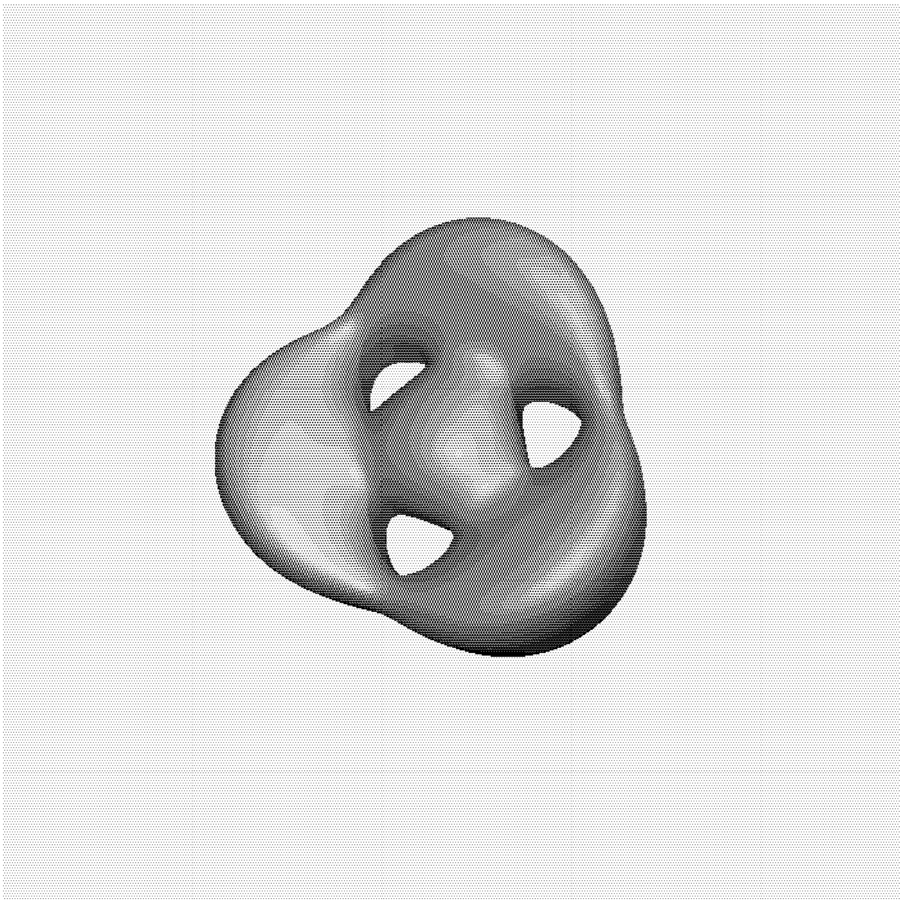
Topologie II

Gert-Martin Greuel



Vorlesung am Fachbereich Mathematik
der Universität Kaiserslautern
Sommersemester 1995
Zeichnungen: H. Holzberger
Ausarbeitung: N. Göb
Korrektur: C. Lossen

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 3

Homologietheorie

Um die (singuläre) Homologie beliebiger, topologischer Räume einführen zu können, benötigen wir algebraische Vorbereitungen, die auch in anderen Bereichen der Mathematik (algebraische Geometrie, kommutative Algebra, Singularitätentheorie, ...) wichtig sind.

3.1 Homologie von Komplexen

3.1.1 Komplexe

Definition:
Sei A ein kommutativer Ring mit Einselement.

1. Eine abelsche Gruppe M heißt ***A*-Modul**, wenn eine Skalar-Multiplikation

$$A \times M \to M, \quad (a, m) \mapsto am,$$

existiert, so daß für alle $a, a_1, a_2 \in A$ und alle $m, m_1, m_2 \in M$ gilt:

$$\begin{aligned} a(m_1 + m_2) &= am_1 + am_2 \\ (a_1 + a_2)m &= a_1 m + a_2 m \\ (a_1 a_2)m &= a_1(a_2 m). \end{aligned}$$

2. Eine Abbildung $f : M \to N$ zwischen A-Moduln heißt ***A*-linear** oder **Homomorphismus**, falls für alle $a \in A$ und alle $m, m_1, m_2 \in M$ gilt:

$$\begin{aligned} f(am) &= af(m), \\ f(m_1 + m_2) &= f(m_1) + f(m_2). \end{aligned}$$

3. $\mathbf{Mod}_{\boldsymbol{A}}$ bezeichne die **Kategorie der *A*-Moduln**. Die Objekte von Mod_A seien A-Moduln, die Morphismen A-lineare Abbildungen.

Beispiel:
$\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}$ ist die Kategorie der abelschen Gruppen.

Definition:
Ein **(absteigender) Komplex von *A*-Moduln** ist eine Folge

$$\cdots \longrightarrow K_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} K_n \xrightarrow{d_n} K_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} K_{n-2} \longrightarrow \cdots$$

von A-Moduln und Homomorphismen, so daß für $i \in \mathbb{Z}$ stets $d_{i-1} \circ d_i = 0$ gilt.

Wir notieren einen Komplex als $(K_i, d_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, $(K_\bullet, d)$ oder $K_\bullet$. Die Folge $(d_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, die wir auch kurz als d notieren, nennen wir das **Differential** des Komplexes.

Der **Nullkomplex 0** sei der Komplex mit $K_i = \{0\}$ für alle $i \in \mathbb{Z}$.

Analog zu absteigenden Komplexen definieren wir einen **aufsteigenden Komplex** als Folge

$$(K^\bullet, d) : \cdots \xrightarrow{d^{n-2}} K^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} K^n \xrightarrow{d^n} K^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \cdots$$

mit $d^i \circ d^{i-1} = 0$ für alle $i \in \mathbb{Z}$.

Definition:
Ist $K_r \xrightarrow{d_r} K_{r-1} \xrightarrow{d_{r-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} K_0$ eine endliche Folge von A-Moduln und Homomorphismen, so daß für $i = 2, \ldots, r$ stets $d_{i-1} \circ d_i = 0$ gilt, so erhalten wir aus dieser Sequenz durch Ergänzen trivialer A-Moduln an den Enden einen Komplex von A-Moduln:

$$\cdots \longrightarrow \{0\} \longrightarrow \{0\} \longrightarrow K_r \xrightarrow{d_r} K_{r-1} \xrightarrow{d_{r-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} K_0 \longrightarrow \{0\} \longrightarrow \{0\} \longrightarrow \cdots .$$

Solch einen Komplex nennen wir **endlich** oder **beschränkt**.

Bemerkung:
Sei $(K_\bullet, d)$ ein Komplex von A-Moduln. Wegen $d_n \circ d_{n+1} = 0$ ist für $n \in \mathbb{Z}$ stets $\mathrm{Im}(d_{n+1}) \subset \mathrm{Ker}(d_n)$. Daher ist $\mathrm{Ker}(d_n)/\mathrm{Im}(d_{n+1})$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$ ein A-Modul.

Definition:
Sei $(K_\bullet, d)$ ein Komplex von A-Moduln und $n \in \mathbb{Z}$. Wir nennen

$$H_n(K_\bullet) := \mathrm{Ker}(d_n)/\mathrm{Im}(d_{n+1})$$

n-te Homologie des Komplexes $(K_\bullet, d)$ (**n-te Homologiegruppe** oder **n-ter Homologiemodul**).

Wir nennen einen Komplex $(K_\bullet, d)$ genau dann **exakt an der Stelle n**, wenn $H_n(K_\bullet) = \{0\}$ ist. Einen Komplex, der an jeder Stelle exakt ist, nennen wir **exakt**.

Analog nennen wir bei einem aufsteigenden Komplex den Quotienten

$$H^n(K^\bullet, d) = \mathrm{Ker}(d^n)/\mathrm{Im}(d^{n-1})$$

die **n-te Kohomologie des Komplexes $(K^\bullet, d)$**.

Definition:
Seien $(K_\bullet, d)$ und $(K'_\bullet, d')$ zwei Komplexe von A-Moduln. Ein **Morphismus $f : K_\bullet \longrightarrow K'_\bullet$** ist eine Familie $f_i : K_i \longrightarrow K'_i$, $i \in \mathbb{Z}$ von Homomorphismen, so daß für $i \in \mathbb{Z}$ stets $d'_i \circ f_i = f_{i-1} \circ d_i$ gilt, d.h. folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{d_{i+2}} & K_{i+1} & \xrightarrow{d_{i+1}} & K_i & \xrightarrow{d_i} & K_{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}} & \cdots \\
 & & f_{i+1}\big\downarrow & \circlearrowleft & f_i\big\downarrow & \circlearrowleft & \big\downarrow f_{i-1} & & \\
\cdots & \xrightarrow{d'_{i+2}} & K'_{i+1} & \xrightarrow{d'_{i+1}} & K'_i & \xrightarrow{d'_i} & K'_{i-1} & \xrightarrow{d'_{i-1}} & \cdots
\end{array}$$

Da $f_i(\mathrm{Ker}(d_i)) \subseteq \mathrm{Ker}(d'_i)$ ist und $f_i(\mathrm{Im}(d_{i+1})) \subseteq \mathrm{Im}(d'_{i+1})$ gilt, induziert f_i einen Homomorphismus

$$\boldsymbol{f_{i*}} : H_i(K_\bullet) \to H_i(K'_\bullet).$$

Bemerkung:
Die Komplexe von A-Moduln mit den Morphismen bilden eine Kategorie $\mathcal{C}_{A\text{-Mod}}$, die die Kategorie Mod_A der A-Moduln mittels

$$M \mapsto (\cdots \{0\} \longrightarrow K_0 = M \longrightarrow \{0\} \cdots)$$

als volle Unterkategorie enthält.

Definition:
Zwei Morphismen $f, g : K_\bullet \to K'_\bullet$ von Komplexen heißen genau dann **homotop** (Notation: $\boldsymbol{f \simeq g}$), wenn für jedes $i \in \mathbb{Z}$ ein Homomorphismus $h_i : K_i \to K'_{i+1}$ existiert, so daß stets

$$f_i - g_i = d'_{i+1} \circ h_i + h_{i-1} \circ d_i$$

gilt. Wir schreiben $h : f \simeq g$. Als (nicht kommutatives) Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_{i+2}"] & K_{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}"] \arrow[dl, dashed, "h_{i+1}"'] \arrow[d, shift right, "f_{i+1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{i+1}"] & K_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[dl, dashed, "h_i"'] \arrow[d, shift right, "f_i"'] \arrow[d, shift left, "g_i"] & K_{i-1} \arrow[r, "d_{i-1}"] \arrow[dl, dashed, "h_{i-1}"'] \arrow[d, shift right, "f_{i-1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{i-1}"] & \cdots \arrow[dl, dashed, "h_{i-2}"'] \\
\cdots \arrow[r, "d'_{i+2}"'] & K'_{i+1} \arrow[r, "d'_{i+1}"'] & K'_i \arrow[r, "d'_i"'] & K'_{i-1} \arrow[r, "d'_{i-1}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Zwei Komplexe $K_\bullet$ und $K'_\bullet$ heißen **homotopieäquivalent**, falls es Morphismen $f : K_\bullet \to K'_\bullet$ und $g : K'_\bullet \to K_\bullet$ gibt, so daß $f \circ g \simeq \mathbf{1}_{K'_\bullet}$ und $g \circ f \simeq \mathbf{1}_{K_\bullet}$ gilt. Die Abbildungen f, g bezeichnen wir als **Homotopie-Inverse**.

Proposition 3.1. *Homotopie von Komplexen ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Seien $f, g, g' : K_\bullet \to K'_\bullet$ Morphismen von Komplexen. Dann gilt offenbar

1. $0 : f \simeq f$.
2. Wenn $h : f \simeq g$, so ist $-h : g \simeq f$.
3. Wenn $h : f \simeq g$ und $h' : g \simeq g'$, so ist $h + h' : f \simeq g'$.

□

Proposition 3.2. *Homotopie von Komplexen ist mit der Komposition von Abbildungen verträglich, d.h. sind $f, g : K_\bullet \to K'_\bullet$, $f'g' : K'_\bullet \to K''_\bullet$ Morphismen von Komplexen mit $f \simeq g$ und $f' \simeq g'$. Dann ist $f \circ f' \simeq g \circ g'$.*

Beweis. Sei $h : f \simeq g$. Dann ist $f' \circ h : f' \circ f \simeq f' \circ g$, denn

$$d''_{i+1} \circ f'_{i+1} \circ h_i + f'_i \circ h_{i-1} \circ d_i = f'_i \circ (d'_{i+1} \circ h_i + h_{i-1} \circ d_i) = f'_i \circ (f_i - g_i) = f'_i \circ f_i - f'_i \circ g_i.$$

Analog folgt aus $h' : f' \simeq g'$, daß $h' \circ g : f' \circ g \simeq g' \circ g$ ist. Aufgrund der Transitivität der Homotopie erhalten wir hieraus die Behauptung. □

Lemma 3.3.

1. *Homotope Abbildungen induzieren dieselbe Abbildung der Homologiegruppen.*
2. *Homotopieäquivalente Komplexe haben isomorphe Homologiegruppen.*

Beweis.

1. Seien $f, g : K_\bullet \to K'_\bullet$ zwei homotope Abbildungen von Komplexen mit $f_n - g_n = d'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n$ für alle n. Sei $[x] \in H_n(K_\bullet)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
f_{n*}([x]) - g_{n*}([x]) &= [f_n(x) - g_n(x)] \\
&= [d'_{n+1}(h_n(x)) - h_{n-1}(d_n(x))] \\
&\overset{x \in \operatorname{Ker}(d_n)}{=} [d'_{n+1}(h_n(x))] \\
&\overset{[\operatorname{Im}(d'_{n+1})]=0}{=} 0.
\end{aligned}$$

2. Sind f, g Homotopie-Inverse, so gilt $f \circ g \simeq \mathbf{1}_{K'_\bullet}$ und $g \circ f \simeq \mathbf{1}_{K_\bullet}$. Nach der ersten Teilbehauptung erhalten wir hieraus für $n \in \mathbb{Z}$ stets $f_{n*} \circ g_{n*} = \mathbf{1}_{H_n(K'_\bullet)}$ und $g_{n*} \circ f_{n*} = \mathbf{1}_{H_n(K_\bullet)}$. Also ist $f_{n*} : H_n(K'_\bullet) \xrightarrow{\cong} H_n(K_\bullet)$ ein Isomorphismus.

□

Bemerkung:
Die Zuordnungen

$$\begin{aligned} H_n : K_\bullet &\mapsto H_n(K_\bullet), \\ H_n : (f : K'_\bullet \to K_\bullet) &\mapsto \big(H_n(f) := f_{n*} : H_n(K'_\bullet) \to H_n(K_\bullet)\big) \end{aligned}$$

definieren einen Funktor, den **n-ten Homologiefunktor**, von der Kategorie $\mathcal{C}_{A\text{-Mod}}$ der Komplexe von A-Moduln in die Kategorie Mod_A der A-Moduln.

Beweis. Offensichtlich. □

3.1.2 Exakte Homologiesequenzen

Definition:
Eine **(kurze) exakte Sequenz von Komplexen** ist eine Folge

$$0 \longrightarrow K'_\bullet \xrightarrow{f} K_\bullet \xrightarrow{g} K''_\bullet \longrightarrow 0$$

von Komplexen von A-Moduln und Komplex-Morphismen, so daß für jedes $i \in \mathbb{Z}$ die Sequenz

$$\{0\} \longrightarrow K'_i \xrightarrow{f_i} K_i \xrightarrow{g_i} K''_i \longrightarrow \{0\}$$

von A-Moduln exakt ist.

Lemma 3.4 (Schlangenlemma). *Sei A ein kommutativer Ring mit Einselement und*

$$\begin{array}{ccccccccc} & & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow & \{0\} \\ & & d'\downarrow & \circlearrowleft & d\downarrow & \circlearrowleft & d''\downarrow & & \\ \{0\} & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{h} & N & \xrightarrow{k} & N'' & & \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von A-Moduln und Homomorphismen mit exakten Zeilen. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \delta : \mathrm{Ker}(d'') &\to \mathrm{Coker}(d'), \\ z'' &\mapsto [h^{-1} \circ d \circ g^{-1}(z'')] \end{aligned}$$

wohldefiniert, und die Kern-Kokern-Sequenz

$$\mathrm{Ker}(d') \xrightarrow{\bar f} \mathrm{Ker}(d) \xrightarrow{\bar g} \mathrm{Ker}(d'') \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}(d') \xrightarrow{\bar h} \mathrm{Coker}(d) \xrightarrow{\bar k} \mathrm{Coker}(d''),$$

wobei $\bar f$, $\bar g$ $\bar h$ und $\bar k$ die von f, g, h bzw. k induzierten Homomorphismen seien, ist eine exakte Sequenz. Ist f zusätzlich injektiv (bzw. k surjektiv), so ist $\bar f$ ebenfalls injektiv (bzw. $\bar k$ surjektiv).

Beweis. Übung, siehe auch Beweis von Satz 3.6. □

Lemma 3.5 (Fünferlemma). *Sei A ein kommutativer Ring mit Einselement und*

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \xrightarrow{g_1} & M_2 & \xrightarrow{g_2} & M_3 & \xrightarrow{g_3} & M_4 & \xrightarrow{g_4} & M_5 \\ d_1\downarrow & \circlearrowleft & d_2\downarrow & \circlearrowleft & d_3\downarrow & \circlearrowleft & d_4\downarrow & \circlearrowleft & d_5\downarrow \\ N_1 & \xrightarrow{h_1} & N_2 & \xrightarrow{h_2} & N_3 & \xrightarrow{h_3} & N_4 & \xrightarrow{h_4} & N_5 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von A-Moduln und Homomorphismen mit exakten Zeilen. Dann gilt:

1. *Ist d_1 surjektiv, sowie d_2 und d_4 injektiv, so ist d_3 injektiv.*
2. *Ist d_5 injektiv, sowie d_2 und d_4 surjektiv, so ist d_3 surjektiv.*

Beweis. Übung. □

Satz 3.6 (lange, exakte Homologiesequenz). *Sei*

$$0 \longrightarrow K'_\bullet \xrightarrow{f} K_\bullet \xrightarrow{g} K''_\bullet \longrightarrow 0$$

*eine exakte Sequenz von Komplexen. Dann ist für alle n die Abbildung (***Randhomomorphismus***)*

$$\begin{array}{rcl} \delta_n : H_n(K''_\bullet) & \to & H_{n-1}(K'_\bullet) \\ [z''] & \mapsto & [f_{n-1}^{-1} \circ d_n \circ g_n^{-1}(z'')] \end{array}$$

wohldefiniert und die folgende Sequenz ist exakt:

$$\cdots \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(K'_\bullet) \xrightarrow{f_{n*}} H_n(K_\bullet) \xrightarrow{g_{n*}} H_n(K''_\bullet) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(K'_\bullet) \xrightarrow{f_{n-1*}} \cdots$$

Beweis. Sei $n \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccccc} \{0\} & \longrightarrow & K'_n & \xrightarrow{f_n} & K_n & \xrightarrow{g_n} & K''_n & \longrightarrow & \{0\} \\ & & \downarrow d'_n & & \downarrow d_n & & \downarrow d''_n & & \\ \{0\} & \longrightarrow & K'_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & K_{n-1} & \xrightarrow{g_{n-1}} & K''_{n-1} & \longrightarrow & \{0\} \end{array}$$

1. Zur Definition von δ_n sei $z'' \in \operatorname{Ker}(d''_n) \subseteq K''_n$, d.h. $[z''] \in H_n(K''_\bullet)$. Aufgrund der Exaktheit ist g_n surjektiv. Wir wählen ein $z \in g_n^{-1}(z'')$ und betrachten $d_n(z)$. Da obiges Diagramm kommutiert, ist $g_{n-1}(d_n(z)) = d''_n(g_n(z)) = d''_n(z'') = 0$. Also gibt es ein $z' \in f_{n-1}^{-1}(z)$, welches aufgrund der Injektivität von f_{n-1} sogar eindeutig bestimmt ist.

   Wir haben also zu jedem $z'' \in \operatorname{Ker}(d''_n)$ ein $z' \in f_{n-1}^{-1}(d_n(g_n^{-1}(z'')))$ gefunden. Wir zeigen nun, daß wir hiermit eine Abbildung $\operatorname{Ker}(d''_n) \to \operatorname{Ker}(d'_{n-1})$ definiert haben. Hierzu berechnen wir

   $$d'_{n-1}(z') = d'_{n-1}(f_{n-1}^{-1}(d_n(z))) = f_{n-2}^{-1}(d_{n-1}(d_n(c))) = 0,$$

   denn obiges Diagramm kommutiert, $d_{n-1} \circ d_n = 0$ und f_{n-1}, f_{n-2} sind injektiv.

   Als nächstes werden wir beweisen, daß unsere Abbildung einen wohldefinierten Homomorphismus $\delta_n : H_n(K''_\bullet) \to H_{n-1}(K'_\bullet)$ induziert, der zudem unabhängig von der Wahl des $z \in g_n^{-1}(z'')$ ist. Daß es sich — im Falle der Wohldefiniertheit — bei δ_n um einen Homomorphismus von A-Moduln handelt, folgt direkt, denn f_{n-1}, d_n und g_n sind Homomorphismen. Zum Beweis der Wohldefiniertheit sei $[z''] = [0] \in H_n(K''_\bullet)$ gegeben, d.h. $z'' = d''_{n+1}(x'')$ für ein $x'' \in K''_{n+1}$. Ist $x \in g_{n+1}^{-1}(x'')$ gegeben (g_{n+1} ist surjektiv), so ist $g_n(d_{n+1}(x)) = d''_{n+1}(g_{n+1}(x)) = d''_{n+1}(x'') = z''$. Wir nennen $\tilde{z} := d_{n+1}(x)$. Ferner sei $z \in g_n^{-1}(z'')$. Dann ist $g_n(z - \tilde{z}) = g_n(z) - g_n(\tilde{z}) = z'' - z'' = 0$. Also ist $z - \tilde{z} \in \operatorname{Ker}(g_n) = \operatorname{Im}(f_n)$, d.h. es gibt ein $x' \in f_n^{-1}(z - \tilde{z})$. Somit ist $z = f_n(x') + \tilde{z}$ und wir erhalten

   $$d_n(z) = d_n(f_n(x')) + d_n(\tilde{z}) = d_n(f_n(x')) + d_n(d_{n+1}(x)) = d_n(f_n(x')) = f_{n-1}(d'_n(x')).$$

   Dies bedeutet jedoch $z' := f_{n-1}^{-1}(d_n(z)) = d'_n(x')$. Also ist $z' \in \operatorname{Im}(d'_n)$, d.h. $\delta_n([z'']) = [z'] = [0] \in H_{n-1}(K'_\bullet)$. Dies beweist die Wohldefiniertheit von δ_n, sowie die Unabhängigkeit von der Wahl des Elements aus $g_n^{-1}(z'')$.

2. Nun werden wir die Exaktheit obiger Sequenz beweisen. Wir betrachten für $n \in \mathbb{Z}$ das kommutative Diagramm

   $$\begin{array}{ccccccccc} \{0\} & \longrightarrow & K'_{n+1} & \xrightarrow{f_{n+1}} & K_{n+1} & \xrightarrow{g_{n+1}} & K''_{n+1} & \longrightarrow & \{0\} \\ & & \downarrow d'_{n+1} & \circlearrowleft & \downarrow d_{n+1} & \circlearrowleft & \downarrow d''_{n+1} & & \\ \{0\} & \longrightarrow & K'_n & \xrightarrow{f_n} & K_n & \xrightarrow{g_n} & K''_n & \longrightarrow & \{0\}. \end{array}$$

   Die Zeilen in diesem Diagramm sind exakt, weshalb wir das Schlangenlemma (Lemma 3.4) anwenden können. Wir erhalten, daß die Sequenz

   $$K'_n/\operatorname{Im}(d'_{n+1}) \to K_n/\operatorname{Im}(d_{n+1}) \to K''_n/\operatorname{Im}(d''_{n+1}) \to \{0\}$$

exakt ist. Daher können wir das Schlangenlemma auch auf das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} & & K'_n/\mathrm{Im}(d'_{n+1}) & \longrightarrow & K_n/\mathrm{Im}(d_{n+1}) & \longrightarrow & K''_n/\mathrm{Im}(d''_{n+1}) & \longrightarrow & \{0\} \\ & & d'_n\downarrow & & d_n\downarrow & & d''_n\downarrow & & \\ \{0\} & \longrightarrow & K'_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & K_{n-1} & \longrightarrow & K_{n-1} & & \end{array}$$

anwenden, welches offensichtlich kommutiert. Folglich ist auch die Sequenz

$$H_n(K'_\bullet) \xrightarrow{f_{n*}} H_n(K_\bullet) \xrightarrow{g_{n*}} H_n(K''_\bullet) \xrightarrow{\delta_n} K'_{n-1}/\mathrm{Im}(d'_n) \longrightarrow K_{n-1}/\mathrm{Im}(d_n) \qquad (*)$$

exakt. Da $\mathrm{Im}(\delta_n) \subseteq \mathrm{Ker}(d'_{n-1})$ ist, wie wir im ersten Beweisteil nachgewiesen haben, muß auch die Sequenz

$$H_n(K'_\bullet) \xrightarrow{f_{n*}} H_n(K_\bullet) \xrightarrow{g_{n*}} H_n(K''_\bullet) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(K'_\bullet) \xrightarrow{f_{n-1*}} H_{n-1}(K_\bullet) \qquad (**)$$

exakt sein, die durch Einschränken aus (*) hervorgeht. Da wir die Exaktheit von (**) somit für jedes $n \in \mathbb{Z}$ nachgewiesen haben, ergibt sich die Behauptung.

□

Definition:
Sei $(K_\bullet, d)$ ein Komplex und für $i \in \mathbb{Z}$ sei $K'_i \subset K_i$ ein Untermodul mit $d_i(K'_i) \subseteq K'_{i-1}$. Dann nennen wir $K'_\bullet = (K'_i, d_i|_{K'_i})_{i\in\mathbb{Z}}$ einen **Unterkomplex** von $K_\bullet$, und

$$K'' := K_\bullet/K'_\bullet = (K_i/K'_i, d'') \text{ mit } d''([x]) = [d(x)]$$

bezeichnen wir als den **Faktor**- oder **Quotientenkomplex** von $K_\bullet$ modulo $K'_\bullet$.

