fall:
Sei A offen und beschränkt, sei f_A triviale Fortsetzung von f. Nach Lemma (3.22) existiert eine Folge $(T_j)_j$ von Treppenfunktionen T_j auf $\mathbf{R^n}$ mit $T_j \le T_{j+1}$ und $f_A(x)=\lim_{j\to\infty} T_j(x)$, $x \in \mathbf{R^n}$.
Wähle einen Quader $Q \subseteq \mathbf{R^n}$ mit $A \subseteq Q$ und eine obere Schranke M für f.
Dann gilt: $T_j \le M \cdot \mathbf{1}_Q$
$\Rightarrow \int_{\mathbf{R^n}} T_j \, dx \le M \cdot V_n(Q)$; $j \in \mathbf{N}$
$\Rightarrow$ B. Levi (3.18) liefert, daß f_A über $\mathbf{R^n}$ Lebesgue-integrierbar ist.

2. Fall:
Sei A abgeschlossen und beschränkt, d.h. kompakt. f ist stetig auf A, also auch beschränkt auf A. Tietzes Fortsetzungssatz liefert eine Funktion $\tilde{f}: \mathbf{R^n} \to \mathbf{C}$, so daß $\tilde{f}$ stetig und beschränkt auf $\mathbf{R^n}$ ist mit $\tilde{f}(x)=f(x)$ für $x \in A$. Wähle offenen Quader $Q \subseteq \mathbf{R^n}$ mit $A \subseteq Q$, wende 1. Fall auf Q an. $\tilde{f}$ ist auf Q beschränkt
$\Rightarrow$ für die triviale Fortsetzung $f_A = \tilde{f}_Q - \tilde{f}_Q \cdot \mathbf{1}_{Q\setminus A}$ gilt: $\tilde{f}_Q$ und $\mathbf{1}_{Q\setminus A}$ sind nach dem 1. Fall Lebesgue-integrierbar, also auch f_A.
q.e.d.

Im Beweis dieses Satzes wurde von Satz (3.18) (B. Levi) nur die Tatsache der Integrierbarkeit der Grenzfunktion ausgenutzt. Durch Kombination der Formel $\int_{\mathbf{R^n}} f(x)\,dx = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbf{R^n}} T_j(x)\,dx$ mit dem Satz von Fubini für Treppenfunktionen (Korollar (3.6)) erhalten wir auch ein Reduktionsverfahren zur Berechnung des Integrals.

(3.24) ***Satz:*** **(„kleiner" Satz von Fubini)**:
Sei $A \subseteq \mathbf{R^n} \times \mathbf{R^m}$ eine offene und beschränkte Teilmenge (bzw. eine kompakte Teilmenge). Sei $f: A \to \mathbf{C}$ stetig und beschränkt. Dann gilt:

1) für jedes $y \in \mathbf{R^m}$ mit $\emptyset \neq A_y := \{x \in \mathbf{R^n} : (x,y) \in A\}$ ist $f_y: A_y \subseteq \mathbf{R^n} \to \mathbf{C}$ mit $f_y(x)=f(x,y)$ über A_y Lebesgue-integrierbar. Ferner ist die Funktion $F: \mathbf{R^m} \to \mathbf{C}$ mit
$$F(y) := \begin{cases} \int_{A_y} f(x,y)\,dx & \text{für } A_y \neq \emptyset \\ 0 & \text{für } A_y = \emptyset \end{cases}$$
Lebesgue-integrierbar auf $\mathbf{R^m}$, und es gilt:
$$\int_A f(x,y)\,d(x,y) = \int_{\mathbf{R^m}} F(y)\,dy = \int_{\mathbf{R^m}} \left(\int_{A_y \subseteq \mathbf{R^n}} f(x,y)\,dx \right) dy$$

2) für jedes $x \in \mathbf{R^n}$ mit $\emptyset \neq A_x := \{y \in \mathbf{R^m} : (x,y) \in A\}$ ist $f_x: A_x \subseteq \mathbf{R^m} \to \mathbf{C}$ mit $f_x(y)=f(x,y)$ über A_x Lebesgue-integrierbar. Ferner ist die Funktion $G: \mathbf{R^n} \to \mathbf{C}$ mit
$$G(x) := \begin{cases} \int_{A_x} f(x,y)\,dy & \text{für } A_x \neq \emptyset \\ 0 & \text{für } A_x = \emptyset \end{cases}$$
über $\mathbf{R^n}$ Lebesgue-integrierbar. Es gilt:
$$\int_A f(x,y)\,d(x,y) = \int_{\mathbf{R^n}} G(x)\,dx = \int_{\mathbf{R^n}} \left(\int_{A_x \subseteq \mathbf{R^m}} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Beweis:

Für A offen und beschränkt: o.B.d.A.: $f \geq 0$
Sei f_A triviale Fortsetzung von f, dann existiert $(T_j)_j$, T_j Treppenfunktion auf $\mathbf{R^n} \times \mathbf{R^m}$ mit $T_j \leq T_{j+1}$ und $f_A(x,y) = \lim_{j\to\infty} T_j(x,y)$ für $(x,y) \in \mathbf{R^n} \times \mathbf{R^m}$. Sei $y \in \mathbf{R^m}$, die Treppenfunktionen $T_{j,y}$ mit $T_{j,y}(x) = T_j(x,y)$ bilden eine monoton wachsende Folge mit $\lim_{j\to\infty} T_{j,y}(x) = \lim_{j\to\infty} T_j(x,y) = f_A(x,y)$,

und die Folge $\left(\int_{\mathbf{R^n}} T_{j,y}(x)\,dx \right)_j$ ist beschränkt

$\Rightarrow$ F(y) = $\lim\limits_{j\to\infty} \int\limits_{\mathbf{R}^n} \mathrm{T}_{j,y}(x)\, dx$

Zu zeigen: F(y) ist Lebesgue-integrierbar. Mit Hilfe von Satz (3.23):
S_j: $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ mit $S_j(y) := \int\limits_{\mathbf{R}^n} \mathrm{T}_{j,y}(x)\, dx$ sind Treppenfunktionen auf $\mathbf{R}^m$, und $(S_j)_j$ konvergiert monoton gegen F.

Ferner ist $\left(\int\limits_{\mathbf{R}^m} \mathrm{S}_j(y)\, dy \right)_j$ beschränkt.

Satz von Fubini für Treppenfunktionen und weil $T_{j,y} \le f_A$, liefert nämlich

$$\int\limits_{\mathbf{R}^m} \mathrm{S}_j(y)\, dy = \int\limits_{\mathbf{R}^m} \left(\int\limits_{\mathbf{R}^n} \mathrm{T}_{j,y}(x)\, dx \right) dy = \int\limits_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m} \mathrm{T}_j(x,y)\, d(x,y) \le \int\limits_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m} \mathrm{f}_A(x,y)\, d(x,y)$$

B. Levi liefert, daß F Lebesgue-integrierbar ist mit den angegebenen Eigenschaften.

q.e.d.

Beispiele:

1) f: $[a,b]\times[c,d] \to \mathbf{R}$ sei stetig auf $[a,b]\times[c,d] =: A \subseteq \mathbf{R}^2$.

$$\int\limits_A f(x,y)\, d(x,y) = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\, dy \right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\, dx \right) dy$$

2) $A = [1,2]\times[0,1]$ $\qquad f(x_1,x_2) := \dfrac{1}{1 + x_1^2 x_2}$

➔ für $x_2 \in [0,1]$:

$$F(x_2) = \int\limits_1^2 \frac{1}{1 + x_1^2 x_2}\, dx_1$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{wenn } x_2 = 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x_2}} \cdot \displaystyle\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x_2}}{1 + \left(\sqrt{x_2}\, x_1\right)^2}\, dx_1 = \dfrac{1}{\sqrt{x_2}} \cdot \left(\arctan(2\sqrt{x_2}) - \arctan(\sqrt{x_2}) \right) & \text{wenn } x_2 \ne 0 \end{cases}$$

$F(0) = 1 = \lim\limits_{x_2 \to 0} \dfrac{\arctan(2\sqrt{x_2}) - \arctan(\sqrt{x_2})}{\sqrt{x_2}}$, daher ist F auf [0,1] stetig

$\Rightarrow \int\limits_A f(x_1,x_2)\, d(x_1,x_2) = \int\limits_0^1 F(x_2)\, dx_2$ $\qquad$ mit Aufwand zu berechnen !!!

➔ für $x_1 \in [1,2]$:

$$G(x_1) = \int\limits_0^1 \frac{1}{1 + x_1^2 x_2}\, dx_2 = \frac{1}{x_1^2} \cdot \int\limits_0^1 \frac{x_1^2}{1 + x_1^2 x_2}\, dx_2 = \frac{1}{x_1^2} \cdot \left[\ln(1 + x_1^2 x_2) \right]_{x_2=0}^{x_2=1} = \frac{1}{x_1^2} \cdot \ln(1 + x_1^2)$$

$$\Rightarrow \int\limits_A f(x_1,x_2)\, d(x_1,x_2) = \int\limits_1^2 G(x_1)\, dx_1 = \int\limits_1^2 \frac{\ln(1 + x_1^2)}{x_1^2}\, dx_1 = \ldots = \ln\frac{2}{\sqrt{5}} + 2 \cdot \arctan 2 - \frac{\pi}{2}$$

3) Sei $A \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$ eine Teilmenge, für $y \in \mathbf{R}^{n-1}$ $(y = (y_1,...,y_{n-1}))$ sei
$A_y=\{x \in \mathbf{R}: (x,y) = (x;y_1,...,y_{n-1}) \in A\}$ ein Intervall oder leer. Dann heißt A **einfach bzgl. $y = (y_1,...,y_{n-1})$ bzw. Normalbereich bzgl. $y = (y_1,...,y_{n-1})$**
Sei A kompakt, sei $B:=\{y \in \mathbf{R}^{n-1}: A_y \neq \emptyset\}$, dann gilt für $y \in B$: $A_y=[x_1(y),x_2(y)]$

$$\int_A f(x,y)\, d(x,y_1,...,y_{n-1}) = \int_B \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\, dx \right) d(y_1,...,y_{n-1})$$

4) $A=\overline{K_r(0)} \subseteq \mathbf{R}^2$, $\quad \overline{K_r(0)} = (x,y)\colon x^2+y^2 \le r^2\}$
$x^2 + y^2 \le r^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 \le r^2 - y^2$, wenn $|y| \le r$
$\Rightarrow A_y=\{x \in \mathbf{R}: (x,y) \in A\}=\{x \in \mathbf{R}: x^2+y^2 \le r^2\}$
$A_y=\left[-\sqrt{r^2 - y^2}, \sqrt{r^2 - y^2}\right]$ für $|y| \le r$

$$\Rightarrow \int_A f(x,y)\, d(x,y) = \int_{-r}^{r} \left(\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} f(x,y)\, dx \right) dy$$

5) Sei A der im 1. und 4. Oktanden gelegene Teil einer Vollkugel mit Radius 3. Sei $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ gegeben durch $f(x_1,x_2,x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$
Berechne $\int_A f(x_1,x_2,x_3)\, d(x_1,x_2,x_3)$
$A=\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3: x_1^2+x_2^2+x_3^2 \le 9,\ x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0\}$
$\Rightarrow 0 \le x_3 \le \sqrt{9 - (x_1^2 + x_2^2)}$

Mit $B=\{(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2: x_1^2+x_2^2 \le 9\}$ folgt:

$$\int_A x_1 \cdot x_2 \cdot x_3\, d(x_1,x_2,x_3) = \int_B \left(\int_0^{\sqrt{9-(x_1^2+x_2^2)}} x_1 \cdot x_2 \cdot x_3\, dx_3 \right) d(x_1,x_2)$$

$$= \int_B x_1 \cdot x_2 \cdot \frac{9 - (x_1^2 + x_2^2)}{2}\, d(x_1,x_2) = \int_{-3}^{3} \left(\int_0^{\sqrt{9-x_2^2}} x_1 \cdot x_2 \cdot \frac{9 - (x_1^2 + x_2^2)}{2}\, dx_1 \right) dx_2$$

6) Volumen des Eikörpers:
$V_{ei}=\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3: \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} \le 1\}$ mit $a>0, b>0, c>0$
$V_{ei} = 2 \cdot V_{ob}$, wobei $V_{ob}=\{(x_1,x_2,x_3) \in V_{ei}: x_3 \ge 0\}$

$$0 \le x_3 \le c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \right)} =: f(x_1,x_2)$$

$V_{ob}=\int_B f(x_1,x_2)\, d(x_1,x_2)$, wobei $B:=\{(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2: \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \le 1\}$

$$V_{ob}=\int_B c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \right)}\, d(x_1,x_2) = \int_{-b}^{b} \left(\int_{-a\cdot\sqrt{1-\frac{x_2^2}{b^2}}}^{a\cdot\sqrt{1-\frac{x_2^2}{b^2}}} c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \right)}\, dx_1 \right) dx_2$$

$$= \ldots = \frac{2}{3} \pi \cdot a \cdot b \cdot c$$

$V_{ei}=a \cdot b \cdot c \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi$. Dieses Integral läßt sich mit Hilfe der Substitutionsregel sehr viel einfacher berechnen.

§ 3 Meßbarkeit von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, Mengen vom Lebesgue-Maß 0

Das Lebesgue-Integral versetzt uns jetzt in die Lage, einen sehr allgemeinen Inhaltsbegriff einzuführen, der dem Flächeninhalt bzw. Volumen von Punktmengen in der Ebene bzw. im Raum entspricht, wenn diese Mengen in endlich viele Dreiecke bzw. Tetraeder zerlegt werden können.

(3.25) ***Definition:*** Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbf{R}^n$ heißt **Lebesgue-meßbar** (kurz: **meßbar**), wenn die Funktion $\mathbf{1}: A \to \mathbf{R}$ mit $\mathbf{1}(x)=1$, $x \in A$, Lebesgue-integrierbar ist.
Die Zahl $V_n(A) = \int_A \mathbf{1}\, dx = \int_{\mathbf{R}^n} \mathbf{1}_A\, dx$ heißt dann das **n-dimensionale Volumen von A** (oder das **Lebesgue-Maß von A**). Die leere Menge habe das Lebesgue-Maß 0.

Ist A=Q ein Quader der $\mathbf{R}^n \overset{(3.10)}{\Rightarrow} V_n(A)=V_n(Q)$ [vgl.(3.1)]

(3.26) ***Satz:*** (**Eigenschaften des Lebesgue-Maßes**):
Sind $A,B \subseteq \mathbf{R}^n$ Lebesgue-meßbar und sind $A_1,...,A_m \subseteq \mathbf{R}^n$ Lebesgue-meßbar.
Dann gilt:
1) $A\cup B$ und $A\cap B$ sind Lebesgue-meßbar und es gilt
$V_n(A\cup B)=V_n(A)+V_n(B)-V_n(A\cap B)$; insbesondere gilt $V_n(A\cup B)=V_n(A)+V_n(B)$, wenn $V_n(A\cap B)=0$
2) $V_n(A)\le V_n(B)$ wenn $A\subseteq B$
3) $A_1 \cup ... \cup A_m$ ist Lebesgue-meßbar mit $V_n(A)=\sum_{j=1}^{m} V_n(A_j)$, wenn $A=\bigcup_{j=1}^{m} A_j$ und
$V_n(A_i \cap A_j) = 0$ für $i\neq j$

Wir werden sehen, daß die Additivität des Lebesgue-Maßes auf abzählbar viele Mengen mit $\sum_{j=1}^{\infty} V_n(A_j) < \infty$ ausgedehnt werden kann (σ-Additivität des Lebesgue-Maßes).
Welche Mengen sind denn Lebesgue-meßbar? Unmittelbar aus (3.23) folgt

(3.27) ***Satz:*** Jede offene (bzw. abgeschlossene) und beschränkte Teilmenge des $\mathbf{R}^n$ ist Lebesgue-meßbar.

Wie lassen sich Volumina von Teilmengen $A\subseteq\mathbf{R}^n$ mit Hilfe von Volumina bekannter Mengen des $\mathbf{R}^n$ berechnen? Der kleine Satz von Fubini liefert ein nützliches Rekursionsverfahren zur Berechnung von Volumina, es kann auf folgende Weise formuliert werden:

(3.28) ***Korollar:*** Sei $A\subseteq\mathbf{R}^{n+m}$ eine offene (bzw. abgeschlossene) und beschränkte Teilmenge.
Dann gilt: $V_{n+m}(A)=\int_{\mathbf{R}^m} V_n(A_y)\, dy$, wobei $A_y:=\{x \in \mathbf{R}^n: (x,y) \in A\}$.

Insbesondere gilt das folgende nach B. Cavalieri benannte Prinzip

(3.29) ***Korollar:*** (**Prinzip von Cavalieri**):
Zwei kompakte Mengen A,B $\subseteq \mathbf{R}^{n+m}$ haben dasselbe (n+m)-dimensionale Volumen, wenn für jedes y $\in \mathbf{R}^m$ die Schnittmengen $A_y:=\{x \in \mathbf{R}^n: (x,y) \in A\}$ und $B_y:=\{x \in \mathbf{R}^n: (x,y) \in B\}$ dasselbe n-dimensionale Volumen besitzen.

Wie das Volumen einer kompakten oder offenen und beschränkten Menge mit Hilfe von Volumina von Quadern berechnet werden kann, zeigt der folgende Satz. Dabei erinnern wir uns, daß eine Menge, die Vereinigung endlich vieler Quader ist, eine Figur genannt wird (Definition (3.1)).

(3.30) ***Satz:*** Sei $M\subseteq\mathbf{R}^n$ eine Teilmenge. Dann gilt:

1) Ist M offen und Lebesgue-meßbar, so gibt es eine Folge $(A_j)_j$ von Figuren mit $A_j\subseteq A_{j+1}$ und $M=\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Ist $(B_j)_j$ eine Folge von Figuren mit $B_j\subseteq B_{j+1}$ und $M=\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, dann gilt: $\sup_{j\in\mathbf{N}} V_n(B_j) = \lim_{j\to\infty} V_n(B_j) = V_n(M)$

2) Ist M kompakt, so gibt es eine Folge $(A_j)_j$ von Figuren mit $A_{j+1}\subseteq A_j$ und $M=\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$.

   Für jede Folge $(B_j)_j$ von Figuren mit $B_{j+1}\subseteq B_j$ und $M=\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j$ gilt: $V_n(M) = \lim_{j\to\infty} V_n(B_j) = \inf_{j\in\mathbf{N}} V_n(B_j)$

<u>Beweis:</u>

ad 1)
Wähle rationale Würfel, die in M enthalten sind, so erhält man eine abzählbare Folge von Quadern Q_j mit $M=\bigcup_j Q_j$; setze $A_k:=\bigcup_{j=1}^{k} Q_j \Rightarrow A_k\subseteq A_{k+1}$ und $M=\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

Sei $(B_j)_j$ eine Folge von Figuren mit $B_j\subseteq B_{j+1}$, $M=\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$.

$\mathbf{1}_{B_j}$ sind monoton wachsend und konvergieren gegen $\mathbf{1}_M$, $V_k(B_j) = \int_{\mathbf{R}^n} \mathbf{1}_{B_j}\, dx$

Da M Lebesgue-meßbar ist, folgt aus $B_j\subseteq M$: $\mathbf{1}_{B_j} \le \mathbf{1}_M$ und $V_n(B_j) \le V_n(M)$

$\Rightarrow \left(\int_{\mathbf{R}^n} \mathbf{1}_{B_j}\, dx\right)_j$ ist beschränkt.

Der „kleine" Beppo Levi liefert: $\mathbf{1}_M = \lim_{j\to\infty} \mathbf{1}_{B_j}$ ist Lebesgue-integrierbar mit

$V_n(M) = \int_{\mathbf{R}^n} \mathbf{1}_M\, dx = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbf{R}^n} \mathbf{1}_{B_j}\, dx = \lim_{j\to\infty} V_n(B_j)$

ad 2)
Zu M wähle offene Würfel $W \supseteq M$, wähle eine Folge von Figuren B_k mit $B_k \subseteq B_{k+1}$ und
$\bigcup_k B_k = W \setminus M$; setze $A_k := W \setminus B_k$, $k \in \mathbf{N}$

$\Rightarrow A_{k+1} = W \setminus B_{k+1} \subseteq W \setminus B_k = A_k$

und $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_k W \setminus B_k = W \setminus \bigcup_k B_k = M$ q.e.d.

Beispiele:

1) Volumen eines Zylinders im $\mathbf{R}^n$:
Sei $B \subseteq \mathbf{R}^{n-1}$ eine kompakte Teilmenge, sei $h>0$. Die Menge $Z(B,h) := B \times [0,h] \subseteq \mathbf{R}^n$ heißt **Zylinder zur Basis B mit der Höhe h**.
Sei $y \in [0,h]$, $Z(B,h)_y := \{x \in \mathbf{R}^{n-1}: (x,y) \in Z(B,h)\} = B$
$\overset{\text{Cavalieri}}{\Rightarrow} V_n(Z(B,h)) = h \cdot V_{n-1}(B)$

2) Volumen eines Kegels im $\mathbf{R}^n$:
Sei $B \subseteq \mathbf{R}^{n-1}$ eine kompakte Teilmenge, sei $h>0$. Die Menge
$K(B,h) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^n: y \in [0,h], x \in \left(1 - \frac{y}{h}\right) \cdot B\}$ heißt **Kegel zur Basis B mit der Höhe h**.

Sei $y \in [0,h] \Rightarrow K(B,h)_y = \{x \in \mathbf{R}^{n-1}: (x,y) \in K(B,h)\} = \left(1 - \frac{y}{h}\right) \cdot B$

$\Rightarrow V_{n-1}(K(B,h)_y) = \left(1 - \frac{y}{h}\right)^{n-1} \cdot V_{n-1}(B)$

$$V_n(K(B,h)) = \int_0^h \left(1 - \frac{y}{h}\right)^{n-1} \cdot V_{n-1}(B)\, dy = \left[-\frac{h}{n} \cdot \left(1 - \frac{y}{h}\right)^n \right]_0^h \cdot V_{n-1}(B) = \ldots$$

3) Volumen eines Standardsimplex im $\mathbf{R}^n$:
$\Delta^n = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbf{R}^n: x_j \geq 0,\ j \in \{1,\ldots,n\},\ x_1+x_2+\ldots+x_n \leq 1\}$
n=1: $\Delta^1 = [0,1]$
n=2: $\Delta^2 = \{(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2: x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1+x_2 \leq 1\}$
$V_1(\Delta^1) = 1$ / $V_2(\Delta^2) = \frac{1}{2}$, da für $x_2 \in [0,1]$: $\Delta^2_{x_2} = \{x_1 \in \mathbf{R}: x_1 \geq 0,\ x_1+x_2 \leq 1\} = [0,1-x_2]$

$\Rightarrow V_2(\Delta^2) = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x_2} dx_1 \right) dx_2 = \frac{1}{2}$

per Induktion: $V_n(\Delta^n) = \frac{1}{n!}$

4) Cantorsches Diskontinuum C:
$A_0 = \bigcup_{k \in \mathbf{N}_0} [2k, 2k+1]$

$A_n = \frac{1}{3^n} A_0$, $n \in \mathbf{N}$

$C_n = [0,1] \cap A_0 \cap A_1 \cap \ldots \cap A_n$

C_n ist die Vereinigung von 2^n kompakten Intervallen der Länge $\frac{1}{3^n}$.

C_{n+1} entsteht aus C_n durch Herausnahme der offenen mittleren Dritteln aus allen 2^n Intervallen, die C_n zusammensetzen.

$C:=\bigcap_n C_n$ **Cantorsches Diskontinuum**

$V_1(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow V_1(C) = \lim_{n\to\infty} V_1(C_n) = 0$

Eine besondere Bedeutung für den weiteren Ausbau der Integrationstheorie haben diejenigen Mengen im $\mathbf{R}^n$, deren Lebesgue-Maß Null ist:

(3.31) ***Definition:*** Eine Teilmenge $N\subseteq\mathbf{R}^n$ heißt eine **Lebesgue-Nullmenge** (kurz: **Nullmenge**) oder **hat das Lebesgue-Maß 0**, wenn N Lebesgue-meßbar ist und $V_n(N)=0$.

Wir geben hier zwei Charakterisierungen von Lebesgue-Nullmengen, wobei eine der beiden besonders zweckmäßig für Beweise ist und die andere den unmittelbaren Zusammenhang zu Definition (1.43) bringt. Zu den Charakterisierungen benötigen wir das folgende

(3.32) ***Lemma:*** Sei $U\subseteq\mathbf{R}^n$ eine offene Menge. Dann gibt es kompakte Würfel W_k, $k \in \mathbf{N}$, die höchstens Randpunkte gemeinsam haben, so daß $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k$. Ist U Lebesgue-meßbar, dann gilt $V_n(U) = \sum_{j=1}^{\infty} V_n(W_j)$.

<u>Beweis:</u>

Sei $k \in \mathbf{N}$. $\mathcal{W}_k$ sei die Gesamtheit der Würfel $W = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$ mit

$I_j := \left[\frac{m_j}{2^k}, \frac{m_j+1}{2^k}\right]$, $m_j \in \mathbf{Z}$.

Für l>k schneiden sich zwei Würfel $W \in \mathcal{W}_k$ und $W' \in \mathcal{W}_k$ entweder nur in den Randpunkten, oder es gilt $W'\subseteq W$.

Wir wählen Würfel induktiv aus: $\mathcal{W}_1^* = \{W \in \mathcal{W}_1 : W\subseteq U\}$, für k>1 sei $\mathcal{W}_k^*$ die Menge aller derjenigen Würfel aus $\mathcal{W}_k$, die in U enthalten sind, aber in keinem der Würfel aus $\mathcal{W}_i^*$, i<k.

Eine gesuchte Menge von Würfeln ist dann die Vereinigung $\mathcal{W} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{W}_k^*$.

Ist U Lebesgue-meßbar, so betrachten wir mit Hilfe einer Abzählung $W_1, W_2, ...$ von $\mathcal{W}$ Figuren $A_j = W_1 \cup W_2 \cup ... \cup W_j \Rightarrow A_j$ bilden eine Ausschöpfung von U $\left(\bigcup_j A_j = U\right)$, außerdem gilt: $A_j\subseteq A_{j+1}$

$$\overset{(3.30)}{\Rightarrow} V_n(U) = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{j} V_n(W_k) = \sum_{k=1}^{\infty} V_n(W_k).$$ q.e.d.

Wir kommen zu den angekündigten Charakterisierungen:

(3.33) ***Satz:*** Sei $N \subseteq \mathbf{R}^n$ eine Teilmenge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1) N ist eine Lebesgue-Nullmenge des $\mathbf{R}^n$
2) $\|\mathbf{1}_N\|_1 = 0$
3) zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es abzählbar viele Quader $Q_j \subseteq \mathbf{R}^n$, $j \in \mathbf{N}$, mit $N \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ und $\sum_{j=1}^{\infty} V_n(Q_j) < \varepsilon$ (vgl. (1.43))

Beweis:

1) $\Rightarrow$ 2):
$\|\mathbf{1}_N\|_1 = \int_{\mathbf{R}_n} \mathbf{1}_N \, dx = V_n(N) = 0$

2) $\Rightarrow$ 1)
Wir betrachten die Treppenfunktionen T_k: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ mit $T_k(x)=0$, $k \in \mathbf{N}$
$\Rightarrow 0 = \|\mathbf{1}_N\|_1 = \lim_{k\to\infty} \|\mathbf{1}_N - T_k\|_1$
$\Rightarrow \mathbf{1}_N$ ist Lebesgue-integrierbar
$\Rightarrow$ N ist Lebesgue-meßbar mit $V_n(N) = \int_N \mathbf{1} \, dx = \int_{\mathbf{R}^n} \mathbf{1}_N \, dx = \lim_{k\to\infty} T_k(x) = 0$

2) $\Rightarrow$ 3)
$0 = \|\mathbf{1}_N\|_1 \Rightarrow 0 = \|2\cdot\mathbf{1}_N\|_1$. Sei $\varepsilon>0$, dann gibt es eine Hüllreihe für $f=2\cdot\mathbf{1}_N$, etwa $\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \cdot \mathbf{1}_{Q_j}$,

wobei $c_j \geq 0$ und Q_j offene Quader des $\mathbf{R}^n$ mit dem Inhalt $I(\varphi) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \cdot V_n(Q_j) < \varepsilon$.

Für $m \in \mathbf{N}$ sei $T_m = \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot \mathbf{1}_{Q_j}$, T_m ist Treppenfunktion mit $T_m \leq T_{m+1}$.

Die Folge $\left(\int_{\mathbf{R}^n} T_m(x) \, dx \right)_{m\in\mathbf{N}}$ ist nach oben beschränkt durch ε, also ist $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \cdot \mathbf{1}_{Q_j}(x)$ Lebesgue-integrierbar auf $\mathbf{R}^n$. Sei $U := \{x \in \mathbf{R}^n : \varphi(x) > 1\} \Rightarrow N \subseteq U$, außerdem ist U offen.

Wir zeigen: U ist Lebesgue-meßbar mit $V_n(U) < \varepsilon$.
Nach (3.22) ist $\mathbf{1}_U$ Grenzfunktion einer monoton wachsenden Folge $(S_j)_j$ von Treppenfunktionen mit $S_j \leq \mathbf{1}_U \leq \varphi$
$\Rightarrow \int_{\mathbf{R}^n} S_j(x) \, dx \leq \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x) \, dx \leq \varepsilon$.
Der kleine Satz von B. Levi (3.18) liefert, daß $\mathbf{1}_U$ Lebesgue-integrierbar ist mit $V_n(U) \leq \int_{\mathbf{R}^n} \mathbf{1}_U \, dx < \varepsilon$.
Nach Lemma (3.32) läßt sich U durch kompakte Würfel überdecken:

U $=\bigcup_{j=1}^{\infty} W_j$ und $V_n(U) = \sum_{j=1}^{\infty} V_n(W_j)$

3) $\Rightarrow$ 2)

Sei $\varepsilon>0$, es gebe Quader wie in 3) angegeben $\Rightarrow \|\mathbf{1}_N\|_1 = 0$, da $N \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$,

$\mathbf{1}_N \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{1}_{Q_j}$, sowie $\|\mathbf{1}_N\|_1 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left\|\mathbf{1}_{Q_j}\right\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} V_n(Q_j) < \varepsilon$. q.e.d.

Im eindimensionalen Fall stimmt die Charakterisierung einer Lebesgue-Nullmenge $N\subseteq\mathbf{R}$ mit der Definition (1.43) überein. Unmittelbar aus dem Beweis dieses Satzes ergibt sich das folgende Korollar:

(3.34) ***Korollar:*** Ist $N\subseteq\mathbf{R}^n$ eine Lebesgue-Nullmenge, so gibt es zu jedem $\varepsilon>0$ eine Lebesgue-meßbare offene Menge $U\subseteq\mathbf{R}^n$ mit $N\subseteq U$ und $V_n(U)< \varepsilon$.

Als Anwendung erhalten wir außerdem

(3.35) ***Satz:*** Sei $K\subseteq\mathbf{R}^n$ eine kompakte Teilmenge, sei f: $K\rightarrow\mathbf{C}$ eine beschränkte Funktion, die auf K \ N stetig ist, wobei $N\subseteq K\subseteq\mathbf{R}^n$ eine Lebesgue-Nullmenge ist. Dann ist f auf K Lebesgue-integrierbar.

<u>Beweis:</u>

Da f auf K beschränkt ist, gibt es ein M>0 mit $|f(x)|\leq M$ für alle $x \in K$. Sei $\varepsilon>0$, nach Korollar (3.34) gibt es zu N eine Lebesgue-meßbare Menge $U\subseteq\mathbf{R}^n$ mit $N\subseteq U$ und $M\cdot V_n(U)<\varepsilon$. Da f auf K \ U stetig ist, ist f auf K \ U Lebesgue-integrierbar (Satz (3.23)). Es gibt daher eine Treppenfunktion T: $\mathbf{R}^n\rightarrow\mathbf{C}$ mit $\|f|_{K\setminus U}-T\|_1 < \varepsilon$. Da außerdem $\|f|_U\|_1 \leq M\cdot V_n(U) < \varepsilon$, erhalten wir $\|f_K-T\|_1 \leq \|f|_{K\setminus U}-T\|_1 + \|f|_U\|_1 < 2\cdot\varepsilon$. F_K ist somit Lebesgue-integrierbar. q.e.d.

Im Fall n=1 sind zum Beispiel alle Regelfunktionen auf kompakten Intervallen Funktionen, die die Voraussetzungen von Satz (3.35) erfüllen. Welche Mengen des $\mathbf{R}^n$ sind denn nun Lebesgue-Nullmengen? Das folgende Lemma und die anschließenden Beispiele geben einen Einblick.

(3.36) ***Lemma:***

1) Jede Teilmenge einer Lebesgue-Nullmenge ist eine Lebesgue-Nullmenge
2) Die Vereinigung abzählbar vieler Lebesgue-Nullmengen ist eine Lebesgue-Nullmenge

<u>Beweis:</u>

ad 1) Aus $M\subseteq N$ folgt: $\mathbf{1}_M\leq\mathbf{1}_N$ und damit $\|\mathbf{1}_M\|_1\leq\|\mathbf{1}_N\|_1 = 0$

ad 2) Aus $N=\bigcup_j N_j$ folgt $\mathbf{1}_N \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{1}_{N_j}$ und damit $\|\mathbf{1}_N\|\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left\|\mathbf{1}_{N_j}\right\| = 0$ q.e.d.

Beispiele:

Es sind Lebesgue-Nullmengen:
1) die Vereinigung abzählbar vieler ausgearteter Quader
2) jede abzählbare Teilmenge des $\mathbf{R}^n$, insbesondere $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{R}$
3) das Cantorsche Diskontinuum C in $\mathbf{R}$
4) der Graph einer stetigen Funktion f: $B \to \mathbf{R}$, wobei $B \subseteq \mathbf{R}^{n-1}$ die Vereinigung abzählbar vieler kompakter Teilmengen des $\mathbf{R}^{n-1}$ ist
5) jede Hyperebene des $\mathbf{R}^n$

Die Bedeutung der Nullmengen für die Integrationstheorie liegt in ihrer Rolle als „zulässige Ausnahmemenge". Die folgenden Ergebnisse konkretisieren diese Rolle. Zur Formulierung der damit gemeinten Sachverhalte führen wir die folgende Sprechweise ein:

(3.37) ***Definition:*** Sei E eine Eigenschaft, bei der für jeden Punkt $x \in \mathbf{R}^n$ erklärt ist, ob x diese Eigenschaft hat oder nicht. Man sagt: **fast alle Punkte x ∈ $\mathbf{R}^n$ haben diese Eigenschaft E** oder **E gilt fast überall**, wenn die Menge aller Punkte, für die E nicht gilt, eine Lebesgue-Nullmenge ist (vgl. (1.27)).

Im Hinblick auf die Beispiele und diese Sprechweise gewinnt Definition (1.27) der Differenzierbarkeit fast überall in I eine neue Bedeutung.

(3.38) ***Satz:*** Die Werte einer Funktion f: $\mathbf{R}^n \to \overline{\mathbf{C}}$ mit $\|f\|_1 < \infty$, insbesondere die Werte einer Lebesgue-integrierbaren Funktion, sind fast überall endlich,
d.h. $M_f := \{x \in \mathbf{R}^n : f(x) = z_\infty\}$ ist eine Lebesgue-Nullmenge.

<u>Beweis:</u>

Sei $\varepsilon>0$. $\mathbf{1}_{M_f} \le \varepsilon \cdot |f| \Rightarrow \|\mathbf{1}_{M_f}\| \le \varepsilon \cdot \|f\|_1 \Rightarrow \|\mathbf{1}_{M_f}\| = 0$. q.e.d.

(3.39) ***Satz:*** Seien f,g: $\mathbf{R}^n \to \overline{\mathbf{C}}$ Funktionen, die fast überall gleich sind. Ist f Lebesgue-integrierbar auf $\mathbf{R}^n$, dann ist auch g Lebesgue-integrierbar auf $\mathbf{R}^n$, und es gilt:
$\|f-g\|_1 = 0$ und $\int_{\mathbf{R}^n} g(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,dx$.

<u>Beweis:</u>

$N := \{x \in \mathbf{R}^n : g(x) \neq f(x)\}$ ist eine Lebesgue-Nullmenge. Sei $U_N := z_\infty \cdot \mathbf{1}_N$ und sei $f_k := \mathbf{1}_N$, dann gilt: $U_N := \sum_{k=1}^{\infty} f_k$. Da N Lebesgue-Nullmenge ist, folgt daß $\|\mathbf{1}_N\|_1 = 0 \Rightarrow \|U_N\|_1 = 0$.
f ist Lebesgue-integrierbar auf $\mathbf{R}^n$, dann existiert eine Folge $(T_j)_j$, T_j Treppenfunktionen, mit $\lim_{j\to\infty} \|f-T_j\|_1 = 0$.
Da $|g(x)-T_j(x)| \le |f(x)-T_j(x)| + U_N(x)$, $x \in \mathbf{R}^n \Rightarrow \|g-T_j\|_1 \le \|f-T_j\|_1 \Rightarrow$ g ist Lebesgue-integrierbar mit $\|f-g\|_1 \le \|f-T_j\|_1 + \|T_j-g\|_1 \le 2 \cdot \|f-T_j\|_1 \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$ und
$\int_{\mathbf{R}^n} g(x)\,dx = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbf{R}^n} T_j(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,dx$ q.e.d.

(3.40) ***Korollar:*** Sei f über $A \subseteq \mathbf{R}^n$ und über $B \subseteq \mathbf{R}^n$ Lebesgue-intgrierbar. Sei $A \cap B$ eine Lebesgue-Nullmenge. Dann ist f über $A \cup B$ Lebesgue-integrierbar und es gilt:
$$\int_{A\cup B} f(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_B f(x)\,dx\,.$$

Beweis:

Nach Satz (3.39) dürfen wir f(x)=0 für alle $x \in A \cap B$ annehmen. Dann gilt $f_{A \cup B} = f_A + f_B$
$\Rightarrow$ Behauptung q.e.d.

(3.41) ***Korollar:*** Zu jeder Lebesgue-integrierbaren Funktion f: $\mathbf{R}^n \to \overline{\mathbf{C}}$ gibt es eine Lebesgue-integrierbare Funktion $\tilde{f}$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ mit
1) $|f(x)| < \infty$ für alle $x \in \mathbf{R}^n$ und
2) $\tilde{f}$ =f fast überall auf $\mathbf{R}^n$

Beweis:

Man setze dazu an jeder Unendlichkeitsstelle x von f etwa $\tilde{f}(x)$:=0 und sonst $\tilde{f}(x) = f(x)$ und wende Satz (3.38) an. q.e.d.

Ist f fast überall auf $\mathbf{R}^n$ definiert, d.h. auf $\mathbf{R}^n \setminus N$, N Lebesgue-Nullmenge, so sagt man auch f ist über $\mathbf{R}^n$ Lebesgue-integrierbar, wenn irgendeine Fortsetzung von f auf ganz $\mathbf{R}^n$ Lebesgue-integrierbar ist.

(3.42) ***Satz:*** (vgl. (3.39)):
Sei f: $\mathbf{R}^n \to \overline{\mathbf{C}}$ eine Funktion. Es gilt $\|f\|_1 = 0$ genau dann, wenn f=0 fast überall gilt.

Beweis:

„$\Leftarrow$“: (3.39)

„$\Rightarrow$“: Sei $\|f\|_1 = 0$, N={$x \in \mathbf{R}^n$: f(x)≠0}
$\Rightarrow N = \bigcup_k N_k = \bigcup_k \{x \in \mathbf{R}^n: |f(x)| > \frac{1}{k}\}$
$\Rightarrow$ Für alle k gilt: $\mathbf{1}_{N_k} \leq k \cdot |f| \Rightarrow \|\mathbf{1}_{N_k}\|_1 \leq k \cdot \|f\|_1 = 0$
$\Rightarrow V_n(N_k) = 0 \Rightarrow$ N Lebesgue-Nullmenge. q.e.d.

Wir zeigen nun, daß das Lebesgue-Integral die wichtige Eigenschaft der Translationsinvarianz besitzt, die sich als Ausgangspunkt für die Herleitung weitergehender Abbildungseigenschaften erweitern läßt.

(3.43) ***Satz:*** (**Translationsinvarianz des Lebesgue-Integrals**):
Sei f: $\mathbf{R^n} \to \overline{\mathbf{C}}$ Lebesgue-integrierbar. Sei a $\in \mathbf{R^n}$. Dann ist auch f_a: $\mathbf{R^n} \to \overline{\mathbf{C}}$ mit $f_a(x):=f(x-a)$ über $\mathbf{R^n}$ Lebesgue-integrierbar mit
$$\int_{\mathbf{R^n}} f(x)\,dx = \int_{\mathbf{R^n}} f_a(x)\,dx = \int_{\mathbf{R^n}} f(x-a)\,dx.$$

Beweis:

Sei $Q = I_1 \times ... \times I_n$ ein Quader, α_j,β_j mit $\alpha_j<\beta_j$ Randpunkte von I_j, $\tilde{I}_j$ habe die Randpunkte α_j+a_j und $\beta_j+a_j \Rightarrow V_n(Q) = |I_1| \times ... \times |I_n| = |\tilde{I}_1| \times ... \times |\tilde{I}_n| = V_n(a+Q)$
$\Rightarrow$ die Behauptung gilt für $\mathbf{1}_Q$, damit für Treppenfunktionen und damit folgt für jede Funktion g, daß $\|g_a\|_1 = \|g\|_1$.
Sei $(T_j)_j$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $\lim\limits_{j\to\infty} \|f-T_j\|_1 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{j\to\infty} \|f_a-T_{j,a}\|_1 = 0$, d.h. f_a ist Lebesgue-integrierbar mit $\int_{\mathbf{R^n}} f_a(x)\,dx = \lim\limits_{j\to\infty} \int_{\mathbf{R^n}} T_{j,a}(x)\,dx = \lim\limits_{j\to\infty} \int_{\mathbf{R^n}} T_j(x)\,dx = \int_{\mathbf{R^n}} f\,dx.$ q.e.d.

Wir verwenden dieses Ergebnis, um das Volumen eines Parallelotops zu berechnen. Zunächst die folgende Definition:

(3.44) ***Definition:*** Sei $a_1,...,a_n \in \mathbf{R^n}$. Die kompakte Menge
$P(a_1,...,a_n):=\{x \in \mathbf{R^n}: x=\sum_{j=1}^{n} t_j a_j,\ t_j \in [0,1],\ j \in \{1,...,n\}\}$ heißt **das von $a_1,...,a_n$ aufgespannte Parallelotop**.

Für das Volumen eines Parallelotops gilt nun:

(3.45) ***Satz:*** Seien $a_1,...,a_n \in \mathbf{R^n}$. Dann gilt für das von $a_1,...,a_n$ aufgespannte Parallelotop $V_n(P(a_1,...,a_n)) = |\det(a_1,...,a_n)|$.

Beweis:

Wir zeigen für $D(a_1,...,a_n):=V_n(P(a_1,...,a_n))$
(D1) $D(a_1,...,\lambda\cdot a_i,...,a_n) = |\lambda| \cdot D(a_1,...,a_i,...,a_n)$ für $\lambda \in \mathbf{R}$
(D2) $D(a_1,...,a_i+a_j,...,a_n) = D(a_1,...,a_n)$ für $i\neq j$
(D3) $D(e_1,...,e_n) = 1$, wenn $e_j=\delta_{ij}$ für $i,j \in \{1,...,n\}$

ad (D3):
$D(e_1,...,e_n) = V_n(P(a_1,...,a_n)) = V_n(Q) = 1$, wobei $Q=[0,1]^n$ der Einheitsquader

Sind $a_1,...,a_n$ linear abhängig $\Rightarrow V_n(P(a_1,...,a_n))=0$ und (D2) und (D1) gelten trivialerweise, deshalb seien im Folgenden $a_1,...,a_n \in \mathbf{R^n}$ linear unabhängig:

ad (D1):
wir zeigen (D1) für $\lambda=1$, dann für $\lambda \in \mathbf{N}$, dann für $\lambda \in \mathbf{Q}$, dann für $\lambda\geq 0$ und $\lambda \in \mathbf{R}$ und schließlich für $\lambda<0$ mit $\lambda \in \mathbf{R}$.