Bemerkung:
Da $0 \to K'_\bullet \to K_\bullet \to K_\bullet/K'_\bullet \to 0$ exakt ist, existiert die lange, exakte Homologiesequenz

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(K_\bullet/K'_\bullet) \xrightarrow{\partial} H_n(K'_\bullet) \longrightarrow H_n(K_\bullet) \longrightarrow H_n(K_\bullet/K'_\bullet) \longrightarrow \cdots.$$

Definition:
Sei $\{0\} \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow \{0\}$ eine exakte Sequenz von A-Moduln. Man sagt, die Sequenz **spaltet**, wenn es einen Isomorphismus

$$\varphi : M' \oplus M'' \xrightarrow{\cong} M$$

von der direkten Summe[1] der Moduln M' und M'' auf M gibt mit $\varphi(x, 0) = f(x)$ für alle $x \in M'$ und $(g \circ \varphi)(x, y) = y$ für alle $(x, y) \in M' \oplus M''$.

Lemma 3.7. *Sei $\{0\} \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow \{0\}$ eine exakte Sequenz von A-Moduln. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Die Sequenz spaltet.*
2. *Es existiert ein Rechtsinverses zu g, d.h. es gibt einen Homomorphismus $k : M'' \to M$, so daß $g \circ k = \mathrm{id}_{M''}$ ist.*
3. *Es existiert ein Linksinverses zu f, d.h. es gibt einen Homomorphismus $h : M \to M'$, so daß $h \circ f = \mathrm{id}_{M'}$ ist.*

Beweis. Übung. □

[1] Die **direkte Summe zweier A-Moduln** ist nichts anderes als deren kartesisches Produkt, versehen mit komponentenweise definierten Operationen. Sind $f : M \to N$, $g : M' \to N'$ zwei A-lineare Abbildungen, so definiert man deren direkte Summe $f \oplus g : M \oplus M' \to N \oplus N'$ vermöge $(m, m') \mapsto (f(m), g(m'))$.

Definition:
Sind $K'_\bullet$ und $K''_\bullet$ zwei Komplexe von A-Moduln, so definieren wir die **direkte Summe** $\boldsymbol{K'_\bullet \oplus K''_\bullet}$ von $K'_\bullet$ und $K''_\bullet$ durch

$$(K_\bullet, d) := (K'_\bullet \oplus K''_\bullet, d' \oplus d''),$$

d.h. wir bilden die direkte Summe komponentenweise: $K_i := K'_i \oplus K''_i$ und $d_i(x', x'') := (d'_i \oplus d''_i)(x', x'') := (d'_i(x'), d''_i(x''))$ für alle $i \in \mathbb{Z}$.

Satz 3.8. *Sei A ein kommutativer Ring mit Einselement.*

1. *Seien $K'_\bullet$ und $K''_\bullet$ zwei Komplexe von A-Moduln. Dann gilt für $n \in \mathbb{Z}$ stets*

$$H_n(K'_\bullet \oplus K''_\bullet) \cong H_n(K'_\bullet) \oplus H_n(K''_\bullet).$$

2. *Sei $K_\bullet$ ein Komplex von A-Moduln, $K'_\bullet$ und $K''_\bullet$ Unterkomplexe von $K_\bullet$, dann gilt:*

   (a) Die Sequenz

$$0 \longrightarrow K'_\bullet \cap K''_\bullet \xrightarrow{i} K'_\bullet \oplus K''_\bullet \xrightarrow{p} K'_\bullet + K''_\bullet \longrightarrow 0$$

   mit $i_n : x \mapsto (x, -x)$ und $p_n : (x, y) \mapsto x + y$ für $n \in \mathbb{Z}$ ist exakt.

   (b) Falls die Inklusion $j_n : K'_\bullet + K''_\bullet \hookrightarrow K_\bullet$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$ einen Isomorphismus

$$j_{n*} : H_n(K'_\bullet + K''_\bullet) \xrightarrow{\cong} H_n(K_\bullet)$$

   induziert, so existiert eine lange, exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(K_\bullet) \xrightarrow{\Delta_n} H_n(K'_\bullet \cap K''_\bullet) \xrightarrow{\mu_n} H_n(K'_\bullet) \oplus H_n(K''_\bullet) \xrightarrow{\nu_n} H_n(K_\bullet) \longrightarrow \cdots . \qquad (*)$$

   mit folgenden Eigenschaften: Seien $j' : K'_\bullet \hookrightarrow K_\bullet$, $j'' : K''_\bullet \hookrightarrow K_\bullet$, $i' : K'_\bullet \cap K''_\bullet \hookrightarrow K'_\bullet$ und $i'' : K'_\bullet \cap K''_\bullet \hookrightarrow K''_\bullet$ die Inklusionen, und sei δ_n der Randhomomorphismus der langen, exakten Homologiesequenz zu $0 \longrightarrow K'_\bullet \cap K''_\bullet \xrightarrow{i} K'_\bullet \oplus K''_\bullet \xrightarrow{p} K'_\bullet + K''_\bullet \longrightarrow 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mu_n([x]) &= ([x], -[x]) := ([i'_n(x)], -[i''_n(x)]), \\ \nu_n([x],[y]) &= [x] + [y] := j_{n*}([x+y]), \\ \Delta_n([z]) &= \delta_n \circ j^{-1}_{n+1*}([z]). \end{aligned}$$

Beweis.

1. Sei $n \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten zunächst die exakte Sequenz

$$\{0\} \longrightarrow K'_n \xrightarrow{i_n} K'_n \oplus K''_n \xrightarrow{p_n} K''_n \longrightarrow \{0\}.$$

   Die Abbildung $p'_n : K''_n \to K'_n \oplus K''_n$, $x'' \mapsto (0, x'')$ stellt ein Rechtsinverses zu p_n dar, d.h. es gilt $p_n \circ p'_n = \mathrm{id}_{K''_n}$. Lemma 3.7 liefert daher, daß obige Sequenz spaltet. Zudem ist $i'_n : K'_n \oplus K''_n \to K'_n$, $(x', y'') \mapsto x'$ ein Linksinverses zu i_n, d.h. $i'_n \circ i_n = \mathrm{id}_{K'_n}$.

   Da $0 \longrightarrow K'_\bullet \xrightarrow{i} K'_\bullet \oplus K''_\bullet \xrightarrow{p} K''_\bullet \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz von Komplexen ist, erhalten wir nach Satz 3.6 die zugehörige lange, exakte Homologiesequenz

$$\cdots \longrightarrow H_n(K'_\bullet) \xrightarrow{i_{n*}} H_n(K'_\bullet \oplus K''_\bullet) \xrightarrow{p_{n*}} H_n(K''_\bullet) \longrightarrow \cdots .$$

   Wegen $i'_{n*} \circ i_{n*} = (i'_n \circ i_n)_* = (\mathrm{id}_{K'_n})_* = \mathrm{id}_{H_n(K'_\bullet)}$ ist i_{n*} injektiv, und $p_{n*} \circ p'_{n*} = (p_n \circ p'_n)_* = (\mathrm{id}_{K''_n})_* = \mathrm{id}_{H_n(K''_\bullet)}$ liefert, daß p_{n*} surjektiv ist. Daher ist die Sequenz

$$\{0\} \longrightarrow H_n(K'_\bullet) \xrightarrow{i_*} H_n(K'_\bullet \oplus K_\bullet) \xrightarrow{p_*} H_n(K''_\bullet) \longrightarrow \{0\}$$

   exakt. Nach Lemma 3.7 spaltet diese Sequenz. Daher gilt

$$H_n(K'_\bullet) \oplus H_n(K''_\bullet) \cong H_n(K'_\bullet \oplus K''_\bullet).$$

2. Übungsaufgabe.

□

Definition:
Die Sequenz (*) aus Satz 3.8 heißt **Mayer-Vietoris-Sequenz**.

3.1.3 Euler-Poincaré-Charakteristik

Die folgenden Beispiele motivieren den Begriff der Euler-Poincaré-Abbildung, den wir anschließend definieren:

1. Sei
$$\{0\} \to V' \to V \to V'' \to \{0\}$$
eine exakte Sequenz von K-Vektorräumen (K sei ein Körper). Es gilt genau dann $\dim_K(V) < \infty$, wenn sowohl $\dim_K(V') < \infty$ als auch $\dim_K(V'') < \infty$ ist. In diesem Fall gilt die Formel
$$\dim_K(V) = \dim_K(V') + \dim_K(V'').$$
2. Sei
$$\{0\} \to G' \to G \to G'' \to \{0\}$$
eine exakte Sequenz abelscher Gruppen. Die Ordnung $\mathrm{ord}(G)$ von G ist genau dann endlich, wenn sowohl $\mathrm{ord}(G') < \infty$ als auch $\mathrm{ord}(G'') < \infty$ ist. In diesem Fall gilt
$$\mathrm{ord}(G) = \mathrm{ord}(G') + \mathrm{ord}(G'').$$
3. Für einen endlich erzeugten $\mathbb{Z}$-Modul M (also eine endliche erzeugte, abelsche Gruppe) gilt $M \cong \mathbb{Z}^r \oplus TM$, wobei TM (der Torsionsmodul von M) eine endliche, abelsche Gruppe ist. r heißt der **Rang von M**. Notation: $\mathbf{rg}(\boldsymbol{M})$:= r.
Ist
$$\{0\} \to M' \to M \to M'' \to \{0\}$$
eine exakte Sequenz abelscher Gruppen, so ist M genau dann endlich erzeugt, wenn sowohl M' als auch M'' endlich erzeugt sind. In diesem Fall gilt
$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(M') + \mathrm{rg}(M'').$$

Definition:
Seien A ein kommutativer Ring mit Einselement, $\mathfrak{K}$ eine Klasse von A-Moduln und $(\Gamma, +)$ eine abelsche Gruppe. Eine Zuordnung $\varphi : \mathfrak{K} \to \Gamma$ heißt genau dann **Euler-Poincaré-Abbildung**, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\{0\} \in \mathfrak{K}$ und es gilt $\varphi(\{0\}) = 0$.
2. Ist
$$\{0\} \to M' \to M \to M'' \to \{0\}$$
eine exakte Sequenz von A-Moduln, so ist genau dann $M \in \mathfrak{K}$, wenn $M', M'' \in \mathfrak{K}$ sind. Weiterhin gilt in diesem Fall
$$\varphi(M) = \varphi(M') + \varphi(M'').$$

Wir erkennen, daß obige Beispiele tatsächlich Euler-Poincaré-Abbildungen beinhalten:

1. Wir setzen $A := K$ Körper, $\varphi := \dim_K$ und $(\Gamma, +) := (\mathbb{Z}, +)$. Damit erkennen wir, daß $\dim_K$ Euler-Poincaré-Abbildung ist.

2. Setzen wir $A := \mathbb{Z}$, $\varphi :=$ ord und $(\Gamma, +) := (\mathbb{Z}, +)$ so erhalten wir, daß auch ord eine Euler-Poincaré-Abbildung darstellt.

3. $A := \mathbb{Z}$, $\varphi :=$ rg, $(\Gamma, +) := (\mathbb{Z}, +)$. Auch rg ist demnach eine Euler-Poincaré-Abbildung.

Definition:
Sei φ eine Euler-Poincaré-Abbildung und $K_\bullet$ ein Komplex von A-Moduln, so daß

$$H_i(K_\bullet) = \{0\}$$

für fast alle $i \in \mathbb{Z}$, d.h. daß es nur endlich viele $i \in \mathbb{Z}$ mit $H_i(K_\bullet) \neq \{0\}$ gibt.

Falls φ für alle $H_i(K_\bullet)$ definiert ist, setzen wir

$$\boldsymbol{\chi_\varphi(HK_\bullet)} := \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \varphi(H_i(K_\bullet)).$$

Wir nennen $\chi_\varphi(HK_\bullet)$ die **Euler(-Poincaré)-Charakteristik** des Komplexes $K_\bullet$.

Satz 3.9. *Sei $K_\bullet$ ein Komplex von A-Moduln und φ eine Euler-Poincaré-Abbildung, so daß $\varphi(K_i)$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ definiert ist. Ferner gelte $\varphi(K_i) = 0$ für fast alle $i \in \mathbb{Z}$, und für fast alle $i \in \mathbb{Z}$ sei $\varphi(H_i(K_\bullet)) = 0$. Dann ist $\chi_\varphi(HK_\bullet)$ definiert und es gilt*

$$\chi_\varphi(HK_\bullet) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \varphi(K_i).$$

Beweis. Das Differential von $K_\bullet$ bezeichnen wir, wie üblich, mit d. An der exakten Sequenz

$$\{0\} \longrightarrow \operatorname{Ker}(d_i) \longrightarrow K_i \xrightarrow{d_i} \operatorname{Im}(d_i) \longrightarrow \{0\} \tag{*}$$

erkennen wir für jedes $i \in \mathbb{Z}$, daß $\varphi(\operatorname{Ker}(d_i))$ und $\varphi(\operatorname{Im}(d_i))$ beide definiert sind, denn $\varphi(K_i)$ ist definiert. Analog liefert die exakte Sequenz

$$\{0\} \longrightarrow \operatorname{Im}(d_{i+1}) \longrightarrow \operatorname{Ker}(d_i) \longrightarrow H_i(K_\bullet) \longrightarrow \{0\} \tag{**}$$

daß $\varphi(H_i(K_\bullet))$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ definiert ist. Also ist $\chi_\varphi(HK_\bullet)$ definiert. Weiter erkennen wir an Sequenz (*), daß

$$\varphi(K_i) = \varphi(\operatorname{Ker}(d_i)) + \varphi(\operatorname{Im}(d_i))$$

ist. Sequenz (**) liefert analog

$$\varphi(H_i(K_\bullet)) = \varphi(\operatorname{Ker}(d_i)) - \varphi(\operatorname{Im}(d_{i+1})).$$

Daher erhalten wir für alle $i \in \mathbb{Z}$

$$\varphi(H_i(K_\bullet)) = \varphi(K_i) - \varphi(\operatorname{Im}(d_i)) - \varphi(\operatorname{Im}(d_{i+1})).$$

In der Summe $\sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \varphi(H_i(K_\bullet))$ fallen die Terme $\varphi(\operatorname{Im}(d_i))$ weg und wir erhalten

$$\chi_\varphi(HK_\bullet) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \varphi(H_i(K_\bullet)) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \varphi(K_i).$$

□

Korollar 3.10. *Sei $K_\bullet$ ein exakter Komplex von A-Moduln und φ eine Euler-Poincaré-Abbildung, so daß $\varphi(K_i)$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ definiert ist. Ferner gelte $\varphi(K_i) = 0$ für fast alle $i \in \mathbb{Z}$. Dann ist $\sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \varphi(K_i) = 0$ („die alternierende Summe der φ's einer langen, exakten Sequenz ist 0“).*

Beweis. Offensichtlich. □

Satz 3.11. *Sei*

$$0 \to K'_\bullet \to K_\bullet \to K''_\bullet \to 0$$

eine exakte Sequenz von Komplexen und φ *eine Euler-Poincaré-Abbildung. Ist* χ_φ *für zwei der drei Komplexe definiert, so auch für den dritten und es gilt*

$$\chi_\varphi(HK_\bullet) = \chi_\varphi(HK'_\bullet) + \chi_\varphi(HK''_\bullet).$$

Beweis. Übung. □

3.1.4 Tensor und Hom

Sind M, N zwei A-Moduln, so sind die A-Moduln $M \oplus N$ (direkte Summe) und $\mathrm{Hom}_A(M,N) = \{f : M \to N \mid f \text{ ist } A\text{-linear}\}$ wohlbekannt. Wir wollen in diesem Abschnitt das Tensorprodukt

$$M \otimes_A N$$

von M und N definieren.

Satz 3.12. *Seien* M, N *zwei* A*-Moduln. Dann existiert ein Paar* (T, g)*, wobei* T *ein* A*-Modul und* $g : M \times N \to T$ *eine bilineare Abbildung*[2] *ist, so daß gilt:*

1. *Für jede bilineare Abbildung* $f : M \times N \to P$ *existiert genau eine lineare Abbildung* $f' : T \to P$*, so daß* $f = f' \circ g$ *gilt. Als Diagramm:*

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & P \\ T \arrow[ur, dashed, "\exists! f'"'] & \end{tikzcd}$$

2. (T, g) *ist bis auf (eindeutig bestimmte) Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Definition:
Seien M, N zwei A-Moduln und (T, g) das Paar aus einem A-Modul T und einer bilinearen Abbildung $g : M \times N \to T$, welches nach Satz 3.12 existiert, und das die **universelle Eigenschaft** besitzt: Für jede bilineare Abbildung $f : M \times N \to P$ existiert genau eine lineare Abbildung $f' : T \to P$, so daß $f = f' \circ g$ ist. Dann nennen wir T das **Tensorprodukt** von M und N, und wir schreiben $\boldsymbol{M \otimes_A N}$ statt T.

Beweis von Satz 3.12. Wir beweisen zunächst die Eindeutigkeit des Tensorprodukts: Sei (T', g') ein weiteres Tensorprodukt von M und N. Da $g : M \times N \to T$ bilinear und (T', g') ein Tensorprodukt ist, gibt es genau eine lineare Abbildung $f' : T' \to T$ mit $g = f' \circ g'$. Andererseits ist (T, g) ein Tensorprodukt und g' bilinear, d.h. es gibt auch genau einen Homomorphismus $f : T \to T'$ mit $g' = f \circ g$. Daher ist $g = f' \circ g' = f' \circ (f \circ g) = (f' \circ f) \circ g$. Da g bilinear und (T, g) ein Tensorprodukt ist, muß $f' \circ f$ die eindeutig bestimmte lineare Abbildung $T \to T$ mit $g = (f' \circ f) \circ g$ sein. Wegen $g = \mathrm{id}_T \circ g$ liefert die Eindeutigkeit $f' \circ f = \mathrm{id}_T$. Analog läßt sich $f \circ f' = \mathrm{id}_{T'}$ beweisen. Daher ist $f : T \to T'$ ein Isomorphismus, d.h. $T \cong T'$.

$$\begin{tikzcd} & M \times N \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "g'"] & \\ T \arrow[rr, dashed, shift left, "f"] & & T' \arrow[ll, dashed, shift left, "f'"] \end{tikzcd}$$

[2]Seien M, N, T drei A-Moduln. Dann nennen wir eine Abbildung $g : M \times N \to T$ **bilinear**, wenn sie in jedem Argument linear ist: $g(m + m', n) = g(m, n) + g(m', n)$, $g(m, n + n') = g(m, n) + g(m, n')$ und $g(a \cdot m, n) = a \cdot g(m, n) = g(m, a \cdot n)$ für alle $m, m' \in M$, alle $n, n' \in N$ und alle $a \in A$.

Wir wenden uns nun dem Beweis der Existenz des Tensorprodukts zu. $C := A^{(M\times N)}$ sei der freie A-Modul[3] über $M \times N$. Dann hat jedes Element $z \in C$ eine (eindeutige) Darstellung

$$z = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_i, y_i)$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in A \setminus \{0\}$, $x_i \in M$, $y_i \in N$. Weiter sei $D \subseteq C$ der Untermodul, der von allen Elementen der Form

$$\begin{aligned}
&(x + x', y) - (x, y) - (x', y)\\
&(x, y + y') - (x, y) - (x, y')\\
&\quad (ax, y) - a(x, y)\\
&\quad (x, ay) - a(x, y)
\end{aligned}$$

erzeugt wird. Wir setzen $T := C/D$. Für $(x, y) \in M \times N \subseteq C$ schreiben wir $x \otimes y$ für die Restklasse von (x, y) in T. Dann gilt für alle $x, x' \in M$ und alle $y, y' \in N$

$$\begin{array}{lcl}
(x + x') \otimes y &=& x \otimes y + x' \otimes y,\\
x \otimes (y + y') &=& x \otimes y + x \otimes y',\\
(ax) \otimes y &=& a(x \otimes y) = x \otimes (ay).
\end{array} \qquad (*)$$

Somit ist die Projektion $g : M \times N \to T$, $(x, y) \mapsto x \otimes y$ bilinear.

Sei $f : M \times N \to P$ eine bilineare Abbildung. Wir definieren zunächst eine Fortsetzung $\tilde{f} : C \to P$. Sei dazu ein $z \in C$ gegeben. Dieses hat eine eindeutige Darstellung

$$z = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_i, y_i)$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in A \setminus \{0\}$, $(x_i, y_i) \in M \times N$. Daher ist die Zuordnung

$$\tilde{f}(z) := \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot f(x_i, y_i)$$

wohldefiniert, d.h. wir erhalten eine Abbildung $\tilde{f} : C \to P$. Diese ist offensichtlich linear. Da f bilinear ist, verschwindet $\tilde{f}$ auf den Erzeugern von D, d.h. für alle $z \in D$ gilt $\tilde{f}(z) = 0$. Somit induziert $\tilde{f}$ eine lineare Abbildung $f' : T \to P$ mit $f = f' \circ g$. Da $\tilde{f}$ eindeutig durch f bestimmt ist, ist auch f' eindeutig durch f bestimmt. □

Bemerkung:
Die Elemente $x \otimes y \in M \otimes_A N$, $x \in M$, $y \in N$ erzeugen $M \otimes_A N$. Daher besitzt jedes Element $z \in M \otimes_A N$ eine Darstellung als endliche Summe

$$z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \text{ mit } x_i \in M \text{ und } y_i \in N \text{ für alle } i = 1, \ldots, n.$$

Diese Darstellung ist jedoch wegen $(*)$ nicht eindeutig bestimmt.

Beispiele:

1. Für $A := \mathbb{Z}$, $M := \mathbb{Z}$, $N := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ erhalten wir den Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\\
n \otimes [m] = 1 \otimes [n \cdot m] & \longmapsto & [n \cdot m].
\end{array}$$

[3] Ist A ein kommutativer Ring mit Einselement und $\{M_i\}_{i\in I}$ eine Familie von A-Moduln, so definiert man $\bigoplus_{i\in I} M_i := \{(m_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i \mid m_i \neq 0$ für höchstens endlich viele $i \in I\}$. Auf dieser Menge definieren wir die Operationen komponentenweise, und wir erhalten einen A-Modul, den wir als die **direkte Summe** der M_i bezeichnen. Ist M eine beliebige Menge, $A \cdot m := A$ für alle $m \in M$, so ist $\{A \cdot m\}_{m\in M}$ eine solche Familie von A-Moduln, und wir nennen $A^{(M)} := \bigoplus_{m\in M} A \cdot m$ den **freien A-Modul über M**. Die Elemente von $A^{(M)}$ lassen sich eindeutig schreiben als endliche Linearkombinationen $\sum a_m \cdot m$.

2. Es gilt $(2\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \{0\}$, denn $(2 \cdot n) \otimes [m] = 1 \otimes [2nm] = 1 \otimes 0 = 0$ für alle $m, n \in \mathbb{Z}$.

Proposition 3.13. *Seien M, N, P drei A-Moduln und $\{M_i\}_{i\in I}$ eine Familie von A-Moduln. Dann existieren folgende Isomorphismen:*

$$\begin{aligned}
M \otimes_A N &\xrightarrow{\cong} N \otimes_A M, & x \otimes y &\mapsto y \otimes x,\\
(M \otimes_A N) \otimes_A P &\xrightarrow{\cong} M \otimes_A (N \otimes_A P), & (x \otimes y) \otimes p &\mapsto x \otimes (y \otimes p),\\
(\bigoplus_{i\in I} M_i) \otimes_A P &\xrightarrow{\cong} \bigoplus_{i\in I} (M_i \otimes_A P), & (x_i)_{i\in I} \otimes p &\mapsto (x_i \otimes p)_{i\in I},\\
A \otimes_A M &\xrightarrow{\cong} M, & a \otimes x &\mapsto ax.
\end{aligned}$$

Beweis der Isomorphie $A \otimes_A M \cong M$. Nach Satz 3.12 erhalten wir zunächst die Wohldefiniertheit der Abbildung $f : A \otimes_A M \to M$, $a \otimes x \mapsto ax$, denn die Abbildung $A \times M \to M$, $(a, x) \mapsto ax$ ist offenbar bilinear. Wir beweisen nun, daß f ein Isomorphismus ist, indem wir einen inversen Homomorphismus angeben. Sei

$$g : M \to A \otimes_A M, \quad x \mapsto 1 \otimes x.$$

Damit ist g linear und $f \circ g = \mathrm{id}_M$. Weiter gilt für alle $\sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i \in A \otimes_A M$:

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(\sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i) &= g(\sum_{i=1}^n a_i x_i)\\
&= 1 \otimes (\sum_{i=1}^n a_i x_i)\\
&= \sum_{i=1}^n 1 \otimes (a_i x_i)\\
&= \sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i
\end{aligned}$$

Also ist $g \circ f = \mathrm{id}_{A\otimes_A M}$, d.h. f ist ein Isomorphismus.

Die übrigen Isomorphien können analog bewiesen werden (Übung). □

Bemerkung:
Vorsicht: Das Tensorprodukt von $M \otimes_A N$ hängt vom Ring A ab, wie aus folgendem Beispiel ersichtlich ist: Sei K ein Körper. Wie üblich bezeichnen wir mit $K[X]$ und $K[X, Y]$ die Polynomringe über K. Man kann leicht nachvollziehen, daß

$$K[X] \otimes_K K[X] \cong K[X] \otimes_K K[Y] \cong K[X, Y]$$

gilt. Dagegen liefert Proposition 3.13, daß $K[X] \otimes_{K[X]} K[X] \cong K[X] \ncong K[X, Y]$ ist.

Definition:
Seien M, M', N, N' vier A-Moduln und $f : M \to M'$, $g : N \to N'$ Homomorphismen von A-Moduln. Dann definieren wir den Homomorphismus

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f \otimes g} : M \otimes_A N &\to M' \otimes_A N'\\
m \otimes n &\mapsto f(m) \otimes g(n)
\end{aligned}$$

komponentenweise.

Sind M, N zwei A-Moduln, so sind

$$\begin{aligned}
M \otimes_A - &: \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_A, \quad N \mapsto M \otimes_A N, \quad \varphi \mapsto \mathrm{id}_M \otimes \varphi,\\
- \otimes_A N &: \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_A, \quad M \mapsto M \otimes_A N \quad \psi \mapsto \psi \otimes \mathrm{id}_N
\end{aligned}$$

zwei (kovariante) Funktoren. Hierbei bezeichnet Mod_A die Kategorie der A-Moduln. Wir fassen beide Aussagen zusammen und nennen

$$- \otimes_A - : \mathrm{Mod}_A \times \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_A \quad (M, N) \mapsto M \otimes_A N$$

einen **Bi-Funktor**. Ähnlich definiert man Tri-Funktoren, usw.