0. $\lambda=1$ klar

1. $\lambda \curvearrowright \lambda+1$: Zerlegung $P(a_1,\dots,(\lambda+1)\cdot a_i,\dots,a_n) = P(a_1,\dots,\lambda\cdot a_i,\dots,a_n) \cup \{\lambda\cdot a_i + P(a_1,\dots,a_i,\dots,a_n)\}$, wobei $P(a_1,\dots,\lambda\cdot a_i,\dots,a_n) \cap \{\lambda\cdot a_i + P(a_1,\dots,a_i,\dots,a_n)\}$ eine Lebesgue-Nullmenge ist
$\Rightarrow$ Behauptung für $\lambda \in \mathbf{N}$

2. $\lambda=\frac{p}{q}$, $p,q \in \mathbf{N}$: $p\cdot V_n(P(a_1,\dots,a_n)) = V_n(P(a_1,\dots,q\cdot\lambda\cdot a_i,a_n)) = q\cdot V_n(P(a_1,\dots,\lambda\cdot a_i\dots,a_n))$

3. $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda>0$: Dann existieren $r_1,r_2 \in \mathbf{Q}$, $r_1>0$, $r_2>0$ mit $r_1 \leq \lambda \leq r_2$ und
$r_2-r_1 \leq \dfrac{\varepsilon}{V_n(P(a_1,\dots,a_n))}$ für vorgegebenes ε.
$P(a_1,\dots,r_1\cdot a_i,\dots,a_n) \subseteq P(a_1,\dots,\lambda\cdot a_i,\dots,a_n) \subseteq P(a_1,\dots,r_2\cdot a_i,\dots,a_n)$
$\Rightarrow V_n(P(a_1,\dots,r_1\cdot a_i,\dots,a_n)) \subseteq V_n(P(a_1,\dots,\lambda\cdot a_i,\dots,a_n)) \subseteq V_n(P(a_1,\dots,r_2\cdot a_i,\dots,a_n))$
$\Rightarrow |V_n(P(a_1,\dots,\lambda\cdot a_i,\dots,a_n)) - \lambda\cdot V_n(P(a_1,\dots,a_n))| \leq \dots \leq (r_2-r_1)\cdot V_n(P(a_1,\dots,a_n)) < \varepsilon$.

4. $\lambda=0$ klar

5. $\lambda<0$, $\lambda \in \mathbf{R}$: $x = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} t_j a_j + \lambda\cdot t_i a_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} t_j a_j + \lambda\cdot t_i a_i + \lambda\cdot a_i - \lambda\cdot a_i$

$$= \lambda\cdot a_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} t_j a_j + \lambda\cdot(t_i - 1)\cdot a_i, \text{ wobei } 1-t_i \in [0,1]$$

$$= \lambda\cdot a_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} t_j a_j - (-\lambda)\cdot(t_i - 1)\cdot a_i$$

Wende 3. auf $-\lambda>0$ an !!!

ad (D2)
Mit $\triangle^{ij} = \{x = \sum_{l=1}^{n} t_l a_l : t_l \in [0,1], l \in \{1,\dots,n\}, t_i \leq t_j\}$ gelten
(wir schreiben nur die maßgeblichen Argumente)
$P(a_i,a_j) = \triangle^{ij} \cup \triangle^{ji}$, $P(a_i,a_j+a_i) = \triangle^{ji} \cup (a_i + \triangle^{ij})$. Die Durchschnitte $\triangle^{ij} \cap \triangle^{ji}$ und $\triangle^{ji} \cap (a_i + \triangle^{ij})$ liegen in Hyperebenen und haben somit das Volumen 0. Damit ergibt sich $V_n(P(a_i,a_j+a_i)) = V_n(\triangle^{ji}) + V_n(\triangle^{ij}) = V_n(P(a_i,a_j))$

q.e.d.

(3.46) ***Korollar:*** Sei T: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ eine lineare Transformation, sei $Q \subseteq \mathbf{R}^n$ ein Quader. Dann hat das Bildparallelotop T(Q) folgendes Volumen: $V_n(T(Q)) = V_n(Q) \cdot |\det(T)|$.

Beweis:

Seien $k_1,...,k_n$ die Kantenlängen von Q in Richtung von $e_1,...,e_n$ (wobei e_j kanonische Basis), die Kantenlängen des Bildparallelotops von $k_1 \cdot Te_1,...,k_n \cdot Te_n$ ergeben das Volumen
$V_n(T(Q)) = k_1 \cdot ... \cdot k_n \cdot |\det(Te_1,...,Te_n)| = |\det(T)| \cdot V_n(Q)$. q.e.d.

Diese Formel wird später zur Transformationsformel für Integrale erweitert. An Stelle von det(T) tritt die Funktionaldeterminante.
Zum Schluß dieses Kapitels sei bemerkt, daß wie im eindimensionalen Fall auch das Lebesgue-Integral einer stetigen Funktion auf einer kompakten Menge durch Riemannsche Summen approximiert werden kann.

Eine **Zerlegung einer Menge $A \subseteq \mathbf{R}^n$** ist ein System $(A_1,...,A_m)$ von Teilmengen $A_j \subseteq A$ mit
1) $A = A_1 \cup ... \cup A_m$
2) $A_j \cap A_k$ Lebesgue-Nullmenge für $j \neq k$

$\delta(A) := \sup\{\|x-y\|_2 : x,y \in A\}$ **Durchmesser von A**, $\delta(\emptyset) := 0$
$\max\limits_{1 \le j \le m} \delta(A_j)$ heißt **Feinheit** der Zerlegung $\{A_1,...,A_m)$ von A

(3.47) ***Satz:*** (vgl. (1.40))
Sei $A \subseteq \mathbf{R}^n$ kompakt, sei f: $A \to \mathbf{C}$ stetig. Dann existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für jede Zerlegung $\{A_1,...,A_s\}$ von A mit der Feinheit $\le \delta$ und für jede Besetzung $\{\xi_1,...,\xi_s\}$ mit $\xi_j \in A_j$, $j \in \{1,...,n\}$ gilt: $\left| \int_A f(x)\, dx - \sum_{j=1}^{s} f(\xi_j) \cdot V_n(A_j) \right| < \varepsilon$.

4. Vollständigkeit des Lebesgue-Integrals, Sätze von B. Levi, Lebesgue, Fubini und Tonelli

Eine der wichtigsten Eigenschaften des Lebesgue-Integrals ist, daß der Erweiterungsprozeß, der vom Raum der Treppenfunktionen zum Raum der Lebesgue-integrierbaren Funktionen führt, bei Anwendung auf letzteren nicht mehr über ihn hinausführt (Satz von Riesz-Fischer). Als Konsequenz ergeben sich Sätze über die Vertauschbarkeit von Integration und Limesbildung sowie einige Integrabilitätskriterien.

§ 1 Der Vollständigkeitssatz von Riesz-Fischer

Ähnlich wie nach Satz (1.16) eine Funktion $f: \mathbf{I} \to \mathbf{C}$ eine Regelfunktion ist, wenn es eine Folge $(f_j)_j$ von Regelfunktionen $f_j: \mathbf{I} \to \mathbf{C}$ gibt mit $\lim\limits_{j\to\infty} \|f-f_j\|_\infty = 0$ und $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{j\to\infty} \int_a^b f_j(x)\,dx$, $a,b \in I$, $a \le b$, wollen wir den Erweiterungsprozeß von Lebesgue-integrierbaren Funktionen mit Hilfe der Halbnorm $\|.\|_1$ durchführen.

(4.1) ***Definition:*** Sei $(f_j)_j$ eine Folge von Funktionen $f_j: \mathbf{R^n} \to \overline{\mathbf{C}}$, $j \in \mathbf{N}$. Sei $f: \mathbf{R^n} \to \overline{\mathbf{C}}$. Dann heißt:

1) $(f_j)_j$ eine **L_1-Cauchyfolge**, wenn zu jedem $\varepsilon>0$ ein $j_\varepsilon \in \mathbf{N}$ existiert mit $\|f_j-f_k\| < \varepsilon$ für $j,k \ge j_\varepsilon$.
2) die Folge $(f_j)_{j\in\mathbf{N}}$ **L_1-konvergent gegen f** und f **L_1-Grenzwert** von $(f_j)_j$, wenn $\lim\limits_{j\to\infty} \|f_j-f\|_1 = 0$

Da $\|.\|_1$ nur eine Halbnorm ist und $\| f - \tilde{f} \|_1 = 0$ genau dann gilt, wenn $f = \tilde{f}$ fast überall (Satz (3.42)), ist ein L_1-Grenzwert nur eindeutig bestimmt bis auf eine Menge N vom Lebesgue-Maß 0. Allerdings ist jede L_1-konvergente Folge $(f_j)_j$ auch eine L_1-Cauchyfolge.

(4.2) ***Satz:*** (**Riesz-Fischer**):

Sei $(f_j)_j$ eine L_1-Cauchyfolge Lebesgue-integrierbarer Funktionen $f_j: \mathbf{R^n} \to \overline{\mathbf{C}}$, $j \in \mathbf{N}$. Dann gilt: Es gibt eine Lebesgue-Nullmenge $N \subseteq \mathbf{R^n}$, eine Teilfolge $(f_{j_k})_k \subseteq (f_j)_j$ und eine Funktion $f: \mathbf{R^n} \to \mathbf{C}$ mit:

1) $\lim\limits_{k\to\infty} f_{j_k}(x) = f(x)$ für $x \in \mathbf{R^n} \setminus N$
2) f ist Lebesgue-integrierbar auf $\mathbf{R^n}$
3) $\lim\limits_{j\to\infty} \|f-f_j\|_1 = 0$ und $\int_{\mathbf{R^n}} f(x)\,dx = \lim\limits_{j\to\infty} \int_{\mathbf{R^n}} f_j(x)\,dx$

Beweis:

ad 1)

$(f_j)_j$ ist Cauchyfolge $\Rightarrow$ es gibt $(f_{jk})_k \subseteq (f_j)_j$ mit $\|f_j - f_{j_k}\|_1 < \frac{1}{2^k}$ für $j \geq j_k$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left\| f_{j_{k+1}} - f_{j_k} \right\| \leq 1$

Setze $g_k := f_{j_{k+1}} - f_{j_k}$ und $g := \sum_{k=1}^{\infty} |g_k| \Rightarrow \|g\|_1 = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} |g_k| \right\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_1 \leq 1$

$\overset{(3.38)}{\Rightarrow}$ es gibt eine Lebesgue-Nullmenge N mit $g(x) \in \mathbf{C}$ für $x \in \mathbf{R^n} \setminus N$

$\Rightarrow f_{j_1}(x) \in \mathbf{C}$ für $x \in \mathbf{R^n} \setminus N$

$\Rightarrow$ die Reihe $\sum_k g_k$ konvergiert absolut auf $\mathbf{R^n} \setminus N$.

Wir setzen f: $\mathbf{R^n} \to \mathbf{C}$: $f(x) := \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} f_{jk}(x) = f_{j1}(x) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k(x) & \text{für } x \in \mathbf{R^n} \setminus N \\ 0 & x \in N \end{cases}$

$\Rightarrow$ es gilt 1)

ad 2)

Sei $\varepsilon>0$, dann existiert $r=r(\varepsilon)$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_1 < \varepsilon$ und $\|f_j - f_{j_r}\| < \varepsilon$, $j \geq j_r$

Zu f_{j_r} existiert eine Treppenfunktion T mit $\|f_{j_r} - T\|_1 < \varepsilon$

$\Rightarrow \|f-T\|_1 \leq \|f - f_{j_r}\|_1 + \|f_{j_r} - T\|_1 = \left\| \sum_{k=r}^{\infty} g_k \right\|_1 + \varepsilon \leq 2\cdot\varepsilon$

ad 3)

Für $j \geq j_r$ gilt: $\|f-f_j\|_1 \leq \|f - f_{j_r}\|_1 + \|f_{j_r} - f_j\|_1 \leq 2\cdot \varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{j\to\infty} \|f-f_j\|_1 = 0$

$\Rightarrow$ für $j \geq j_r$: $\left| \int_{\mathbf{R^n}} f(x)\,dx - \int_{\mathbf{R^n}} f_j(x)\,dx \right| \leq \int_{\mathbf{R^n}} |f(x) - f_j(x)|\,dx = \|f-f_j\|_1 \leq 2\cdot\varepsilon$

$\Rightarrow$ Behauptung q.e.d.

(4.3) ***Korollar:*** f: $\mathbf{R^n} \to \mathbf{C}$ Lebesgue-integrierbar. Dann existiert eine Folge $(T_k)_k$ von Treppenfunktionen f_k: $\mathbf{R^n} \to \mathbf{C}$ mit

1) $\lim\limits_{k\to\infty} \|f-T_k\|_1 = 0$
2) $\sum_{k=1}^{\infty} \|T_{k+1} - T_k\|_1 < \infty$
3) es gibt eine Lebesgue-Nullmenge $N \subseteq \mathbf{R^n}$ mit $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} T_k(x)$ für $x \in \mathbf{R^n} \setminus N$

Beweis:

f Lebesgue-integrierbar, daher gibt es eine Folge $(S_j)_j$ von Treppenfunktionen mit $\lim_{j\to\infty} \|f-S_j\|_1 = 0 \Rightarrow (S_j)_j$ ist eine L_1-Cauchyfolge Lebesgue-integrierbarer Funktionen.
Wende Beweis von (4.2) auf Teilfolge $(T_k)_k \subseteq (S_j)_j$ an $\Rightarrow$ Behauptung q.e.d.

(4.4) ***Korollar:*** Sei $(f_j)_{j\in\mathbf{N}}$ eine L_1-Cauchyfolge Lebesgue-integrierbarer Funktionen f_j: $\mathbf{R^n} \to \overline{\mathbf{C}}$. Es gebe eine Lebesgue-Nullmenge $N \subseteq \mathbf{R^n}$ und eine Funktion f: $\mathbf{R^n} \to \overline{\mathbf{C}}$ mit $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x)$, $x \in \mathbf{R^n} \setminus N$. Dann ist f auf $\mathbf{R^n}$ Lebesgue-integrierbar mit

$$\lim_{j\to\infty} \|f-f_j\|_1 = 0 \text{ und } \int_{\mathbf{R^n}} f(x)\,dx = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbf{R^n}} f_j(x)\,dx .$$

Bemerkung: Erweiterung der Halbnorm zur Norm durch Herausdividieren des Kerns:

$N = \{f: \mathbf{R^n} \to \overline{\mathbf{C}} : \|f\|_1 = 0\}$ ist ein linearer Teilraum aller Funktionen f: $\mathbf{R^n} \to \overline{\mathbf{C}}$ mit $\|f\|_1 < \infty$ $(= \mathcal{L}_1(\mathbf{R^n}))$.

$L_1(\mathbf{R^n}) = \mathcal{L}_1(\mathbf{R^n}) / \mathcal{N}$ **Quotientenraum**. $L_1(\mathbf{R^n})$ bezeichnet alle über $\mathbf{R^n}$ Lebesgue-integrierbaren komplexwertigen Funktionen. Zwei Funktionen $f,g \in L_1(\mathbf{R^n})$ heißen dann äquivalent, $f \sim g$, wenn f=g fast überall gilt. Auf $L_1(\mathbf{R^n})$ wird dann durch $\|f\|_1 := \|f + \mathcal{N}\|_1$ eine Norm erklärt. Unter dieser Norm ist $L_1(\mathbf{R^n})$ nach dem Satz von Riesz-Fischer ein Banachraum.

§ 2 Der Satz von B. Levi

Im Satz (3.18) haben wir den Satz über die gliedweise Integration einer monoton wachsenden Folge von Treppenfunktionen als ein wirkungsvolles Instrument kennengelernt. Wir dehnen diesen Satz jetzt auf Folgen Lebesgue-integrierbarer Funktionen aus.

(4.5) ***Satz:*** (**B. Levi, Satz von der monotonen Konvergenz**) [vgl. (3.18)]
Sei f: $\mathbf{R}^n \to \overline{\mathbf{R}}$ eine Funktion. Es gebe eine monoton wachsende Folge $(f_j)_j$ von Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf $\mathbf{R}^n$ mit

1) $\lim\limits_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$ für $x \in \mathbf{R}^n$
2) es gebe M>0 mit $\left|\int\limits_{\mathbf{R}^n} f_j(x)\,dx\right| \le M$ für alle $j \in \mathbf{N}$. Dann ist f Lebesgue-integrierbar auf $\mathbf{R}^n$ mit $\lim\limits_{j\to\infty} \|f-f_j\|_1 = 0$ und $\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x)\,dx = \lim\limits_{j\to\infty} \int\limits_{\mathbf{R}^n} f_j(x)\,dx$

<u>Beweis:</u>

$\int\limits_{\mathbf{R}^n} f_j(x)\,dx$ ist monoton und beschränkt, also konvergent. Sei $\varepsilon>0$, dann existiert $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ mit

$\left|\int\limits_{\mathbf{R}^n} f_j(x)\,dx - \int\limits_{\mathbf{R}^n} f_k(x)\,dx\right| < \varepsilon$ für $j,k \ge n_\varepsilon$. Für $j > k \ge n_\varepsilon$ gilt

$$\|f_j-f_k\|_1 = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \left|f_j(x) - f_k(x)\right| dx \overset{\text{Mono-}}{\underset{\text{tonie}}{=}} \left|\int\limits_{\mathbf{R}^n} f_j(x) - f_k(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

$\Rightarrow (f_j)_j$ ist eine L_1-Cauchyfolge

Nach Riesz-Fischer existiert $\tilde{f}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ mit $\lim\limits_{j\to\infty} \|\tilde{f}-f_j\|_1 = 0$, $\int\limits_{\mathbf{R}^n} \tilde{f}(x)\,dx = \lim\limits_{j\to\infty} \int\limits_{\mathbf{R}^n} f_j(x)\,dx$:

$\tilde{f}$ ist Lebesgue-integrierbar; es gibt eine Teilfolge $(f_{j_k})_k \subseteq (f_j)_j$ mit $\tilde{f}(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_{j_k}(x)$ gilt fast überall.

Da $f(x) = \lim\limits_{j\to\infty} f_j(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_{j_k}(x) = \tilde{f}(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, und da $\|f-\tilde{f}\|_1 = 0$ (Satz (3.42)), folgt, daß auch f Lebesgue-integrierbar ist. q.e.d.

Wir geben nun einige Anwendungen. Dazu verwenden wir den folgenden Begriff:

(4.6) ***Definition:*** Sei $A \subseteq \mathbf{R}^n$ eine Teilmenge. Eine Folge $(A_j)_j$ von Teilmengen heißt eine **Ausschöpfung von A**, wenn $A_j \subseteq A$, $A_j \subseteq A_{j+1}$ und $A = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$.

In Satz (3.30) wurde gezeigt, daß jede offene und beschränkte Teilmenge $A \subseteq \mathbf{R}^n$ eine Ausschöpfung von Figuren besitzt. Ist $(A_j)_j$ eine Ausschöpfung von A $\Rightarrow \mathbf{1}_{A_j} \nearrow \mathbf{1}_A$.

(4.7) ***Satz:*** (**Integration durch Ausschöpfung**):

Sei $A \subseteq \mathbf{R}^n$ eine Teilmenge, $(A_j)_j$ eine Ausschöpfung von A. f: $\mathbf{R}^n \to \overline{\mathbf{C}}$ sei eine Funktion, die auf jeder Teilmenge A_j Lebesgue-integrierbar ist. f ist genau dann über A Lebesgue-integrierbar, wenn die Folge $\left(\int_{A_j} |f|\, dx\right)_j$ beschränkt ist. Dann gilt: $\int_A f(x)\, dx = \lim_{j\to\infty} \int_{A_j} f(x)\, dx$

Beweis:

„⇐" $N := \{x \in A,\ f(x) = z_\infty\}$. $\tilde{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ sei definiert durch $\tilde{f}(x) = f(x)$ für $x \in A \setminus N$, $\tilde{f}(x) = 0$ für $x \in N$. $\tilde{f}$ ist komplexwertig, o.B.d.A.: sei $\tilde{f} \geq 0$, $\tilde{f}_1$ triviale Fortsetzung von $\tilde{f}$

$\Rightarrow$ $\tilde{f}_1$ ist monotoner Grenzwert von $\left(\tilde{f}_{A_j}\right)_j$.

Wegen $\lim_{j\to\infty} \int_{A_j} \tilde{f}\, dx = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbf{R}^n} \tilde{f}_{A_j}\, dx = \int_{\mathbf{R}^n} \tilde{f}_A\, dx$ ist $\left(\int_{\mathbf{R}^n} \tilde{f}_{A_j}\, dx\right)_j$ beschränkt.

$\overset{\text{B.Levi}}{\Rightarrow}$ $\tilde{f}_A$ ist Lebesgue-integrierbar mit $\int_A \tilde{f}\, dx = \lim_{j\to\infty} \int_{A_j} \tilde{f}\, dx$. Da $\tilde{f}_A$ Lebesgue-integrierbar ist, ist N eine Lebesgue-Nullmenge. q.e.d.

Wir beweisen nun eine Eigenschaft des Lebesgue-Maßes, die für dieses Maß eine grundlegende Bedeutung hat:

(4.8) ***Satz:***

1) Sei $(A_j)_j$ eine aufsteigende Folge Lebesgue-meßbarer Mengen. Dann gilt: $\bigcup_j A_j$ ist genau dann Lebesgue-meßbar, wenn die Folge $(V_n(A_j))_j$ beschränkt ist.

   In diesem Fall gilt: $V_n\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sup_j V_n(A_j)$

2) Sei $(B_j)_j$ eine Folge Lebesgue-meßbarer Mengen mit $B_i \cap B_j$ als Lebesgue-Nullmenge für $i \neq j$. $\bigcup B_j$ ist genau dann Lebesgue-meßbar, wenn $\sum_{j=1}^{\infty} V_n(B_j) < \infty$.

   Dann gilt: $V_n\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} V_n(B_j)$

Beweis:

ad 1)
Anwendung von Satz (4.7) für f = **1**.

ad 2)
Setze $A_j := B_1 \cup \ldots \cup B_j$, dann gilt $A_j \subseteq A_{j+1}, j \in \mathbf{N}$, mit $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$.

Ferner gilt $V_n(A_j) = \sum_{k=1}^{j} V_n(B_k)$, woraus mit 1) die Behauptung folgt. q.e.d.

Das in (3.31) eingeführte Lebesgue-Maß ordnet somit gewissen Teilmengen des $\mathbf{R^n}$, zu denen alle beschränkten offenen und beschränkten abgeschlossenen (=kompakten) Teilmengen des $\mathbf{R^n}$ gehören, eine Maßzahl zu, die das n-dimensionale Volumen genannt wird. Dabei gelten folgende Gesetze:

Bemerkung: Eigenschaften des Lebesgue-Maßes:

1) $V_n(\emptyset) = 0$
2) (**Translationsinvarianz**)
   $V_n(a+A) = V_n(A)$, wobei $A \subseteq \mathbf{R^n}$ Lebesgue-meßbar und $a+A = \{a+x: x \in A\}$, $a \in \mathbf{R^n}$ gegeben
3) (σ-**Additivität**):
   $V_n\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} V_n(A_j)$, wobei $A_j \subseteq \mathbf{R^n}$ Lebesgue-meßbare paarweise disjunkte Mengen sind mit $\sum_{j=1}^{\infty} V_n(A_j) < \infty$
4) Der Einheitswürfel $W=[0,1]^n \subseteq \mathbf{R^n}$ hat das Volumen $V_n(W)=1$

Man kann nun zeigen, daß diese vier Eigenschaften das Lebesgue-Maß auf $\mathbf{R^n}$ eindeutig festlegen. In diesem Zusammenhang sei erwähnt, daß es beschränkte Mengen des $\mathbf{R^n}$ gibt, die nicht Lebesgue-meßbar sind, ein Beispiel dazu geht auf Vitali zurück.