Neben dem Tensorprodukt betrachten wir für A-Moduln M, N auch die Hom-Funktoren

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_A(M, -) : \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_A, &\quad N \mapsto \mathrm{Hom}_A(M, N), \quad \varphi \mapsto \varphi_*, \quad \varphi_*(\alpha) := \varphi \circ \alpha, \\ \mathrm{Hom}_A(-, N) : \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_A &\quad M \mapsto \mathrm{Hom}_A(M, N), \quad \psi \mapsto \psi^*, \quad \psi^*(\beta) := \beta \circ \psi. \end{aligned}$$

Dabei ist $\mathrm{Hom}_A(M, -)$ ein kovarianter, und $\mathrm{Hom}_A(-, N)$ ein kontravarianter Funktor. Wir fassen auch diese beiden Funktoren zusammen zu einem Bi-Funktor

$$\mathrm{Hom}_A(-, -) : \mathrm{Mod}_A \times \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_A \quad (M, N) \mapsto \mathrm{Hom}_A(M, N).$$

Zwischen den Bi-Funktoren Hom_A und $\otimes_A$ besteht folgende Beziehung:

Lemma 3.14. *Es existiert eine natürliche Äquivalenz der Tri-Funktoren*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_A(- \otimes_A -, -) : (\mathrm{Mod}_A \times \mathrm{Mod}_A) \times \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_A \ \textit{und} \\ \mathrm{Hom}_A(-, \mathrm{Hom}_A(-, -)) : \mathrm{Mod}_A \times (\mathrm{Mod}_A \times \mathrm{Mod}_A) \to \mathrm{Mod}_A, \end{aligned}$$

d.h. für alle A-Moduln M_1, M_2, N existiert ein Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_A(M_1 \otimes_A M_2, N) \cong \mathrm{Hom}_A(M_1, \mathrm{Hom}_A(M_2, N)),$$

der mit allen Homomorphismen $M_1 \to M_1'$, $M_2 \to M_2'$ und $N \to N'$ kommutiert.

Beweis. Die Menge $\mathrm{Bilin}_A(M_1 \times M_2, N)$ der bilinearen Abbildungen $M_1 \times M_2 \to N$ ist natürlich isomorph zu $\mathrm{Hom}_A(M_1, \mathrm{Hom}_A(M_2, N))$ vermöge

$$\begin{aligned} \mathrm{Bilin}_A(M_1 \times M_2, N) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M_1, \mathrm{Hom}_A(M_2, N)) \\ (\varphi : M_1 \times M_2 \longrightarrow N) &\longmapsto (\tilde{\varphi} : M_1 \to \mathrm{Hom}_A(M_2, N),\ m_1 \mapsto \varphi(m_1, -)). \end{aligned}$$

Aus der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes ergibt sich der natürliche Isomorphismus $\mathrm{Hom}_A(M_1 \otimes_A M_2, N) \cong \mathrm{Bilin}_A(M_1 \times M_2, N)$. □

Definition:
Sei A ein kommutativer Ring mit Einselement. Ein Funktor

$$F : \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Ab}$$

heißt **additiv**, wenn für je zwei A-Moduln M, N und je zwei A-lineare Abbildungen $f, g \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ stets $F(f + g) = F(f) + F(g)$ gilt.

Korollar 3.15. *Sei A ein kommutativer Ring mit Einselement und $F : \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Ab}$ ein additiver Funktor. Dann gilt:*

1. *Für je zwei A-Moduln M, N ist das Bild der Nullabbildung $0 : M \to N$, $m \mapsto 0$ stets $F(0) = 0$.*
2. *Es ist $F(\{0\}) = \{0\}$.*

Beweis. Offenbar gilt für die Nullabbildung $0 = 0 + 0$. Wegen der Additivität von F ergibt sich $F(0) = F(0 + 0) = F(0) + F(0)$, d.h. $F(0) = 0$. Dies beweist die erste Teilbehauptung.

Offenbar gilt genau dann $\mathrm{id}_M = 0$, wenn $M = \{0\}$ ist. Da F ein Funktor ist, gilt $F(\mathrm{id}_{\{0\}}) = \mathrm{id}_{F(\{0\})}$. Nach der ersten Teilbehauptung ist andererseits $F(\mathrm{id}_{\{0\}}) = F(0) = 0$, d.h. $\mathrm{id}_{F(\{0\})} = 0$. Also ist $F(\{0\}) = \{0\}$. □

Lemma 3.16. *Sei A ein kommutativer Ring mit Einselement, $F : \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Ab}$ ein additiver Funktor und $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_k \in \mathrm{Mod}_A$. Dann ist*

$$F(M) = F(M_1) \oplus \cdots \oplus F(M_k).$$

Beweis. Seien $i_\nu : M_\nu \to M$ für $\nu = 1, \ldots, k$ die Inklusionen. Daß $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_k$ eine direkte Summe ist, ist gleichbedeutend mit der Existenz der Projektionen $p_\nu : M \to M_\nu$ für $\nu = 1, \ldots, k$ für die gilt:

1. $p_\nu \circ i_\nu = \mathrm{id}_{M_\nu}$ für alle $\nu = 1, \ldots, k$.
2. $p_\nu \circ i_\mu = 0$ für alle $\mu, \nu = 1, \ldots, k$ mit $\mu \neq \nu$.
3. $\sum_{\nu=1}^k i_\nu \circ p_\nu = \mathrm{id}_M$.

Da F ein Funktor ist, erhalten wir $F(p_\nu) \circ F(i_\nu) = F(p_\nu \circ i_\nu) = \mathrm{id}_{F(M_\nu)}$ für alle $\nu = 1, \ldots, k$. Da F zudem additiv ist, liefert Korollar 3.15 $F(p_\nu) \circ F(i_\mu) = F(p_\nu \circ i_\mu) = 0$ für $\mu, \nu = 1, \ldots, k$ mit $\mu \neq \nu$. Weiterhin liefern Additivität und Funktoreigenschaft $\sum_{\nu=1}^k F(i_\nu) \circ F(p_\nu) = F\left(\sum_{\nu=1}^k i_\nu \circ p_\nu\right) = \mathrm{id}_{F(M)}$. Also ist $F(M) = F(M_1) \oplus \cdots \oplus F(M_k)$. □

Wir untersuchen nun das Verhalten von Hom_A und $\otimes_A$ bei exakten Sequenzen.

Definition:
Sei A ein kommutativer Ring mit Einselement. Ein additiver Funktor

$$F : \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Ab}$$

von der Kategorie der A-Moduln in die Kategorie der abelschen Gruppen heißt **exakt**, falls F exakte Sequenzen in exakte Sequenzen überführt.

Die homologische Algebra verdankt ihre Existenz zum großen Teil der Tatsache, daß weder Hom noch $\otimes_A$ exakte Funktoren sind.

Beispiele:

1. $\mathrm{Hom}_A(M, -)$ ist im allgemeinen nicht exakt: Wenden wir $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, -)$ auf die exakte Sequenz

   $$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \{0\}$$

   von $\mathbb{Z}$-Moduln an, so erhalten wir $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \{0\}$. Andererseits ist $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \neq \{0\}$. Somit ist

   $$\{0\} = \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \{0\}$$

   keine exakte Sequenz, d.h. der Funktor $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, -)$ ist nicht exakt.
2. Auch $\mathrm{Hom}_A(-, N)$ ist im allgemeinen nicht exakt: Wir wenden $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(-, \mathbb{Z})$ auf die exakte Sequenz

   $$\{0\} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$$

   an und erhalten $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, aber $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = \{0\}$.
3. $N \otimes_A -$ und $- \otimes_A M$ sind im allgemeinen nicht exakt: Wegen der Symmetrie von $- \otimes_A -$ genügt es, nur einen der beiden Funktoren zu betrachten. Wenden wir $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes_\mathbb{Z} -$ auf die exakte Sequenz

   $$\{0\} \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}$$

   an, so erhalten wir die Sequenz

   $$\{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

   Diese ist nicht exakt, da die Multiplikation mit 2 den Modul $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ auf $\{0\}$ abbildet.

Definition:
Sei A ein kommutativer Ring mit Einselement und $F : \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Ab}$ ein additiver, kovarianter Funktor. F heißt **linksexakt**, wenn für jede exakte Sequenz $\{0\} \to M' \to M \to M''$ von A-Moduln auch deren Bild

$$\{0\} \to F(M') \to F(M) \to F(M'')$$

unter F exakt ist.

F heißt **rechtsexakt**, wenn F jede exakte Sequenz $M' \to M \to M'' \to \{0\}$ in eine exakte Sequenz $F(M') \to F(M) \to F(M'') \to \{0\}$ überführt.

Ein additiver, kontravarianter Funktor $G : \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Ab}$ heißt **linksexakt**, wenn G jede exakte Sequenz $M' \to M \to M'' \to \{0\}$ in eine exakte Sequenz $\{0\} \to G(M'') \to G(M) \to G(M')$ überführt. G heißt **rechtsexakt**, wenn das Bild $G(M'') \to G(M) \to G(M') \to \{0\}$ einer exakten Sequenz $\{0\} \to M' \to M \to M''$ unter G stets exakt ist.

Proposition 3.17. *Sei A ein kommutativer Ring mit Einselement und N ein A-Modul. Dann gilt:*

1. *Die Funktoren* $\mathrm{Hom}(-, N)$ *und* $\mathrm{Hom}(N, -)$ *sind linksexakt.*
2. *Die Funktoren* $- \otimes_A N$ *und* $N \otimes_A -$ *sind rechtsexakt.*

Beweis. Die erste Teilbehauptung ist leicht nachzuvollziehen. Wir beweisen lediglich die zweite Teilbehauptung. Daß $- \otimes_A N$ additiv ist, folgt direkt aus der Bilinearität des Tensorprodukts. Sei

$$M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow \{0\}$$

eine exakte Sequenz von A-Moduln. Wir betrachten zunächst für jeden A-Modul P den Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_A(- \otimes_A N, P) \cong \mathrm{Hom}_A(-, \mathrm{Hom}_A(N, P)),$$

den Lemma 3.14 garantiert. Mit der ersten Teilbehauptung folgt, daß die Sequenz

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M'' \otimes_A N, P) \xrightarrow{\psi^*} \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, P) \xrightarrow{\varphi^*} \mathrm{Hom}_A(M' \otimes_A N, P) \tag{*}$$

für jedes P exakt ist.

Wähle $P = \mathrm{Coker}(\psi \otimes \mathrm{id}_N)$, und $\pi : M'' \otimes_A N \to P$ sei die Restklassenabbildung. Dann folgt $\psi^*(\pi) = 0$, also $\pi = 0$, denn ψ^* ist injektiv. Dies jedoch bedeutet, daß $\psi \otimes \mathrm{id}_N$ surjektiv ist.

Wähle nun $P = \mathrm{Coker}(\varphi \otimes \mathrm{id}_N)$ und $\pi : M \otimes_A N \to P$ die Restklassenabbildung. Um den Beweis der Exaktheit abzuschließen, genügt es, einen Isomorphismus α zu konstruieren, so daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
M' \otimes_A N \arrow[r, "\varphi\otimes\mathrm{id}_N"] \arrow[d, equal] & M \otimes_A N \arrow[r, "\psi\otimes\mathrm{id}_N"] \arrow[d, equal] & M'' \otimes_A N \arrow[r] \arrow[d, "\alpha", "\cong"'] & \{0\} \\
M' \otimes_A N \arrow[r, "\varphi\otimes\mathrm{id}_N"] & M \otimes_A N \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{Coker}(\varphi \otimes \mathrm{id}_N) \arrow[r] & \{0\}.
\end{tikzcd}$$

Wie oben ergibt sich zunächst $\varphi^*(\pi) = \pi \circ (\varphi \otimes \mathrm{id}_N) = 0$. Da die Sequenz (*) exakt ist, erhalten wir hieraus $\pi = \psi^*(\alpha) = \alpha \circ (\psi \otimes \mathrm{id}_N)$ für ein $\alpha : M'' \otimes_A N \to P$. Also kommutiert folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
& M \otimes_A N \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[d, "\psi\otimes\mathrm{id}_N"] \arrow[dr, "\pi"] & \\
P = \mathrm{Coker}(\varphi \otimes \mathrm{id}_N) \arrow[r, "\overline{\psi\otimes\mathrm{id}_N}"'] & M'' \otimes_A N \arrow[r, "\alpha"'] & \mathrm{Coker}(\varphi \otimes \mathrm{id}_N)
\end{tikzcd}$$

wobei $\overline{\psi \otimes \mathrm{id}_N}$ die durch $\psi \otimes \mathrm{id}_N$ auf $\mathrm{Coker}(\varphi \otimes \mathrm{id}_N)$ induzierte Abbildung sei. Diese ist wohldefiniert wegen $(\psi \otimes \mathrm{id}_N) \circ (\varphi \otimes \mathrm{id}_N) = 0$.

Da π surjektiv ist, liefert die Kommutativität des obigen Diagramms, daß $\alpha \circ (\overline{\psi \otimes \mathrm{id}_N}) = \mathrm{id}_P$ ist. Also ist α insbesondere surjektiv. Da $\psi \otimes \mathrm{id}_N$ surjektiv ist, muß α außerdem injektiv sein, also ein Isomorphismus.

Daher ist $- \otimes_A N$ rechtsexakt. Da nach Proposition 3.13 stets $M \otimes_A N \cong N \otimes_A M$ gilt, erhalten wir sofort, daß auch $M \otimes_A -$ ein rechtsexakter Funktor ist. ☐

Definition:
Ein A-Modul M heißt

1. **injektiv**, falls der Funktor $\mathrm{Hom}_A(-, M)$ exakt ist,
2. **projektiv**, falls der Funktor $\mathrm{Hom}_A(M, -)$ exakt ist,
3. **flach**, falls der Funktor $M \otimes_A -$ exakt ist.

Für uns sind vor allem projektive Moduln wichtig. Ein A-Modul M ist genau dann projektiv, wenn zu jedem Diagramm

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"'] \arrow[d, "f"] & \\ N \arrow[r, "\alpha"'] & N'' \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

mit exakter Zeile eine kommutative Ergänzung $\tilde{f}$ existiert, wie direkt aus der Definition ersichtlich ist.

Lemma 3.18. *Sei A ein kommutativer Ring mit Einselement und M ein A-Modul.*

1. *M ist genau dann projektiv, wenn M direkter Summand eines freien A-Moduls[4] ist.*
2. *Ist M frei, so ist M projektiv.*
3. *Ist M projektiv, so ist M flach.*

Beweis. Sei $\{m_i\}_{i \in I}$ ein Erzeugendensystem von M und $F := \bigoplus_{i \in I} A \cdot m_i$ der freie A-Modul mit Basis $\{m_i\}_{i \in I}$. Weiter sei $\varphi : F \to M$ die A-lineare Abbildung mit $m_i \mapsto m_i$. Wir erhalten die exakte Sequenz

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi) \longrightarrow F \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow \{0\}.$$

Wenn M projektiv ist, so existiert nach obiger Vorbemerkung zu $\mathrm{id}_M : M \to M$ eine Ergänzung $\psi : M \to F$ mit $\mathrm{id}_M = \varphi \circ \psi$. Nach Lemma 3.7 spaltet daher obige Sequenz und wir erhalten einen Isomorphismus

$$F \cong M \oplus \mathrm{Ker}(\varphi).$$

Es ist leicht nachzuvollziehen, daß sowohl freie A-Moduln als auch direkte Summanden freier A-Moduln projektiv sind. Dies beweist die ersten beiden Teilbehauptungen.

Sei M ein projektiver A-Modul. Nach der ersten Teilbehauptung gibt es einen freien A-Modul F und einen A-Modul R mit $F \cong M \oplus R$. Freie Moduln sind flach, wie man sofort einsieht. Also ist $F \otimes_A -$ exakt. Da für jeden A-Modul N nach Proposition 3.13 stets $F \otimes_A N \cong (M \otimes_A N) \oplus (R \otimes_A N)$ ist, muß auch $M \otimes_A -$ exakt sein, d.h. M ist flach. □

Lemma 3.19. *Sei A ein kommutativer Ring mit Einselement und $\{0\} \to M' \to M \to M'' \to \{0\}$ eine exakte Sequenz von A-Moduln. Wenn M'' projektiv ist, so spaltet die Sequenz. Insbesondere gilt dann $M \cong M' \oplus M''$.*

Beweis. Zu folgendem Diagramm existiert eine kommutative Ergänzung, denn M'' ist projektiv:

$$\begin{tikzcd} & M'' \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "\mathrm{id}_{M''}"] \arrow[dl, phantom, shift right=3ex, "\circlearrowleft"] & \\ M \arrow[r] & M'' \arrow[r] & \{0\}. \end{tikzcd}$$

Nach Lemma 3.7 spaltet daher die Sequenz $\{0\} \to M' \to M \to M'' \to \{0\}$, was insbesondere $M \cong M' \oplus M''$ zur Folge hat. □

---

[4] Man nennt einen A-Modul F **frei**, wenn er eine **Basis** besitzt, d.h. wenn es eine Menge $B \subseteq F$ gibt, so daß jedes $x \in F$ genau eine Darstellung $x = \sum_{b \in B} a_b \cdot b$ mit $a_b \in A$ für alle $b \in B$ besitzt. In diesem Fall ist $F \cong A^{(B)} = \bigoplus_{b \in B} Ab$ der freie A-Modul über B.

3.1.5 Ext und Tor

Definition:
Sei M ein A-Modul. Eine **Auflösung** von M besteht aus einem Komplex $F_\bullet$ von A-Moduln

$$F_\bullet : \cdots \xrightarrow{d_{n+1}} F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} \{0\}$$

und einem Homomorphismus $\varepsilon : F_0 \to M$, so daß die Sequenz

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow \{0\} \qquad (*)$$

exakt ist, d.h. $H_i(F_\bullet) = \{0\}$ für alle $i > 0$ und $H_0(F_\bullet) \xrightarrow[\cong]{\varepsilon} M$.

Wir notieren eine Auflösung als Tripel $(F_\bullet, d_\bullet, \varepsilon)$ oder als $F_\bullet$ oder Sequenz (*), sofern Verwechslungen ausgeschlossen sind.

Eine Auflösung $F_\bullet$ von M heißt **projektiv**, falls alle F_i projektive A-Moduln sind. $F_\bullet$ heißt **frei**, falls alle F_i freie A-Moduln sind.

Satz 3.20. *Jeder A-Modul M besitzt eine freie Auflösung.*

Beweis. Wir wählen zunächst ein Erzeugendensystem $\{m_i\}_{i\in I}$ von M und definieren $F_0 = \bigoplus_{i\in I} Ae_i$ als den freien A-Modul mit Basis $\{e_i\}_{i\in I}$. Weiter setzen wir $\varepsilon : F_0 \to M$, $e_i \mapsto m_i$ für $i \in I$ und $M_1 := \mathrm{Ker}(\varepsilon)$. Dann ist die Sequenz

$$M_1 \longrightarrow F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow \{0\}$$

exakt. Wir wählen nun ein Erzeugendensystem $\{m_i^{(1)}\}_{i\in I^{(1)}}$ von M_1 und setzen $F_1 = \bigoplus_{i\in I^{(1)}} Ae_i^{(1)}$, sowie $d_1 : F_1 \to F_0$, $e_i^{(1)} \mapsto m_i^{(1)}$. Ferner sei $M_2 := \mathrm{Ker}(d_1)$. Dann ist auch die Sequenz

$$M_2 \longrightarrow F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow \{0\}$$

exakt. Durch vollständige Induktion konstruieren wir nun eine freie Auflösung $F_\bullet$ von M. □

Bemerkung:
Eine freie Auflösung $F_\bullet$ von M ist nicht eindeutig bestimmt, sondern sie hängt von der Wahl der jeweiligen Erzeugendensysteme ab. Die F_i sind jedoch bis auf freie A-Moduln als direkte Summanden eindeutig bestimmt (Übung).

Bemerkung:
$M_1 = \mathrm{Ker}(\varepsilon)$ heißt **1. Syzygienmodul** zu M und dem Erzeugendensystem $\{m_i\}_{i\in I}$ von M. Er wird als **syz(M)** oder **syz$_1$(M)** notiert. Ist allgemein

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} \cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow \{0\}$$

eine projektive (bzw. freie) Auflösung von M, so heißt

$$\mathrm{syz}_n(M) := \mathrm{syz}(\mathrm{syz}_{n-1}(M)) = \mathrm{Ker}(d_{n-1})$$

ein **n-ter Syzygienmodul** von M. Er ist bis auf projektive (bzw. freie) A-Moduln als direkte Summanden eindeutig bestimmt (Übung).

Bemerkung:
Sei M ein A-Modul. Die kleinste, natürliche Zahl $d \geq 0$ für die $\mathrm{syz}_d(M)$ projektiv ist, nennt man **projektive Dimension** von M, man notiert sie als **pd(M)** oder **projdim(M)**. Hierzu setzt man $\mathrm{syz}_0(M) := M$.

M ist genau dann projektiv, wenn $\mathrm{projdim}(M) = 0$ ist. Es ist genau dann $\mathrm{projdim}(M) = d < \infty$, wenn M eine endliche, projektive Auflösung

$$\{0\} \to P_d \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to \{0\}$$

der Länge d besitzt.

Der **Hilbertsche Syzygiensatz** besagt, daß für jeden Körper K und jeden endlich erzeugten $K[x_1, \ldots, x_n]$-Modul M stets

$$\operatorname{projdim}(M) \leq n$$

gilt.

Bemerkung:
Syzygienmoduln und freie Auflösungen von endlich erzeugten Moduln über Polynomringen, Lokalisierungen und Faktorringen davon, lassen sich mit Standardbasen explizit berechnen; im Computeralgebrasystem `SINGULAR` beispielsweise mit den Kommandos `syz`, `res`, `mres` und `sres`.

Satz 3.21 (Fortsetzung von Homomorphismen auf projektive Auflösungen). *Sei $f : M \to M'$ ein Homomorphismus von A-Moduln und $P_\bullet$ und $P'_\bullet$ projektive Auflösungen von M bzw. M'. Dann existiert ein bis auf Homotopie eindeutig bestimmter Morphismus $F_\bullet : P_\bullet \to P'_\bullet$, so daß folgendes Diagramm kommutiert*

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{d_{n+1}} & P_n & \xrightarrow{d_n} & P_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & \cdots & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & M & \longrightarrow & \{0\} \\
 & & \downarrow F_n & \circlearrowleft & \downarrow F_{n-1} & & & & \downarrow F_1 & \circlearrowleft & \downarrow F_0 & \circlearrowleft & \downarrow f & & \\
\cdots & \xrightarrow[d'_{n+1}]{} & P'_n & \xrightarrow[d'_n]{} & P'_{n-1} & \xrightarrow[d'_{n-1}]{} & \cdots & \xrightarrow[d'_2]{} & P'_1 & \xrightarrow[d'_1]{} & P'_0 & \xrightarrow[\varepsilon']{} & M' & \longrightarrow & \{0\}.
\end{array}$$

Beweis. Wir definieren die F_i induktiv. Da P_0 projektiv ist, läßt sich das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
P_0 \arrow[d, dashed, "F_0"'] \arrow[dr, "f\circ\varepsilon"] & & \\
P'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"'] & M' \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

durch F_0 kommutativ ergänzen. Für $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist nach Induktionsvoraussetzung $d'_{i-1} \circ (F_{i-1} \circ d_i) = F_{i-2} \circ d_{i-1} \circ d_i = 0$, wobei $F_{-1} := f$, $d_0 := \varepsilon$ und $d'_0 := \varepsilon'$ sei. Also ist $F_{i-1} \circ d_i(P_i) \subseteq \operatorname{Im}(d'_i)$. Daher läßt sich das Digramm

$$\begin{tikzcd}
P_i \arrow[d, dashed, "F_i"'] \arrow[dr, "F_{i-1}\circ d_i"] & & \\
P'_i \arrow[r, "d'_i"'] & \operatorname{Im}(d'_i) \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

durch F_i kommutativ ergänzen, denn auch P_i ist projektiv.