Mit Hilfe der bisher gewonnenen Ergebnisse kann die Integration rotationssymmetrischer Funktionen in einem wichtigen Fall auf eindimensionale Integration zurückgeführt werden.

Sei $f: I \to \mathbf{R}$ eine Regelfunktion auf dem Intervall $I \subseteq [0,\infty)$ mit den Randpunkten a und b, wobei $a \le b$. Sei $K_{a,b}(0) := \{x \in \mathbf{R^n}: a < \|x\|_2 < b\}$ eine Kugelschale. Dann ist $\tilde{f}: K_{a,b}(0) \to \mathbf{R}$ mit $\tilde{f}(x) := f(\|x\|_2)$ für $x \in K_{a,b}$ eine rotationssymmetrische Funktion auf $K_{a,b}$.

Für eine solche rotationssymmetrische Funktion $\tilde{f}$ auf $K_{a,b}$ gilt der folgende Satz:

(4.9) ***Satz:*** Sei $f(a,b)\to\mathbf{R}$ eine Regelfunktion auf $(a,b)\subseteq[0,\infty)$.
Sei $\tilde{f}: K_{a,b}(0):=\{x\in\mathbf{R}^n: a<\|x\|<b\}\to\mathbf{R}$ definiert durch $\tilde{f}(x):=f(\|x\|)$ für $x\in K_{a,b}(0)$.
$\tilde{f}$ ist genau dann über $K_{a,b}$ Lebesgue-integrierbar, wenn die Funktion $g: (a,b)\to\mathbf{R}$ mit $g(r):=|f(r)|\cdot r^{n-1}$ über (a,b) Lebesgue-integrierbar ist. In diesem Fall gilt:

$$\int_{K_{a,b}(0)} f(\|x\|)\,d(x_1,\dots,x_n) = n\cdot V_n\left(\overline{K_1(0)}\right)\cdot\int_a^b f(r)\cdot r^{n-1}\,dr,\ \text{wobei } \overline{K_1(0)}=\{x\in\mathbf{R}^n: \|x\|_2\le 1\}$$

<u>Beweis:</u>

<u>Schritt 1:</u>

Sei $I:=[a,b]$, sei $f: I\to\mathbf{R}$ eine Treppenfunktion. Wegen $f=\sum_{j=1}^{\infty} c_j\cdot\mathbf{1}_{I_j}$ (I_j disjunkte Intervalle von I) genügt es, den Fall der Funktion $\mathbf{1}$ auf einem Teilintervall $[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$ zu behandeln. Unter Verwendung der Tatsache, daß eine n-dimensionale Kugel mit Radius R das Volumen $R^n\cdot V_n\left(\overline{K_1(0)}\right)$ hat, gilt dann

$$\int_{K_{\alpha,\beta}} \tilde{\mathbf{1}}\,dx = V_n\left(K_{\alpha,\beta}\right) = V_n\left(\overline{K_1(0)}\right)\left(\beta^n-\alpha^n\right) = n\cdot V_n\left(K_1(0)\right)\cdot\int_\alpha^\beta r^{n-1}\,dr.$$

<u>Schritt 2:</u>
Sei $I:=[a,b]$ und $f: [a,b]\to\mathbf{C}$ eine Regelfunktion. Es genügt, den Fall einer reellen Regelfunktion zu behandeln. f ist dann der Limes einer monotonen Folge von Treppenfunktionen T_j auf [a,b] (Lemma (3.19)). Dann konvergiert auch $(\tilde{T}_j)$ monoton gegen $\tilde{f}$. Nach Schritt 1 und nach dem Satz von B. Levi folgt daher,daß $\tilde{f}$ über $K_{a,b}$ Lebesgue-integrierbar ist. Dabei gilt dann

$$n\cdot V_n\left(\overline{K_1(0)}\right)\cdot\int_a^b r^{n-1}\cdot f(r)\,dr = \lim_{j\to\infty} n\cdot V_n\left(\overline{K_1(0)}\right)\cdot\int_a^b T_j(r)\cdot r^{n-1}\,dr = \lim_{j\to\infty}\int_{K_{a,b}}\tilde{T}_j(x)\,dx = \int_{K_{a,b}}\tilde{f}(x)\,dx$$

<u>Schritt 3:</u>
Sei $I\subseteq[0,\infty)$ ein beliebiges Intervall. Dann existiert eine Ausschöpfung (I_j) durch kompakte Intervalle $I_j:=[a_j,b_j]$, $j\in\mathbf{N}$. Die Kugelschalen $A_j:=\{x\in\mathbf{R}^n: a_j<\|x\|_2<b_j\}$ bilden eine Aussschöpfung von $K_{a,b}$. Nach Schritt 2 ist $\tilde{f}$ über jede Teilmenge A_j Lebesgue-integrierbar

mit $\int_{A_j}\left|\tilde{f}(x)\right|d(x_1,\dots,x_n) = n\cdot V_n\left(\overline{K_1(0)}\right)\cdot\int_{a_j}^{b_j}|f(r)|\cdot r^{n-1}\,dr =: L_j$

Aufgrund des Ausschöpfungssatzes (4.7) gilt nun folgende Äquivalenz:

$$\int_{K_{a,b}}\tilde{f}(x)\,d(x_1,\dots,x_n)\ \text{existiert} \Leftrightarrow (L_j)_j \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \int_a^b |f(r)|\cdot r^{n-1}\,dr\ \text{existiert}$$

Im Falle der Existenz gilt dann

$$\int_{K_{a,b}}\tilde{f}(x)\,d(x_1,\dots,x_n) = \lim_{j\to\infty}\int_{A_j}\tilde{f}(x)\,d(x_1,\dots,x_n) = n\cdot V_n\left(\overline{K_1(0)}\right)\cdot\int_a^b f(r)\cdot r^{n-1}\,dr \qquad \text{q.e.d.}$$

(4.10) ***Korollar:*** Sei $K \subseteq \mathbf{R}^n$ kompakt. Sei μ: $K \to \mathbf{C}$ eine beschränkte Lebesgue-integrierbare Funktion. Sei $a \in \mathbf{R}^n$ und $\alpha \in \mathbf{R}$ mit $\alpha < n$. Dann existiert das Lebesgue-Integral $\int_K \frac{\mu(x)}{\|x - a\|^\alpha} dx$.

§ 3 Der Satz von Lebesgue

Wir kommen nun zu einem zweiten wichtigen Kriterium für die gliedweise Integration einer Folge Lebesgue-integrierbarer Funktionen. Die wesentliche Voraussetzung dabei ist die Existenz einer Lebesgue-integrierbaren Majorante.

(4.11) ***Satz:*** (**Lebesgue, Satz von der majorisierten Konvergenz**):
Sei $(f_j)_j$ eine Folge Lebesgue-integrierbarer Funktionen auf $\mathbf{R}^n$, die fast überall punktweise gegen eine Funktion f: $\mathbf{R}^n \to \overline{\mathbf{C}}$ konvergiert. Es gebe eine Lebesgue-integrierbare Funktion F: $\mathbf{R}^n \to \overline{\mathbf{R}}$ mit $|f_j(x)| \le F(x)$ für alle $x \in \mathbf{R}^n$, $j \in \mathbf{N}$. Dann ist f über $\mathbf{R}^n$ Lebesgue-integrierbar und es gilt:
$\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,dx = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbf{R}^n} f_j(x)\,dx$ sowie $\lim_{j\to\infty} \|f-f_j\|_1 = 0$

Bemerkung: F heißt eine Majorante für jede Funktion f_j und f_j heißt beschränkt durch F.

Beweis:

$N_F := \{x \in \mathbf{R}^n : F(x) = z_\infty\}$ ist eine Lebesgue-Nullmenge im $\mathbf{R}^n$
$\Rightarrow$ für alle $x \in \mathbf{R}^n \setminus N_F$ gilt $0 \le F(x) < \infty$. $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbf{R}^n \setminus N_0$, N_0 Lebesgue-Nullmenge; auf $N_F \cup N_0 =: N$ gilt f_j, f, F sind auf $\mathbf{R}^n \setminus N$ komplexwertig.
Setze f_j, f und F auf N gleich Null; für die abgeänderten Funktionen bleiben Lebesgue-Integrierbarkeit und Abschätzungen bestehen.
O.B.d.A. seien f_j, f, F reellwertig.
Sei $k \in \mathbf{N}$, $l \in \mathbf{N}$, sei $g_{kl} := \max\{f_k, f_{k+1}, \ldots, f_{k+l}\}$
$\Rightarrow g_{kl}$ ist Lebesgue-integrierbar mit $g_{kl} \le g_{k,l+1}$

Sei $g_k = \sup_j \{f_j : j \ge k\} \Rightarrow g_k(x) = \lim_{l\to\infty} g_{kl}(x)$ und $\left|\int_{\mathbf{R}^n} g_{kl}(x)\,dx\right| \le \int_{\mathbf{R}^n} |g_{kl}(x)|\,dx \le \int_{\mathbf{R}^n} F(x)\,dx$

Also ist $\left(\int_{\mathbf{R}^n} g_{kl}(x)\,dx\right)_l$ beschränkt $\Rightarrow$ nach B. Levi ist dann auch g_k Lebesgue-integrierbar über $\mathbf{R}^n$. Es gilt $g_k \ge g_{k+1}$, $\left|\int_{\mathbf{R}^n} g_k(x)\,dx\right| = \left|\lim_{l\to\infty} \int_{\mathbf{R}^n} g_{kl}(x)\,dx\right| \le \int_{\mathbf{R}^n} F(x)\,dx$, d.h.
$\left(\int_{\mathbf{R}^n} g_k(x)\,dx\right)_k$ ist beschränkt, $f(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x)$ ist Lebesgue-integrierbar (B.Levi) mit
$\lim_{k\to\infty} \|f-g_k\|_1 = 0$ und $\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{R}^n} g_k(x)\,dx$.

Analog: h_k: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ mit $h_k := \inf_j \{f_j : j \ge k\}$

Wie oben: $\lim_{k\to\infty} \|f-h_k\|_1 = 0$ und $\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{R}^n} h_k(x)\,dx$

Für $k \in \mathbf{N}$ gilt: $h_k \le f_k \le g_k \Rightarrow 0 \le f_k - h_k \le g_k - h_k \Rightarrow \|f_k-h_k\|_1 \le \|g_k-h_k\|_1 \le \|g_k-f\|_1 + \|f-h_k\|_1$
$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \|f_k-h_k\|_1 = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \|f-f_k\|_1 \le \lim_{k\to\infty} \left(\|f-h_k\|_1 + \|h_k-f_k\|_1\right) = 0$ q.e.d.

Die Aussage im Satz von Lebesgue, daß eine Grenzfunktion Lebesgue-integrierbar ist, stellt an sich schon eine bemerkenswerte Erkenntnis dar. Aus ihr entwickeln wir ein nützliches Majorantenkriterium. Dazu benötigen wir die folgenden beiden Begriffe:

(4.12) ***Definition:*** Eine Menge $A \subseteq \mathbf{R}^n$ heißt **σ-kompakt**, wenn A die Vereinigung abzählbar vieler kompakter Mengen ist.

Beispiele: σ-kompakte Mengen sind
1) offene Mengen, denn sie lassen sich als Vereinigung kompakter Würfel beschreiben (3.32)
2) $A_r := \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\|_2 \le r\}$ ist für $r>0$ kompakt
3) abgeschlossene Mengen, sie lasen sich nämlich als Vereinigung von Mengen aus 2) beschreiben
4) der Durchschnitt endlich vieler σ-kompakter Mengen

(4.13) ***Definition:*** Sei $A \subseteq \mathbf{R}^n$ eine σ-kompakte Teilmenge. Eine Funktion $f: A \to \overline{\mathbf{C}}$ heißt **lokal-(Lebesgue-)integrierbar**, wenn f auf jeder kompakten Teilmenge von A Lebesgue-integrierbar ist.

Beispiele:
1) $f: A \to \mathbf{R}^n$ stetig $\Rightarrow$ f lokal-integrierbar
2) **1** ist über $A \subseteq \mathbf{R}^n$ lokal-integrierbar (ist A Lebesgue-meßbar, dann ist **1** über A Lebesgue-integrierbar
3) $f(x) = \dfrac{\mu(x)}{\|x - a\|^{\alpha}}$ $(\alpha < n)$

(4.14) ***Satz:*** (**Majorantenkriterium**):
Sei $A \subseteq \mathbf{R}^n$ σ-kompakt, $f: A \to \overline{\mathbf{C}}$ lokal-integrierbar über A. Es gebe eine Lebesgue-integrierbare Funktion $F: \mathbf{R}^n \to \overline{\mathbf{R}}$ mit $|f(x)| \le F(x)$ für $x \in A$. Dann ist f über A Lebesgue-integrierbar.

<u>Beweis:</u>

Betrachte A_j mit $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, A_j kompakt $\Rightarrow f_A(x) = \lim_{j\to\infty} f_{A_j}(x)$, f_{A_j} Lebesgue-integrierbar mit $|f_A| \le F \Rightarrow$ Satz von Lebesgue liefert das Ergebnis, daß auch f_A Lebesgue-integrierbar ist

q.e.d.

(4.15) ***Korollar:*** Sei $A \subseteq \mathbf{R}^n$ σ-kompakt, sei $f: A \to \overline{\mathbf{C}}$ Lebesgue-integrierbar und $g: A \to \overline{\mathbf{C}}$ lokal-integrierbar und beschränkt auf A. Dann ist $f \cdot g$ Lebesgue-integrierbar über A.

Beweis:

$f \cdot g$ ist lokal-integrierbar über A. Sei M eine obere Schranke für $|g|$. Dann ist $F:=M\cdot|g|$ eine Lebesgue-integrierende Majorante für $f \cdot g$. q.e.d.

Mit Hilfe des Majorantenkriteriums beweisen wir ein Integrabilitätskriterium, welches den Satz, daß jede beschränkte stetige Funktion auf einer beschränkten offenen Menge $A \subseteq \mathbf{R}^n$ über A Lebesgue-integrierbar ist, wesentlich erweitert.

(4.16) ***Satz:*** Sei $U \subseteq \mathbf{R}^n$ offen, $N \subseteq U$ eine Lebesgue-Nullmenge. Sei $f: U \to \mathbf{C}$ auf $U \setminus N$ stetig. Es gebe eine Lebesgue-integrierbare Funktion $F: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ mit $|f(x)| \leq F(x)$ für $x \in U$. Dann ist f über U Lebesgue-integrierbar.

Beweis:

Nach dem Majorantenkriterium (4.14) genügt es zu zeigen, daß f lokal-integrierbar ist. O.B.d.A. sei $f \geq 0$. Sei $K \subseteq U$ kompakt. Wir zeigen, daß f_K Lebesgue-integrierbar ist. Dazu betrachten wir die „abgeschnittenen“ Funktionen $f_j:=\min\{f_K, j\}$.
Dann gilt $\lim\limits_{j\to\infty} f_j(x)=f_K(x)$. f_j sind beschränkt und ihre Einschränkung auf K ist stetig auf $K \setminus N$.
Also ist f_j nach Satz (3.35) über K Lebesgue-integrierbar. Ferner gilt $|f_j(x)| \leq F(x)$, $x \in K \subseteq U$, $j \in \mathbf{N}$. Nach dem Satz von Lebesgue ist auch die Grenzfunktion f_K Lebesgue-integrierbar.
q.e.d.

§ 4 Die Sätze von Fubini und Tonelli

Der Satz von Fubini führt die Integration über $\mathbf{R}^{n+m} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ auf sukzessive Integration über $\mathbf{R}^n$ und $\mathbf{R}^m$ zurück, die Integration über $\mathbf{R}^n$ somit auf n Integrationen über $\mathbf{R}$. Mit diesem Satz stehen dann Rechentechniken der Integralrechnung einer Variablen auch für Integrationen über $\mathbf{R}^n$ zur Verfügung. Ein wichtiger Spezialfall wurde bereits im kleinen Satz von Fubini (Satz (3.24)) behandelt.

(4.17) ***Satz:*** (**Fubini**):

Sei f: $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \overline{\mathbf{C}}$ Lebesgue–integrierbar über $\mathbf{R}^{n+m} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$. Dann gilt:

1) es gibt eine Lebesgue-Nullmenge $M \subseteq \mathbf{R}^m$, so daß für jedes $y \in \mathbf{R}^m \setminus M$ die Funktion f_y: $\mathbf{R}^n \to \overline{\mathbf{C}}$ mit $f_y(x)=f(x,y)$ Lebesgue-integrierbar ist über $\mathbf{R}^n$
2) die Funktion F: $\mathbf{R}^m \to \overline{\mathbf{C}}$ mit F(y)=0 für $y \in M$ und $F(y) := \int_{\mathbf{R}^n} f(x,y)\,dx$ für $y \notin M$ ist über $\mathbf{R}^m$ Lebesgue-integrierbar mit $\int_{\mathbf{R}^m} F(y)\,dy = \int_{\mathbf{R}^{n+m}} f(x,y)\,d(x,y)$
3) es gibt eine Lebesgue-Nullmenge $N \subseteq \mathbf{R}^n$, so daß für jedes $x \in \mathbf{R}^n \setminus N$ die Funktion f_x: $\mathbf{R}^m \to \overline{\mathbf{C}}$ mit $f_x(y)=f(x,y)$ Lebesgue-integrierbar ist über $\mathbf{R}^m$
4) die Funktion G: $\mathbf{R}^n \to \overline{\mathbf{C}}$ mit G(x)=0 für $x \in N$ und $G(x) := \int_{\mathbf{R}^m} f(x,y)\,dy$ für $x \notin N$ ist über $\mathbf{R}^n$ Lebesgue-integrierbar mit $\int_{\mathbf{R}^n} G(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}^{n+m}} f(x,y)\,d(x,y)$
5) Vertauschungsregel: $\int_{\mathbf{R}^n}\left(\int_{\mathbf{R}^m} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_{\mathbf{R}^m}\left(\int_{\mathbf{R}^n} f(x,y)\,dx\right)dy$

Zum Beweis dieses Satzes benötigt man eine Aussage über Nullmengen im $\mathbf{R}^{n+m}$, die bereits als Spezialfall des Satzes von Fubini angesehen werden kann.

(4.18) ***Lemma:*** Sei A eine Lebesgue-Nullmenge in $\mathbf{R}^{n+m}$. Dann existiert eine Lebesgue-Nullmenge $M \subseteq \mathbf{R}^m$, so daß die Schnittmenge $A_y := \{x \in \mathbf{R}^n : (x,y) \in A\}$ für jedes $y \in \mathbf{R}^m \setminus M$ ebenfalls eine Lebesgue-Nullmenge des $\mathbf{R}^n$ ist.

<u>Beweis:</u>

Sei $\varepsilon>0$, dann existieren offene Quader $Q_j \subseteq \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$, $j \in \mathbf{N}$, mit $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ und $\sum_{j=1}^{\infty} V_{n+m}(Q_j) < \varepsilon$ (Satz (3.33)).

Q_j kann dann als direktes Produkt von Quadern $Q_{j,n}$ und $Q_{j,m}$ geschrieben werden, also $Q_j = Q_{j,n} \times Q_{j,m}$, $j \in \mathbf{N}$. $\|.\|_{1,n}$ sei die L_1-Halbnorm bezüglich $\mathbf{R}^n$. Wir betrachten die Funktion a: $\mathbf{R}^m \to \overline{\mathbf{C}}$ mit $a(y) := \left\|\mathbf{1}_{A_y}\right\|_{1,n}$

$$\Rightarrow \mathbf{1}_{A_y} \le \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{1}_{Q_{j,n}} \cdot \mathbf{1}_{Q_{j,m}}(y) \Rightarrow a(y) \le \sum_{j=1}^{\infty} V_n(Q_{j,n}) \cdot \mathbf{1}_{Q_{j,m}}(y)$$

Daraus folgt nach der Definition der L_1-Halbnorm

$\|a\|_{1,m} \leq \sum_{j=1}^{\infty} V_n(Q_{j,n}) \cdot V_m(Q_{j,m}) = \sum_{j=1}^{\infty} V_{n+m}(Q_j) < \varepsilon \Rightarrow \|a\|_{1,n}=0$

$\Rightarrow$ Nach Satz (3.42) gibt es eine Lebesgue-Nullmenge $M \subseteq \mathbf{R^m}$, so daß $a(y)=\left\|\mathbf{1}_{A_y}\right\|_{1,n} = 0$ für jedes $y \in \mathbf{R^m} \setminus M$

$\Rightarrow A_y$ ist für jedes $y \in \mathbf{R^m} \setminus M$ eine Lebesgue-Nullmenge in $\mathbf{R^n}$ (Satz (3.33)) q.e.d.

Bemerkung:

Das Beispiel $A = \mathbf{R} \times \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R^2}$ zeigt, daß die Schnittmenge A_y für kein $y \in \mathbf{Q}$ eine Lebesgue-Nullmenge in $\mathbf{R}$ ist und man deshalb auf die Voraussetzung an A, eine Lebesgue-Nullmenge in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ zu sein, nicht verzichten kann.

Beweis zum Satz von Fubini:

ad 1)

Da $f: \mathbf{R^{n+m}} \to \overline{\mathbf{C}}$ Lebesgue-integrierbar ist, exisitiert nach dem Satz von Riesz-Fischer (Korollar (4.3)) eine Folge $(T_j)_j$ von Treppenfunktionen $T_j: \mathbf{R^n} \times \mathbf{R^m} \to \mathbf{C}$ mit

1) $\lim_{j\to\infty} \|f-T_j\|_1=0$

2) $\sum_{j=1}^{\infty} \left\|T_{j+1} - T_j\right\|_1 < \infty$

3) $f(z) = \lim_{j\to\infty} T_j(z)$ für $z \in \mathbf{R^{n+m}} \setminus A$

$A \subseteq \mathbf{R^{n+m}}$ Lebesgue-Nullmenge. Sei $y \in \mathbf{R^m}$ beliebig, definiere $T_{j,y}: \mathbf{R^n} \to \mathbf{C}$ durch $T_{j,y}(x):=T_j(x,y)$ und $f_y: \mathbf{R^n} \to \overline{\mathbf{C}}$ durch $f_y(x):=f(x,y)$ für $x \in \mathbf{R^n}$.

Zu $A \subseteq \mathbf{R^{n+m}}$ existiert nach Lemma (4.13) eine Nullmenge $M_1 \subseteq \mathbf{R^m}$, so daß fast überall auf $\mathbf{R^n}$ für jedes $y \in \mathbf{R^m} \setminus M$ gilt: $f_y(x) = \lim_{j\to\infty} T_{j,y}(x)$.

Ferner setzen wir für $y \in \mathbf{R^m}$ $H_k(y):= \int_{\mathbf{R^n}} \left|T_{k+1}(x,y) - T_k(x,y)\right| dx$

$\overset{\text{Fubini für}}{\underset{\text{Treppenfkt.}}{\Rightarrow}} \int_{\mathbf{R^m}} H_k(y)\, dy = \int_{\mathbf{R^{n+m}}} \left|T_{k+1}(x,y) - T_k(x,y)\right| d(x,y) = \|T_{k+1}-T_k\|_1$

$\Rightarrow$ mit Eigenschaft 2) $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbf{R^m}} H_k(y)\, dy < \infty$

Die Folge $\left(\sum_{k=1}^{s} H_k\right)_s$ wächst monoton und $\left(\int_{\mathbf{R^m}} \sum_{k=1}^{s} H_k(y)\, dy\right)_s$ ist beschränkt.

Mit B. Levi folgt, daß $\sum_{k=1}^{\infty} H_k$ über $\mathbf{R^m}$ Lebesgue-integrierbar ist. Nach Saz (3.38) gilt insbesondere $\left|\sum_{k=1}^{\infty} H_k(y)\right| < \infty$ für alle $y \in \mathbf{R^m} \setminus M_2$, wobei M_2 eine Lebesgue-Nullmenge, also

$\sum_{k=1}^{\infty}\left\|T_{k+1,y} - T_{k,y}\right\|_{1,n} < \infty$ für alle $y \in \mathbf{R^m} \setminus M_2$. Wir setzen $M := M_1 \cup M_2$, M ist Lebesgue-Nullmenge im $\mathbf{R^m}$.

Für $y \notin M \Rightarrow (T_{k,j})_k$ ist eine L_1-Cauchyfolge auf $\mathbf{R^n}$. Nach dem Satz von Riesz-Fischer gibt es eine Teilfolge $(T_{kj,y})_j \subseteq (T_{k,y})_k$, eine Nullmenge $N \subseteq \mathbf{R^n}$ sowie eine Lebesgue-integrierbare Funktion $\tilde{f} : \mathbf{R^n} \to \mathbf{C}$ mit $\tilde{f}(x) = \lim_{j\to\infty} T_{kj,y}(x)$ für $x \in \mathbf{R^n} \setminus N$,

$\lim_{j\to\infty} \| \tilde{f} - T_{kj,y} \|_{1,n} = 0$ und $\int_{\mathbf{R^n}} \tilde{f}(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{R^n}} T_{k,y}(x)\,dx$.

Wegen $f_y(x) = \lim_{k\to\infty} T_{k,y}(x)$ fast überall auf $\mathbf{R^n}$, gilt $\tilde{f} = f_y$ fast überall auf $\mathbf{R^n}$.

Somit ist f_y Lebesgue-integrierbar mit $F(y) := \int_{\mathbf{R^n}} f_y(x)\,dx = \int_{\mathbf{R^n}} f(x,y)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{R^n}} T_k(x,y)\,dx$

Damit ist Aussage 1) bewiesen.

ad 2)

Setze S_k: $\mathbf{R^m} \to \mathbf{C}$ mit $S_k(y) = \int_{\mathbf{R^n}} T_k(x,y)\,dx$. Dann sind S_k, $k \in \mathbf{N}$, Treppenfunktionen auf $\mathbf{R^m}$ mit den folgenden Eigenschaften

1) $\lim_{k\to\infty} S_k(y) = F(y)$ für $y \in \mathbf{R^m} \setminus M$

2) $\sum_{k=1}^{\infty}\left\|S_{k+1} - S_k\right\|_{1,m} < \infty$

Eigenschaft zwei folgt aus $|S_{k+1}(y) - S_k(y)| \le H_k(y)$. Wegen dieser Eigenschaft ist außerdem $(S_k)_k$ eine L_1-Cauchyfolge von Treppenfunktionen auf $\mathbf{R^m}$.

Mit dem Satz von Riesz-Fischer folgt, daß eine Teilfolge $(S_{kj})_j \subseteq (S_k)_k$ punktweise fast überall gegen eine Lebesgue-integrierbare Funktion auf $\mathbf{R^m}$ konvergiert. Diese Funktion stimmt fast überall mit F überein.

Riesz-Fischer liefert dann

$$\int_{\mathbf{R^m}} F(y)\,dy = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{R^m}} S_k(y)\,dy = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{R^m}} \left(\int_{\mathbf{R^n}} T_k(x,y)\,dx \right) dy = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{R^{n+m}}} T_k(x,y)\,d(x,y) = \int_{\mathbf{R^{n+m}}} f(x,y)\,d(x,y)$$

nach Wahl der T_k q.e.d.

Bemerkung:

Die Vertauschung der Integrationsreihenfolge braucht nicht zu gelten, wenn der Integrand nicht über dem Produktraum $\mathbf{R^{n+m}} = \mathbf{R^n} \times \mathbf{R^m}$ Lebesgue-integrierbar ist, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3}\,dx \right) dy \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3}\,dy \right) dx$$

Beispiel:

$\int_{\mathbf{R}^n} e^{-\|x\|^2}\,dx$ wobei $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$ für $x=(x_1,...,x_n)$ gilt

$e^{-\|x\|^2} = e^{-x_1^2 - x_2^2 - ... - x_n^2} = e^{-x_1^2} \cdot e^{-x_2^2} \cdot ... \cdot e^{-x_n^2}$

Nach dem Satz über rotationssymmetrische Funktionen (Satz (4.9)) ist die Funktion f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ mit f(x):= $e^{-\|x\|^2}$ über $\mathbf{R}^n$ Lebesgue-integrierbar. Nach dem Satz von Fubini gilt deshalb $\int_{\mathbf{R}^n} e^{-\|x\|^2}\,dx = \left(\int_{\mathbf{R}} e^{-t^2}\,dt\right)^n$, wobei $\int_{\mathbf{R}} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$.

Das Integral im n-dimensionalen wurde also auf den eindimensionalen Fall zurückgeführt!

Die Anwendbarkeit des Satzes von Fubini setzt voraus, daß die betrachtete Funktion über dem Produktraum integrierbar ist. Der Satz von Tonelli liefert nun ein brauchbares Kriterium dafür, wann eine Funktion über einem Produktraum Lebesgue-integrierbar ist. Dieses Kriterium involviert ein iteriertes Integral des <u>Betrages</u> der Funktion.

(4.19) ***Satz:*** (**Tonelli**):
Sei f: $\mathbf{R}^{n+m} \to \mathbf{C}$ lokal-integrierbar oder fast überall stetig. f ist genau dann über $\mathbf{R}^{n+m}$ Lebesgue-integrierbar, wenn eines der beiden Integrale

$$\int_{\mathbf{R}^n}\left(\int_{\mathbf{R}^m} |f(x,y)|\,dy\right)dx \quad \text{oder} \quad \int_{\mathbf{R}^m}\left(\int_{\mathbf{R}^n} |f(x,y)|\,dx\right)dy \text{ existiert.}$$

<u>Beweis:</u>

$\int_{\mathbf{R}^m}\left(\int_{\mathbf{R}^n} |f(x,y)|\,dx\right)dy$ existiert genau dann, wenn eine Lebesgue-Nullmenge $M \subseteq \mathbf{R}^m$ existiert, so daß für $y \in \mathbf{R}^m \setminus M$ $\int_{\mathbf{R}^n} |f(x,y)|\,dx$ existiert und die Funktion F: $\mathbf{R}^m \to \mathbf{C}$ mit F(y):=0 für $y \in M$ und F(y):= $\int_{\mathbf{R}^n} |f(x,y)|\,dx$ für $y \notin M$ über $\mathbf{R}^m$ Lebesgue-integrierbar ist.

„$\Rightarrow$":
Sei f Lebesgue-integrierbar über $\mathbf{R}^{n+m}$
$\Rightarrow$ | f | ist über $\mathbf{R}^{n+m}$ Lebesgue-integrierbar
$\Rightarrow$ Behauptung mit Hilfe des Satzes von Fubini

„⇐“:

$\int\limits_{\mathbf{R^m}}\left(\int\limits_{\mathbf{R^n}}\left|f(x,y)\right|dx\right)dy$ existiere, dann ist zu zeigen,, daß $|f|$ über $\mathbf{R^{n+m}}$ Lebesgue-integrierbar ist, weil dann dasselbe auch für f gilt (nach Sätze (4.14) und (4.16))

Für $k \in \mathbf{N}$ sei $W_k:=[-k,k]^n \subseteq \mathbf{R^n}$ und $f_k:=\min\{|f|, k\cdot\mathbf{1}_{W_k}\}$. Ist f lokal-integrierbar, so ist f_k Lebesgue-integrierbar. Ist f fast überall stetig, dann ist f_k auch Lebesgue-integrierbar nach Satz (3.35). Die Folge $(f_k)_k$ Lebesgue-integrierbarer Funktionen konvergiert monoton wachsend gegen $|f|$. Die Folge $\left(\int\limits_{\mathbf{R^n}} f_k(x)\,dx\right)_k$ ist beschränkt wegen

$$\int\limits_{\mathbf{R^{n+m}}} f_k(x,y)\,d(x,y) \overset{\text{Fubini}}{=} \int\limits_{\mathbf{R^m}}\left(\int\limits_{\mathbf{R^n}} f_k(x,y)\,dx\right)dy \le \int\limits_{\mathbf{R^m}}\left(\int\limits_{\mathbf{R^n}} \left|f_k(x,y)\right|dx\right)dy \le \int\limits_{\mathbf{R^m}}\left(\int\limits_{\mathbf{R^n}} \left|f(x,y)\right|dx\right)dy < \infty$$

Nach dem Satz von B. Levi ist somit $|f| = \lim\limits_{k\to\infty} f_k$ Lebesgue-integrierbar über $\mathbf{R^n}$. q.e.d.

§ 5 Der Transformationssatz

Als Verallgemeinerung der Substitutionsregel (1.29) bei der Integration von Regelfunktionen wird in diesem Abschnitt der Transformationssatz formuliert und bewiesen; dieser Transformationssatz beschreibt das Verhalten eines Lebesgue-Integrals unter einer Koordinatentransformation. Der Beweis erfolgt in zwei Schritten: zunächst für Treppenfunktionen, sodann mit Hilfe des Satzes von Riesz-Fischer für beliebige Lebesgue-integrierbare Funktionen. In beiden Schritten verwendet man mehrmals die Tatsache, daß ein Diffeomorphismus Lebesgue-Nullmengen in Lebesgue-Nullmengen überführt. Diese Tatsache beruht auf dem folgenden Lemma:

(4.20) ***Lemma:*** Sei $N\subseteq\mathbf{R}^n$ eine Lebesgue-Nullmenge. Sei $T: N\to\mathbf{R}^n$ mit $\|Tx-Ty\|_\infty \le L\cdot\|x-y\|_\infty$ für alle $x,y \in N$, L unabhängig von x,y. Dann ist T(N) eine Lebesgue-Nullmenge.

<u>Beweis:</u>

Es existiert ein $L>0$, so daß für alle $x,y \in N$ die Beziehung $\|Tx-Ty\|_\infty \le L\cdot\|x-y\|_\infty$ gilt
$\Leftrightarrow$ es existiert ein $L_0>0$, so daß für alle $x,y \in N$ die Beziehung $\|Tx-Ty\|_2 \le L_0\cdot\|x-y\|_2$ gilt, weil im $\mathbf{R}^n$ alle Normen äquivalent sind.
Sei $\varepsilon>0$, dann existiert eine offene Lebesgue-meßbare Menge U (Korollar (3.34)) mit $N\subseteq U$ und $V_n(U)<\varepsilon$.

Zu U existieren nach Lemma (3.32) achsenparallele Würfel W_k mit $N\subseteq U=\bigcup_{k=1}^{\infty} W_k$ und

$V_n(U)=\sum_{k=1}^{\infty} V_n(W_k) < \varepsilon$

$\Rightarrow$ $T(N \cap W_j)$ liegt in einem Würfel mit dem Volumen $(2L)^n\cdot V_n(W_j)$

$\Rightarrow$ $T(N)\subseteq\bigcup_{j=1}^{\infty} T(N\cap W_j)$ und $V_n(T(N))\le\sum_{j=1}^{\infty} V_n\big(T(N\cap W_j)\big)= (2L)^n \sum_{j=1}^{\infty} V_n(W_j) = (2L)^n\,\varepsilon$

$\Rightarrow$ Nach Satz (3.33) ist T(N) Lebesgue-Nullmenge q.e.d.

(4.21) ***Korollar:*** Sei $N\subseteq\mathbf{R}^n$ eine Lebesgue-Nullmenge. Sei U offen mit $N\subseteq U$, sei $T: U\to\mathbf{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann ist T(N) eine Lebesgue-Nullmenge.

<u>Beweis:</u>

Nach Lemma (3.32) gibt es abzählbar viele kompakte Würfel W_j mit $N\subseteq U=\bigcup_{j=1}^{\infty} W_j$.

Da T auf U stetig differenzierbar ist, existiert eine Konstante M_j mit
$\|Tx-Ty\|_\infty \le M_j\cdot\|x-y\|_\infty$ für alle $x,y \in W_j$
$\Rightarrow$ $T(N \cap W_j)$ ist Lebesgue-Nullmenge

$\Rightarrow$ $T(N)\subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} T(N\cap W_j)$ ist Lebesgue-Nullmenge. q.e.d.

Für die weiteren Untersuchungen verwenden wir den folgenden Begriff:

(4.22) ***Definition:*** Seien $U,V\subseteq\mathbf{R}^n$ offene Mengen. Eine stetig differenzierbare Funktion $f: U\to V$ heißt ein **Diffeomorphismus**, wenn f bijektiv ist und die Umkehrabbildung $f^{-1}: V\to U$ ebenfalls stetig differenzierbar ist.

Den Beweis des Transformationssatzes zerlegen wir in vier Lemmata, von denen die beiden folgenden zunächst Schranken für die Verzerrung des Volumens kompakter Mengen angeben. Wir erinnern daran (vgl. Korollar (3.46)) , daß für einen linearen Operator A: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ det(A) definiert ist als $\det(A)=\det(Ae_1, \dots, Ae_n)$, wobei $e_1, \dots, e_n \in \mathbf{R}^n$ die kanonische Basis ist.

(4.23) ***Lemma:*** Seien $U,V\subseteq\mathbf{R}^n$ offene Mengen, sei $T: U\to V$ ein Diffeomorphismus. Dann gilt für jeden kompakten Würfel $W\subseteq U$, daß $V_n(T(W))\le \max\limits_{x\in W} |\det(T'(x))|\cdot V_n(W)$

<u>Beweis:</u>

T ist stetig $\Rightarrow$ T(W) kompakt $\Rightarrow$ T(W) ist Lebesgue-meßbar.

Ist $V_n(W)=0$, dann ist die Behauptung trivial (Korollar (4.21))

Sei $V_n(W)\neq 0$:

Sei $\alpha := \dfrac{V_n(T(W))}{V_n(W)}$. Wir halbieren die Intervallängen $l:=\beta_j-\alpha_j$ des Würfels $W=I_1\times\dots\times I_n$ mit $I_j=[\alpha_j,\beta_j]$, $j\in\{1,\dots,n\}$ und erhalten 2^n kompakte Teilwürfel $\tilde{W}_j$.

Unter diesen existiert ein Würfel W_1 mit $V_n(T(W_1))\ge\alpha\cdot V_n(W_1)$.

Durch wiederholte Teilung erhält man eine fallende Folge (W_j) kompakter Würfel mit $V_n(T(W_j))\ge\alpha\cdot V_n(W_j)$.

Sei $\{a\}=\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} W_j$ und $b=T(a)$, dann dürfen wir o.B.d.A. $a=b=0$ annehmen (erhalten wir durch Verschiebung des Koordinatensystems)

Sei m_j der Mittelpunkt von W_j und $d:=\frac{1}{2}$ die halbe Kantenlänge von W

$\Rightarrow W_j=\{x\in\mathbf{R}^n: \|x-m_j\|_\infty\le 2^{-j}d\}$

Nach dem Satz über die lokale Umkehrbarkeit ist die Ableitung $A:=T'(0)$ invertierbar, daher gibt es die Darstellung

$Tx=Ax+\|x\|Ar(x)$ für $x\in U$, mit $\lim\limits_{x\to 0} r(x)=0$.

Wir zeigen: Zu $\varepsilon>0$ existiert ein $j=j(\varepsilon)\in\mathbf{N}$ mit

$V_j=\{x+\|x\|_\infty r(x): x\in W_j\}\subseteq W_j^\varepsilon:=\{y\in\mathbf{R}^n: \|y-m_j\|_\infty\le 2^{-j}(1+\varepsilon)d\}$.

Dazu wählen wir zu $\varepsilon>0$ $j=j(\varepsilon)$ so, daß $\|r(x)\|_\infty<\frac{\varepsilon}{2}$ für $x \in W_j$.

Es gilt aber $\|x\|_\infty \leq \|x-m_j\|_\infty + \|m_j\|_\infty \leq 2^{-j}d + 2^{-j}d = 2\cdot 2^{-j}d$

$\Rightarrow$ $\|x+\|x\|_\infty r(x)-m_j\|_\infty \leq \|x-m_j\|_\infty + \|x\|_\infty \|r(x)\|_\infty \leq 2^{-j}d + 2\cdot 2^{-j}d\frac{\varepsilon}{2} = 2^{-j}d(1+\varepsilon)$

$\Rightarrow$ $V_j \subseteq W_j^\varepsilon$

$\Rightarrow$ $T(W_j)=A(V_j)\subseteq AW_j^\varepsilon$

$\Rightarrow$ nach Satz (3.45) und Korollar (3.46): $V_n\big(T(W_j)\big) \leq (1+\varepsilon)^n\cdot|\det(A)|\cdot V_n(W_j)$

Angenommen, es gilt $\alpha > \max\limits_{x\in W} |\det\big(T'(x)\big)| \geq \det(A)$, dann wähle $\varepsilon>0$ so klein, daß auch $\alpha>(1+\varepsilon)^n\cdot|\det(A)|$

$\Rightarrow$ $V_n\big(T(W_j)\big)<\alpha\cdot V_n(W_j)$ im Widerspruch zur Tatsache, daß $V_n\big(T(W_j)\big)\geq\alpha\cdot V_n(W_j)$ für alle $j \in \mathbf{N}$.

$\Rightarrow$ $\alpha\leq\max\limits_{x\in W} |\det\big(T'(x)\big)|$ $\Rightarrow$ $V_n\big(T(W)\big)\leq \max\limits_{x\in W} |\det\big(T'(x)\big)|\cdot V_n(W)$ q.e.d.

(4.24) ***Lemma:*** Seien $U,V\subseteq\mathbf{R}^n$ offen. Sei $T: U\to V$ ein Diffeomorphismus. Sei $K\subseteq U$ eine kompakte Teilmenge, deren Rand eine Lebesgue-Nullmenge ist. Sei $Q:=T(K)$.
Dann gilt: $\min\limits_{x\in K} |\det\big(T'(x)\big)|\cdot V_n(K) \leq V_n(Q) \leq \max\limits_{x\in K} |\det\big(T'(x)\big)|\cdot V_n(K)$.

<u>Beweis:</u>

Zum offenen Kern $\overset{0}{K}$ von K existieren kompakte Würfel W_j mit

1) $\overset{0}{K} = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} W_j$

2) $W_i \cap W_j$ $(i\neq j)$ enthalte höchstens Randpunkte von W_i und W_j (Lemma (3.32))

Da $V_n\big(Rd(K)\big)=0 \Rightarrow V_n(K)=V_n(\overset{0}{K})=\sum\limits_{j=1}^{\infty} V_n(W_j)$

$\Rightarrow$ $\overset{0}{Q}=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} T(W_j)$ und $T(W_i) \cap T(W_j) = T(W_i \cap W_j)$ sind für $i,j \in \mathbf{N}$ und $i\neq j$ Lebesgue-Nullmengen

$\Rightarrow$ $V_n\big(T(W_j)\big) \leq \max\limits_{x\in K} |\det\big(T'(x)\big)|\cdot V_n(W_j)$

$\Rightarrow$ $V_n(Q) \leq \max\limits_{x\in K} |\det\big(T'(x)\big)|\cdot V_n(K)$

Vertauscht man die Rollen von Q und K und wendet das Ergebnis auf T^{-1} an, so erhält man unter Beachtung, daß $T'(x)=\big((T^{-1})'(y)\big)^{-1}$ für $y=Tx$

$V_n(Q) \geq \min\limits_{x\in K} |\det\big(T'(x)\big)|\cdot V_n(K)$ q.e.d.

(4.25) ***Definition:*** Sei f: $U\subseteq\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ eine Funktion. Die abgeschlossene Menge $\mathrm{Tr}(f):=\overline{\{x\in U: f(x)\neq 0\}}$ heißt der **Träger von f**.

Wir beweisen nun den Transformationssatz für Treppenfunktionen:

(4.26) ***Lemma:*** Seien $U,V\subseteq\mathbf{R}^n$ offen, T: $U\to V$ ein Diffeomorphismus. Sei f: $V\to\mathbf{C}$ eine Treppenfunktion. Dann ist $f(T(x))\cdot|\det(T'(x))|$ über $U\subseteq\mathbf{R}^n$ Lebesgue-integrierbar und es gilt: $\int_V f(y)\,dy=\int_U f\left(T(x)\right)\cdot\det T'(x)\,dx$

<u>Beweis:</u>

Aus Linearitätsgründen genügt es, die Aussagen für die charakteristischen Funktionen von Quadern zu beweisen; da nach Korollar (4.21) die Lebesgue-Nullmenge Rd(Q), Q Quader, auf eine Lebesgue-Nullmenge abgebildet wird, genügt es, sich auf die charakteristischen Funktionen von kompakten Quadern zu beziehen:

Sei f also eine charakteristische Funktion auf einem Quader Q, sei o.B.d.A. $Q\subseteq V$ kompakt
T' ist stetig und $\mathbf{1}_Q\circ T$ verschwindet außerhalb der Menge $T^{-1}(Q)$
$\Rightarrow (\mathbf{1}_Q\circ T)\cdot|\det(T')|$ ist über U Lebesgue-integrierbar.