Die Eindeutigkeit von $F_\bullet$ bis auf Homotopie beweist man analog durch Induktion unter Verwendung der Projektivität der P_i. $\square$

Korollar 3.22. *Sei M ein A-Modul und $P_\bullet$ und $P'_\bullet$ projektive Auflösungen von M. Dann sind $P_\bullet$ und $P'_\bullet$ homotopieäquivalent.*

Beweis. Wir verwenden in diesem Beweis ausschließlich Satz 3.21. Seien $F_\bullet : P_\bullet \to P'_\bullet$ und $G_\bullet : P'_\bullet \to P_\bullet$ Fortsetzungen von id_M. Dann ist $G_\bullet \circ F_\bullet : P_\bullet \to P_\bullet$ offenbar ebenfalls eine Fortsetzung von id_M, die bis auf Homotopie eindeutig bestimmt ist. Andererseits ist $\mathrm{id}_{P_\bullet}$ eine Fortsetzung von id_M, d.h. $G_\bullet \circ F_\bullet \simeq \mathrm{id}_{P_\bullet}$. Analog erhalten wir $F_\bullet \circ G_\bullet \simeq \mathrm{id}_{P'_\bullet}$. Also sind $P_\bullet$ und $P'_\bullet$ homotopieäquivalent. $\square$

Lemma 3.23. *Sei $\{0\} \to M' \to M \to M'' \to \{0\}$ eine exakte Sequenz von A-Moduln. Dann existiert eine kurze, exakte Sequenz freier Auflösungen*

$$0 \to F'_\bullet \to F_\bullet \to F''_\bullet \to 0,$$

so daß folgendes Diagramm (mit exakten Zeilen und Spalten) kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \{0\} & & \{0\} & & \{0\} & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\{0\} & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & \{0\} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\{0\} & \longrightarrow & F_0' & \longrightarrow & F_0 & \longrightarrow & F_0'' & \longrightarrow & \{0\} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\{0\} & \longrightarrow & F_1' & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & F_1'' & \longrightarrow & \{0\} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Beweis. Wir wählen beliebige, freie Auflösungen $F'_\bullet$ und $F''_\bullet$ von M' bzw. M'' und setzen für alle $i \in \mathbb{N}$

$$F_i = F_i' \oplus F_i''$$

mit den offensichtlichen Abbildungen. Die Kommutativität und Exaktheit (der mittleren Spalte) des obigen Diagramms läßt sich leicht nachweisen. □

Seien M, N zwei A-Moduln und

$$\cdots \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow \{0\}$$

irgendeine projektive Auflösung von M (z.B. eine freie Auflösung). Wir wenden $- \otimes_A N$ und $\mathrm{Hom}_A(-, N)$ auf $P_\bullet$ an und erhalten die Komplexe

$$\begin{array}{rcl}
P_\bullet \otimes_A N & : & \cdots \xrightarrow{d_3 \otimes \mathrm{id}_N} P_2 \otimes_A N \xrightarrow{d_2 \otimes \mathrm{id}_N} P_1 \otimes_A N \xrightarrow{d_1 \otimes \mathrm{id}_N} P_0 \otimes_A N \xrightarrow{d_0 \otimes \mathrm{id}_N} \{0\} \\
\mathrm{Hom}_A(P_\bullet, N) & : & \{0\} \xrightarrow{d_0^*} \mathrm{Hom}_A(P_0, N) \xrightarrow{d_1^*} \mathrm{Hom}_A(P_1, N) \xrightarrow{d_2^*} \cdots .
\end{array}$$

$P_\bullet \otimes_A N$ ist ein absteigender und $\mathrm{Hom}_A(P_\bullet, N)$ ein aufsteigender Komplex. Beide Komplexe sind im allgemeinen nicht exakt, da $- \otimes_A N$ und $\mathrm{Hom}_A(-, N)$ im allgemeinen keine exakten Funktoren sind. Die Abweichung dieser Komplexe von der Exaktheit wird durch die Moduln Ext und Tor beschrieben:

Definition:
Seien M, N zwei A-Moduln und $P_\bullet$ eine projektive Auflösung von M. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir den A-Modul $\boldsymbol{\mathrm{Tor}_n^A(M, N)}$ als

$$\mathrm{Tor}_n^A(M, N) := H_n(P_\bullet \otimes_A N) = \mathrm{Ker}(d_n \otimes \mathrm{id}_N)/\mathrm{Im}(d_{n+1} \otimes \mathrm{id}_N)$$

und den A-Modul $\boldsymbol{\mathrm{Ext}_A^n(M, N)}$ als

$$\mathrm{Ext}_A^n(M, N) := H^n(\mathrm{Hom}_A(P_\bullet, N)) = \mathrm{Ker}(d_n^*)/\mathrm{Im}(d_{n-1}^*).$$

Da $P_\bullet$ nach Korollar 3.22 bis auf Homotopieäquivalenz eindeutig ist, sind $\mathrm{Tor}_n^A(M, N)$ und $\mathrm{Ext}_A^n(M, N)$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Lemma 3.24. *Seien M, N zwei A-Moduln und $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine natürliche Isomorphie*

$$\mathrm{Tor}_n^A(M, N) \cong \mathrm{Tor}_n^A(N, M).$$

Beweis. Übung. □

Proposition 3.25. *Seien A ein kommutativer Ring mit Einselement und M, N zwei A-Moduln. Dann gilt:*

1. $\mathrm{Tor}_n^A(-, -) : \mathrm{Mod}_A \times \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_A$ *ist ein Bifunktor, der in jeder Variablen mit beliebigen, direkten Summen vertauschbar ist.*

2. Es gibt eine natürliche Äquivalenz

$$\operatorname{Tor}_0^A(M,N) \cong M \otimes_A N.$$

3. Ist M oder N flach, so gilt

$$\operatorname{Tor}_n^A(M,N) = \begin{cases} M \otimes_A N & ,n = 0 \\ \{0\} & ,n \neq 0 \end{cases}$$

Beweis.

1. Folgt, da $\otimes_A$ und H_n mit direkten Summen vertauschbar sind.
2. Dies folgt sofort aus der Rechtsexaktheit des Tensorprodukts.
3. Ist N flach, so ist $- \otimes_A N$ definitionsgemäß ein exakter Funktor. Daher ist $P_\bullet \otimes_A N$, außer an der Stelle 0, ein exakter Komplex. Also ist $H_n(P_\bullet \otimes_A N) = \{0\}$ für $n > 0$, und für $n = 0$ liefert die zweite Teilbehauptung $\operatorname{Tor}_0^A(M,N) \cong M \otimes_A N$.

   Ist M flach, so besagt Lemma 3.24, daß $\operatorname{Tor}_n^A(M,N) \cong \operatorname{Tor}_n^A(N,M)$ gilt, woraus sofort die Behauptung folgt.

□

Satz 3.26 (lange, exakte Tor-Sequenz). *Seien A ein kommutativer Ring mit Einselement, M ein A-Modul und*

$$\{0\} \to N' \to N \to N'' \to \{0\}$$

eine exakte Sequenz von A-Moduln. Dann existiert eine natürliche, lange, exakte Sequenz

$$\cdots \to \operatorname{Tor}_2^A(M,N'') \to \operatorname{Tor}_1^A(M,N') \to \operatorname{Tor}_1^A(M,N) \to \operatorname{Tor}_1^A(M,N'') \\ \to M \otimes_A N' \to M \otimes_A N \to M \otimes_A N'' \to \{0\}.$$

Beweis. Sei $P_\bullet$ eine projektive Auflösung von M. Dann ist

$$\{0\} \to P_\bullet \otimes_A N' \to P_\bullet \otimes_A N \to P_\bullet \otimes_A N'' \to \{0\}$$

eine exakte Sequenz von Komplexen, denn jedes P_i ist projektiv, also nach Lemma 3.18 insbesondere flach. Die lange, exakte Sequenz ist die lange, exakte Homologiesequenz, die Satz 3.6 garantiert. Die Natürlichkeit im ersten Argument folgt aus Satz 3.21, die im zweiten Argument ist offensichtlich. □

Korollar 3.27. *Sei M ein A-Modul. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

1. *M ist flach.*
2. *Für jeden A-Modul N gilt $\operatorname{Tor}_1^A(M,N) = \{0\}$.*
3. *Für jeden A-Modul N und jede natürliche Zahl $i \geq 1$ gilt $\operatorname{Tor}_i^A(M,N) = \{0\}$.*

Beweis. Ist M flach, so besagt die dritte Teilaussage von Proposition 3.25, daß für jeden A-Modul N und jedes $i \geq 1$ stets $\operatorname{Tor}_i^A(M,N) = \{0\}$ gilt. Dies wiederum impliziert $\operatorname{Tor}_1^A(M,N) = \{0\}$.

Somit müssen wir lediglich noch beweisen, daß M flach ist, falls für jeden A-Modul N stets $\operatorname{Tor}_1^A(M,N) = \{0\}$ gilt. Nach Satz 3.26 ist für jede exakte Sequenz $\{0\} \to N' \to N \to N'' \to \{0\}$ von A-Moduln auch die Sequenz

$$\operatorname{Tor}_1^A(M,N'') \to M \otimes_A N' \to M \otimes_A N \to M \otimes_A N \to \{0\}$$

exakt. Ist $\operatorname{Tor}_1^A(M,-) = \{0\}$, so erhalten wir die exakte Sequenz

$$\{0\} \to M \otimes_A N' \to M \otimes_A N \to M \otimes_A N \to \{0\}.$$

Daher ist $M \otimes_A -$ exakt, d.h. M ist flach. □

Korollar 3.28. *Sei N ein A-Modul und $\{0\} \to M' \to M \to M'' \to \{0\}$ eine exakte Sequenz von A-Moduln. Dann existiert eine natürliche, lange, exakte Sequenz*

$$\cdots \to \operatorname{Tor}_2^A(M'', N) \to \operatorname{Tor}_1^A(M', N) \to \operatorname{Tor}_1^A(M, N) \to \operatorname{Tor}_1^A(M'', N) \to$$
$$\to M' \otimes_A N \to M \otimes_A N \to M'' \otimes_A N \to \{0\}.$$

Beweis. Dies ergibt sich sofort aus Satz 3.26 und Lemma 3.24. □

Beispiele:
Wir betrachten einen Modul N über dem Grundring $A := \mathbb{Z}$. Dann gilt

1.
$$\operatorname{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, N) = \begin{cases} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} N \cong N & , i = 0 \\ \{0\} & , i \neq 0. \end{cases}$$

2. Sei $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Dann ist die Sequenz
$$\{0\} \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot k} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \longrightarrow \{0\}$$
exakt, und sie stellt eine freie Auflösung von $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ dar. Daher folgt
$$\operatorname{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, N) = \{0\}, \text{ für } i \geq 2,$$
$$\operatorname{Tor}_0^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, N) \cong (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} N \cong N/kN,$$
$$\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, N) = \operatorname{Ker}\left(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} N \stackrel{(\cdot k)\otimes \mathrm{id}_N}{\longrightarrow} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} N\right) \cong \operatorname{Ker}(N \xrightarrow{\cdot k} N).$$

Wir erhalten $\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, N) \cong \{n \in N \mid k \cdot n = 0\}$ was wir als ***k*-Torsion von *N*** bezeichnen. Es ist genau dann $\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, N) = \{0\}$, wenn für $n \in N \setminus \{0\}$ stets $k \cdot n \neq 0$ gilt.

Bemerkung:
Ist A ein Hauptidealring,[5] so ist jeder Untermodul eines freien A-Moduls frei. Daher besitzt jeder A-Modul M eine freie Auflösung, die höchstens von Länge 1 ist:
$$\{0\} \longrightarrow F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow \{0\},$$
d.h. $\operatorname{projdim}_A(M) \leq 1$. Wir erhalten
$$\operatorname{Tor}_i^A(M, N) = \{0\}, \quad \text{für } i \geq 2,$$
$$\operatorname{Ext}_A^i(M, N) = \{0\}, \quad \text{für } i \geq 2,$$
falls A ein Hauptidealring ist.

Proposition 3.29. *Sei A ein kommutativer Ring mit Einselement. Dann gilt:*

1. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\operatorname{Ext}_A^n(-,-)$ ein Bifunktor $\operatorname{Mod}_A \times \operatorname{Mod}_A \to \operatorname{Mod}_A$, der in jeder Variablen mit endlichen, direkten Summen vertauschbar ist.*

2. *Seien M, N zwei A-Moduln. Dann gibt es eine natürliche Äquivalenz*
$$\operatorname{Ext}_A^0(M, N) \cong \operatorname{Hom}_A(M, N).$$

3. *Seien M, N zwei A-Moduln. Ist M projektiv oder N injektiv, so gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$*
$$\operatorname{Ext}_A^n(M, N) = \begin{cases} \operatorname{Hom}_A(M, N) & , n = 0 \\ \{0\} & , n \neq 0. \end{cases}$$

[5] Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. **Ideal** von R nennen wir jede Untergruppe $I \subseteq (R, +)$, die mit $i \in I$ stets alle $r \cdot i$ mit $r \in R$ enthält. Ein Ideal der Form $\{r \cdot i \mid r \in R\}$ mit $i \in R$ nennen wir ein **Hauptideal**. Ein Ring, dessen Ideale stets Hauptideale sind, nennen wir **Hauptidealring**.

Beweis. Analog zu Proposition 3.25 □

Bemerkung:
Vorsicht: Wie Hom_A ist auch Ext^n_A nur mit endlichen, direkten Summen vertauschbar.

Beispiel:
Ist K ein Körper, so ist $M := K[x] = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} Kx^i$ eine unendliche, direkte Summe von K-Moduln. Wie üblich bezeichnen wir mit $K[[x]] := \{\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i x^i \mid a_i \in A\}$ den Ring der formalen Potenzreihen über K. Wie man leicht nachvollziehen kann, ist

$$\begin{aligned} K[[x]] &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_K(K[x],K), \\ \sum_{i\in\mathbb{N}} b_i x^i &\longmapsto (\sum_{j=0}^{n} a_j x^j \mapsto \sum_{j=0}^{n} b_j a_j) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus. Daher ist

$$\mathrm{Hom}_K(\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} Kx^i, K) = \mathrm{Hom}_K(K[x],K) \cong K[[x]] \cong K^{\mathbb{N}}.$$

Andererseits ist

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_K(Kx^i,K) \cong \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} K = K^{(\mathbb{N})}.$$

Daher ist $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_K(Kx^i,K) \subsetneqq \mathrm{Hom}_K(\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} Kx^i, K)$.

Satz 3.30 (lange, exakte Ext-Sequenzen). *Sei A ein kommutativer Ring mit Einselement, M ein A-Modul und $\{0\} \to N' \to N \to N'' \to \{0\}$ eine kurze, exakte Sequenz von A-Moduln. Dann existiert eine natürliche, lange, exakte Sequenz*

$$\begin{aligned} \{0\} &\to \mathrm{Hom}_A(M,N') \to \mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_A(M,N'') \\ &\to \mathrm{Ext}^1_A(M,N') \to \mathrm{Ext}^1_A(M,N) \to \mathrm{Ext}^1_A(M,N'') \to \mathrm{Ext}^2_A(M,N') \to \cdots . \end{aligned}$$

und eine natürliche, lange, exakte Sequenz

$$\begin{aligned} \{0\} &\to \mathrm{Hom}_A(N'',M) \to \mathrm{Hom}_A(N,M) \to \mathrm{Hom}_A(N',M) \\ &\to \mathrm{Ext}^1_A(N'',M) \to \mathrm{Ext}^1_A(N,M) \to \mathrm{Ext}^1_A(N',M) \to \mathrm{Ext}^2_A(N'',M) \to \cdots . \end{aligned}$$

Beweis. Zum Beweis der Existenz der ersten langen, exakten Sequenz und deren Natürlichkeit wählen wir eine projektive Auflösung von M und argumentieren wie im Beweis des Satzes 3.26, der lange, exakte Tor-Sequenzen liefert.

Für die zweite lange, exakte Sequenz wählen wir gemäß Lemma 3.23 eine kurze, exakte Sequenz

$$0 \to P'_\bullet \to P_\bullet \to P''_\bullet \to 0$$

projektiver Auflösungen zu $\{0\} \to N' \to N \to N'' \to \{0\}$. Wir wenden $\mathrm{Hom}_A(-,M)$ auf diese Sequenz an und erhalten die Sequenz

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(P''_\bullet,M) \to \mathrm{Hom}_A(P_\bullet,M) \to \mathrm{Hom}_A(P'_\bullet,M) \to 0$$

von Komplexen. Nun beweisen wir, daß diese Sequenz exakt ist. Dazu sei $i \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann ist $\{0\} \to P'_i \to P_i \to P''_i \to \{0\}$ exakt und P''_i ist projektiv, d.h. die Sequenz spaltet gemäß Lemma 3.19. Da $\mathrm{Hom}_A(-,M)$ additiv ist, erhalten wir gemäß Lemma 3.16 das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(P''_i,M) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{Hom}_A(P_i,M) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_A(P'_i,M) \arrow[r] & \{0\}. \\ & & \mathrm{Hom}_A(P''_i,M) \oplus \mathrm{Hom}_A(P'_i,M) \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

Dieses liefert die Exaktheit der Sequenz

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(P''_\bullet, M) \to \mathrm{Hom}_A(P_\bullet, M) \to \mathrm{Hom}_A(P'_\bullet, M) \to 0$$

von Komplexen. Hierauf wenden wir Satz 3.6 an, der natürliche, lange, exakte (Ko-)Homologiesequenzen liefert. □

3.2 Singuläre Homologiegruppen

Wir erinnern uns zunächst an die Homologiegruppen eines simplizialen Komplexes K: Für $q \in \mathbb{N}$ sei $\vec{K}_q$ die Menge der orientierten, q-dimensionalen Simplizes von K und

$$C_q(K) := \bigoplus_{\sigma_q \in \vec{K}_q} \mathbb{Z}\sigma_q/(\mathbb{Z}(\sigma_q + \sigma_q^{-1}))$$

die q-te Kettengruppe von K. Ist $\langle x_0, \ldots, x_q \rangle$ ein orientiertes q-Simplex von K, so ist

$$\partial_q \langle x_0, \ldots, x_q \rangle := \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \langle x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_q \rangle$$

ein Element aus $C_{q-1}(K)$. Wir setzen ∂_q linear auf ganz $C_q(K)$ fort. Damit gilt

$$\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0,$$

d.h. $(C_\bullet(K), \partial_\bullet)$ ist ein Komplex von $\mathbb{Z}$-Moduln:

$$\{0\} \longrightarrow C_n(K) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(K) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \longrightarrow \{0\}$$

mit $n := \dim(K)$. Die q-te simpliziale Homologiegruppe von K haben wir vermöge

$$H_q(K) := H_q(C_\bullet(K))$$

als q-te Homologiegruppe des Komplexes $C_\bullet(K)$ definiert.

Bemerkung:
Ist K ein simplizialer Komplex und R ein beliebiger, kommutativer Ring mit Einselement, so können wir für $q \in \mathbb{N}$ analog die ***q*-te Kettengruppe von *K* mit Koeffizienten in *R*** definieren als

$$\boldsymbol{C_q(K; R)} := \bigoplus_{\sigma_q \in \vec{K}} R\sigma_q/(R(\sigma_q + \sigma_q^{-1})).$$

Den Randhomomorphismus ∂_q definieren wir wie oben, und wir bezeichnen

$$\boldsymbol{H_q(K; R)} := H_q(C_\bullet(K; R))$$

als ***q*-te simpliziale Homologiegruppe von *K* mit Werten in *R***.

Bemerkung:
Vorsicht: Proposition 3.13 liefert $C_q(K; R) \cong C_q(K) \otimes_{\mathbb{Z}} R$, aber im allgemeinen ist $H_q(K; R) \not\cong H_q(K; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R$. Wie wir in Satz 3.84 sehen werden, ist

$$\{0\} \to H_q(K; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R \to H_q(K; R) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{q-1}(K; \mathbb{Z}), R) \to \{0\}$$

eine natürliche, exakte und spaltende Sequenz.

Wir wollen im folgenden Homologiegruppen beliebiger, topologischer Räume X definieren. Dazu werden die Simplizes durch sogenannte „singuläre Simplizes“ ersetzt — diese sind nichts anderes als stetige Abbildungen von Simplizes nach X.

Definition:
Sei $q \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen mit

$$e_0 := (1,0,\dots,0),\ e_1 := (0,1,0\dots,0),\ \dots,\ e_q := (0,\dots,0,1)$$

die **Einheitspunkte** in $\mathbb{R}^{q+1}$. Das abgeschlossene q-Simplex mit den Ecken $e_0,\dots,e_q$ bezeichnen wir als das **q-dimensionale Standardsimplex Δ_q**:

$$\Delta_q := \{(\lambda_0,\dots,\lambda_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \mid \lambda_i \geq 0 \text{ für alle } i = 0,\dots,q \text{ und } \sum_{i=0}^{q} \lambda_i = 1\}.$$

Für $i \in \mathbb{N}$, $i \leq q+1$ bildet die Abbildung

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta_q^i} : \Delta_q &\to \Delta_{q+1} \\ (\lambda_0,\dots,\lambda_q) &\mapsto (\lambda_0,\dots,\lambda_{i-1},0,\lambda_i,\dots,\lambda_q) \end{aligned}$$

das q-dimensionale Standardsimplex auf die i-te Seite des $(q+1)$-dimensionalen Standardsimplex ab. Anstatt δ_q^i schreiben wir auch $\boldsymbol{\delta^i}$.

Lemma 3.31. *Seien $i,j,q \in \mathbb{N}$ mit $i < j \leq q+2$. Dann gilt*

$$\delta_{q+1}^j \circ \delta_q^i = \delta_{q+1}^i \circ \delta_q^{j-1}.$$

Beweis. Offensichtlich. □

Definition:
Sei X ein topologischer Raum und $q \in \mathbb{N}$. **Singuläres q-Simplex in X** heißt jede stetige Abbildung

$$\sigma : \Delta_q \longrightarrow X.$$

Die Menge aller singulären q-Simplizes in X notieren wir[6] als $\boldsymbol{\mathcal{S}_q(X)}$. Den Abschluß $\overline{\sigma(\Delta_q)} \subseteq X$ des Bildes eines q-Simplex σ in X bezeichnen wir auch als dessen **Träger $\mathrm{Tr}(\sigma)$**.

Definition:
Sei X ein topologischer Raum und $i,q \in \mathbb{N}$ mit $i \leq q+1$. Für $\sigma \in \mathcal{S}_{q+1}(X)$ bezeichnen wir die Komposition

$$\sigma \circ \delta_q^i : \Delta_q \to X$$

als **i-te Seite von σ**. Offensichtlich ist $\sigma \circ \delta_q^i \in \mathcal{S}_q(X)$.

Definition:
Sei X ein topologischer Raum, $q \in \mathbb{N}$ und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann induziert f eine Abbildung

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f_*} := \boldsymbol{f_{q*}} : \mathcal{S}_q(X) &\to \mathcal{S}_q(Y), \\ \sigma &\mapsto f \circ \sigma. \end{aligned}$$

Wie bei der simplizialen Homologie wird auch der Rand eines Simplex eine formale Linearkombination von Simplizes sein, also eine Kette. Dazu definieren wir:

Definition:
Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, X ein topologischer Raum und $q \in \mathbb{N}$. Den freien R-Modul $\boldsymbol{S_q(X;R)}$ über $\mathcal{S}_q(X)$ bezeichnen wir als den **Modul der singulären q-Ketten in X mit Koeffizienten in R**. Damit hat jedes Element $s \in S_q(X;R)$ eine eindeutige Darstellung der Form

$$s = \sum_{i=1}^{n} r_i \sigma^{(i)} \text{ mit } n \in \mathbb{N},\ r_i \in R \text{ und } \sigma^{(i)} \in \mathcal{S}_q(X) \text{ für alle } i = 1,\dots,n.$$

Für $q \in \mathbb{Z}$, $q < 0$ setzen wir $S_q(X;R) := \{0\}$.
Der **Träger $\mathrm{Tr}(s)$** einer Kette $s = \sum_{i=1}^{n} r_i \sigma^{(i)} \in S_q(X;R)$, $q \in \mathbb{N}$ ist die Vereinigung $\mathrm{Tr}(s) := \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Tr}(\sigma^{(i)})$.

[6] Es sei darauf hingewiesen, daß diese Notation von der Literatur abweicht: in [StöZie] steht $\mathcal{S}_q(X)$ für die freie, abelsche Gruppe, die von allen singulären q-Simplizes erzeugt wird („q-te singuläre Kettengruppe"). Die q-te singuläre Kettengruppe werden wir — als Spezialfall des Moduls der singulären q-Ketten mit Koeffizienten in einem Ring — mit $S_q(X;\mathbb{Z})$ bezeichnen.

Definition:
Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, $f : X \to Y$ stetig und $q \in \mathbb{Z}$. Dann induziert f eine R-lineare Abbildung

$$\boldsymbol{f_*} := \boldsymbol{f_{q*}} : S_q(X;R) \to S_q(Y;R),$$
$$\sum_{i=1}^{n} r_i\sigma^{(i)} \mapsto \sum_{i=1}^{n} r_i f_{q*}(\sigma^{(i)}),$$

mit $f_{q*}(\sigma^{(i)}) = f \circ \sigma^{(i)}$. Diese Abbildung f_* heißt die **von f induzierte Kettenabbildung**.

Definition:
Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, X ein topologischer Raum und $q \in \mathbb{Z}$. Für $q \geq 0$ sei der **Randhomomorphismus**

$$d := d_{q+1} : S_{q+1}(X;R) \to S_q(X;R)$$

die durch

$$d_{q+1}(\sigma) := \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \sigma \circ \delta_q^i$$

für alle $\sigma \in \mathcal{S}_{q+1}(X)$ eindeutig definierte R-lineare Abbildung.

Für $q \leq 0$ sei $d_q : S_q(X;R) \to S_{q-1}(X;R) = \{0\}$ die Nullabbildung.

Lemma 3.32. *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, X ein topologischer Raum und $q \in \mathbb{Z}$. Dann ist $d_q \circ d_{q+1} = 0$, d.h.*

$$S_\bullet(X;R) : \cdots \xrightarrow{d_{q+1}} S_q(X;R) \xrightarrow{d_q} S_{q-1}(X;R) \xrightarrow{d_{q-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} S_0(X;R) \xrightarrow{d_0} \{0\}$$

ist ein Komplex.

Beweis. Wie bei der simplizialen Homologie. □

Definition:
Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, X ein topologischer Raum und $q \in \mathbb{Z}$.

1. Die Gruppe $\boldsymbol{Z_q(X;R)}$ der **singulären q-Zykel von X mit Koeffizienten in R** definieren wir als

   $$Z_q(X;R) := \operatorname{Ker}(d_q).$$

2. Die Gruppe $\boldsymbol{B_q(X;R)}$ der **singulären q-Ränder von X mit Koeffizienten in R** definieren wir als

   $$B_q(X;R) := \operatorname{Im}(d_{q+1}).$$

3. Die **q-te singuläre Homologiegruppe $H_q(X;R)$ von X mit Koeffizienten in R** definieren wir als

   $$H_q(X;R) := Z_q(X;R)/B_q(X;R).$$

Die Homologiegruppen fassen wir auch zur **totalen Homologie $H_*(X;R)$ von X mit Koeffizienten in R** zusammen:

$$H_*(X;R) := \bigoplus_{q\in\mathbb{Z}} H_q(X;R) = \bigoplus_{q\geq 0} H_q(X;R).$$

Lemma 3.33. *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, $f : X \to Y$ stetig und $q \in \mathbb{Z}$. Dann gilt für jede $(q+1)$-Kette $s \in S_{q+1}(X;R)$*

$$d_{q+1} \circ f_{q+1*}(s) = f_{q*} \circ d_{q+1}(s),$$

d.h. $f_* : S_\bullet(X;R) \to S_\bullet(Y;R)$ ist ein Morphismus von Komplexen und induziert daher einen Homomorphismus

$$H_q(f;R) := f_* : H_q(X;R) \to H_q(Y;R).$$

Somit ist $H_q(-;R) : \mathrm{Top} \to \mathrm{Mod}_R$ ein Funktor von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der R-Moduln.

Beweis. Elementares Einsetzen der Definitionen. □

Beispiel:
Sei $X = \{x_0\}$ der topologische Raum, der aus genau einem Punkt besteht. Dann ist für $q \in \mathbb{N}$ stets $S_q(X;R) = R \cdot \sigma_q$, wobei $\sigma_q : \Delta_q \longrightarrow X$ die konstante Abbildung ist. Der Randhomomorphismus $d_{q+1} : S_{q+1}(X;R) \to S_q(X;R)$ liefert für $a \cdot \sigma_{q+1} \in S_{q+1}(X;R)$ stets

$$d_{q+1}(a \cdot \sigma_{q+1}) = a \cdot d_{q+1}(\sigma_{q+1}) = a \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \underbrace{\sigma_{q+1} \circ \delta_q^i}_{=\text{konstant}} = \begin{cases} 0 & , q+1 \text{ ungerade} \\ a \cdot \sigma_q & , q+1 \text{ gerade.} \end{cases}$$

Daher hat der Komplex der singulären Ketten mit Koeffizienten in R die Form

$$\cdots \xrightarrow{\cdot 0} \underbrace{S_4(\{x_0\};R)}_{=R} \xrightarrow{\mathrm{id}_R} \underbrace{S_3(\{x_0\};R)}_{=R} \xrightarrow{\cdot 0} \underbrace{S_2(\{x_0\};R)}_{=R} \xrightarrow{\mathrm{id}_R} \underbrace{S_1(\{x_0\};R)}_{=R} \xrightarrow{\cdot 0} \underbrace{S_0(\{x_0\};R)}_{=R} \longrightarrow \{0\}.$$

Somit erhalten wir für $q \in \mathbb{N}$ als q-te singuläre Homologiegruppe $H_q(\{x_0\};R) = \begin{cases} R & , q = 0 \\ 0 & , q \neq 0. \end{cases}$

Die Gruppe der singulären q-Ketten ist im allgemeinen riesig. Erst die q-te Homologiegruppe wird kleiner. Zur Berechnung dieser Homologiegruppen benötigen wir die exakten Sequenzen der allgemeinen Homologietheorie, sowie die relativen Homologiegruppen, die wir im folgenden Abschnitt einführen.

3.3 Relative Homologiegruppen und exakte Homologiesequenz

Wir führen nun die singulären Homologiegruppen für topologische Paare (X,A) ein. R sei wieder ein kommutativer Ring mit Einselement.

Dann ist $S_q(A;R) \overset{i_{q*}}{\hookrightarrow} S_q(X;R)$ ein R-Untermodul und diese Inklusion ist mit dem Differential d verträglich, wie Lemma 3.33 besagt.

Folglich ist

$$(S_\bullet(A;R), d_\bullet) \overset{i_*}{\hookrightarrow} (S_\bullet(X;R), d_\bullet)$$

ein Unterkomplex.

Definition:
Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und (X,A) ein topologisches Paar. Der Quotientenkomplex

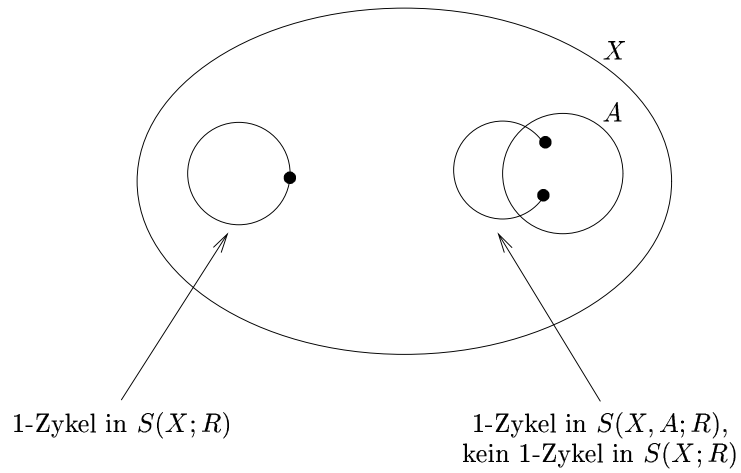
$$\boldsymbol{S_\bullet(X,A;R)} := S_\bullet(X;R)/S_\bullet(A;R)$$

mit dem für jedes $q \in \mathbb{N}$ von $d : S_q(X;R) \longrightarrow S_{q-1}(X;R)$ induzierten Differential $d : S_q(X,A;R) \to S_{q-1}(X,A;R)$ heißt der **(relative) singuläre Kettenkomplex des Paares $\boldsymbol{(X,A)}$ mit Koeffizienten in $\boldsymbol{R}$**. Ist klar, welcher Ring zugrundeliegt, so schreiben wir $\boldsymbol{S_\bullet(X,A)}$ statt $S_\bullet(X,A;R)$. Die Homologiegruppen

$$\boldsymbol{H_q(X,A;R)} := H_q(S_\bullet(X,A;R)), \quad q \in \mathbb{Z}$$

dieses Komplexes heißen **(relative) singuläre Homologiegruppen des Paares (X, A) mit Koeffizienten in R**. Besteht über den zugrundeliegenden Ring R kein Zweifel, so schreiben wir $H_q(X, A)$ statt $H_q(X, A; R)$ für $q \in \mathbb{Z}$.

Folgendes Bild illustriert die relative, singuläre Homologie:



Ist $f : (X, A) \to (Y, B)$ eine stetige Abbildung der Paare, so induziert f einen Homomorphismus der Kettenkomplexe

$$f_* : S_\bullet(X, A; R) \longrightarrow S_\bullet(Y, B; R),$$

sowie der Homologiegruppen

$$H_q(f) = f_* : H_q(X, A; R) \longrightarrow H_q(Y, B; R).$$

Definition:
Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und (X, A) ein topologisches Paar. Die **totale, relative Homologie des Paares (X, A)** definieren wir als

$$\boldsymbol{H_*(X, A; R)} := \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} H_q(X, A; R) = \bigoplus_{q \geq 0} H_q(X, A; R).$$

Für $R = \mathbb{Z}$ schreiben wir $H_*(X, A)$ statt $H_*(X, A; \mathbb{Z})$.

Für $A = \emptyset$ gilt $S_\bullet(X, \emptyset; R) = S_\bullet(X; R)$ und folglich ist für $q \in \mathbb{Z}$ stets $H_q(X, \emptyset; R) = H_q(X; R)$.

Die Definition liefert eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow S_\bullet(A; R) \longrightarrow S_\bullet(X; R) \longrightarrow S_\bullet(X, A; R) \longrightarrow 0$$

von Komplexen.

Diese besitzt eine lange, exakte Homologiesequenz und für $n \in \mathbb{N}$ insbesondere den Randhomomorphismus $\partial : H_n(X, A; R) \longrightarrow H_{n-1}(A; R)$. Die wichtigsten Eigenschaften relativer und absoluter Homologiegruppen fassen wir in folgendem Satz zusammen.

Satz 3.34. *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und (X, A) ein topologisches Paar.*

1. *Für jedes $q \in \mathbb{Z}$ ist $H_q(-, -; R) : \mathrm{Top}^2 \to \mathrm{Mod}_R$ ein Funktor von der Kategorie der Raumpaare in die Kategorie der R-Moduln.*

2. *Die Funktoren $T_1, T_2 : \mathrm{Top}^2 \to \mathrm{Top}^2$ seien durch $T_1(X, A) := (X, \emptyset)$ bzw. $T_2(X, A) := (A, \emptyset)$ gegeben. Dann existiert für jedes $q \in \mathbb{Z}$ eine natürliche Transformation*

$$\partial := \partial_{q+1} : H_{q+1}(X, A; R) \to H_q(A; R)$$

des Funktors $H_{q+1}(-, -; R)$ in den Funktor $(H_q \circ T_2)(-, -; R)$.

3. *Für jedes Paar $(X, A) \in \mathrm{Top}^2$ existiert eine natürliche,* **lange, exakte Sequenz des Paares (X, A)**

$$\cdots \xrightarrow{\partial} H_q(A; R) \xrightarrow{i_*} H_q(X; R) \xrightarrow{j_*} H_q(X, A; R) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(A; R) \xrightarrow{i_*} \cdots$$
$$\cdots \xrightarrow{\partial} H_0(A; R) \xrightarrow{i_*} H_0(X; R) \xrightarrow{j_*} H_0(X, A; R) \longrightarrow \{0\}$$

mit $i : (A, \emptyset) \hookrightarrow (X, \emptyset)$ und $j : (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$.

4. *Für $q \in \mathbb{Z}$ ist*

$$H_q(\{x_0\}; R) = \begin{cases} R & , q = 0 \\ \{0\} & , q \neq 0. \end{cases}$$

Beweis. Offensichtlich oder bereits bewiesen. □

Zur wirklichen Berechnung von Homologiegruppen benötigen wir noch die Homotopieinvarianz und den Ausschneidungssatz, die wir in den folgenden Kapiteln beweisen. Zunächst zwei triviale Fälle:

Lemma 3.35. *Sei (X, A) ein topologisches Paar, X_i, $i \in I$, seien die Wegkomponenten von X, und R sei ein kommutativer Ring mit Einselement. Dann gilt:*

1. *Für jedes $q \in \mathbb{Z}$ ist*

$$H_q(X, A; R) \cong \bigoplus_{i \in I} H_q(X_i, X_i \cap A; R),$$

also speziell $H_q(X; R) = \bigoplus_{i \in I} H_q(X_i; R)$.

2. *Für die 0-te Homologiegruppe gilt*

$$H_0(X, A; R) \cong \bigoplus_{i \in J} R = R^{(J)},$$

wobei $J = \{i \in I \mid X_i \cap A = \emptyset\}$. Speziell gilt $H_0(X, A; R) = \{0\}$, falls X wegzusammenhängend und $A \neq \emptyset$ ist.

Beweis. Die erste Teilaussage folgt direkt aus $S_\bullet(X, A; R) = \bigoplus_{i \in I} S_\bullet(X_i, X_i \cap A; R)$.

Wir beweisen nun die zweite Teilaussage: $S_0(X, A; R)$ ist der freie R-Modul, der von den Punkten von $X \setminus A$ erzeugt wird (die Punkte von A repräsentieren das Nullelement). Ist φ ein Weg von x_0 nach x_1, so ist φ ein singuläres 1-Simplex mit $d\varphi = x_1 - x_0$.

Da X_i wegzusammenhängend ist, ist also $H_0(X_i, X_i \cap A; R) = \{0\}$, falls $X_i \cap A \neq \emptyset$, denn in diesem Fall ist für $x \in X_i$ und $a \in X_i \cap A$ stets $1 \cdot x - 1 \cdot a = 1 \cdot x \in \mathrm{Im}(d) \subseteq S_0(X_i, X_i \cap A; R)$, d.h. $x = 0$ in $H_0(X_i, X_i \cap A; R)$. Ist $X_i \cap A = \emptyset$, so ist $H_0(X_i, X_i \cap A; R)$ isomorph zu R (erzeugt von einem beliebigen Punkt von X_i), wie man analog nachvollzieht. □

Satz 3.36 (exakte Homologiesequenz eines Tripels). *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und (X, A, B) ein topologisches Tripel, d.h. X ein topologischer Raum und $B \subseteq A \subseteq X$ Teilräume von X. Ferner seien $i : (A, B) \hookrightarrow (X, B)$ und $j : (X, B) \hookrightarrow (X, A)$ die Inklusionen. Dann existiert eine lange, exakte Sequenz*

$$\cdots \xrightarrow{\partial} H_q(A, B; R) \xrightarrow{i_*} H_q(X, B; R) \xrightarrow{j_*} H_q(X, A; R) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(A, B; R) \xrightarrow{i_*} \cdots.$$

Beweis. Die Sequenz

$$0 \to S_\bullet(A, B; R) \to S_\bullet(X, B; R) \to S_\bullet(X, A; R) \to 0$$

von Komplexen ist exakt. Obige Sequenz ist die zugehörige, lange, exakte Homologiesequenz. □

3.4 Homotopieinvarianz der Homologie

Lemma 3.37 (Existenz eines Prismenoperators). *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{Z}$ eine natürliche Transformation $P := P^n$ des Funktors $S_n(-,-;R)$ in den Funktor $S_{n+1}((-,-) \times I; R)$, so daß gilt: Für ein beliebiges, topologisches Paar (X,A) stellt die Familie $P := P_{(X,A)} := (P^n_{(X,A)})_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Kettenhomotopie der Abbildungen λ_{0*} und λ_{1*} dar, die durch $\lambda_0, \lambda_1 : (X,A) \to (X \times I, A \times I)$, $\lambda_0(x) = (x,0)$ und $\lambda_1(x) = (x,1)$ gegeben sind.*

Beweis. Wir betrachten lediglich $n \in \mathbb{N}$, da für $n < 0$ die Moduln $S_n(X,A;R)$ stets trivial sind. Zur Definition von P führen wir folgende Notation ein: Seien $n, l \in \mathbb{N}$ beliebig. Eine affine Abbildung $f : \Delta_n \to \mathbb{R}^l$ ist bekanntlich durch die Bildpunkte der Einheitspunkte von $\mathbb{R}^{n+1}$, die Δ_n aufspannen, eindeutig bestimmt. Daher notieren wir f als $(n+1)$-Tupel $f = (f(e_0), \ldots, f(e_n))$. Insbesondere läßt sich für $0 \le i \le n$ die i-te Seite $\delta^i = \delta^i_{n-1} : \Delta_{n-1} \to \Delta_n$ des n-ten Standardsimplex offenbar als $\delta^i = (e_0, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, e_n)$ schreiben.

Für $i = 0, \ldots, n$ definieren wir die affinen Abbildungen $\tau_i^{n+1} : \Delta_{n+1} \to \Delta_n \times I$ durch $\tau_i^{n+1}(e_j) := (e_j, 0)$ für $j \le i$ und $\tau_i^{n+1}(e_j) := (e_{j-1}, 1)$ für $i < j \le n+1$. Damit ist

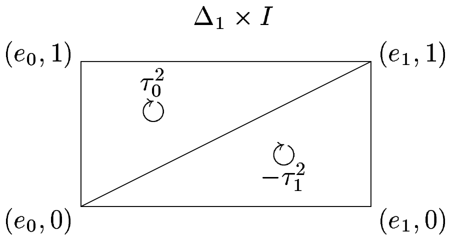
$$\tau_i^{n+1} = ((e_0,0), \ldots, (e_i,0), (e_i,1), \ldots, (e_n,1)).$$

Wir kommen nun zur Definition von P^n:

1. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\delta_n = \mathrm{id}_{\Delta_n} \in S_n(\Delta_n; R) = S_n(\Delta_n, \emptyset; R)$. Wir definieren zunächst $P^n_{(\Delta_n,\emptyset)}(\delta_n)$ als

   $$P(\delta_n) := P^n_{(\Delta_n,\emptyset)}(\delta_n) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \tau_i^{n+1} \in S_{n+1}(\Delta_n \times I; R) = S_{n+1}(\Delta_n \times I, \emptyset; R).$$

   Diese Definition machen wir uns an folgender Abbildung klar:

   $P^n_{(\Delta_1,\emptyset)}(\delta_1)$ ist also die Kette, die aus den beiden Simplizes τ_0^2 und τ_1^2 besteht. Analog ist $P^n_{(\Delta_2,\emptyset)}(\delta_2)$ eine Triangulierung des Prismas $\Delta_2 \times I$.

2. Sei nun (X,A) ein topologisches Paar und $(\sigma_n : \Delta_n \to X) \in S_n(X,A;R)$ ein singuläres Simplex. Wir setzen

   $$P(\sigma_n) := P^n_{(X,A)}(\sigma_n) := (\sigma_n \times \mathrm{id}_I)_*(P^n_{(\Delta_n,\emptyset)}(\delta_n)) \in S_{n+1}(X \times I, A \times I; R).$$

   Durch lineare Fortsetzung erhalten wir einen Morphismus

   $$P = P^n_{(X,A)} : S_n(X,A;R) \to S_{n+1}(X \times I, A \times I; R).$$

Wir werden nun die Eigenschaften von P nachweisen:

1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir haben für jedes topologische Paar (X,A) einen Morphismus $P^n_{(X,A)} : S_n(X,A;R) \to S_{n+1}(X \times I, A \times I; R)$ definiert. Um zu zeigen, daß P eine natürliche Transformation von $S_n(-,-;R)$ nach $S_{n+1}((-,-) \times I; R)$ ist, genügt es daher, für jeden Morphismus $f : (X,A) \to (Y,B)$ die Kommutativität des folgenden Diagramms nachzuweisen:

   $$\begin{tikzcd} S_n(X,A;R) \arrow[r, "P^n_{(X,A)}"] \arrow[d, "f_*"'] & S_{n+1}(X \times I, A \times I; R) \arrow[d, "(f \times \mathrm{id}_I)_*"] \\ S_n(Y,B;R) \arrow[r, "P^n_{(Y,B)}"] & S_{n+1}(Y \times I, B \times I; R) \end{tikzcd}$$

Sei also $f : (X, A) \to (Y, B)$ eine Abbildung topologischer Paare. Dann gilt für jedes singuläre Simplex $\sigma_n : \Delta_n \to X \in S_n(X, A; R)$:

$$\begin{aligned}
((f \times \mathrm{id}_I)_* \circ P^n_{(X,A)})(\sigma_n) &= (f \times \mathrm{id}_I)_*(P^n_{(X,A)}(\sigma_n)) \\
&= (f \times \mathrm{id}_I)_*((\sigma_n \times \mathrm{id}_I)_*(P^n_{(\Delta_n,\emptyset)}(\delta_n))) \\
&= ((f \times \mathrm{id}_I) \circ (\sigma_n \times \mathrm{id}_I))_*(P^n_{(\Delta_n,\emptyset)}(\delta_n)) \\
&= ((f \circ \sigma_n) \times \mathrm{id}_I)_*(P^n_{(\Delta_n,\emptyset)}(\delta_n)) \\
&= P^n_{(Y,B)}(f \circ \sigma_n) \\
&= P^n_{(Y,B)}(f_*(\sigma_n)) = (P^n_{(Y,B)} \circ f_*)(\sigma_n).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Kommutativität des obigen Diagramms. Also ist P^n eine natürliche Transformation.

2. Nun beweisen wir, daß für jedes topologische Paar (X, A) die Familie $P := P_{(X,A)} := (P^n_{(X,A)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Homotopie zwischen λ_{0*} und λ_{1*} ist. Dazu müssen wir $dP + Pd = \lambda_{1*} - \lambda_{0*}$ nachweisen. Analog zur Definition von P zeigen wir für $n \in \mathbb{N}$ zunächst $d_{n+1}P^n_{(\Delta_n,\emptyset)}(\delta_n) + P^{n-1}_{(\Delta_n,\emptyset)}d_n(\delta_n) = \lambda_{1*}(\delta_n) - \lambda_{0*}(\delta_n)$:

$$\begin{aligned}
P^{n-1}_{(\Delta_n,\emptyset)}(d_n(\delta_n)) &= P^{n-1}_{(\Delta_n,\emptyset)}(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\delta^j) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j(\delta^j \times \mathrm{id}_I)_*(P^{n-1}_{(\Delta_n,\emptyset)}(\delta_{n-1})) \\
&= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j(\delta^j \times \mathrm{id}_I)_*\left(\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\tau_i^n\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i(\delta^j \times \mathrm{id}_I) \circ \tau_i^n \\
&= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^i((e_0,0),\ldots,(e_i,0),(e_i,1),\ldots,\widehat{(e_j,1)},\ldots,(e_n,1)) \\
&\quad + \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\sum_{i=j}^{n-1}(-1)^i((e_0,0),\ldots,\widehat{(e_j,0)},\ldots,(e_{i+1},0),(e_{i+1},1),\ldots,(e_n,1)) \\
&= \sum_{0\le i<j\le n}(-1)^{i+j}((e_0,0),\ldots,(e_i,0),(e_i,1),\ldots,\widehat{(e_j,1)},\ldots,(e_n,1)) \\
&\quad + \sum_{0\le j<i\le n}(-1)^{i+j-1}((e_0,0),\ldots,\widehat{(e_j,0)},\ldots,(e_i,0),(e_i,1),\ldots,(e_n,1)).
\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}
d_{n+1}(P^n_{(\Delta_n,\emptyset)}(\delta_n)) &= d_{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\tau_i^{n+1}\right) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_{n+1}(\tau_i^{n+1}) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j\tau_i^{n+1}\circ\delta_n^j \\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j((e_0,0),\ldots,(e_i,0),(e_i,1),\ldots,(e_n,1))\circ(e_0,\ldots,\widehat{e_j},\ldots,e_{n+1}) \\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\Bigg(\sum_{j=0}^{i}(-1)^j((e_0,0),\ldots,\widehat{(e_j,0)},\ldots,(e_i,0),(e_i,1),\ldots,(e_n,1)) \\
&\qquad\qquad + \sum_{j=i+1}^{n+1}(-1)^j((e_0,0),\ldots,(e_i,0),(e_i,1),\ldots,\widehat{(e_{j-1},1)},\ldots,(e_n,1))\Bigg) \\
&= \sum_{0\le j\le i\le n}(-1)^{i+j}((e_0,0),\ldots,\widehat{(e_j,0)},\ldots,(e_i,0),(e_i,1),\ldots,(e_n,1)) \\
&\quad + \sum_{0\le i\le j\le n}(-1)^{i+j+1}((e_0,0),\ldots,(e_i,0),(e_i,1),\ldots,\widehat{(e_j,1)},\ldots,(e_n,1))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -P^{n-1}_{(\Delta_n,\emptyset)}(d_n(\delta_n)) + \sum_{i=0}^{n}((e_0,0),\dots,\widehat{(e_i,0)},(e_i,1),\dots,(e_n,1)) \\
&\qquad - \sum_{i=0}^{n}((e_0,0),\dots,(e_i,0),\widehat{(e_i,1)},\dots,(e_n,1)) \\
&= -P^{n-1}_{(\Delta_n,\emptyset)}(d_n(\delta_n)) + ((e_0,1),\dots,(e_n,1)) - ((e_0,0),\dots,(e_n,0)) \\
&= -P^{n-1}_{(\Delta_n,\emptyset)}(d_n(\delta_n)) + \lambda_{1*}(\delta_n) - \lambda_{0*}(\delta_n).
\end{aligned}
$$

Also ist $d_{n+1}(P^n_{(\Delta_n,\emptyset)}(\delta_n)) + P^{n-1}_{(\Delta_n,\emptyset)}(d_n(\delta_n)) = \lambda_{1*}(\delta_n) - \lambda_{0*}(\delta_n)$. Dies verwenden wir, um $dP + Pd = \lambda_{1*} - \lambda_{0*}$ allgemein zu beweisen: Seien (X, A) ein beliebiges, topologisches Paar, $n \in \mathbb{N}$ und $(\sigma_n : \Delta_n \to X) \in S_n(X, A; R)$. Dann erhalten wir mit der Natürlichkeit von P, sowie Lemma 3.33 die Gleichung

$$
\begin{aligned}
&d_{n+1}(P^n_{(X,A)}(\sigma_n)) + P^{n-1}_{(X,A)}(d_n(\sigma_n)) \\
&\qquad = d_{n+1}((\sigma_n \times \mathrm{id}_I)_*(P^n_{(\Delta_n,\emptyset)}(\delta_n))) + P^{n-1}_{(X,A)}(\sigma_{n*}(d_n(\delta_n))) \\
&\qquad = (\sigma_n \times \mathrm{id}_I)_*(d_{n+1}(P^n_{(\Delta_n,\emptyset)}(\delta_n))) + (\sigma_n \times \mathrm{id}_I)_*(P^{n-1}_{(\Delta_n,\emptyset)}(d_n(\delta_n))) \\
&\qquad = (\sigma_n \times \mathrm{id}_I)_*(d_{n+1}(P^n_{(\Delta_n,\emptyset)}(\delta_n)) + P^{n-1}_{(\Delta_n,\emptyset)}(d_n(\delta_n))) \\
&\qquad = (\sigma_n \times \mathrm{id}_I)_*(\lambda_{1*}(\delta_n) - \lambda_{0*}(\delta_n)) \\
&\qquad = (\sigma_n \times \mathrm{id}_I) \circ \lambda_1 \circ \delta_n - (\sigma_n \times \mathrm{id}_I) \circ \lambda_0 \circ \delta_n \\
&\qquad = \sigma_n \times 1 - \sigma_n \times 0 = \lambda_{1*}(\sigma_n) - \lambda_{0*}(\sigma_n).
\end{aligned}
$$

Da d_n und $P^n_{(X,A)}$ stets Homomorphismen sind und die singulären Simplizes σ_n stets $S_n(X, A; R)$ erzeugen, gilt allgemein $dP + Pd = \lambda_{1*} - \lambda_{0*}$.

□

Proposition 3.38 (Homotopieinvarianz der Homologie). *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Sind $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ stetige, homotope Abbildungen der Paare, so sind $f_* \simeq g_* : S_\bullet(X, A; R) \to S_\bullet(Y, B; R)$ kettenhomotop (d.h. homotope Morphismen von Komplexen).*

Beweis. Sei $F : (X, A) \times I = (X \times I,\ A \times I) \to (Y, B)$ eine Homotopie von f nach g. Für $t \in I$ sei $\lambda_t : (X, A) \to (X, A) \times I$ definiert durch $\lambda_t(x) = (x, t)$. Dann ist λ_t eine Homotopie zwischen λ_0 und λ_1, und es gilt

$$
\begin{aligned}
F_0 &:= F \circ \lambda_0 = f, \\
F_1 &:= F \circ \lambda_1 = g.
\end{aligned}
$$

P sei der „Prismenoperator“, den Lemma 3.37 garantiert.

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
F_{1*} - F_{0*} &= (F \circ \lambda_0)_* - (F \circ \lambda_1)_* \\
&= F_* \circ (\lambda_{0*} - \lambda_{1*}) \\
&= F_* \circ (dP + Pd) \\
&= d \circ (F_* \circ P) + (F_* \circ P) \circ d,
\end{aligned}
$$

d.h. $F_* \circ P$ ist eine (Ketten-)Homotopie zwischen f_* und g_*. □

Als Korollar ergibt sich aus Lemma 3.3:

Satz 3.39. *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Sind $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ zwei homotope Abbildungen von Paaren, so gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$*

$$f_* = g_* : H_n(X, A; R) \longrightarrow H_n(Y, B; R).$$

Beweis. Offensichtlich. □

Korollar 3.40. *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Ist $f : X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz, so ist*

$$f_* : H_n(X;R) \xrightarrow{\cong} H_n(Y;R)$$

für jedes $n \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus.