Es bleibt zu zeigen, daß $\int_V f(y)\,dy=\int_U f\left(T(x)\right)\cdot\left|\det T'(x)\right|dx$:

Sei $\varepsilon>0$: $|\det(T^{-1})'|^{-1}$ ist gleichmäßig stetig auf kompakten Mengen
$\Rightarrow$ es gibt eine Zerlegung $(Q_j)_{1\leq j\leq r}$ mit $Q=Q_1\cup Q_2\cup\ldots\cup Q_r$, die höchstens Randpunkte gemeinsam haben und so klein sind, daß
$\max_{y\in Q_j}|\det(T^{-1})'(y)|^{-1}-\min_{y\in Q_j}|\det(T^{-1})'(y)|^{-1}\leq\varepsilon$ für $j\in\{1,\ldots,r\}$

Sei $K_j:=T^{-1}(Q_j)$
$\Rightarrow \max_{x\in K_j}|\det(T'(x))|-\min_{x\in K_j}|\det(T'(x))|\leq\varepsilon$ für $j\in\{1,\ldots,r\}$

$$\Rightarrow \left|\int_{K_j}\left|\det T'(x)\right|dx-V_n(Q_j)\right|\leq\varepsilon\cdot V_n(K_j)$$

Für $i\neq j$ sind die Durchschnitte $K_i\cap K_j$ Lebesgue-Nullmengen

$\Rightarrow$ Durch Summation über $j\in\{1,\ldots,r\}$ erhält man:

$\left|\int_{T^{-1}(Q)}\left|\det T'(x)\right|dx-V_n(Q)\right|\leq\varepsilon\cdot V_n(T^{-1}(Q))$, woraus die Behauptung folgt. q.e.d.

(4.27) ***Lemma:*** Sei $V\subseteq\mathbf{R}^n$ offene Menge. Sei f: $V\to\overline{\mathbf{C}}$ Lebesgue-integrierbar. Zu $\varepsilon>0$ gibt es eine Treppenfunktion S mit Träger in V, so daß $\|f_V-S\|_1<\varepsilon$.

Beweis:

Sei R: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ eine Treppenfunktion auf $\mathbf{R}^n$ mit $\|f_V - R\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Da $|f_V - \mathbf{1}_V R| \le |f_V - R|$, folgt auch

$\|f_V - \mathbf{1}_V R\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$.

Wir approximieren $\mathbf{1}_V R$ durch eine Treppenfunktion mit Träger in V. Sei $B \subseteq \mathbf{R}^n$ eine beschränkte offene Menge mit $tr(R) \subseteq B$. Sei A eine Vereinigung endlich vieler kompakter Quader in $V \cap B$ mit $V_n(V \cap B) - V_n(A) < \frac{\varepsilon}{2 \cdot M}$, wobei $|R| \le M$.

Dann ist $S := \mathbf{1}_A R$ eine Treppenfunktion mit Träger in $A \subseteq V$, für die

$\|\mathbf{1}_V R - S\|_1 = \|\mathbf{1}_{V \cap B} R - \mathbf{1}_A R\|_1 \le M \cdot \big(V_n(V \cap B) - V_n(A)\big) < \frac{\varepsilon}{2}$, so daß

$\|f_V - S\|_1 \le \|f_V - \mathbf{1}_V R\|_1 + \|\mathbf{1}_V R - S\|_1 < \varepsilon$. q.e.d.

Wir kommen zum angekündigten Transformationssatz:

(4.28) ***Satz:*** (**Transformationssatz**):

Seien $U, V \subseteq \mathbf{R}^n$ offen, sei T: $U \to V$ ein Diffeomorphismus. Sei f: $V \to \overline{\mathbf{C}}$ eine Funktion. Dann gilt: f ist genau dann über V Lebesgue-integrierbar, wenn $(f \circ T) \cdot |\det(T')|$ über U Lebesgue-integrierbar ist.

In diesem Falle gilt die Substitutionsregel (resp. Transformationsregel)

$$\int_V f(y)\, dy = \int_U f\big(T(x)\big) \cdot \left|\det T'(x)\right| dx$$

Beweis:

„⇒":

Sei f Lebesgue-integrierbar über V. Dann gilt: es gibt eine Folge $(S_k)_k$ von Treppenfunktionen mit

1) $tr(S_k) \subseteq V$
2) $\lim_{k\to\infty} \|T_k - f\|_1 = 0$
3) (eventuell Übergang zu Teilfolge)
   $\lim_{k\to\infty} S_k(x) = f(x)$ für $x \in V \setminus N$

Wir setzen $\tilde{S}_k := (S_k \circ T)\,|\det(T')|$, $k \in \mathbf{N}$, und $\tilde{f} := (f \circ T)\,|\det(T')|$.

Nach Lemma (4.26) sind die Funktionen $\tilde{S}_k$, $k \in \mathbf{N}$, über U Lebesgue-integrierbar und bilden eine L_1-Cauchyfolge, da

$\|\tilde{S}_k - \tilde{S}_l\|_1 = \int_U \left|\tilde{S}_k - \tilde{S}_l\right| dx = \int_V \left|S_k - S_l\right| dy = \|S_k - S_l\|_1$

Außerhalb der Lebesgue-Nullmenge $T^{-1}(N)$ konvergiert $(\tilde{S}_k)_k$ punktweise gegen $\tilde{f}$.

Nach dem Satz von Riesz-Fischer ist $\tilde{f}$ somit Lebesgue-integrierbar, und es gilt

$\int_U \tilde{f}(x)\, dx = \lim_{k\to\infty} \int_U \tilde{S}_k(x)\, dx = \lim_{k\to\infty} \int_V S_k(y)\, dy = \int_V f(y)\, dy$.

„⇐“:

Sei $\tilde{f}$ über K Lebesgue-integrierbar. Das bereits Bewiesene wenden wir auf die Umkehrabbildung T^{-1}: V→U an und erhalten, daß $(\tilde{f} \circ T^{-1})\cdot|\det(T^{-1})'|=f$ über V Lebesgue-integrierbar ist. q.e.d.

(4.29) ***Korollar:*** Sei A: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ eine lineare Transformation, b ∈ $\mathbf{R}^n$. Sei T: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ die durch Tx:=Ax+b gegebene nicht ausgeartete affine Transformation. Ist f über eine Menge $K \subseteq \mathbf{R}^n$ Lebesgue-integrierbar, so ist $f \circ T$ über die Urbildmenge $T^{-1}(K)$ Lebesgue-integrierbar, und es gilt

$$\int_{T^{-1}(K)} f(Ax+b)\,dx = \frac{1}{|\det A|}\int_K f(y)\,dy .$$

Beweis:

Man wende den Transformationssatz auf U=V=$\mathbf{R}^n$ und f_K an; dabei ist zu beachten, daß $f_K \circ T = \left((f\circ T)\right)_{T^{-1}(K)}$ q.e.d.

(4.30) ***Korollar:*** Sei A: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ eine lineare Transformation, b ∈ $\mathbf{R}^n$, sei Tx:=Ax+b nicht ausgeartet. Ist K Lebesgue-meßbar, dann ist auch T(K) Lebesgue-meßbar, und es gilt $V_n\big(T(K)\big) = |\det A|\cdot V_n(K)$.
Insbesondere gilt für A=E_n und Tx=x+b, daß $V_n\big(T(K)\big) = V_n(K)$.

Beispiele:

1) Polarkoordinatentransformation

$y_1 = r\cdot\cos t$, $y_2 = r\cdot\sin t$

T: $[0,R]\times[0,2\pi] \to \overline{K_R(0)}$

Wegen T(0,t) = (0,0) ist T nicht bijektiv

T: $(0,R]\times[0,2\pi) \to K_0:=\{(y_1,y_2) \in \mathbf{R}^2: 0<y_1^2+y_2^2\le R^2\}$

T: $(0,R)\times(0,2\pi) \to M_0:=\{(y_1,y_2) \in \mathbf{R}^2: 0<y_1^2+y_2^2<R^2,\ (y_1,y_2)\neq(y_1,0) \text{ für } y_1>0\}$

$$\det T'(r,t) = \det\begin{pmatrix} \cos t & -r\cdot\sin t \\ \sin t & r\cdot\cos t \end{pmatrix} = r$$

$$\int_{\overline{K_R(0)}} f(y)\,dy = \int_{\overline{K_R(0)}} f(y_1,y_2)\,d(y_1,y_2) = \int_M f(y_1,y_2)\,d(y_1,y_2) = \int_{(0,R)\times(0,2\pi)} f(r\cdot\cos t, r\cdot\sin t)\cdot r\,d(r,t)$$

$$= \int_0^R\left(\int_0^{2\pi} f(r\cdot\cos t, r\cdot\sin t)\cdot r\,dt\right)dr$$

2) Elliptische Koordinaten im $\mathbf{R}^2$

$$\frac{y_1^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}\le R^2 \quad\Rightarrow\quad y_1:=r\cdot a\cdot\cos t \quad , \qquad y_2:=r\cdot b\cdot\sin t$$

$$\text{mit}\quad r\in[0,R]\ ,\ t\in[0,2\pi]$$

$$T\colon [0,R]\times[0,2\pi]\to E:=\left\{(y_1,y_2)\in\mathbf{R}^2\colon \frac{y_1^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}\le R^2\right\}$$

$$\det T'(r,t)=\det\begin{pmatrix} a\cdot\cos t & -r\cdot a\cdot\sin t\\ b\cdot\sin t & r\cdot b\cdot\cos t\end{pmatrix}=a\cdot b\cdot r$$

$$\int_E f(y)\,dy=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R f(r\cdot a\cdot\cos t,\ r\cdot b\cdot\sin t)\cdot a\cdot b\cdot r\,dr\right)dt$$

3) Elliptische Koordinaten im $\mathbf{R}^3$

$$\frac{y_1}{a}:=r\cdot\cos s\cdot\cos t \qquad \frac{y_2}{b}:=r\cdot\sin s\cdot\cos t \qquad \frac{y_2}{b}:=r\cdot\sin t \qquad \text{für } a>0,\ b>0,\ c>0$$

$$r\in[0,R] \quad , \quad s\in[0,2\pi] \quad , \quad t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

$$H:=\left\{(y_1,y_2,y_3)\in\mathbf{R}^3\colon \frac{y_1^2}{a}+\frac{y_2^2}{b}+\frac{y_3^2}{c}\le R^2\right\}$$

$$T\colon [0,R]\times[0,2\pi]\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to H$$

$$\det T'(r,s,t)=\det\begin{pmatrix} a\cdot\cos s\cdot\cos t & -a\cdot r\cdot\sin s\cdot\cos t & -a\cdot r\cdot\cos s\cdot\sin t\\ b\cdot\sin s\cdot\cos t & b\cdot r\cdot\cos s\cdot\cos t & -b\cdot r\cdot\sin s\cdot\cos t\\ c\cdot\sin t & 0 & r\cdot c\cdot\cos t\end{pmatrix}=a\cdot b\cdot c\cdot r^2\cdot\cos t$$

$$\det T'(r,s,t)\ne 0 \Leftrightarrow r>0\ t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int_H f(y)\,dy=\int_0^R\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(a\cdot r\cdot\cos s\cdot\cos t,\ r\cdot b\cdot\sin s\cdot\cos t,\ r\cdot c\cdot\sin t)\cdot a\cdot b\cdot c\cdot r^2\cdot|\cos t|\,dt\right)ds\right)dr$$

$$f=1\colon\quad V_3(H)=a\cdot b\cdot c\cdot\int_0^R\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2\cdot\cos t\,dt\right)ds\right)dr=a\cdot b\cdot c\cdot\int_0^R r^2\,dr\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=\ldots$$

4) Zylinderkoordinaten im $\mathbf{R}^3$

$y_1=a\cdot r\cdot\cos t$, $y_2=b\cdot r\cdot\sin t$, $y_3=x_3$

$r \in [0,R]$, $t \in [0,2\pi]$, $x_3 \in [0,h]$

$T: [0,R]\times[0,2\pi]\times[0,h] \to Z:=\left\{(y_1,y_2,y_3)\in\mathbf{R}^3 : 0\le y_3\le h,\ \frac{y_1^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}\le R^2\right\}$

$$\det T'(r,t,x_3) = \det\begin{pmatrix} a\cdot\cos t & -a\cdot r\cdot\sin t & 0 \\ b\cdot\sin t & b\cdot r\cdot\cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = a\cdot b\cdot r$$

5. Integralsätze im R^3

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt für jede Stammfunktion F auf einem Intervall

$I \in \mathbf{R}$ einer Regelfunktion f: $I \rightarrow \mathbf{R}$ die Beziehung $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ für jedes $a,b \in I$.

Das Integral von F'=f kann also durch Randwerte von F ausgedrückt werden.
In diesem Kapitel soll dieser Sachverhalt in geeigneter Form auf die Situation im Raum übertragen werden. Zu diesem Zweck werden die klassischen Integralsätze von Gauß und Stokes behandelt, die in dem Spezialfall der Ebene der angelsächsischen Tradition folgend als Greenscher Satz bezeichnet werden. Die Gaußschen und Stokesschen Integralsätze – auch in ihren höherdimensionalen Verallgemeinerungen – sind ein unentbehrliches Hilfsmittel des Naturwissenschaftlers und Ingenieurs und ursprünglich aus naturwissenschaftlichen Fragestellungen hervorgegangen.

§ 1 Der Gaußsche Integralsatz in der Ebene

Schon in Kapitel 2 über Kurvenintegrale wurde der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auf Kurvenintegrale exakter Vektorfelder verallgemeinert und die Beziehung (vgl. Satz (2.17)) $\int_\gamma < \text{grad } F, dt > = F(b) - F(a)$ hergeleitet, wobei a der Anfangspunkt und b der Endpunkt der Kurve $\gamma \in \mathbf{R}^n$ ist. Für die Gültigkeit dieser Hauptsätze sind aber gewisse Voraussetzungen zu erfüllen:

1) die zu integrierende Funktion f muß eine Stammfunktion besitzen und deshalb eine bestimmte Form haben, z.B. f = F' oder f = grad F
2) man muß die Eigenschaften des Integranden auf dem Rand kennen
3) der Rand muß orientiert sein, etwa a<b beim Intervall I=[a,b] oder als Anfangspunkt a bzw. Endpunkt b der Kurve γ, so daß a vor b liegt

Der Gaußsche Integralsatz in der Ebene, auch Satz von Green genannt, kann als Verallgemeinerung dieser Hauptsätze für Funktionen von zwei Veränderlichen angesehen werden. Wir werden ihn für sehr einfache Gebiete der Ebene ($\mathbf{R}^2$) nachweisen.
Dazu beschäftigen wir uns zunächst mit der Orientierung des Randes Rd G eines beschränkten Gebietes $G \subseteq \mathbf{R}^2$ und erinnern in diesem Zusammenhang an den Begriff der Kurve im $\mathbf{R}^n$ (vgl. Definition (2.1)).

(5.1) ***Definition:*** Eine Kurve im $\mathbf{R}^n$ mit einer stetigen Parameterdarstellung γ: $[a,b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ heißt **einfach geschlossen**, wenn $\gamma(a)=\gamma(b)$ und $\gamma(s) \neq \gamma(t)$ für $s \neq t$, $s,t \in (a,b)$.

(5.2) ***Definition:*** Sei γ eine einfach geschlossene glatte Kurve im $\mathbf{R}^2$ mit der Parameterdarstellung γ: $[a,b]\to\mathbf{R}^2$, $\gamma(t)=(\gamma_1(t),\gamma_2(t))$. Wir sagen, γ **umlaufe das von ihr eingeschlossene Gebiet $G\subseteq\mathbf{R}^2$ im Gegenuhrzeigersinn** (oder: γ **ist der positiv orientierte Rand von G**), wenn für jeden Punkt $\gamma(t)=(\gamma_1(t),\gamma_2(t),0)\in\mathbf{R}^3$, $t\in[a,b]$, der Tangenteneinheitsvektor $T_\gamma(t)=\dfrac{(\gamma_1'(t),\gamma_2'(t),0)}{\|(\gamma_1'(t),\gamma_2'(t),0)\|}$, der in das Gebiet weisende Normalenvektor $N_\gamma(t)=\dfrac{T_\gamma'(t)}{\|T_\gamma'(t)\|}$ und der Einheitsvektor $e_3=(0,0,1)$ ein Rechtssystem bilden, d.h. $\det(T_\gamma(t),N_\gamma(t),e_3)>0$.

γ ist also ein positiv orientierter Rand von G, wenn G beim Durchlaufen von γ zur Linken liegt. Die positive Orientierung einer stückweise glatten, einfach geschlossenen Kurve läßt sich völlig analog definieren.

In Beispiel 3 nach Satz (3.24) (kleiner Satz von Fubini) haben wir Normalbereiche als Integrationsbereiche für stetige Funktionen untersucht. Dabei wurde $B\subseteq\mathbf{R}^2$ ein **Normalbereich bzgl. x** genannt, wenn
$B=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\colon a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$ mit stetigen Funktionen φ_j: $[a,b]\to\mathbf{R}^2$, $j\in\{1,2,\}$ gilt.
$B\subseteq\mathbf{R}^2$ ist ein **Normalbereich bzgl. y**, wenn $B=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\colon c\le y\le d,\ \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\}$ mit stetigen Funktionen ψ_j: $[c,d]\to\mathbf{R}$, $j\in\{1,2\}$.
Für einen Normalbereich $B\subseteq\mathbf{R}^2$ bzgl. x und bzgl. y lautet der Gaußsche Satz in der Ebene

(5.3) ***Satz:*** (**Gaußscher Integralsatz in der Ebene, Satz von Green**):
Sei $B\subseteq\mathbf{R}^2$ ein Normalbereich bzgl. x und bzgl. y, sei Rd B der positiv orientierte Rand von B. Sei $G\subseteq\mathbf{R}^2$ offen mit $B\subseteq G$. Seien f_j: $G\to\mathbf{R}$ stetig differenzierbar, $j\in\{1,2\}$. Dann gilt für das Vektorfeld $f=(f_1,f_2)$: $G\to\mathbf{R}^2$

$$\int_B \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y}\,d(x,y)=\int_{\mathrm{Rd}\,B}\langle f,dt\rangle.$$

Beweis:

γ= Rd B besteht aus vier Teilkurven γ_1, γ_2, γ_3, γ_4, die, da B ein Normalbereich bzgl. x ist, wie folgt parametrisiert werden können:

γ_1: $[a,b]\to\mathbf{R}^2$ $\quad\gamma_1(t):=(t,\varphi_1(t))$
γ_2: $[0,1]\to\mathbf{R}^2$ $\quad\gamma_2(t):=(b,\varphi_1(b)+t(\varphi_2(b)-\varphi_1(b)))$
γ_3^-: $[a,b]\to\mathbf{R}^2$ $\quad\gamma_3^-(t):=(t,\varphi_2(t))$
γ_4^-: $[0,1]\to\mathbf{R}^2$ $\quad\gamma_4^-(t):=(a,\varphi_1(a)+t(\varphi_2(a)-\varphi_1(a)))$

Da $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}$ stetig auf G, gilt

$$\int_B \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y}\,d(x,y)=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y}\,dy\right)dx=\int_a^b f_1(x,\varphi_2(x))-f_1(x,\varphi_1(x))\,dx$$

$$= \int_a^b f_1(\gamma_3^-(t))dt - \int_a^b f_1(\gamma_1(t))dt = -\int_a^b f_1(\gamma_3(t))dt - \int_a^b f_1(\gamma_1(t))dt$$

Da $\int_0^1 f_1(\gamma_2(t))dt = 0 = \int_0^1 f_1(\gamma_4^-(t))dt$, d.h. die Integrale verschwinden, gilt auf der anderen Seite für das Vektorfeld g(t):=(f_1(t),0): G→$\mathbf{R}^2$

$$\int_{\text{Rd B}} < g, dt > = \sum_{j=1}^{4} \int_{\gamma_j} < g, dt > = \int_{\gamma_1} < g, dt > + \int_{\gamma_3} < g, dt > = \int_a^b f_1(\gamma_1(t))dt + \int_a^b f_1(\gamma_3(t))dt$$

$$\Rightarrow \int_B \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} d(x,y) = -\int_{\text{Rd B}} < g, dt >$$

Da sich B auch als Normalbereich bzgl. y darstellen läßt, erhält man durch analoge Überlegungen die Beziehung

$\int_B \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} d(x,y) = \int_{\text{Rd B}} < h, dt >$ mit dem Vektorfeld h(t):=(0,f_2(t))

Daraus ergibt sich

$$\int_B \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} d(x,y) = \int_{\text{Rd B}} < h, dt > + < g, dt > = \int_{\text{Rd B}} < f, dt > \qquad \text{q.e.d.}$$

Setzen wir für f=(f_1,f_2) das Vektorfeld f(x,y):=(-y,x) ein, so erhalten wir sofort für den Flächeninhalt von B

(5.4) ***Korollar:*** Sei B⊆$\mathbf{R}^2$ ein Normalbereich bzgl. x und bzgl. y und Rd B sein positiv orientierter Rand, so gilt für den Flächeninhalt F(B) von B

$F(B) = \frac{1}{2} \int_{\text{Rd B}} < (-y,x), dt > = \frac{1}{2} \int_a^b \det\begin{pmatrix} \gamma_1(t) & \gamma_2(t) \\ \gamma_1'(t) & \gamma_2'(t) \end{pmatrix} dt$, wenn γ: [a,b]→$\mathbf{R}^2$ mit $\gamma(t)=(\gamma_1(t),\gamma_2(t))$ eine stetig differenzierbare Parameterdarstellung von Rd B ist.

Die beiden letzten Sätze gelten bereits unter weit schwächeren Voraussetzungen über B, nämlich dann, wenn B beschränkt und Rd B eine rektifizierbare, doppelpunktfreie Kurve ist.

Bemerkungen:

1) Ist f=(f_1,f_2): G⊆$\mathbf{R}^2$→$\mathbf{R}^2$ ein Vektorfeld und sind die Vektorfelder g: G→$\mathbf{R}^2$ und h: G→$\mathbf{R}^2$ definiert durch g(x,y):=(f_1(x,y),0) bzw. h(x,y):=(0,f_2(x,y)) für (x,y) ∈ G, so schreibt man für die Integrale $\int_\gamma < g, dt >$ bzw. $\int_\gamma < h, dt >$ auch $\int_\gamma f_1\, dx := \int_\gamma < g, dt >$ bzw. $\int_\gamma f_2\, dy := \int_\gamma < h, dt >$.