Beweis. Da f eine Homotopieäquivalenz ist, gibt es ein stetige Abbildung $g : Y \to X$ mit $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$, und $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$. Also ist für $n \in \mathbb{Z}$ stets $f_* \circ g_* = \mathrm{id}_{H_n(Y;R)}$ und $g_* \circ f_* = \mathrm{id}_{H_n(X;R)}$. Folglich ist f_* ein Isomorphismus. □

Korollar 3.41. *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Ist $A \subseteq X$ ein Deformationsretrakt, so induziert die Inklusion $i : A \to X$ einen Isomorphismus $i_* : H_n(A;R) \xrightarrow{\cong} H_n(X;R)$ und es gilt $H_n(X,A;R) = \{0\}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Korollar 3.40 liefert, daß i_* stets ein Isomorphismus ist. Die lange Homologiesequenz des Paares (X,A) (Satz 3.34) liefert $H_n(X,A;R) = \{0\}$. □

Korollar 3.42. *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und (X,A,B) ein topologisches Tripel*[7]. *Ferner sei $B \subseteq A$ ein Deformationsretrakt. Dann erhalten wir für jedes $n \in \mathbb{Z}$ einen Isomorphismus*

$$H_n(X,A;R) \cong H_n(X,B;R).$$

Beweis. Da $B \subseteq A$ ein Deformationsretrakt ist, liefert Korollar 3.41, daß für $n \in \mathbb{Z}$ stets $H_n(A,B;R) = \{0\}$ gilt. Sei nun ein $n \in \mathbb{Z}$ beliebig vorgegeben. Nach Satz 3.36 erhalten wir die lange, exakte Sequenz des Tripels (X,A,B):

$$\cdots \to \underbrace{H_n(A,B;R)}_{=\{0\}} \to H_n(X,B;R) \to H_n(X,A;R) \to \underbrace{H_{n-1}(A,B;R)}_{=\{0\}} \to \cdots .$$

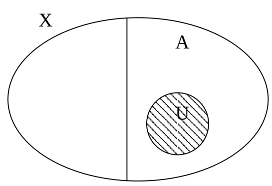
□

Korollar 3.43. *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und X ein kontrahierbarer, topologischer Raum. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{Z}$*

$$H_n(X;R) = \begin{cases} R & \text{für } n = 0 \\ \{0\} & \text{für } n \neq 0. \end{cases}$$

Beweis. X ist homotopieäquivalent zu einem Punkt. Daher ist $H_n(X;R) \cong H_n(\{x_0\};R)$. Mit Satz 3.34 folgt hieraus die Behauptung. □

3.5 Ausschneidungssatz und Mayer-Vietoris Sequenz



Der Ausschneidungssatz ist einer der wichtigsten Sätze zur konkreten Berechnung von Homologiegruppen. Er besagt für topologische Paare (X,A) und Unterräume $U \subseteq A$, daß

$$H_n(X,A;R) \cong H_n(X \setminus U, A \setminus U;R)$$

gilt, falls U nicht „bis zum Rand von A geht“. Also kann U ausgeschnitten werden.

[7] (X,A,B) nennen wir genau dann topologisches Tripel, wenn X ein topologischer Raum ist und $B \subseteq A \subseteq X$ Teilräume sind.

Satz 3.44 (Ausschneidungssatz). *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, (X,A) ein topologisches Paar und $U \subseteq A$ eine Teilmenge mit $\bar{U} \subseteq A^\circ$. Dann induziert die Inklusion $j : (X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X,A)$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$ einen Isomorphismus*

$$j_* : H_n(X \setminus U, A \setminus U; R) \xrightarrow{\cong} H_n(X,A;R).$$

Beweis. Dies ergibt sich aus Satz 3.45, Lemma 3.47, sowie Satz 3.46, die wir im folgenden beweisen. □

Satz 3.45 (Ausschneidungsisomorphismus). *Die Aussage von Satz 3.44 ist äquivalent zu:*

Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, X ein topologischer Raum, $A, B \subseteq X$ Teilmengen mit $A^\circ \cup B^\circ = X$. Dann induziert die Inklusion $j : (A, A \cap B) \hookrightarrow (X,B)$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$ einen Isomorphismus

$$j_* : H_n(A, A \cap B; R) \xrightarrow{\cong} H_n(X,B;R).$$

Beweis. Wir gehen zunächst davon aus, daß Satz 3.44 bewiesen ist und beweisen damit $j_* : H_n(A, A \cap B; R) \cong H_n(X,B;R)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Wir setzen $U' := X \setminus A$, $A' := B$. Dann ist $\overline{U'} = X \setminus A^\circ \subseteq B^\circ = A'^\circ$. Weiterhin ist $X \setminus U' = A$ und $A' \setminus U' = A \cap B$. Daher liefert Satz 3.44 die behauptete Isomorphie.

Nun gehen wir davon aus, daß für jeden topologischen Raum X und beliebige Teilmengen $A, B \subseteq X$ mit $X = A^\circ \cup B^\circ$ die Inklusion $j : (A, A \cap B) \hookrightarrow (X,B)$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$ einen Isomorphismus $j_* : H_n(A, A \cap B; R) \cong H_n(X,B;R)$ induziert. Damit beweisen wir Satz 3.44. Seien $U \subseteq A \subseteq X$ mit $\bar{U} \subseteq A^\circ$ wie in Satz 3.44 gegeben. Wir setzen $A' := X \setminus U$ und $B' := A$. Dann ist $A'^\circ \cup B'^\circ = (X \setminus \bar{U}) \cup A^\circ = X$ und wegen $(X \setminus U, A \setminus U) = (A', A' \cap B')$ induziert die Inklusion $j : (X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X,A)$ für $n \in \mathbb{Z}$ einen Isomorphismus $j_* : H_n(X \setminus U, A \setminus U; R) \cong H_n(X,A;R)$. □

Satz 3.46 (kleine Simplizes). *Sei $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine Überdeckung von X mit $X = \bigcup_{i \in I} U_i{}^\circ$, und sei $S_n^{\mathfrak{U}}(X;R)$ der freie R-Modul, der von allen singulären n-Simplizes der „Größe $\mathfrak{U}$" erzeugt wird, d.h. von allen Simplizes $\sigma : \Delta_n \to X$ für die ein $i \in I$ mit $\sigma(\Delta_n) \subseteq U_i$ existiert. Dann induziert die Inklusion*

$$i : S_\bullet^{\mathfrak{U}}(X;R) \longrightarrow S_\bullet(X;R)$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ einen Isomorphismus

$$i_* : H_n(S_\bullet^{\mathfrak{U}}(X;R)) \xrightarrow{\cong} H_n(X;R).$$

Lemma 3.47. *Satz 3.46 impliziert Satz 3.44 in der Formulierung von Satz 3.45.*

Beweis. Es gelte Satz 3.46. Zudem sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, X ein topologischer Raum und $A, B \subseteq X$ Teilmengen mit $X = A^\circ \cup B^\circ$. Wir setzen $\mathfrak{U} := \{A, B\}$. Dann gilt $S_\bullet^{\mathfrak{U}}(X;R) = S_\bullet(A;R) + S_\bullet(B;R) \subseteq S_\bullet(X;R)$. Offenbar gilt $S_\bullet(A;R) \cap S_\bullet(B;R) = S_\bullet(A \cap B; R)$, woraus sich $S_\bullet(A, A \cap B; R) = S_\bullet(A;R)/S_\bullet(A \cap B;R) \cong (S_\bullet(A;R) + S_\bullet(B;R))/S_\bullet(B;R)$ ergibt. Wir erhalten folgendes, kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_\bullet(B;R) \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & S_\bullet(A;R) + S_\bullet(B;R) \arrow[r] \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & S_\bullet(A,\ A \cap B;R) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_\bullet(B;R) \arrow[r] & S_\bullet(X;R) \arrow[r] & S_\bullet(X,B;R) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Aufgrund der Natürlichkeit der langen, exakten Homologiesequenz (Satz 3.6) folgt, daß folgendes Diagramm mit exakten Zeilen kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n(B;R) \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_n(S_\bullet^{\mathfrak{U}}(X;R)) \arrow[r] \arrow[d, "(*)"', "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_n(A, A \cap B;R) \arrow[r] \arrow[d, "j_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_{n-1}(B;R) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_n(B;R) \arrow[r] & H_n(X;R) \arrow[r] & H_n(X,B;R) \arrow[r] & H_{n-1}(B;R) \arrow[r] & \cdots.
\end{tikzcd}$$

Nach Voraussetzung ist $(*)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus. Aus dem Fünferlemma (Lemma 3.5) folgt nun die Behauptung $j_* : H_n(A, A \cap B; R) \cong H_n(X,B;R)$ des Satzes 3.45. □

Um den Beweis von Satz 3.46 vorzubereiten, stellen wir zunächst die Definition eines Kegels über einem Simplex bereit:

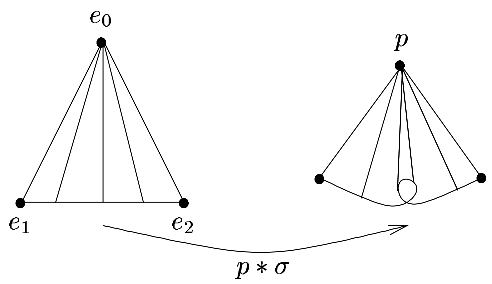
Definition:
Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und $A \subseteq \mathbb{R}^k$ konvex. Für ein singuläres n-Simplex $\sigma_n : \Delta_n \to A$ und einen Punkt $p \in A$ sei

$$p * \sigma_n : \Delta_{n+1} \to A$$
$$(x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \begin{cases} p & , x_0 = 1 \\ x_0 \cdot p + (1 - x_0) \cdot \sigma_n(\frac{x_1}{1-x_0}, \dots, \frac{x_{n+1}}{1-x_0}) & , x_0 \neq 1. \end{cases}$$

Wir nennen $p * \sigma_n$ den **Kegel über σ_n mit Spitze p**.
Für eine singuläre n-Kette $c = \sum_{i=0}^{l} n_i \sigma_i \in S_n(A; R)$ setzen wir

$$p * c := \sum_{i=0}^{l} n_i (p * \sigma_i) \in S_{n+1}(A; R).$$

Folgende Abbildung veranschaulicht einen Kegel $p * \sigma$ über einem Simplex $\sigma : \Delta_1 \to \mathbb{R}^2$.



Lemma 3.48. *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, $A \subseteq \mathbb{R}^k$ konvex, $p \in A$ und $c = \sum_{i=0}^{l} n_i \sigma_i \in S_n(A; R)$. Dann gilt*

$$d_{n+1}(p * c) = \begin{cases} c - \sum_{i=0}^{l} n_i p & , n = 0 \\ c - p * d_n(c) & , n > 0. \end{cases}$$

Beweis. Wir berechnen zunächst für $i, n \in \mathbb{N}$, $i \leq n + 1$ und ein n-Simplex $\sigma : \Delta_n \to A$ die i-te Seite von $p * \sigma$. Sei $(x_0, \dots, x_n) \in \Delta_n$. Dann ist

$$((p * \sigma) \circ \delta^i)(x_0, x_1, \dots, x_n) = (p * \sigma)(x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_n).$$

Wir erhalten $(p * \sigma) \circ \delta^0 = \sigma(x_0, \dots, x_n)$ für beliebiges $(x_0, \dots, x_n) \in \Delta_n$, sowie

$$((p * \sigma) \circ \delta^i)(1, 0, \dots, 0) = p = (p * (\sigma \circ \delta^{i-1}))(1, 0, \dots, 0)$$

für $i \neq 0$. Für $(x_0, \dots, x_n) \in \Delta_n$ mit $x_0 \neq 1$ und $i \neq 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} ((p * \sigma) \circ \delta^i)(x_0, \dots, x_n) &= x_0 \cdot p + (1 - x_0) \cdot \sigma(\frac{x_1}{1 - x_0}, \dots, \frac{x_{i-1}}{1 - x_0}, 0, \frac{x_i}{1 - x_0}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_0}) \\ &= x_0 \cdot p + (1 - x_0) \cdot (\sigma \circ \delta^{i-1})(\frac{x_1}{1 - x_0}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_0}) \\ &= (p * (\sigma \circ \delta^{i-1}))(x_0, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Wir fassen die obigen Überlegungen zusammen und erhalten für die i-te Seite des Kegels mit Spitze $p \in A$ über einem singulären n-Simplex $\sigma : \Delta_n \to A$ die Gleichung

$$(p * \sigma) \circ \delta^i = \begin{cases} \sigma & , i = 0 \\ p * (\sigma \circ \delta^{i-1}) & , i \neq 0. \end{cases}$$

Seien nun eine singuläre n-Kette $c = \sum_{i=0}^{l} n_i \cdot \sigma_i \in S_n(A;R)$ und ein Punkt $p \in A$ gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned}
d_{n+1}(p * c) &= d_{n+1}\left(\sum_{i=0}^{l} n_i \cdot (p * \sigma_i)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{l} n_i \cdot d_{n+1}(p * \sigma_i) \\
&= \sum_{i=0}^{l} n_i \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j (p * \sigma_i) \circ \delta^j \\
&= \sum_{i=0}^{l} n_i \left(\sigma_i + \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j p * (\sigma_i \circ \delta^{j-1})\right) \\
&= c - \sum_{i=0}^{l} n_i \cdot \left(p * \left(\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \sigma_i \circ \delta^j\right)\right) \\
&= c - \sum_{i=0}^{l} n_i \cdot (p * d_n(\sigma_i)) \\
&= c - p * (d_n(c)).
\end{aligned}$$

Ist $n = 0$, so gilt $d_0(\sigma_i) = 0$, d.h. $p * (d_0(\sigma_i))$ ist für alle $\sigma_i : \Delta_0 \to A$ die konstante Abbildung $p : \Delta_0 = \{1\} \to \{p\}$. Somit erhalten wir im Fall $n = 0$

$$d_{n+1}(p * c) = c - \sum_{i=0}^{l} n_i \cdot p.$$

□

Beweis von Satz 3.46. Wir werden beweisen, daß die Inklusion

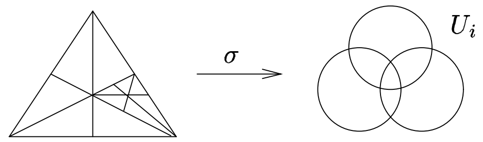
$$i : S_\bullet^{\mathfrak{U}}(X;R) \to S_\bullet(X;R)$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Isomorphismus der Homologiegruppen

$$i_* : H_n(S_\bullet^{\mathfrak{U}}(X;R)) \to H_n(S_\bullet(X;R)) = H_n(X;R)$$

induziert. Für $n < 0$ ist dies trivial.

Idee: Für $n \in \mathbb{N}$ und ein gegebenes, singuläres n-Simplex $\sigma : \Delta_n \longrightarrow X$ unterteilen wir Δ_n so oft baryzentrisch, bis jedes kleine Simplex vollständig in ein U_i abgebildet wird:



Wir konstruieren hierzu für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Unterteilungsoperator

$$S : S_n(X;R) \to S_n(X;R)$$

mit $dS = Sd$ (also einen Morphismus von Komplexen), so daß für jedes $\sigma \in S_n(X;R)$ ein $K \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$S^K(\sigma) \in S_n^{\mathfrak{U}}(X;R) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Ferner konstruieren wir eine natürliche Kettenhomotopie $H : S \simeq \mathrm{id}_{S_\bullet(X;R)}$ die $[S^K(\sigma)] = [\sigma]$ in $H_n(X;R)$ liefert. Hieraus erhalten wir die Surjektivität von i_*. Die Injektivität werden wir ebenfalls mit Hilfe von S und H nachweisen.

Wir kommen nun zur Definition von S und H: Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir induktiv

$$S(\delta_n) := \begin{cases} \delta_0 & , n = 0 \\ p * S(d_n(\delta_n)) & , n \neq 0 \end{cases}, \quad H(\delta_n) := \begin{cases} 0 & , n = 0 \\ p * (\delta_n - S(\delta_n) - H(d_n(\delta_n))) & , n \neq 0, \end{cases}$$

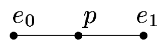
wobei $p := \frac{1}{n+1} \cdot (e_0, \ldots, e_n)$ das Baryzentrum von Δ_n sei, sowie

$$S(\sigma) := \sigma_*(S(\delta_n)), \qquad H(\sigma) := \sigma_*(H(\delta_n))$$

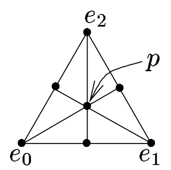
für singuläre n-Simplizes $\sigma : \Delta_n \to X$.

Für beliebige singuläre Ketten setzen wir die Definition von S und H linear fort.

Folgendes Bild illustriert die Konstruktion der $S(\delta_n)$ für $n \in \{1, 2\}$:



$S(\delta_1) = p * e_0 - p * e_1$



$S(\delta_2) = p * S(d_2(\delta_2))$

Nun beweisen wir folgende Aussagen:

1. $d_n S = S d_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. $d_{n+1} H = \mathrm{id} - S - H d_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Offenbar genügt es, die Beweise für δ_n zu führen.

1. Für $n = 0$ ist $d_0(S(\delta_0)) = d_0(\delta_0) = 0$ und $S(d_0(\delta_0)) = S(0) = 0$, was mit der Linearität von d_0 und S zu $S d_0 = d_0 S$ führt. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, $S d_n = d_n S$ sei für ein $n \in \mathbb{N}$ bereits bewiesen. Dann erhalten wir mit Lemma 3.48

$$\begin{aligned} d_{n+1}(S(\delta_{n+1})) &= d_{n+1}(p * S(d_{n+1}(\delta_{n+1}))) \\ &= S(d_{n+1}(\delta_{n+1})) - p * d_n(S(d_{n+1}(\delta_{n+1}))) \\ &= S(d_{n+1}(\delta_{n+1})) - p * S(d_n(d_{n+1}(\delta_{n+1}))) \quad \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\ &= S(d_{n+1}(\delta_{n+1})) - 0 = S(d_{n+1}(\delta_{n+1})). \end{aligned}$$

Dies setzt sich auf beliebige singuläre n-Simplizes fort.

2. Offenbar gilt $d_1(H(\delta_0)) = d_1(0) = 0 = H(0) = H(d_0(\delta_0))$. Sei nun $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ derart gegeben, daß $d_n(H(c)) = (\mathrm{id} - S - H \circ d_{n-1})(c)$ für alle singulären $(n-1)$-Ketten c bereits bewiesen ist. Dann gilt gemäß Lemma 3.48:

$$\begin{aligned} d_{n+1}(H(\delta_n)) &= d_{n+1}(p * (\delta_n - S(\delta_n) - H(d_n(\delta_n)))) \\ &= \delta_n - S(\delta_n) - H(d_n(\delta_n)) - p * \big(d_n(\delta_n) - d_n(S(\delta_n)) - d_n(H(d_n(\delta_n)))\big) \\ &= \delta_n - S(\delta_n) - H(d_n(\delta_n)) - p * \Big(d_n(\delta_n) - d_n(S(\delta_n)) \\ &\quad - d_n(\delta_n) + S(d_n(\delta_n)) + H(d_{n-1}(d_n(\delta_n)))\Big) \quad \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\ &= \delta_n - S(\delta_n) - H(d_n(\delta_n)) - 0 = \delta_n - S(\delta_n) - H(d_n(\delta_n)). \end{aligned}$$

Somit ist $S : S_\bullet(X; R) \to S_\bullet(X; R)$ ein Morphismus von Komplexen und $H : S \simeq \mathrm{id}_{S_\bullet(X;R)}$ eine Kettenhomotopie. Wir werden nun für jedes $c = \sum_{j=1}^{l} n_j \sigma_j \in S_n(X; R)$ die Existenz eines $K \in \mathbb{N}$ mit $S^K(c) \in S_n^{\mathfrak{U}}(X; R)$ zeigen: Um das Lebesguesche Lemma (Lemma 1.37 auf Seite 47) anwenden zu können, setzen wir $m : \Delta_n^2 \to \mathbb{R}_+$, $m((x_0, \ldots, x_n), (y_0, \ldots, y_n)) := \sum_{i=0}^{n} |x_i - y_i|$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wir erhalten für $n \in \mathbb{N}$ den metrischen Raum (Δ_n, m), in dem der Durchmesser D für jede Teilmenge $A \subseteq \Delta_n$ definiert ist durch $D(A) := \sup_{x,y\in A}(m(x,y))$. Gilt $S^K(\delta_n) = \sum_{i=0}^{l} m_i\beta_i$ für $K, n \in \mathbb{N}$, so ist leicht nachzuvollziehen, daß stets $D(\beta_i(\Delta_n)) \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^K \cdot D(\Delta_n)$ gilt.

Zu jedem σ_j, $j = 1,\dots l$ ist $\{(\sigma_j^{-1}(U_i))^\circ\}_{i\in I}$ eine Überdeckung von Δ_n. Nach dem Lebesgueschen Lemma 1.37 gibt es für jedes j ein $\varepsilon(j)$, so daß jeder $\varepsilon(j)$-Ball in einem $(\sigma_j^{-1}(U_i))^\circ$ liegt. Wähle $\varepsilon := \min_{j=1,\dots,l}\varepsilon(j)$. Es gibt ein $K \in \mathbb{N}$, so daß das Bild jedes Simplex der Kette $S^K(\delta_n)$ in einem ε-Ball enthalten ist. Also ist $S^K(c) \in S_n^{\mathfrak{U}}(X;R) \subseteq S_n(X;R)$. Da $H : S \simeq \mathrm{id}_{S_\bullet(X;R)}$ ist, liefert Lemma 3.3, daß $[S^K(c)] = [c]$ in $H_n(X;R)$ gilt.

Wir zeigen nun, daß $i_* : H_n(S_\bullet^{\mathfrak{U}}(X;R)) \to H_n(S_\bullet(X;R)) = H_n(X;R)$ eine Bijektion ist.

1. i_* ist surjektiv: Sei $c \in S_n(X;R)$ mit $d_n(c) = 0$. Nach obigem existiert ein $K \in \mathbb{N}$ mit $S^K(c) \in S_n^{\mathfrak{U}}(X;R)$. Da S ein Morphismus von Komplexen ist, gilt $d_n(S^K(c)) = S^K(d_n(c)) = 0$. Folglich ist $[S^K(c)] \in H_n(S_\bullet^K(X;R))$ ein Urbild von $[c] = [S^K(c)]$ unter i_*.

2. i_* ist injektiv: Seien $\gamma_i \in S_n(U_i;R)$, $i \in I$ und $\gamma = \sum_{\text{endl.}}\gamma_i \in S_n^{\mathfrak{U}}(X;R)$, so daß $d_n^{\mathfrak{U}}(\gamma) = \sum_{\text{endl.}} d_n^{U_i}(\gamma_i) = 0$ und
$$i_*([\gamma]) = 0 \in H_n(X;R)$$
gilt. Dann gibt es ein $c \in S_{n+1}(X;R)$ mit $d_{n+1}(c) = \sum_{\text{endl.}}\gamma_i$. Nach obigem existiert ein $K \in \mathbb{N}$, so daß
$$S^K(c) = \sum_{\text{endl.}} c_j \in S_n^{\mathfrak{U}}(X;R)$$
ist. Wiederum erhalten wir
$$S^K(\gamma) = S^K(d_{n+1}(c)) = d_{n+1}(S^K(c)) \in B_n^{\mathfrak{U}}(X;R),$$
da S ein Morphismus ist. Also ist $[\gamma] = [S^K(\gamma)] = 0$ in $H_n(S_\bullet^{\mathfrak{U}}(X;R))$.

□

Satz 3.49 (Mayer-Vietoris-Sequenz). *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, X ein topologischer Raum, $A, B \subseteq X$ Teilmengen mit $X = A^\circ \cup B^\circ$ und $C \subseteq A \cap B$. Dann existiert eine lange, exakte Sequenz*
$$\cdots \xrightarrow{\beta} H_{n+1}(X,C;R) \xrightarrow{\Delta} H_n(A\cap B,C;R) \xrightarrow{\alpha} H_n(A,C;R) \oplus H_n(B,C;R) \xrightarrow{\beta} H_n(X,C;R) \xrightarrow{\Delta} \cdots .$$
Für $C = \emptyset$ schreibt sich diese Sequenz als
$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(X;R) \longrightarrow H_n(A\cap B;R) \longrightarrow H_n(A;R)\oplus H_n(B;R) \longrightarrow H_n(X;R) \longrightarrow \cdots .$$
Bezeichnen wir die Inklusionen mit

$i_1 : (A\cap B, C) \subseteq (A,C)$, $\quad i_3 : (A,C) \subseteq (X,C)$,
$i_2 : (A\cap B, C) \subseteq (B,C)$, $\quad i_4 : (B,C) \subseteq (X,C)$,

so sind α und β wie folgt definiert:
$$\alpha(x) := (i_{1*}(x), -i_{2*}(x)),$$
$$\beta(x) := i_{3*}(x) + i_{4*}(x),$$

Beweis. Wir führen den Beweis lediglich für den Fall $C = \emptyset$. Den Beweis für den allgemeinen Fall überlassen wir dem Leser als Übung.

$S_\bullet(A;R)$ und $S_\bullet(B;R)$ sind bekanntlich Unterkomplexe von $S_\bullet(X;R)$. Nach Satz 3.46 induziert die Inklusion $i : S_\bullet(A;R) + S_\bullet(B;R) \subseteq S_\bullet(X;R)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Isomorphismus $i_* : H_n(S_\bullet(A;R) + S_\bullet(B;R)) \cong H_n(X;R)$. Satz 3.8 liefert daher die Behauptung. □

Satz 3.50 (relative Mayer-Vietoris-Sequenz). *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, X ein topologischer Raum und $A, B \subseteq X$ offene Teilmengen. Dann existiert eine lange, exakte Sequenz*

$$\cdots \to H_{n+1}(X, A \cup B; R) \to H_n(X, A \cap B; R) \to H_n(X, A; R) \oplus H_n(X, B; R) \\ \to H_n(X, A \cup B; R) \to \dots.$$

Beweis. Vgl. [Dold, III, 8.10]. □

3.6 Homologie von Sphären und andere Anwendungen

In diesem Abschnitt wollen wir die Homologie der Sphären und des Torus berechnen. Hieraus werden wir einige, schöne Korollare erhalten. Dabei wird sich herausstellen, daß zur Berechnung der Homologie folgende Eigenschaften von H_n wichtig sind:

- Die Funktor-Eigenschaft von $H_n(-,-;R) : \mathrm{Top}^2 \to \mathrm{Mod}_R$ (Satz 3.34).
- Die Existenz der natürlichen Transformation $\partial : H_q(X,A;R) \to H_{q-1}(A;R)$ (Satz 3.34).
- Die Existenz der langen, exakten Homologiesequenz

  $$\cdots \longrightarrow H_{q+1}(X,A;R) \xrightarrow{\partial} H_q(A;R) \longrightarrow H_q(X;R) \longrightarrow H_q(X,A;R) \xrightarrow{\partial} \cdots$$

  (Satz 3.34).
- Die Homotopieinvarianz von $H_\bullet$: Sind $f \simeq g : X \to Y$ homotope, stetige Abbildungen, so sind $f_* \simeq g_* : H_n(X;R) \to H_n(Y;R)$ homotope Abbildungen der Komplexe (Satz 3.38).
- Der Ausschneidungssatz: $H_q(X \setminus U, A \setminus U; R) \cong H_q(X,A;R)$ (Satz 3.44).
- Die Homologie des Punktes:

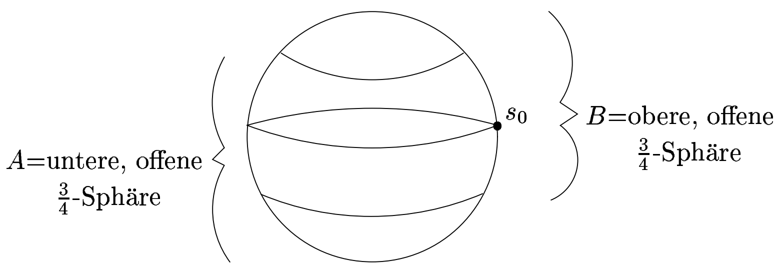
  $$H_q(\{x_0\};R) = \begin{cases} \{0\} & ,q \neq 0 \\ R & ,q = 0 \end{cases}$$

  (Satz 3.34).

Diese Eigenschaften werden wir später mit den Eilenberg-Steenrod-Axiomen axiomatisieren.

3.6.1 Berechnung der Homologiegruppen von S^n

Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und $n \in \mathbb{N}$. Für $\underline{n > 0}$ zerlegen wir S^n in zwei Teile:



Dann ist $S^n = A^\circ \cup B^\circ$, sowie $A \cap B \simeq S^{n-1}$. Weiterhin sind A und B beide kontrahierbar, d.h. $A, B \simeq \{s_0\}$. Nach dem Ausschneidungssatz (alternative Form, Satz 3.45) erhalten wir für jedes $n > 0$ und jedes $q \in \mathbb{N}$ die Isomorphie

$$H_q(A, A \cap B; R) \cong H_q(S^n, B; R).$$

Da $\{s_0\}$ ein offenbar ein Deformationsretrakt von B ist, erhalten wir aus Korollar 3.41, daß $H_q(B,\{s_0\};R) = \{0\}$ ist. Wir betrachten nun die exakte Sequenz des Tripels $(S^n, B, \{s_0\})$ (vgl. Satz 3.36)

$$\cdots \to \underbrace{H_q(B,\{s_0\};R)}_{=\{0\}} \to H_q(S^n,\{s_0\};R) \to H_q(S^n,B;R) \to \underbrace{H_{q-1}(B,\{s_0\};R)}_{=\{0\}} \to \cdots$$

und erhalten den Isomorphismus $H_q(S^n, \{s_0\}; R) \cong H_q(S^n, B; R)$. Analog liefert die lange, exakte Sequenz

$$\cdots \to \underbrace{H_q(A, \{s_0\}; R)}_{=\{0\}} \to H_q(A, A \cap B; R) \to H_{q-1}(A \cap B, \{s_0\}; R) \to \underbrace{H_{q-1}(A, \{s_0\}; R)}_{=\{0\}} \to \cdots$$

des Tripels $(A, A \cap B, \{s_0\})$ den Isomorphismus $H_q(A, A \cap B; R) \cong H_{q-1}(A \cap B, \{s_0\}; R)$.

Zusammenfassend erhalten wir für jedes $n > 0$ und jedes $q \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} H_q(S^n, \{s_0\}; R) &\cong H_q(S^n, B; R) \\ &\cong H_q(A, A \cap B; R) \\ &\cong H_{q-1}(A \cap B, \{s_0\}; R) \\ &\cong H_{q-1}(S^{n-1}, \{s_0\}; R), \end{aligned}$$

da $S^{n-1} \subseteq A \cap B$ ein Deformationsretrakt ist (vgl. Korollar 3.41).

Wir betrachten nun den Fall $\underline{n = 0}$, d.h. wir berechnen $H_q(S^0, \{s_0\}; R)$: Wir bezeichnen die beiden Elemente von S^0 mit s_0 und s_1. Dann sind $\{s_0\}$ und $\{s_1\}$ die beiden Wegkomponenten von S^0. Nach Lemma 3.35 erhalten wir für $q \in \mathbb{N}$ stets $H_q(S^0; R) \cong H_q(\{s_0\}; R) \oplus H_q(\{s_1\}; R)$, sowie $H_q(S^0, \{s_0\}; R) \cong H_q(\{s_0\}, \{s_0\}; R) \oplus H_q(\{s_1\}; R) \cong H_q(\{s_1\}; R)$. Somit ist

$$H_q(S^0, \{s_0\}; R) \cong \begin{cases} R & , q = 0 \\ \{0\} & , q \neq 0. \end{cases}$$

Um $H_q(S^n; R)$ aus $H_q(S^n, \{s_0\}; R)$ berechnen zu können führen wir zunächst die reduzierten, singulären Homologiegruppen ein:

Definition:
Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und X ein topologischer Raum. Dann definieren wir den **augmentierten, singulären Kettenkomplex $\tilde{S}_\bullet(X; R)$** als

$$\tilde{S}_\bullet(X; R) : \cdots \xrightarrow{d_{q+1}} S_q(X; R) \xrightarrow{d_q} S_{q-1}(X; R) \xrightarrow{d_{q-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} S_0(X; R) \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow \{0\},$$

wobei ε diejenige Abbildung sei, die jedes singuläre 0-Simplex auf $1 \in R$ abbildet, d.h. $\varepsilon(\sum n_i \sigma_i) := \sum n_i$.
Die Homologiegruppen $\tilde{H}_q(X; R)$:= $H_q(\tilde{S}_\bullet(X; R))$ bezeichnen wir als **reduzierte, singuläre Homologiegruppen**.

Lemma 3.51. *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und X ein topologischer Raum. Dann gilt:*

1. *$\tilde{S}_\bullet(X; R)$ ist ein Komplex. (Andernfalls wäre es nicht möglich, $\tilde{H}_q(X; R)$ als Homologiegruppe von $\tilde{S}_\bullet(X; R)$ zu definieren.)*

2. *Für $q > 0$ ist*
$$H_q(X; R) = \tilde{H}_q(X; R).$$

3. *Falls $X \neq \emptyset$ ist, gilt*
$$H_0(X; R) = R \oplus \tilde{H}_0(X; R).$$

4. *Für alle $q, n \in \mathbb{N}$ ist*
$$\tilde{H}_q(\mathbb{R}^n; R) = \{0\}.$$

Beweis. Übung. □

Das folgende Lemma hilft uns, aus den $H_q(S^n, \{s_0\}; R)$ die $H_q(S^n; R)$ zu berechnen, und es zeigt, wozu wir die reduzierten Homologiegruppen verwenden können.

Lemma 3.52. *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$H_n(X, \{x_0\}; R) \cong \tilde{H}_n(X; R).$$

Beweis. Nach Satz 3.34 gilt $H_0(\{x_0\}; R) = R$ und $H_q(\{x_0\}; R) = \{0\}$ für alle $q \neq 0$. Lemma 3.51 liefert $\{0\} = H_q(\{x_0\}; R) = \tilde{H}_q(\{x_0\}; R)$ für jedes $q \neq 0$, sowie $R = H_0(\{x_0\}; R) = R \oplus \tilde{H}_0(\{x_0\}; R)$, also auch $\tilde{H}_0(\{x_0\}; R) = \{0\}$. Die Behauptung ergibt sich nun direkt aus der langen, exakten Sequenz

$$\cdots \to \underbrace{\tilde{H}_q(\{x_0\}; R)}_{=\{0\}} \to \tilde{H}_q(X; R) \to H_q(X, \{x_0\}; R) \to \underbrace{\tilde{H}_{q-1}(\{x_0\}; R)}_{=\{0\}} \to \cdots.$$

□

Wir erhalten nun induktiv die reduzierten, singulären Homologiegruppen der Sphären:

$$\begin{array}{c|ccccccccccccc}
q & \cdots & & -1 & & 0 & & 1 & & 2 & & \cdots & & n \\
\hline
\tilde{H}_q(\{s_0\}; R) & \cdots & \leftarrow & \{0\} & \leftarrow & \{0\} & \leftarrow & \{0\} & \leftarrow & \{0\} & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & \{0\} \\
\tilde{H}_q(S^0; R) & \cdots & \leftarrow & \{0\} & \leftarrow & R & \leftarrow & \{0\} & \leftarrow & \{0\} & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & \{0\} \\
\tilde{H}_q(S^1; R) & \cdots & \leftarrow & \{0\} & \leftarrow & \{0\} & \leftarrow & R & \leftarrow & \{0\} & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & \{0\} \\
\tilde{H}_q(S^2; R) & \cdots & \leftarrow & \{0\} & \leftarrow & \{0\} & \leftarrow & \{0\} & \leftarrow & R & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & \{0\} \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\
\tilde{H}_q(S^n; R) & \cdots & \leftarrow & \{0\} & \leftarrow & \{0\} & \leftarrow & \{0\} & \leftarrow & \{0\} & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & R
\end{array}$$

Gehen wir zu $H_q(-; R)$ über, so erhalten wir die Homologiegruppen der Sphären:

Satz 3.53. *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Dann gilt für alle $q \in \mathbb{Z}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$*

$$H_q(S^0; R) = \begin{cases} R^2 & , q = 0 \\ \{0\} & , q \neq 0 \end{cases} \quad \textit{und} \quad H_q(S^n; R) = \begin{cases} R & , q \in \{0, n\} \\ \{0\} & , 0 \neq q \neq n \end{cases}$$

Beweis. Dies geht direkt aus obigen Überlegungen hervor. □

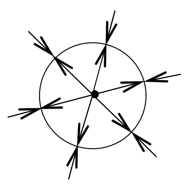
Korollar 3.54. *S^n ist für kein $n \in \mathbb{N}$ kontrahierbar.*

Klassischer Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ und R ein nichttrivialer, kommutativer Ring mit Einselement. Angenommen, S^n wäre kontrahierbar, d.h. $S^n \simeq \{x_0\}$. Wegen der Homotopieinvarianz der Homologie (Korollar 3.40) folgte hieraus $H_q(S^n; R) \cong H_q(\{x_0\}; R)$ für jedes $q \in \mathbb{N}$. Gemäß Satz 3.53 ist für $n > 0$ jedoch $H_n(S^n; R) = R$, während Satz 3.34 liefert, daß $H_n(\{x_0\}; R) = \{0\}$ ist. Für $n = 0$ ist $H_n(S^n; R) = R^2$, während $H_n(\{x_0\}; R) = R$ ist. Aufgrund dieses Widerspruchs kann S^n nicht kontrahierbar sein. □

Korollar 3.55 (Invarianz der Dimension). *Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Sind $\mathbb{R}^n \cong R^m$ homöomorph, so ist $m = n$.*

Beweis. Ist $m = 0$ oder $n = 0$, so erhalten wir $m = n$ sofort aufgrund der Kardinalität von $\mathbb{R}^n$.

Wir gehen daher von $m \neq 0 \neq n$ aus. Sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ein Homöomorpismus. Dann induziert f einen Homöomorphismus $f : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$. Wegen $\mathbb{R}^m \setminus \{0\} \simeq S^{m-1}$ und $\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\} \simeq S^{n-1}$ ergibt sich hieraus $S^{m-1} \simeq S^{n-1}$. Dies hat $H_*(S^{m-1}; \mathbb{Z}) \cong H_*(S^{n-1}; \mathbb{Z})$ zur Folge (Korollar 3.40), was aufgrund von Satz 3.53 zu $m = n$ führt.



□

Korollar 3.56. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann besitzt $\mathrm{id}_{S^n} : S^n \to S^n$ keine stetige Fortsetzung $h : D^{n+1} \to S^n$ auf D^{n+1}.*

Beweis. Für $n = 1$ haben wir dies bereits mit Hilfe der Fundamentalgruppe bewiesen (vgl. Satz 2.13). Der Beweis für beliebiges n verläuft analog:

Wir betrachten die Inklusion $i : S^n \hookrightarrow D^{n+1}$. Existierte eine stetige Fortsetzung h von id_{S^n}, so wäre $\mathrm{id}_{S^n} = h \circ i$:

$$S^n \xrightarrow{i} D^{n+1} \xrightarrow{h} S^n.$$

Die Anwendung des Funktors $H_n(-;\mathbb{Z})$ lieferte:

$$\underbrace{H_n(S^n;\mathbb{Z})}_{=\begin{cases} \mathbb{Z}^2 & ,n=0 \\ \mathbb{Z} & ,n>0 \end{cases}} \xrightarrow{i_*} \underbrace{H_n(D^{n+1};\mathbb{Z})}_{=\begin{cases} \mathbb{Z} & ,n=0 \\ \{0\} & ,n>0 \end{cases}} \xrightarrow{h_*} \underbrace{H_n(S^n;\mathbb{Z})}_{=\begin{cases} \mathbb{Z}^2 & ,n=0 \\ \mathbb{Z} & ,n>0 \end{cases}}$$

mit $(\mathrm{id}_{S^n})_* = \mathrm{id}_{H_n(S^n;\mathbb{Z})} = h_* \circ i_*$. Dies ist offenbar nicht möglich. □

Lemma 3.57. *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und $n, q \in \mathbb{Z}$ mit $n > 0$. Dann gilt*

$$H_q(D^n, S^{n-1}; R) \cong \begin{cases} R & q = n \\ \{0\} & q \neq n. \end{cases}$$

Ferner sei $\sigma : (\Delta_n, \partial\Delta_n) \to (D^n, S^{n-1})$ ein Homöomorphismus. Dann ist $[\sigma]$ ein Erzeuger von $H_n(D^n, S^{n-1}; R) = R \cdot [\sigma]$, und für jeden weiteren Homöomorphismus $\sigma' : (\Delta_n, \partial\Delta_n) \to (D^n, S^{n-1})$ gilt $[\sigma'] = \pm[\sigma]$.

Beweis. Die Isomorphie ergibt sich aus der langen, exakten Sequenz

$$\cdots \to \underbrace{H_q(D^n, \{s_0\}; R)}_{=\{0\}} \to H_q(D^n, S^{n-1}; R) \to H_{q-1}(S^{n-1}, \{s_0\}; R) \to \underbrace{H_{q-1}(D^n, \{s_0\}; R)}_{=\{0\}} \to \ldots$$

des Tripels $(D^n, S^{n-1}, \{s_0\})$ (vgl. Satz 3.36) und der in Satz 3.53, sowie den Lemmata 3.51 und 3.52 bewiesenen Aussage

$$H_q(S^n, \{s_0\}; R) = \tilde{H}_q(S^n; R) = \begin{cases} R & q = n \\ \{0\} & q \neq n. \end{cases}$$

Wir beweisen nun, daß $[\sigma]$ ein bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmter Erzeuger von $H_n(D^n, S^{n-1}; R)$ ist. Für $R = \mathbb{Z}$ liefert [StöZie, Satz 9.5.2], daß $[\sigma]$ ein Erzeuger von $H_n(D^n, S^{n-1}; \mathbb{Z})$ ist. Analog ist auch $[\sigma']$ ein Erzeuger. Da $\mathbb{Z}$ nur die Erzeuger 1 und -1 besitzt, erhalten wir $[\sigma'] = \pm[\sigma]$. Wir haben bereits gezeigt, daß $H_n(D^n, S^{n-1}; R) \cong R$ ist. Mit Satz 3.84 gilt zudem

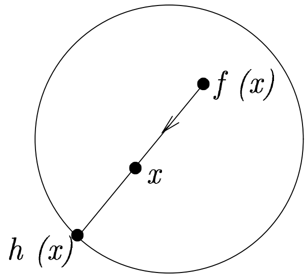
$$H_n(D^n, S^{n-1}; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R = \mathbb{Z} \cdot [\sigma] \otimes_{\mathbb{Z}} R \cong (\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} R) \cdot [\sigma] \cong R \cdot [\sigma].$$

Und diese kanonischen Isomorphismen erhalten offenbar die Eigenschaft $[\sigma'] = \pm[\sigma]$. □

Korollar 3.58 (Brouwerscher Fixpunktsatz). *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann hat jede stetige Abbildung $f : D^n \to D^n$ einen Fixpunkt.*

Beweis. Wir beweisen dies analog zum Spezialfall $n = 2$ (vgl. Korollar 2.14).

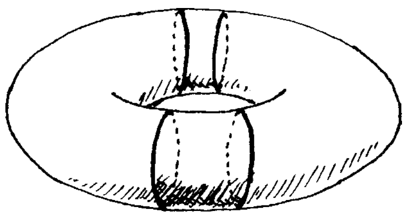
Wir nehmen an, es gebe ein $n \in \mathbb{N}$ und eine stetige Abbildung $f : D^n \to D^n$ mit $f(x) \neq x$ für alle $x \in D^n$. Wir ordneten dann jedem Punkt $x \in D^n$ den Schnittpunkt $h(x)$ der Halbgeraden durch $f(x)$ und x mit S^{n-1} zu. Es ist leicht nachzuvollziehen, daß h mit dieser Definition eine stetige Abbildung $h : D^n \to S^{n-1}$ mit $h|_{S^{n-1}} = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$ wäre. Jedoch ist $\mathrm{id}_{S^{n-1}}$ gemäß Korollar 3.56 nicht stetig auf D^n fortsetzbar. Daher kann kein fixpunktfreies $f : D^n \to D^n$ existieren.



□

3.6.2 Berechnung der Homologiegruppen des Torus T^2

Wir überdecken den Torus folgendermaßen durch zwei „Dreiviertel-Ringe" A und B, so daß $A \cap B \simeq S^1 \amalg S^1$ gilt:



Gemäß Satz 3.49 erhalten wir die Mayer-Vietoris-Sequenz

$$\begin{aligned}
\ldots \xrightarrow{\Delta} \underbrace{H_2(A \cap B; R)}_{=\{0\}} &\xrightarrow{\alpha} \underbrace{H_2(A; R)}_{=\{0\}} \oplus \underbrace{H_2(B; R)}_{=\{0\}} \xrightarrow{\beta} H_2(T^2; R) \\
\xrightarrow{\Delta} \underbrace{H_1(A \cap B; R)}_{\cong R \oplus R} &\xrightarrow{\alpha} \underbrace{H_1(A; R) \oplus H_1(B; R)}_{\cong R \oplus R} \xrightarrow{\beta} H_1(T^2; R) \\
\xrightarrow{\Delta} \underbrace{H_0(A \cap B; R)}_{\cong R \oplus R} &\xrightarrow{\alpha} \underbrace{H_0(A; R) \oplus H_0(B; R)}_{\cong R \oplus R} \xrightarrow{\beta} H_0(T^2; R) \longrightarrow \{0\}
\end{aligned}$$

mit $\alpha(x) = (i_{1*}(x), -i_{2*}(x))$, wobei $i_1 : A \cap B \subseteq A$ und $i_2 : A \cap B \subseteq B$ die Inklusionen seien. Daher gilt für $\alpha : H_1(A \cap B; R) \to H_1(A; R) \oplus H_1(B; R)$, sowie für $\alpha : H_0(A \cap B; R) \to H_0(A; R) \oplus H_0(B; R)$ stets:

$$\begin{aligned}
&\alpha(1, 0) = (1, -1), \\
&\alpha(0, 1) = (1, -1).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt $H_2(T^2; R) \cong \mathrm{Ker}(\alpha) = \{(r, -r) | r \in R\} \cong R$. Weiter erhalten wir $\mathrm{Im}(\alpha) = \{(r, -r) | r \in R\} \cong R$, also $\mathrm{Im}(\beta) \cong \mathrm{Coker}(\alpha) \cong R$ und $H_0(T^2; R) \cong \mathrm{Im}(\beta) \cong R$. Zur Berechnung von $H_1(T^2; R)$ betrachten wir die exakte Sequenz

$$\{0\} \to \underbrace{\mathrm{Im}(\beta)}_{\cong R} \to H_1(T^2; R) \to \underbrace{\mathrm{Im}(\Delta) = \mathrm{Ker}(\alpha)}_{\cong R} \to \{0\}.$$

Wir erhalten $H_1(T^2; R) \cong R \oplus R$.

Satz 3.59. *Sei $q \in \mathbb{Z}$ und R ein kommutativer Ring mit Einselement. Dann gilt*

$$H_q(T^2; R) = \begin{cases} R & , q \in \{0, 2\}, \\ R \oplus R & , q = 1, \\ \{0\} & , \textit{sonst}. \end{cases}$$

Beweis. Dies geht direkt aus obigen Überlegungen hervor. □

3.7 Die Eilenberg-Steenrod Axiome

Definition:
Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Eine **Homologietheorie** mit Koeffizienten in R enthält für jedes $n \in \mathbb{Z}$:

1. Einen (kovarianten) Funktor

$$\begin{aligned} H_n : \mathrm{Homtop}^2 &\longrightarrow \mathrm{Mod}_R \\ (X, A) &\longmapsto H_n(X, A; R) \\ (f : (X, A) \to (Y, B)) &\longmapsto (f_* : H_n(X, A; R) \to H_n(Y, B; R)) \end{aligned}$$

   von der Kategorie der Homotopieklassen topologischer Paare in die Kategorie der R-Moduln. Ist $A = \emptyset$ so schreiben wir $H_n(X; R) := H_n(X, \emptyset; R)$.

2. Eine natürliche Transformation

$$\partial : H_n(X, A; R) \to H_{n-1}(A; R).$$

Hierbei muß gelten:

1. Das **Exaktheitsaxiom** (die lange, exakte Homologiesequenz): Sei (X, A) ein topologisches Paar und $i : A \subseteq X$, $j : (X, \emptyset) \subseteq (X, A)$ die Inklusionen. Dann ist die folgende Sequenz exakt:

$$\ldots \xrightarrow{\partial} H_n(A; R) \xrightarrow{i_*} H_n(X; R) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A; R) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A; R) \xrightarrow{i_*} \ldots.$$

2. Das **Ausschneidungsaxiom**: Sei (X, A) ein topologisches Paar und $U \subseteq X$ offen, so daß $\bar{U} \subseteq A^\circ$ ist. Ferner sei $i : (X \setminus U, A \setminus U) \subseteq (X, A)$ die Inklusion. Dann ist

$$i_* : H_n(X \setminus U, A \setminus U; R) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A; R)$$

   für jedes $n \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus.

3. Das **Dimensionsaxiom**: Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$H_n(\{x_0\}; R) = \begin{cases} R & , n = 0 \\ \{0\} & , n \neq 0. \end{cases}$$

Ausführlich geschrieben, und ohne Verwendung der Sprache der Kategorien und Funktoren, lautet obige Definition wie folgt:

Eine Homologietheorie mit Koeffizienten in einem kommutativen Ring R mit Einselement besteht aus:

1. Einem R-Modul $H_n(X, A; R)$ für jedes topologische Paar (X, A) und jedes $n \in \mathbb{Z}$. Notation $H_n(X; R) := H_n(X, \emptyset; R)$.

2. Einem R-Modul-Homomorphismus

$$H_n(f) := f_* : H_n(X, A; R) \to H_n(Y, B; R)$$

   für jedes $n \in \mathbb{Z}$ und jede stetige Abbildung $f : (X, A) \to (Y, B)$ topologischer Paare.

3. Einem R-Modul-Homomorphismus

$$\partial : H_n(X, A; R) \to H_{n-1}(A; R)$$

   für jedes $n \in \mathbb{Z}$ und jedes topologische Paar (X, A).

Dabei müssen die Eilenberg-Steenrod-Axiome gelten:

Definition:
R sei ein kommutativer Ring mit Einselement. Für jedes topologische Paar (X, A) und jedes $n \in \mathbb{Z}$ sei ein R-Modul $H_n(X, A; R)$ und ein R-Modulhomomorphismus $\partial : H_n(X, A; R) \to H_{n-1}(A; R) := H_{n-1}(A, \emptyset; R)$ gegeben. Ferner sei für jede stetige Abbildung $f : (X, A) \to (Y, B)$ und jedes $n \in \mathbb{Z}$ ein R-Modulhomomorphismus $f_* : H_n(X, A; R) \to H_n(Y, B; R)$ gegeben.

Dann bezeichnen wir die folgenden Axiome als **Eilenberg-Steenrod-Axiome**:

1. Das **Identitätsaxiom**: Für jedes topologische Paar (X, A) und jedes $n \in \mathbb{Z}$ ist $(\mathrm{id}_{(X,A)})_* = \mathrm{id}_{H_n(X,A;R)}$.
2. Das **Kompositionsaxiom**: Seien $f : (X, A) \to (Y, B)$ und $g : (Y, B) \to (Z, C)$ stetige Abbildungen der Paare. Dann gilt für $n \in \mathbb{Z}$ stets $(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : H_n(X, A) \longrightarrow H_n(Z, C)$.
3. Das **Kommutativitätsaxiom**: Für jede stetige Abbildung $f : (X, A) \to (Y, B)$ und jedes $n \in \mathbb{Z}$ kommutiert folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} H_n(X, A; R) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\partial"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_n(Y, B; R) \arrow[d, "\partial"] \\ H_{n-1}(A; R) \arrow[r, "f_*"] & H_{n-1}(B; R). \end{tikzcd}$$

4. Das Exaktheitsaxiom.
5. Das **Homotopieaxiom**: Sind $f \simeq g : (X, A) \to (Y, B)$ homotope, stetige Abbildungen, so gilt für $n \in \mathbb{Z}$ stets
$$f_* = g_* : H_n(X, A; R) \to H_n(Y, B; R)$$
6. Das Ausschneidungsaxiom.
7. Das Dimensionsaxiom.

Bemerkung:
Die singuläre Homologietheorie erfüllt die Eilenberg-Steenrod-Axiome und ist somit eine Homologietheorie im oben definierten Sinn.

Man kann zeigen, daß auf gutartigen, topologischen Räumen (z.B. auf der vollen Unterkategorie der CW-Komplexe) die Eilenberg-Steenrod Axiome eine Homologietheorie bereits eindeutig bestimmen.

Bemerkung:
Der für die singuläre Homologietheorie bewiesene Ausschneidungssatz ist stärker als das Ausschneidungsaxiom, er gilt für beliebige U, das Axiom fordert die Ausschneidungseigenschaft dagegen nur für offene U. Für CW-Komplexe folgt der Aussschneidungssatz wegen obiger Bemerkung bereits aus dem Ausschneidungsaxiom.

Bemerkung:
Theorien, die bis auf das Dimensionsaxiom alle Eilenberg-Steenrod-Axiome erfüllen, heißen **verallgemeinerte Homologietheorien**. Definiert man z.B. $H'_n(-; R) := H_{n+k}(-; R)$ für $n \in \mathbb{Z}$ und ein festes $k > 0$, so ist H' eine verallgemeinerte Homologietheorie. Es gibt wichtige, verallgemeinerte Homologietheorien — z.B. die topologische K-Theorie (Theorie der topologischen Vektorraumbündel).

Auch die reduzierte Homologietheorie $\tilde{H}_n(-; R)$ ist eine verallgemeinerte Homologietheorie.