   Die Gleichung im Greenschen Satz lautet dann

$$\int_B \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} d(x,y) = \int_{\text{Rd B}} (f_1\, dx + f_2\, dy)$$

2) Für jeden Punkt $(x,y) \in B$ eines Normalbereiches B, der berandet wird von der Kurve Rd B, steht der Vektor $F(x,y) := \big(f_2(x,y), -f_1(x,y)\big)$ senkrecht auf $f(x,y) := \big(f_1(x,y), f_2(x,y)\big)$. Ferner gilt: div $F(x,y) = \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y}$, so daß der Greensche Satz auch in der Form $\int_B \operatorname{div} F(x,y)\, d(x,y) = \int_{\mathrm{Rd}\,B} \langle f, dt \rangle$ geschrieben werden kann.
Diese Gleichung ist Ausgangspunkt der Verallgemeinerung zum Divergenztheorem (=Satz von Gauß im Raum) und läßt folgende Interpretation zu: Die per saldo aus dem Normalbereich über den Rand hinausfließende Flüssigkeitsmenge muß im Inneren von B produziert werden und ist deshalb gleich dem Integral dieser Intensität über B.

3) Identifiziert man das Vektorfeld $f=(f_1,f_2)\colon B \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ mit dem dreidimensionalen Vektorfeld $\tilde{f} := (f_1, f_2, 0)$, so ergibt sich $\operatorname{rot} \tilde{f} = \left(0, 0, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)$. Aus diesem Grund bezeichnet man $\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}$ auch als **zweidimensionale Rotation von f**. Der Greensche Satz erhält dann die Form $\int_B \operatorname{rot} f(x,y)\, d(x,y) = \int_{\mathrm{Rd}\,B} \langle f, dt \rangle = \int_{\mathrm{Rd}\,B} \big(f_1\, dx + f_2\, dy\big)$ und wird Ausgangspunkt einer Verallgemeinerung in Form des Satzes von Stokes im Raum.

§ 2 Flächen und Oberflächenintegrale im Raum

In diesem Abschnitt werden einige Tatsachen bereitgestellt, die zur Gewinnung gewisser Analoga des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung im $\mathbf{R}^3$ benötigt werden. Dazu erinnern wir zunächst an das Kreuzprodukt oder Vektorprodukt zweier Vektoren im $\mathbf{R}^3$. Anschließend wenden wir uns dem Begriff der Fläche im $\mathbf{R}^3$ zu, wobei dieser Begriff jedoch nicht so allgemein gefaßt wird, wie es grundsätzlich möglich und für gewisse Untersuchungen auch notwendig ist, sondern in einer Weise eingeschränkt ist, die dem angestrebten Rahmen angemessen ist.

Für zwei Vektoren $x=(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3$ und $y=(y_1,y_2,y_3) \in \mathbf{R}^3$ ist das **Kreuzprodukt** oder **Vektorprodukt** $x \times y$ durch $x \times y:=(x_2y_3-x_3y_2 , x_3y_1-x_1y_3 , x_1y_2-x_2y_1)$ definiert.
Formal läßt sich diese Definition auch schreiben in der Form

$$x \times y = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}.$$

Für das Vektorprodukt gelten folgende Rechenregeln:
1) $x \times y = -(y \times x)$
2) $x \times x = 0$
3) $(\lambda x) \times y = x \times (\lambda y) = \lambda\, (x \times y)$ für $\lambda \in \mathbf{R}$
4) $x \times (y+z) = (x \times y) + (x \times z)$ für $z=(z_1,z_2,z_3) \in \mathbf{R}^3$
5) $(x+y) \times z = (x \times z) + (y \times z)$ für $z=(z_1,z_2,z_3) \in \mathbf{R}^3$
6) $\langle x , x \times y\rangle = \langle y , x \times y\rangle = 0$

Sind $x: I\to\mathbf{R}^3$ und $y: I\to\mathbf{R}^3$ auf $I\subseteq\mathbf{R}$ definierte $\mathbf{R}^3$-wertige Funktionen, so ist ihr Vektorprodukt $x \times y$ punktweise erklärt: $(x \times y)(t) = x(t) \times y(t)$, für $t \in I$.

Sind x und y auf I differenzierbar, so ist auch $x \times y$ auf I differenzierbar mit

7) $\frac{d}{dt}(x \times y) = \left(x \times \frac{dy}{dt}\right) + \left(\frac{dx}{dt} \times y\right)$

In Kapitel 3.3 wurde eine Teilmenge $A\subseteq\mathbf{R}^n$ als Lebesgue-meßbar bezeichnet, wenn die charakteristische Funktion $\mathbf{1}_A$ auf A Lebsgue-integrierbar ist. Ersetzt man den Lebesgueschen Integralbegriff durch den Integral-begriff nach Riemann, so erhält man Jordan-meßbare Teilmengen des $\mathbf{R}^n$.

(5.5) ***Definition:*** Eine nichtleere beschränkte Teilmenge $B\subseteq\mathbf{R}^n$ heißt **Jordan-meßbar**, wenn die charakteristische Funktion $\mathbf{1}_B$ auf B Riemann-integrierbar ist. In diesem Fall heißt $|B|_n:= \int_B \mathbf{1}_B\, dx$ der **(n-dimensionale) Jordan-Inhalt** von B.

(5.6) ***Satz:*** Eine nichtleere beschränkte Teilmenge $B\subseteq\mathbf{R}^n$ ist genau dann Jordan-meßbar, wenn Rd B eine Lebesgue-Nullmenge ist.

Beweis:

Sei $B\subseteq\mathbf{R}^n$ beschränkt, dann existiert ein kompakter Quader $Q\subseteq\mathbf{R}^n$ mit $\overline{B}\subseteq Q$.
Q ist genau dann Jordan-meßbar, wenn das Riemann-Integral $\int_Q \mathbf{1}_Q\,dx$ existiert.

Nach dem Lebesgueschen Kriterium ist dies genau dann der Fall, wenn die Menge M der Unstetigkeitspunkte von $\mathbf{1}_{B|Q}$ (eingeschränkt auf Q) eine Lebesgue-Nullmenge ist.
Da M=Rd B ist, folgt die Behauptung. q.e.d.

Ähnlich wie früher eine Kurve im $\mathbf{R}^n$ definieren wir eine Fläche im Raum mit Hilfe einer Parameterdarstellung, wobei der Parameterbereich jetzt eine Teilmenge des $\mathbf{R}^2$ ist.

(5.7) ***Definition:*** Sei $G\subseteq\mathbf{R}^2$ eine nichtleere, offene und Jordan-meßbare Menge. Sei $\emptyset\neq K\subseteq G$ kompakt. Unter einer **regulären Fläche S mit dem Parameterbereich K** verstehen wir die Einschränkung $p|_K$ einer C^1-Funktion p: $G\to\mathbf{R}^3$, die injektiv in K ist und deren Funktionalmatrix p'(s,t) für alle $s,t\in G$ den Rang 2 hat.
P(K) heißt die **Spur der Fläche**, p eine **Parameterdarstellung von S**.

Zwischen „Fläche" und „Spur von p" besteht also ein ähnlicher Unterschied wie zwischen „Kurve" und „Spur von γ". Hält man den Parameter t_0 fest, so ist die Funktion $s\mapsto p(s,t_0)$ die Parameterdarstellung einer Kurve auf der Fläche S, sie wird auch die **s-Koordinatenlinie** genannt (t_0=const). Ihr Tangentialvektor ist $\frac{\partial p(s,t_0)}{\partial s}$.
Entsprechend ist $\frac{\partial p(s_0,t)}{\partial t}$ der Tangentialvektor an die t-Koordinatenlinie (s_0=const). Die Rangbedingung in der Definition bedeutet, daß in jedem Flächenpunkt x=p(s,t) (genauer: $(x_1,x_2,x_3)=(p_1(s,t)\,,\,p_2(s,t)\,,\,p_3(s,t))$), $(s,t)\in K$, die Vektoren $\frac{\partial p(s,t)}{\partial s}$ und $\frac{\partial p(s,t)}{\partial t}$ linear unabhängig sind. Die Injektivität von p hat zur Folge, daß die Fläche doppelpunktfrei ist; man spricht dann auch von einer **einfachen Fläche**.
Da die Vektoren $\frac{\partial p(s,t)}{\partial s}$ und $\frac{\partial p(s,t)}{\partial t}$ in jedem Punkt $(s,t)\in K$ linear unabhängig sind, spannen sie dieTangentialebene $x = x_0 + \lambda\cdot\frac{\partial p(s_0,t_0)}{\partial s} + \mu\cdot\frac{\partial p(s_0,t_0)}{\partial t}$, $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ im Punkt $x_0 = (x_{01},x_{02},x_{03}) = p(s_0,t_0)$ auf. Jeder auf dieser Ebene senkrecht stehende, nicht verschwindende Vektor heißt **Normalenvektor von r im Flächenpunkt $p(s_0,t_0)$** oder **Normale an S im Punkt $p(s_0,t_0) = x_0$**. Hat er die Länge 1, so wird dieser **normiert** oder **Normaleneinheitsvektor** genannt. Insbesondere ist das Vektorprodukt $N(s_0,t_0) = \frac{\partial p(s_0,t_0)}{\partial s}\times\frac{\partial p(s_0,t_0)}{\partial t}$ eine Normale an S im Punkt $x_0:=p(s_0,t_0)$, aus der sich der Normaleneinheitsvektor

$$v(s_0,t_0) = \left\|\frac{\partial p(s_0,t_0)}{\partial s}\times\frac{\partial p(s_0,t_0)}{\partial t}\right\|^{-1}\left(\frac{\partial p(s_0,t_0)}{\partial s}\times\frac{\partial p(s_0,t_0)}{\partial t}\right)$$

in diesem Punkt gewinnen läßt. Jeder Punkt $x_0=p(s_0,t_0)$ auf S besitzt genau zwei normierte Normalen, nämlich $v(s_0,t_0)$ und $-v(s_0,t_0)$.

(5.8) ***Definition:*** Der **Flächeninhalt J(S)** einer regulären Fläche $S\subseteq\mathbf{R}^3$ mit der Parameterdarstellung $p\colon K\subseteq\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$, $\emptyset\neq K$ kompakt und Jordan-meßbar, wird definiert durch das Integral $J(S):=\int_K \|N(s,t)\|\,d(s,t)=\int_K\left\|\frac{\partial p(s,t)}{\partial s}\times\frac{\partial p(s,t)}{\partial t}\right\|d(s,t)$.

Der Wert dieses Integrals ist unabhängig von „zulässigen Parameterdarstellungen“ von S.

Beispiele:

1) Ist $f\colon G\to\mathbf{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion auf der offenen, Jordan-meßbare Menge $G\neq\emptyset$ des $\mathbf{R}^2$. Dann ist $S = \operatorname{graph} f = \{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3\colon x_3=f(x_1,x_2),\ (x_1,x_2)\in G\}$ eine Fläche im $\mathbf{R}^3$, für die $p\colon G\to\mathbf{R}^3$ mit $p(s,t):=(s,t,f(s,t))$ für $s,t\in G$ eine Parameterdarstellung ist. Dann gilt

   $\frac{\partial p(s,t)}{\partial s}=\left(1,0,\frac{\partial f(s,t)}{\partial s}\right)$ und $\frac{\partial p(s,t)}{\partial t}=\left(0,1,\frac{\partial f(s,t)}{\partial t}\right)$ und somit

   $N(s,t) = \frac{\partial p(s,t)}{\partial s}\times\frac{\partial p(s,t)}{\partial t}=\left(-\frac{\partial f(s,t)}{\partial s},-\frac{\partial f(s,t)}{\partial t},1\right)\neq(0,0,0)$.

   Der Flächeninhalt von S mit dem Parameterbereich $K\subseteq G$ berechnet sich aus

   $$J(S) = \int_K\left\|\left(-\frac{\partial f(s,t)}{\partial s},-\frac{\partial f(s,t)}{\partial t},1\right)\right\|d(s,t)=\int_K\sqrt{1+\left(\frac{\partial f(s,t)}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial f(s,t)}{\partial t}\right)^2}\;d(s,t)$$

2) Die Kugeloberfläche $S=S_R(0)\subseteq\mathbf{R}^3$ kann beschrieben werden durch die Parameterdarstellung (Stichwort „Kugelkoordinaten“)

   $p\colon[0,2\pi]\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbf{R}^3$ mit $p(s,t):=(R\cdot\cos(s)\cdot\cos(t)\ ,\ R\cdot\sin(s)\cdot\cos(t)\ ,\ R\cdot\sin(t))$

   Dann gilt $\frac{\partial p(s,t)}{\partial s}=(-R\cdot\sin(s)\cdot\cos(t)\ ,\ R\cdot\cos(s)\cdot\cos(t)\ ,\ 0)$

   $\frac{\partial p(s,t)}{\partial t}=(-R\cdot\cos(s)\cdot\sin(t)\ ,\ -R\cdot\sin(s)\cdot\sin(t)\ ,\ R\cdot\cos(t))$

   und $\frac{\partial p(s,t)}{\partial s}\times\frac{\partial p(s,t)}{\partial t} = R\cdot\cos(t)\cdot p(s,t)\neq(0,0,0)$ für $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $R>0$

   sowie $J(S_R(0)) = \int_K\left\|\frac{\partial p(s,t)}{\partial s}\times\frac{\partial p(s,t)}{\partial t}\right\|d(s,t)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\pi}R^2\cdot\cos t\,ds\right)dt$

   $$=2\cdot\pi\cdot R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=4\cdot\pi\cdot R^2$$

3) Die Oberfläche der oberen Halbkugel mit Radius R (ohne die in der x_1,x_2-Ebene liegende Fläche) hat dann die Parameterdarstellung
$[0,2\pi]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to \mathbf{R}^3$ mit $p(s,t):=\big(R\cdot\cos(s)\cdot\cos(t)\ ,\ R\cdot\sin(s)\cdot\cos(t)\ ,\ R\cdot\sin(t)\big)$
Aber auch q: $\overline{K_R(0)}\to\mathbf{R}^3$ mit $q(s,t):=\left(s,t,\sqrt{R^2-(s^2+t^2)}\right)$ für $(s,t)\in\overline{K_R(0)}$
$\left(\overline{K_R(0)}:=\{(s,t)\in\mathbf{R}^2: s^2+t^2\le R^2\}\right)$ ist eine Parameterdarstellung dieser Oberfläche.

Wir kommen nun zu dem wichtigsten Begriff dieses Abschnittes, dem des Oberflächenintegrals. Dabei müssen wir zwischen zwei Arten von Oberflächenintegralen unterscheiden (ähnlich wie beim Kurvenintegral), je nachdem ob der Integrand ein Skalarfeld oder ein Vektorfeld ist.

(5.9) ***Definition:*** (**Oberflächenintegral für Skalarfelder**):
Sei p: $K\to\mathbf{R}^3$ die Parameterdarstellung mit dem Parameterbereich K einer regulären Fläche S. Sei f: $p(K)\to\mathbf{R}$ ein stetiges Skalarfeldauf $p(K)\subseteq\mathbf{R}^3$. Dann heißt
$\int_S f\,d\sigma := \int_K f\big(p(s,t)\big)\left\|\frac{\partial p(s,t)}{\partial s}\times\frac{\partial p(s,t)}{\partial t}\right\|d(s,t)$ das **Oberflächenintegral des Skalarfeldes f über S**.

Auch hier ist nachzuweisen, daß sich der Wert des Integrals $\int_S f\,d\sigma$ bei zulässigen Parametertransformationen nicht ändert.
In Physik und Technik treten Oberflächenintegrale der Form $\int_S f\,d\sigma$ häufig auf. Sie liefern z. B. die Gesamtmasse eines Flächenstückes S, das mit der Masse der (örtlich unterschiedlichen) Flächendichte $f=f(x_1,x_2,x_3)$ belegt ist.

Wir kommen nun zur Definition eines Flächenintegrals für Vektorfelder. Sei $F=(F_1,F_2,F_3)$ ein Vektorfeld und $p=(p_1,p_2,p_3)$: $G\to\mathbf{R}^3$ eine Parameterdarstellung einer Fläche S, dann kann das Skalarprodukt $<F\big(p(s,t)\big),\frac{\partial p(s,t)}{\partial s}\times\frac{\partial p(s,t)}{\partial t}>$ interpretiert werden als die Komponente der Flußdichte F im Punkt p(s,t) in Richtung des Normalenvektors $\frac{\partial p}{\partial s}\times\frac{\partial p}{\partial t}$ im Flächenpunkt. Nun gilt bekanntlich
$\frac{\partial p(s,t)}{\partial s}\times\frac{\partial p(s,t)}{\partial t}=\big(\det J_{23}(s,t)\ ,\ \det J_{31}(s,t)\ ,\ \det J_{12}(s,t)\big)$, wobei

$$J_{ik}(s,t)=\begin{pmatrix}\frac{\partial p_i(s,t)}{\partial s} & \frac{\partial p_i(s,t)}{\partial t}\\ \frac{\partial p_k(s,t)}{\partial s} & \frac{\partial p_k(s,t)}{\partial t}\end{pmatrix} \text{ für } i,k\in\{1,2,3\}.$$

Deshalb läßt sich $<F\big(p(s,t)\big),\frac{\partial p(s,t)}{\partial s}\times\frac{\partial p(s,t)}{\partial t}>$ auch in der Form

$< F, \frac{\partial p}{\partial s} \times \frac{\partial p}{\partial t} > = F_1 \det J_{23} + F_2 \det J_{31} + F_3 \det J_{12}$ schreiben. Dies gibt die Veranlassung zu der folgenden Definition eines Flächenintegrals für Vektorfelder:

(5.10) ***Definition:*** Sei S eine reguläre Fläche mit der Parameterdarstellung p: $K \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $p=(p_1,p_2,p_3)$. Sei F: $G \subseteq \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ mit $F=(F_1,F_2,F_3)$ ein stetiges Vektorfeld auf G mit $K \subseteq G$. Man setzt

$$\int_S F_1\, dx_2 \wedge dx_3 = \int_K F_1(p(s,t)) \det J_{23}(s,t)\, d(s,t)$$

$$\int_S F_2\, dx_3 \wedge dx_1 = \int_K F_2(p(s,t)) \det J_{31}(s,t)\, d(s,t)$$

$$\int_S F_3\, dx_1 \wedge dx_2 = \int_K F_3(p(s,t)) \det J_{12}(s,t)\, d(s,t)$$

und nennt

$$\int_S F_1\, dx_2 \wedge dx_3 + F_2\, dx_3 \wedge dx_1 + F_3\, dx_1 \wedge dx_2 := \int_K F_1\, dx_2 \wedge dx_3 + \int_K F_2\, dx_3 \wedge dx_1 + \int_K F_3\, dx_1 \wedge dx_2$$

das **Oberflächenintegral des Vektorfeldes F über S**.

Hierbei ist bei den „Produkten" $dx_2 \wedge dx_3$, $dx_3 \wedge dx_1$, $dx_1 \wedge dx_2$ auf die Reihenfolge der „Faktoren" zu achten, da z. B. $\det J_{23}(s,t) = -\det J_{32}(s,t)$ und somit $\int_S F_1\, dx_2 \wedge dx_3 = -\int_S F_1\, dx_3 \wedge dx_2$.

Das Oberflächenintegral hängt also (bei festem Integranden) nicht nur von der Spur der Fläche, sondern auch von der Parameterdarstellung der Fläche ab – allerdings in einer einfach zu übersehenden Weise: Es ist invariant unter positivem Parameterwechsel ($\det T' > 0$) und ändert das Vorzeichen bei negativem Parameterwechsel ($\det T' < 0$).

§ 3 Der Stokessche Integralsatz im $\mathbf{R}^3$

Dieser für die Mathematik und Physik wichtige Satz erlaubt es, gewisse Oberflächenintegrale durch Kurvenintegrale auszudrücken. Wir präsentieren den Satz von Stokes in einer sehr einfachen Form, die jedoch für die Praxis in vielen Fällen ausreicht.

(5.11) ***Satz:*** (**Stokes**):
Sei S eine reguläre Fläche im Raum mit einem Parameterbereich $K\subseteq\mathbf{R}^2$, der ein Normalbereich bzgl. x und bzgl. y ist, und einer Parameterdarstellung p: $U\supseteq K\to\mathbf{R}^3$, die auf der offenen Menge U zweimal stetig differenzierbar ist. Der Rand Rd K von K werde durch eine stückweise stetig differenzierbare Parameterdarstellung γ: $[a,b]\to\mathbf{R}^2$ so paramterisiert, daß er positiv orientiert ist. Sei f: $V\subseteq\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Menge $V\subseteq\mathbf{R}^3$ mit $p(K)\subseteq V$. Dann gilt

$$\int_S <\operatorname{rot} f, n> d\sigma = \int_{p\circ\gamma} < f, d\tau >, \text{ wobei } n := \left\|\frac{\partial p}{\partial s}\times\frac{\partial p}{\partial t}\right\|^{-1}\left(\frac{\partial p}{\partial s}\times\frac{\partial p}{\partial t}\right) \qquad \mathbf{(*)}$$

Bemerkungen:

1) Da $\int_S <\operatorname{rot} f, n> d\sigma = \int_K <\operatorname{rot} f\big(p(s,t)\big), \frac{\partial p(s,t)}{\partial s}\times\frac{\partial p(s,t)}{\partial t}> d(s,t)$, läßt sich die Beziehung (*) schreiben in der Form $\int_K <\operatorname{rot} f\big(p(s,t)\big), \frac{\partial p(s,t)}{\partial s}\times\frac{\partial p(s,t)}{\partial t}> d(s,t) = \int_{p\circ\gamma} < f, d\tau >$

2) Da $\operatorname{rot} f = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}-\frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3}-\frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)$, läßt sich (*) auch schreiben in der Form

$$\int_S \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}-\frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right)dx_2\wedge dx_3 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3}-\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right)dx_3\wedge dx_1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)dx_1\wedge dx_2 = \int_{p\circ\gamma} < f, d\tau >$$

<u>Beweis des Satzes von Stokes:</u>

Wir beginnen mit dem Kurvenintegral. Mit $p=(p_1,p_2,p_3)=p(s,t)$ und $\gamma=(\gamma_1, \gamma_2)= \gamma(\tau)$ ergibt sich $\int_{p\circ\gamma} < f, d\tau > = \int_a^b < f\big(p(\gamma(\tau))\big), \frac{d}{d\tau}p(\gamma(\tau)) > d\tau$, wobei

$$\frac{d}{d\tau}p(\gamma(\tau)) = \left(\frac{d}{d\tau}p_1(\gamma(\tau)), \frac{d}{d\tau}p_2(\gamma(\tau)), \frac{d}{d\tau}p_3(\gamma(\tau))\right).$$

Nun gilt für $j\in\{1,2,3\}$

$$\frac{d}{d\tau}p_j(\gamma(\tau)) = \frac{\partial p_j(\gamma(\tau))}{\partial s}\gamma_1'(\tau) + \frac{\partial p_j(\gamma(\tau))}{\partial t}\gamma_2'(\tau), \text{ so daß}$$

mit $\int\limits_{p\circ\gamma} \mathrm{f}_j\, dx_j := \int\limits_{p\circ\gamma} < \mathrm{f}_j \mathrm{e}_j, d\tau > = \int\limits_a^b \mathrm{f}_j(\mathrm{p}(\gamma(\tau)))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{p}_j(\gamma(\tau))d\tau$

(e_j sei der j-te kanonische Einheitsvektor)

und mit der Abkürzung $\tilde{\mathrm{f}}_j := \mathrm{f}_j \circ \mathrm{p}$ dann gilt:

$$\int\limits_{p\circ\gamma} \mathrm{f}_j\, dx_j = \int\limits_a^b \tilde{\mathrm{f}}_j(\gamma(\tau))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{p}_j(\gamma(\tau))d\tau = \int\limits_a^b \tilde{\mathrm{f}}_j(\gamma(\tau))\left(\frac{\partial \mathrm{p}_j(\gamma(\tau))}{\partial \mathrm{s}}\gamma_1{}'(\tau) + \frac{\partial \mathrm{p}_j(\gamma(\tau))}{\partial \mathrm{t}}\gamma_2{}'(\tau)\right)d\tau$$

$$= \int\limits_{\gamma} < \left(\tilde{\mathrm{f}}_j \frac{\partial \mathrm{p}_j}{\partial \mathrm{s}}, \frac{\partial \mathrm{p}_j}{\partial \mathrm{t}}\right), d\tau >$$

Nach dem Gaußschen Integralsatz in der Ebene (5.3) gilt aber

$$\int\limits_{\gamma} < \left(\tilde{\mathrm{f}}_j \frac{\partial \mathrm{p}_j}{\partial \mathrm{s}}, \mathrm{f}_j \frac{\partial \mathrm{p}_j}{\partial \mathrm{t}}\right), d\tau > = \int\limits_{K}\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{s}}\left(\tilde{\mathrm{f}}_j \frac{\partial \mathrm{p}_j}{\partial \mathrm{t}}\right) - \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\left(\tilde{\mathrm{f}}_j \frac{\partial \mathrm{p}_j}{\partial \mathrm{s}}\right)\right)d(s,t).$$

Wir formen nun den Integranden des letzten Integrals um. Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von p_j sind stetig, somit erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{s}}\left(\tilde{\mathrm{f}}_j \frac{\partial \mathrm{p}_j}{\partial \mathrm{t}}\right) - \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\left(\tilde{\mathrm{f}}_j \frac{\partial \mathrm{p}_j}{\partial \mathrm{s}}\right) = \frac{\partial \tilde{\mathrm{f}}_j}{\partial \mathrm{s}} \cdot \frac{\partial \mathrm{p}_j}{\partial \mathrm{t}} + \tilde{\mathrm{f}}_j \frac{\partial^2 \mathrm{p}_j}{\partial \mathrm{s}\partial \mathrm{t}} - \frac{\partial \tilde{\mathrm{f}}_j}{\partial \mathrm{t}} \cdot \frac{\partial \mathrm{p}_j}{\partial \mathrm{t}} - \tilde{\mathrm{f}}_j \frac{\partial^2 \mathrm{p}_j}{\partial \mathrm{s}\partial \mathrm{t}} = \frac{\partial \tilde{\mathrm{f}}_j}{\partial \mathrm{s}} \cdot \frac{\partial \mathrm{p}_j}{\partial \mathrm{t}} - \frac{\partial \tilde{\mathrm{f}}_j}{\partial \mathrm{t}} \cdot \frac{\partial \mathrm{p}_j}{\partial \mathrm{t}}$$

Die Kettenregel liefert für $\frac{\partial \tilde{\mathrm{f}}_j}{\partial \mathrm{s}}$ und $\frac{\partial \tilde{\mathrm{f}}_j}{\partial \mathrm{t}}$ die Gleichungen

$$\frac{\partial \tilde{\mathrm{f}}_j}{\partial \mathrm{s}} = \frac{\partial \mathrm{f}_j}{\partial \mathrm{x}_1}\frac{\partial \mathrm{p}_1}{\partial \mathrm{s}} + \frac{\partial \mathrm{f}_j}{\partial \mathrm{x}_2}\frac{\partial \mathrm{p}_2}{\partial \mathrm{s}} + \frac{\partial \mathrm{f}_j}{\partial \mathrm{x}_3}\frac{\partial \mathrm{p}_3}{\partial \mathrm{s}}$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathrm{f}}_j}{\partial \mathrm{t}} = \frac{\partial \mathrm{f}_j}{\partial \mathrm{x}_1}\frac{\partial \mathrm{p}_1}{\partial \mathrm{t}} + \frac{\partial \mathrm{f}_j}{\partial \mathrm{x}_2}\frac{\partial \mathrm{p}_2}{\partial \mathrm{t}} + \frac{\partial \mathrm{f}_j}{\partial \mathrm{x}_3}\frac{\partial \mathrm{p}_3}{\partial \mathrm{t}}$$

Mit ihnen folgt für j ∈ {1,2,3,}

$$\frac{\partial \tilde{\mathrm{f}}_j}{\partial \mathrm{s}}\frac{\partial \mathrm{p}_j}{\partial \mathrm{t}} - \frac{\partial \tilde{\mathrm{f}}_j}{\partial \mathrm{t}}\frac{\partial \mathrm{p}_j}{\partial \mathrm{s}} = \left(\frac{\partial \mathrm{f}_j}{\partial \mathrm{x}_1}\frac{\partial \mathrm{p}_1}{\partial \mathrm{s}} + \frac{\partial \mathrm{f}_j}{\partial \mathrm{x}_2}\frac{\partial \mathrm{p}_2}{\partial \mathrm{s}} + \frac{\partial \mathrm{f}_j}{\partial \mathrm{x}_3}\frac{\partial \mathrm{p}_3}{\partial \mathrm{s}}\right)\frac{\partial \mathrm{p}_j}{\partial \mathrm{t}} - \left(\frac{\partial \mathrm{f}_j}{\partial \mathrm{x}_1}\frac{\partial \mathrm{p}_1}{\partial \mathrm{t}} + \frac{\partial \mathrm{f}_j}{\partial \mathrm{x}_2}\frac{\partial \mathrm{p}_2}{\partial \mathrm{t}} + \frac{\partial \mathrm{f}_j}{\partial \mathrm{x}_3}\frac{\partial \mathrm{p}_3}{\partial \mathrm{t}}\right)\frac{\partial \mathrm{p}_j}{\partial \mathrm{s}}$$

$$= \frac{\partial \mathrm{f}_j}{\partial \mathrm{x}_1}\left(\frac{\partial \mathrm{p}_1}{\partial \mathrm{s}}\frac{\partial \mathrm{p}_j}{\partial \mathrm{t}} - \frac{\partial \mathrm{p}_1}{\partial \mathrm{t}}\frac{\partial \mathrm{p}_j}{\partial \mathrm{s}}\right) + \frac{\partial \mathrm{f}_j}{\partial \mathrm{x}_2}\left(\frac{\partial \mathrm{p}_2}{\partial \mathrm{s}}\frac{\partial \mathrm{p}_j}{\partial \mathrm{t}} - \frac{\partial \mathrm{p}_2}{\partial \mathrm{t}}\frac{\partial \mathrm{p}_j}{\partial \mathrm{s}}\right) + \frac{\partial \mathrm{f}_j}{\partial \mathrm{x}_3}\left(\frac{\partial \mathrm{p}_3}{\partial \mathrm{s}}\frac{\partial \mathrm{p}_j}{\partial \mathrm{t}} - \frac{\partial \mathrm{p}_3}{\partial \mathrm{t}}\frac{\partial \mathrm{p}_j}{\partial \mathrm{s}}\right)$$

Insbesondere gilt für j=1:

$$\frac{\partial \tilde{\mathrm{f}}_1}{\partial \mathrm{s}}\frac{\partial \mathrm{p}_1}{\partial \mathrm{t}} - \frac{\partial \tilde{\mathrm{f}}_1}{\partial \mathrm{t}}\frac{\partial \mathrm{p}_1}{\partial \mathrm{s}} = -\frac{\partial \mathrm{f}_1}{\partial \mathrm{x}_2}\det\begin{pmatrix}\frac{\partial \mathrm{p}_1}{\partial \mathrm{s}} & \frac{\partial \mathrm{p}_1}{\partial \mathrm{t}}\\ \frac{\partial \mathrm{p}_2}{\partial \mathrm{s}} & \frac{\partial \mathrm{p}_2}{\partial \mathrm{t}}\end{pmatrix} + \frac{\partial \mathrm{f}_1}{\partial \mathrm{x}_3}\det\begin{pmatrix}\frac{\partial \mathrm{p}_3}{\partial \mathrm{s}} & \frac{\partial \mathrm{p}_3}{\partial \mathrm{t}}\\ \frac{\partial \mathrm{p}_1}{\partial \mathrm{s}} & \frac{\partial \mathrm{p}_1}{\partial \mathrm{t}}\end{pmatrix} = -\frac{\partial \mathrm{f}_1}{\partial \mathrm{x}_2}\det \mathrm{J}_{12} + \frac{\partial \mathrm{f}_1}{\partial \mathrm{x}_3}\det \mathrm{J}_{31}$$

Zusammengefaßt ist also für j=1

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\tilde{f}_1 \frac{\partial p_1}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{f}_1 \frac{\partial p_1}{\partial s}\right) = -\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\det J_{12} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\det J_{31}$$

und damit

$$\int_{p\circ\gamma} f_1\, dx_1 = \int_K \left(-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\det J_{12} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\det J_{31}\right) d(s,t) = \int_S -\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\, dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\, dx_3 \wedge dx_1$$

In entsprechender Weise erhält man für j=2 bzw. j=3

$$\int_{p\circ\gamma} f_2\, dx_2 = \int_S -\frac{\partial f_2}{\partial x_3}\, dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\, dx_1 \wedge dx_2$$
$$\int_{p\circ\gamma} f_3\, dx_3 = \int_S -\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\, dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\, dx_2 \wedge dx_3$$

Die Addition der letzten drei Gleichungen liefert dann die gewünschte Behauptung.

q.e.d.

Die physikalische Interpretation des Satzes von Stokes kann wie folgt angegeben werden: Im Falle einer strömenden Flüssigkeit mit dem Geschwindigkeitsfeld v: $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ beschreibt das Integral $\int_{S_r(a)} < v, dt >$ die Zirkulation von v in $S_r(a)$, ein Maß dafür, wie sehr die strömende Flüssigkeit in der gegebenen Richtung um den Kreis $K_r(a) \subseteq \mathbf{R}^2$ rotiert. Der Satz von Stokes besagt dann: Die Zirkulation entlang einer Kurve, die ein Flächenstück umfließt, ist gleich dem Integral über alle Wirbelstärken auf dem Flächenstück, oder umgangssprachlich ausgedrückt: Die Umströmung einer Fläche (Zirkulation genannt) resultiert aus den Wirbeln in den Punkten der Fläche.

§ 4 Der Gaußsche Integralsatz im $\mathbf{R}^3$

Der Gaußsche Integralsatz in der Ebene (Satz (5.3)) ermöglicht es, gewisse Integrale über ebene Bereiche in Kurvenintegrale, also in Integrale über den Rand des Bereiches, zu verwandeln. Der Gaußsche Integralsatz
im $\mathbf{R}^3$ leistet Ähnliches: er lehrt, wie man Integrale bestimmter Bauart über räumliche Bereiche durch Integrale über den Rand des Bereiches, also durch Oberflächenintegrale berechnen kann. Physikalisch gesehen läßt er dieselbe Interpretation zu wie für ebene Bereiche: die per saldo aus einem beschränkten Gebiet des Raumes heraustretende Flüssigkeitsmenge wird im Inneren des Gebietes produziert und ist deshalb gleich dem Integral der (sich örtlich verändernden) Volumenintensität..

Wir formulieren den Gaußschen Integralsatz für sehr einfach zu beschreibende Gebiete im Raum, die wir im folgenden etwas genauer beschreiben wollen:
Sei $K\subseteq\mathbf{R}^2$ eine kompakte, Jordan-meßbare Teilmenge und q: $U\to\mathbf{R}^2$ eine C^1-Funktion auf einer offenen Menge U mit $K\subseteq U$. Wir nennen q eine **Substitutionsfunktion für K**, wenn $q(K)\subseteq\mathbf{R}^2$ Jordan-meßbar ist und für jede stetige Funktion f: $q(K)\to\mathbf{R}$ die Substitutionsregel $\int\limits_{q(K)} f(x_1,x_2)\, d(x_1,x_2) = \int\limits_K f(q(s,t))\left|\det q'(s,t)\right| d(s,t)$ gilt.
Wir erklären nun, was wir unter einem C^1-Normalbereich bzgl. der x_1x_2-Ebene (entsprechend der x_1x_3-Ebene bzw. der x_2x_3-Ebene) verstehen wollen.

(5.12) ***Definition:*** Seien p_j: $K_j\to\mathbf{R}^3$ mit $p_j=(p_{j,1},p_{j,2},p_{j,3})=p_j(s,t)$ für $(s,t)\in K_j$ Parameterdarstellungen zweier Flächen S_j mit den Parameterbereichen K_j, $j\in\{1,2\}$. Die Flächen S_j haben die Eigenschaften:

1) für $j\in\{1,2\}$ ist q_j: $K_j\to\mathbf{R}^2$ mit $q_j(s,t)=(p_{j,1}(s,t)\,,\,p_{j,2}(s,t))$ eine Substitutionsfunktion für K_j
2) $\det q_1'<0$ und $\det q_2'>0$ überall mit Ausnahme einer Jordanschen Nullmenge
3) es gilt $\mathbf{R}^2\supseteq K:=q_1(K_1)=q_2(K_2)$
4) Rd K ist eine stückweise glatte Kurve in der x_1x_2-Ebene
5) Für $j\in\{1,2\}$ gebe es stetige Funktionen φ_j: $K\to\mathbf{R}$, so daß für alle $(s,t)\in K_j$ gilt: $p_{j,3}(s,t) = \varphi_j(p_{j,1}(s,t)\,,\,p_{j,2}(s,t))$
6) für alle $(x_1,x_2)\in K$ gilt $\varphi_1(x_1,x_2)\le\varphi_2(x_1,x_2)$

Dann heißt die Menge $V:=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3\colon \varphi_1(x_1,x_2)\le x_3\le\varphi_2(x_1,x_2)\}$ ein **C^1-Normalbereich bezüglich der x_1x_2-Ebene mit den erzeugenden Flächen S_1 und S_2**, $S_1=p_1(K_1)$ heißt der **untere Deckel** von V und $S_2=p_2(K_2)$ der **obere Deckel** von V.

Beispiele:

1) Sei $Q=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$ ein achsenparalleler Quader. Die erzeugenden Flächen S_1 und S_2 werden beschrieben durch die Parameterdarstellungen
p_1: $K_1:=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\to\mathbf{R}^3$ mit $p_1(s,t):=(s,t,a_3)$
p_2: $K_2:=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\to\mathbf{R}^3$ mit $p_2(s,t):=(s,t,b_3)$

p_j, $j\in\{1,2\}$ ist die konstante Funktion auf $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ mit $\varphi_1(s,t)=a_3$ und $\varphi_2(s,t)=b_3$.

2) Die Kugeloberfläche $S_R(0)$ hat die erzeugenden Flächen S_1 und S_2, beschrieben durch die Parameterdarstellungen

p_1: $K_1:=[0,2\pi]\times\left[-\frac{\pi}{2},0\right]\to\mathbf{R}^3$ mit $p_1(s,t):=\big(R\cdot\cos(s)\cdot\cos(t)\;,\;R\cdot\sin(s)\cdot\cos(t)\;,\;R\cdot\sin(t)\big)$

p_2: $K_2:=[0,2\pi]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbf{R}^3$ mit $p_2(s,t):=\big(R\cdot\cos(s)\cdot\cos(t)\;,\;R\cdot\sin(s)\cdot\cos(t)\;,\;R\cdot\sin(t)\big)$

Die Funktionen φ_j, $j\in\{1,2\}$, sind definiert auf dem Kreis $x_1^2+x_2^2\le R^2$ durch $\varphi_j(x_1,x_2):=(-1)^j\cdot\sqrt{R^2-x_1^2-x_2^2}$.

Nach diesen Vorbereitungen formulieren wir

(5.13) ***Satz:*** (**Gaußscher Integralsatz, Divergenztheorem**):
Sei B ein C^1-Normalbereich bzgl. aller Koordinatenebenen. Sei f: $U\to\mathbf{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf U mit $B\subseteq U$. Dann gilt
$\int\limits_B \operatorname{div} f\, d(x_1,x_2,x_3)=\int\limits_S \langle f,n\rangle\, d\sigma$, wenn S der Rand von B und n die äußere Normale von S ist.

Beweis:

Da $\operatorname{div} f=\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}+\frac{\partial f_3}{\partial x_3}$, zeigen wir nur, daß

$$\int\limits_B \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\, d(x_1,x_2,x_3)=\int\limits_S f_3\, dx_1\wedge dx_2 .$$

Durch analoge Überlegungen erhalten wir

$\int\limits_B \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\, d(x_1,x_2,x_3)=\int\limits_S f_2\, dx_3\wedge dx_1$ und

$\int\limits_B \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\, d(x_1,x_2,x_3)=\int\limits_S f_1\, dx_2\wedge dx_3$, da B ein Normalbereich bzgl. aller Koordinatenebenen ist

$$\int\limits_B \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\, d(x_1,x_2,x_3)=\int\limits_K\left(\int\limits_{\varphi_1(x_1,x_2)}^{\varphi_2(x_1,x_2)}\frac{\partial f_3}{\partial x_3}\, dx_3\right)d(x_1,x_2)$$
$$=\int\limits_K f_3\big(x_1,x_2,\varphi_2(x_1,x_2)\big)d(x_1,x_2)-\int\limits_K f_3\big(x_1,x_2,\varphi_1(x_1,x_2)\big)d(x_1,x_2)$$

Da q_2: $K_2 \to \mathbf{R}^2$ eine Substitutionsfunktion mit det $q_2' > 0$ (bis auf eine Jordan-Nullmenge) ist, gilt

$$\begin{aligned}\int_K f_3(x_1, x_2, \varphi_2(x_1, x_2))\, d(x_1, x_2) &= \int_{q_2(K_2)} f_3(x_1, x_2, \varphi_2(x_1, x_2))\, d(x_1, x_2) \\ &= \int_{K_2} f_3(q_2(s,t), \varphi_2(q_2(s,t))) \det q_2'(s,t)\, d(s,t) \\ &= \int_{K_2} f_3(p_2(s,t)) \det \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{2,1}}{\partial s} & \frac{\partial p_{2,1}}{\partial t} \\ \frac{\partial p_{2,2}}{\partial s} & \frac{\partial p_{2,2}}{\partial t} \end{pmatrix} d(s,t) \\ &= \int_{K_2} f_3\, dx_1 \wedge dx_2\end{aligned}$$

Entsprechend erhält man wegen det $q_1' < 0$

$\int_K f_3(x_1, x_2, \varphi_1(x_1, x_2))\, d(x_1, x_2) = -\int_{K_1} f_3\, dx_1 \wedge dx_2$, so daß

$$\int_B \frac{\partial f_3}{\partial x_3} d(x_1, x_2, x_3) = \int_{K_1} f_3\, dx_1 \wedge dx_2 + \int_{K_2} f_3\, dx_1 \wedge dx_2 .$$

Nach Eigenschaft 4) ist Rd K stückweise glatt und kann dargestellt werden durch die Parameterdarstellung γ: $[a,b] \to \mathbf{R}^2$ mitt $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$; $\gamma(t)$ ist nur in endlich vielen Punkten nicht differenzierbar (da Rd K stückweise glatt ist).
Der vertikale Rand von V kann dann dargestellt werden durch eine Fläche S_3 mit der Parameterdarstellung p_3: $K_3 \to \mathbf{R}^3$ mit $p_3(s,t) := (\gamma_1(s), \gamma_2(s), t)$, wobei
$K_3 := \{(s,t) \in \mathbf{R}^2\text{: } a \le s \le b,\ \varphi_1(\gamma(s)) \le t \le \varphi_2(\gamma(s))\}$.
Die Menge der Punkte, in denen die partielle Ableitung $\frac{\partial p_3}{\partial s}$ nicht existiert, ist gerade die Menge der Punkte, in denen $\gamma(t)$ nicht differenzierbar ist. Diese Menge ist aber eine Jordansche Nullmenge. Setzen wir $p_{3,1}(s,t) := \gamma_1(s)$ und $p_{3,2}(s,t) := \gamma_2(s)$, so gilt (bis auf eine Jordan-Nullmenge)

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{3,1}}{\partial s} & \frac{\partial p_{3,1}}{\partial t} \\ \frac{\partial p_{3,2}}{\partial s} & \frac{\partial p_{3,2}}{\partial t} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \gamma_1'(s) & 0 \\ \gamma_2'(s) & 0 \end{pmatrix} = 0$$

und damit mit $\int_{K_3} f_3\, dx_1 \wedge dx_2 := 0$

$$\int_B \frac{\partial f_3}{\partial x_3} d(x_1, x_2, x_3) = \sum_{j=1}^{3} \int_{K_j} f_3\, dx_1 \wedge dx_2 .$$

Setzen wir $S := S_1 \cup S_2 \cup S_3$, so erhalten wir

$$\int_B \frac{\partial \mathrm{f}_3}{\partial \mathrm{x}_3} d(x_1, x_2, x_3) = \int_S \mathrm{f}_3 \, dx_1 \wedge dx_2 \; .$$

Summation liefert

$$\int_B \mathrm{div}\, \mathrm{f} \; d(x_1, x_2, x_3) = \int_S \mathrm{f}_1 \, dx_2 \wedge dx_3 + \mathrm{f}_2 \, dx_3 \wedge dx_1 + \mathrm{f}_3 \, dx_1 \wedge dx_2 = \int_S < \mathrm{f}, \mathrm{n} > d\sigma$$

nach den Bemerkungen im Anschluß des Satzes von Stokes. q.e.d.