3.8 Zelluläre Homologie von CW-Komplexen

Wir erinnern zunächst an den Begriff des CW-Komplexes aus 1.10:

Ein CW-Komplex ist ein Paar $(X, \mathcal{E})$, wobei X ein Hausdorffraum und $\mathcal{E}$ eine CW-Zerlegung von X ist, d.h. $\mathcal{E}$ ist eine Menge von Zellen $e \subseteq X$ (eine n-Zelle ist eine zu $(D^n)^\circ$ homöomorphe Teilmenge von X) mit
$$X = \coprod_{e \in \mathcal{E}} e,$$
so daß gilt:

(CW1) Für jede n-Zelle $e \in \mathcal{E}$ existiert eine stetige Abbildung $\phi_e : D^n \to X$ mit $\phi_e : (D^n)^\circ \xrightarrow{\cong} e$ und $\phi_e(S^{n-1}) \subseteq X^{n-1}$ („charakteristische Abbildung“). Für $n \in \mathbb{N}$ sei hierbei

$$X^n := \bigcup_{\substack{e\in\mathcal{E}\\ \dim(e)\leq n}} e$$

das n-Gerüst.

(CW2) Für $e \in \mathcal{E}$ ist $\bar{e}$ in der Vereinigung endlich vieler Zellen enthalten („closure finite“).

(CW3) $A \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $A \cap \bar{e}$ für alle $e \in \mathcal{E}$ abgeschlossen ist („weak topology“).

Beispielsweise besitzt für jedes $n \in \mathbb{N}$

1. S^n eine CW-Struktur mit einer 0-Zelle und einer n-Zelle.
2. $\mathbb{RP}^n$ eine CW-Struktur mit je einer k-Zelle für $k = 0, \dots, n$.
3. $\mathbb{CP}^n$ eine CW-Struktur mit je einer $2k$-Zelle für $k = 0, \dots, n$.

CW-Komplexe sind topologische Räume und daher sind für sie die singulären Homologiegruppen erklärt. Wir wollen jetzt die Zellen-Struktur der CW-Komplexe benutzen, um „zelluläre Homologiegruppen“ zu definieren. In Abschnitt 3.9 werden wir zeigen, daß diese mit den singulären Homologiegruppen übereinstimmen.

Definition:
Sei $(X, \mathcal{E})$ ein CW-Komplex und R ein kommutativer Ring mit Einselement. Dann nennen wir für $n \in \mathbb{N}$ den von allen n-Zellen aus $\mathcal{E}$ erzeugten, freien R-Modul

$$C_n(X, \mathcal{E}) := C_n(X, \mathcal{E}; R) := \bigoplus_{\substack{e\in\mathcal{E}\\ \dim(e)=n}} R \cdot e$$

die **n-te Zellengruppe von $(X, \mathcal{E})$**. Wie üblich setzen wir $C_n(X, \mathcal{E}; R) := \{0\}$ für $n < 0$.

Die Zellengruppen $C_n(X, \mathcal{E})$ sind also ganz einfach definiert, schwieriger ist dagegen die Definition des Randhomomorphismus $d : C_n(X, \mathcal{E}; R) \to C_{n-1}(X, \mathcal{E}; R)$. Denn anders als bei simplizialen Komplexen muß der Rand einer n-Zelle nicht notwendigerweise aus $(n-1)$-Zellen bestehen.

Entscheidend ist hierzu der folgende Satz:

Satz 3.60. *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und $(X, \mathcal{E})$ ein CW-Komplex.*

1. *Dann gilt für die relativen, singulären Homologiegruppen der Gerüste von X stets:*

$$H_q(X^n, X^{n-1}; R) \cong \begin{cases} C_n(X, \mathcal{E}; R) & , q = n \\ \{0\} & , q \neq n. \end{cases}$$

2. *Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\sigma : (\Delta_n, \partial\Delta_n) \to (D^n, S^{n-1})$ ein Homöomorphismus und für jede Zelle $e \in \mathcal{E}$ sei eine charakteristische Abbildung ϕ_e gegeben. Dann ist*

$$H_n(X^n, X^{n-1}; R) = \bigoplus_{\substack{e\in\mathcal{E}\\ \dim(e)=n}} R \cdot \phi_{e*}([\sigma])$$

und wir erhalten den Isomorphismus $C_n(X, \mathcal{E}; R) \cong H_n(X^n, X^{n-1}; R)$ mit $\mathcal{E} \ni e \mapsto \phi_{e*}([\sigma])$.

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig vorgegeben. Für jedes $e \in \mathcal{E}$ mit $\dim(e) = n$ sei eine charakteristische Abbildung $\phi_e : (D^n, S^{n-1}) \to (e, \partial e) \subseteq (X^n, X^{n-1})$ gegeben. Wir setzen $(\frac{D^n}{2})^\circ := \{x \in D^n \mid \|x\| < \frac{1}{2}\}$, sowie

$$A := X^n \setminus \bigcup_{\substack{e\in\mathcal{E}\\ \dim(e)=n}} \phi_e\left((\frac{D^n}{2})^\circ\right) = X^{n-1} \cup \bigcup_{\substack{e\in\mathcal{E}\\ \dim(e)=n}} \phi_e\left(D^n \setminus (\frac{D^n}{2})^\circ\right).$$

Da $S^{n-1} \subseteq D^n \setminus (\frac{D^n}{2})^\circ$ ein Deformationsretrakt ist, ist auch $X^{n-1} \subseteq A$ ein Deformationsretrakt. Nach Korollar 3.42 erhalten wir $H_q(D^n, S^{n-1}; R) \cong H_q(D^n, D^n \setminus (\frac{D^n}{2})^\circ; R)$, sowie $H_q(X^n, X^{n-1}; R) \cong H_q(X^n, A; R)$ für jedes $q \in \mathbb{Z}$.

Da X^{n-1} wegen Lemma 1.55 ein CW-Unterkomplex von X^n ist, liefert Lemma 1.54, daß X^{n-1} abgeschlossen ist, d.h. $X^{n-1} = \bar{X}^{n-1}$. Daher ist $\bar{X}^{n-1} \subseteq A^\circ$, d.h. wir können den Ausschneidungssatz (Satz 3.44) anwenden. Wir erhalten für jedes $q \in \mathbb{Z}$:

$$H_q(X^n, A; R) \cong H_q(X^n \setminus X^{n-1}, A \setminus X^{n-1}; R).$$

Die charakteristischen Abbildungen der n-Zellen liefern einen Homöomorphismus

$$\coprod_{\substack{e\in\mathcal{E}\\ \dim(e)=n}} \phi_e : \coprod_{\substack{e\in\mathcal{E}\\ \dim(e)=n}} \left((D^n)^\circ, (D^n)^\circ \setminus (\frac{D^n}{2})^\circ\right) \to (X^n \setminus X^{n-1}, A \setminus X^{n-1}).$$

Wie man leicht nachvollziehen kann ist $((D^n)^\circ, (D^n)^\circ \setminus (\frac{D^n}{2})^\circ) \simeq (D^n, S^{n-1})$. Wir erhalten den Isomorphismus

$$(\coprod_{\substack{e\in\mathcal{E}\\ \dim(e)=n}} \phi_e)_* : \bigoplus_{\substack{e\in\mathcal{E}\\ \dim(e)=n}} H_q(D^n, S^{n-1}; R) \cong H_q(X^n \setminus X^{n-1}, A \setminus X^{n-1}; R).$$

Gemäß Lemma 3.57 ist $H_n(D^n, S^{n-1}; R) = R \cdot [\sigma]$ und $H_q(D^n, S^{n-1}; R) = \{0\}$ für alle $q \neq n$. Daher erhalten wir

$$H_q(X^n, X^{n-1}; R) = \begin{cases} \bigoplus_{\substack{e\in\mathcal{E}\\ \dim(e)=n}} R \cdot \phi_{e*}([\sigma]) & , q = n \\ \{0\} & , q \neq n \end{cases}$$

und die R-lineare Abbildung $e \mapsto \phi_{e*}([\sigma])$ ist ein Isomorphismus $C_n(X, \mathcal{E}; R) \to H_n(X^n, X^{n-1}; R)$. □

Lemma 3.61. *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, $(X, \mathcal{E})$ ein CW-Komplex, $n \in \mathbb{N}$, $\sigma, \sigma' : (\Delta_n, \partial\Delta_n) \to (D^n, S^{n-1})$ Homöomorphismen, $e \in \mathcal{E}$ eine n-Zelle und ϕ_e, ϕ'_e zwei charakteristische Abbildungen von e. Dann gilt $\phi'_{e*}([\sigma']) = \pm\phi_{e*}([\sigma]) \in H_n(X^n, X^{n-1}; R)$.*

Beweis. Satz 3.60, angewandt auf den Unterkomplex $\bar{e} \subseteq X$, liefert, daß sowohl $\phi'_{e*}([\sigma'])$ als auch $\phi_{e*}([\sigma])$ die Homologiegruppe $H_n(\bar{e}, \partial e; R) \subseteq H_n(X^n, X^{n-1}; R)$ erzeugen. Analog zu Lemma 3.57 ergibt sich daher die Behauptung. □

Definition:
Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, $(X, \mathcal{E})$ ein CW-Komplex, $n \in \mathbb{N}$, $\sigma : (\Delta_n, \partial\Delta_n) \cong (D^n, S^{n-1})$ ein Homöomorphismus, Ist $e \in \mathcal{E}$ eine n-Zelle und ϕ_e eine charakteristische Abbildung von e. Dann heißt $\phi_{e*}([\sigma]) \in H_n(X^n, X^{n-1}; R)$ eine **Orientierung von e**. Es gibt genau zwei Orientierungen von e.

Eine Zelle zusammen mit einer Orientierung nennen wir **orientierte Zelle**. Orientierte Zellen notieren wir als $(e, \phi_{e*}[\sigma])$ oder einfach als e. Ist e eine orientierte Zelle, so bezeichne $-e$ die entgegengesetzt orientierte Zelle.

Wir wählen nun für jede Zelle $e \in \mathcal{E}$ in willkürlicher Weise eine Orientierung und nennen die Menge dieser orientierten Zellen $\mathcal{E}^+$. Dann sind alle orientierten Zellen entweder in $\mathcal{E}^+$ oder in $\mathcal{E}^- := \{-e | e \in \mathcal{E}^+\}$.

Durch die Wahl einer Orientierung erhalten wir einen eindeutig bestimmten Isomorphismus

$$\mathsf{or} : C_n(X, \mathcal{E}; R) = \bigoplus_{e\in\mathcal{E}^+} R \cdot e \xrightarrow{\cong} H_n(X^n, X^{n-1}; R),$$

der $e \in \mathcal{E}^+$ seine Orientierung in $H_n(X^n, X^{n-1})$ zuordnet.

Definition:
Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, $(X, \mathcal{E})$ ein CW-Komplex, $\mathcal{E}^+$ eine Orientierung der Zellen von X und für $q \in \mathbb{Z}$ sei or der durch diese Orientierung gegebene Isomorphismus $C_q(X, \mathcal{E}; R) \cong H_q(X^q, X^{q-1}; R)$. Dann definieren wir für $n \in \mathbb{N}$ den **Randhomomorphismus**

$$d := d_n : C_n(X, \mathcal{E}; R) \to C_{n-1}(X, \mathcal{E}; R)$$

als die Komposition

$$d_n : C_n(X, \mathcal{E}; R) \xrightarrow{\mathrm{or}} H_n(X^n, X^{n-1}; R) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(X^{n-1}; R)$$
$$\xrightarrow{j_*} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}; R) \xrightarrow{\mathrm{or}^{-1}} C_{n-1}(X, \mathcal{E}; R).$$

Hierbei sei ∂_n der Randhomomorphismus der langen, exakten Homologiesequenz des Paares (X^n, X^{n-1}), und j_* sei von der Inklusion $j : X^{n-1} \to (X^{n-1}, X^{n-2})$ induziert. In Lemma 3.62 werden wir beweisen, daß $(C_\bullet(X, \mathcal{E}; R), d_\bullet)$ ein Kettenkomplex ist. Diesen bezeichnen wir als den **zellulären Komplex von X mit Koeffizienten in R**, und für $n \in \mathbb{Z}$ nennen wir $H_n(C_\bullet(X, \mathcal{E}; R))$ die **n-te zelluläre Homologiegruppe** des CW-Komplexes $(X, \mathcal{E})$.

Lemma 3.62. *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, $(X, \mathcal{E})$ ein CW-Komplex, $\mathcal{E}^+$ eine Orientierung von $\mathcal{E}$ und d der zugehörige Randhomomorphismus. Dann ist $d \circ d = 0$, d.h. $(C_\bullet(X, \mathcal{E}; R), d)$ ist ein Kettenkomplex.*

Beweis. Die Sequenz

$$\cdots \longrightarrow H_n(X^n; R) \xrightarrow{j_*} H_n(X^n, X^{n-1}; R) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(X^{n-1}; R) \longrightarrow \cdots$$

ist exakt. Daher ist $\partial \circ j_* = 0$. Somit erhalten wir $(\mathrm{or}^{-1} \circ j_* \circ \partial \circ \mathrm{or}) \circ (\mathrm{or}^{-1} \circ j_* \circ \partial \circ \mathrm{or}) = 0$. □

3.9 Vergleich simplizialer, zellulärer und singulärer Homologie

Wir wollen nun zeigen, daß für CW-Komplexe die zelluläre und die singuläre Homologie, und daß für simpliziale Komplexe die simpliziale, die zelluläre und die singuläre Homologie bis auf natürliche Isomorphismen übereinstimmen. Damit haben wir dann einerseits die Invarianz der zellulären und der simplizialen Homologie unter Homöomorphismen gezeigt und andererseits eine effektive Methode zur Berechnung der singulären Homologie für CW-Komplexe bzw. simpliziale Komplexe erhalten.

Lemma 3.63. *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und X ein CW-Komplex. Dann gilt:*

1. *Für alle $i, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq i$ ist $H_i(X, X^n; R) = \{0\}$.*
2. *Für alle $i, n \in \mathbb{N}$ mit $n > i$ induziert die Inklusion $X^n \subseteq X$ einen natürlichen Isomorphismus*

   $$H_i(X^n; R) \xrightarrow{\cong} H_i(X; R),$$

3. *Für alle $i, n \in \mathbb{N}$ mit $n < i$ gilt $H_i(X^n; R) = \{0\}$.*

Beweis. Seien $i, n \in \mathbb{N}$ beliebig vorgegeben.

1. Wenn $n \geq i$ ist, liefert Satz 3.36 für $k \in \mathbb{N}$ die exakte Homologiesequenz des Tripels (X, X^{k+1}, X^k):

   $$\cdots \to H_i(X^{k+1}, X^k; R) \to H_i(X, X^k; R) \to H_i(X, X^{k+1}; R) \to H_{i-1}(X^{k+1}, X^k; R) \to \cdots.$$

   Satz 3.60 besagt für $k \neq i-1$, daß $H_i(X^{k+1}, X^k; R) = \{0\}$ ist. Daher induziert für $k \neq i-1, i-2$ die Inklusion $X^k \subseteq X^{k+1}$ einen Isomorphismus $H_i(X, X^k; R) \cong H_i(X, X^{k+1}; R)$. Induktiv erhalten wir, daß die Inklusion $X^i \subseteq X^m$ für alle $m \geq i$ einen Isomorphismus $H_i(X, X^i; R) \cong H_i(X, X^m; R)$ induziert. Da Δ_i kompakt ist und kompakte Mengen in einem CW-Komplex nur endlich viele Zellen treffen, kann man für jede Homologieklasse $[\sum_{\nu=0}^k r_\nu \sigma_\nu] \in H_i(X, X^i; R)$ ein $m \geq i$ finden mit $\bigcup_{\nu=0}^k \sigma_\nu(\Delta_i) \subseteq X^m$. Dann ist aber $0 = [\sum_{\nu=0}^k r_\nu \sigma_\nu]$ in $H_i(X, X^m; R)$. Wegen obigem Isomorphismus folgt $H_i(X, X^n; R) \cong H_i(X, X^i; R) = \{0\}$.

2. Wenn $n > i$ ist, erhalten wir gemäß Satz 3.34 die lange, exakte Homologiesequenz des Paares (X, X^n):

$$\cdots \to \underbrace{H_{i+1}(X, X^n; R)}_{=\{0\}} \to H_i(X^n; R) \to H_i(X; R) \to \underbrace{H_i(X, X^n; R)}_{=\{0\}} \to \cdots .$$

3. Wenn $n < i$ ist, erhalten wir aus Satz 3.60 und der langen, exakten Homologiesequenz des Paares (X^k, X^{k-1}) für $k \neq i, i+1$ Isomorphismen

$$H_i(X^{k-1}; R) \cong H_i(X^k; R).$$

Da $X^{-1} = \emptyset$ ist, erhalten wir induktiv $\{0\} = H_i(X^{-1}; R) \cong H_i(X^n; R)$.

□

Lemma 3.64. *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Dann ist $C_\bullet(-; R)$ ein Funktor von der Kategorie der CW-Komplexe in die Kategorie der Komplexe von R-Moduln.*

Beweis. Wir haben bereits gezeigt, daß für jeden CW-Komplex $(X, \mathcal{E})$ dessen Bild $C_\bullet(X, \mathcal{E}; R)$ ein Kettenkomplex von R-Moduln ist. Für jeden CW-Komplex $(X, \mathcal{E})$ ist der zelluläre Komplex $(C_\bullet(X, \mathcal{E}; R), d_\bullet)$ mittels Orientierung isomorph zum Komplex $(\{H_n(X^n, X^{n-1}; R)\}_n, d'_\bullet)$, dessen Differential gegeben ist durch

$$d'_n := j_{n-1*} \circ \partial_n : H_n(X^n, X^{n-1}; R) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(X^{n-1}; R) \xrightarrow{j_{n-1*}} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}; R).$$

Wir definieren nun das Bild eines Morphismus: Ein Morphismus von CW-Komplexen ist eine zelluläre Abbildung. Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ zwischen CW-Komplexen haben wir als zellulär bezeichnet, falls für $n \in \mathbb{N}$ stets $f(X^n) \subseteq Y^n$ ist. Da ∂_n und j_{n-1} natürliche Homomorphismen sind, ist die durch eine zelluläre Abbildung $f : X \to Y$ induzierte Abbildung $f_* : H_n(X^n, X^{n-1}; R) \to H_n(Y^n, Y^{n-1}; R)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Komplexhomomorphismus. Mittels Orientierung definiert man daraus den Komplexhomomorphhismus $C_\bullet(f, \mathcal{E}; R) := \mathsf{or}^{-1} \circ f_* \circ \mathsf{or}$.

An dieser Definition erkennt man sofort $C_\bullet(\mathrm{id}_X, \mathcal{E}; R) = \mathrm{id}_{C_\bullet(X, \mathcal{E}; R)}$ für jeden CW-Komplex $(X, \mathcal{E})$. Seien $f : (X, \mathcal{E}) \to (X', \mathcal{E}')$, $g : (X', \mathcal{E}') \to (X'', \mathcal{E}'')$ zwei zelluläre Abbildungen. Dann ist

$$C_\bullet(g \circ f, \mathcal{E}; R) = \mathsf{or}^{-1} \circ g \circ f \circ \mathsf{or} = (\mathsf{or}^{-1} \circ g \circ \mathsf{or}) \circ (\mathsf{or}^{-1} \circ f \circ \mathsf{or}) = C_\bullet(g, \mathcal{E}'; R) \circ C_\bullet(f, \mathcal{E}; R).$$

□

Satz 3.65. *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und $(X, \mathcal{E})$ ein CW-Komplex. Dann gibt es für jedes $q \in \mathbb{Z}$ einen in der Kategorie der CW-Komplexe natürlichen Isomorphismus*

$$H_q(X; R) \cong H_q(C_\bullet(X, \mathcal{E}; R)).$$

Beweis. Wie im Beweis von Lemma 3.64 beschrieben, ist $C_\bullet(X, \mathcal{E}; R)$ mittels Orientierung natürlich isomorph zum Komplex $(\{H_n(X^n, X^{n-1}; R)\}_{n \in \mathbb{N}}, d'_\bullet)$ mit $d' = j_* \circ \partial$.

Daher ist die zelluläre Homologie $H_\bullet(C_\bullet(X, \mathcal{E}; R))$ natürlich isomorph zur Homologie $H'_\bullet$ des Komplexes $(\{H_n(X^n, X^{n-1})\}_n, d'_\bullet)$. Wenn man die Definition von d' um die langen exakten Homologiesequenzen der Paare (X^n, X^{n-1}) für $n \in \mathbb{Z}$ ergänzt, erhält man folgendes Diagramm:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & \underset{\text{(Satz 3.60)}}{H_n(X^{n+1},X^n;R)=\{0\}} & \\
\overset{\text{(Lemma 3.63)}}{H_n(X^{n-1};R)=\{0\}} \arrow[dr] & & H_n(X^{n+1};R) \arrow[ur] & & \\
 & H_n(X^n;R) \arrow[ur] \arrow[dr, "j_{n*}"] & & & \\
H_{n+1}(X^{n+1},X^n;R) \arrow[ur, "\partial_{n+1}"] \arrow[rr, "d'_{n+1}"] & & H_n(X^n,X^{n-1};R) \arrow[rr, "d'_n"] \arrow[dr, "\partial_n"'] & & H_{n-1}(X^{n-1},X^{n-2};R) \\
 & & & H_{n-1}(X^{n-1};R) \arrow[ur, "j_{n-1*}"'] & \\
 & & \underset{\text{(Lemma 3.63)}}{H_{n-1}(X^{n-2};R)=\{0\}} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

Wir erkennen, daß j_{n*} injektiv ist, also ist $j_{n*} : \mathrm{Im}(\partial_{n+1}) \cong \mathrm{Im}(d'_{n+1})$. Da auch j_{n-1*} injektiv ist, erhalten wir $\ker(d'_n) = \ker(\partial_n)$, also $\mathrm{Im}(j_{n*}) = \ker(d'_n)$. Da j_{n*} injektiv ist, ist $j_{n*} : H_n(X^n;R) \xrightarrow{\cong} \ker(d'_n)$ ein Isomorphismus. Wir erhalten das folgende Diagramm mit exakten Zeilen:

$$
\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Im}(\partial_{n+1}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "j_{n*}"', "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_n(X^n;R) \arrow[r] \arrow[d, "j_{n*}"', "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_n(X^{n+1};R) \arrow[r] \arrow[d, "\exists\Phi"', "\cong"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Im}(d'_{n+1}) \arrow[r] & \ker(d'_n) \arrow[r] & H'_n \arrow[r] & \{0\}.
\end{tikzcd}
$$

Den Isomorphismus Φ erhält man, indem man zu jedem Element von $H_n(X^{n+1};R)$ ein Urbild wählt und dieses mittels j_{n*} und der Projektion $\ker(d'_n) \to H'_n$ nach H'_n abbildet. Diese Abbildung ist offenbar wohldefiniert („Diagrammjagd“). Das Fünferlemma (Lemma 3.5) liefert, daß wir hiermit einen Isomorphismus definiert haben. Die Natürlichkeit der langen, exakten Homologiesequenz impliziert schließlich die Natürlichkeit von Φ.

Mit Lemma 3.63 erhalten wir $H_n(X) \cong H_n(X^{n+1};R) \cong H'_n$, was wegen $H'_n \cong H_n(C_\bullet(X,\mathcal{E};R))$ die Behauptung zur Folge hat. □

Bemerkung:
Die „relative, zelluläre Homologie“ eines Paares (X,A), wobei $(X,\mathcal{E})$ ein CW-Komplex und $(A,\mathcal{E}_A)$ ein CW-Unterkomplex von X ist, definiert man als Homologie des Komplexes $C_\bullet(X,\mathcal{E};R)/C_\bullet(A,\mathcal{E}_A;R)$. Benutzt man den natürlichen Isomorphismus $H_\bullet(X,A;R) \cong H_\bullet(X/A,\{A\};R) \cong H_\bullet(X/A;R)$ (vgl. [Dold, V, Cor. 4.4]), so erhält man auch im relativen Fall einen natürlichen Isomorphismus zwischen singulärer und zellulärer Homologie.

Satz 3.66. *Sei K ein Simplizialkomplex. Dann gibt es einen (bezüglich simplizialer Abbildungen) natürlichen Isomorphismus $H_n(K) \cong H_n(|K|;\mathbb{Z})$.*

Beweis. Die CW-Struktur auf $|K|$ ist dadurch gegeben, daß man für jedes n-Simplex $\sigma \in K$ einen Homöomorphismus $(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\cong} (|\sigma|, \partial|\sigma|) \subseteq (|K|^n, |K|^{n-1})$ auswählt. Die Menge $\mathcal{E}$ der Zellen wird dann durch die offenen Simplizes von $|K|$ gebildet.

Wir wollen nun einen natürlichen Isomorphismus von Komplexen $C_\bullet(K) \xrightarrow{\cong} (\{H_n(|K|^n, |K|^{n-1};\mathbb{Z})\}_n, d'_\bullet)$ konstruieren. Da der hintere Komplex natürlich isomorph zum zellulären Komplex $C_\bullet(|K|,\mathcal{E};\mathbb{Z})$ ist, erhalten wir mit Hilfe von Satz 3.65 das gewünschte Resultat.

Sei $\sigma = \langle x_0,\dots,x_n\rangle = \langle \underline{x}\rangle \in C_n(K)$ ein orientiertes Simplex und $\tau \in S_n$ eine Permutation. Dann ist $\sigma_\tau := \langle \underline{x}_\tau\rangle := \langle x_{\tau(0)},\dots,x_{\tau(n)}\rangle = \mathrm{sgn}(\tau)\cdot\sigma$ in $C_n(K)$.

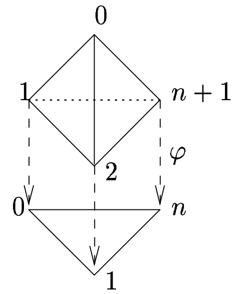
Jede Ordnung $(x_0,\dots,x_n)$ auf der Menge der Eckpunkte des Simplex σ definiert durch lineare Fortsetzung eine stetige Abbildung $L(\underline{x}) = L(x_0,\dots,x_n) : (\Delta_n, \partial\Delta_n) \to (|K|^n, |K|^{n-1})$ mit $e_i \mapsto x_i$.

Es sei $\mathbf{1}_n \in H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n; \mathbb{Z})$ die Homologieklasse von id_{Δ_n} und $\tilde{\sigma} := L(x_0, \dots, x_n)_*(\mathbf{1}_n) = [L(x_0, \dots, x_n)] \in H_n(|K|^n, |K|^{n-1}; \mathbb{Z})$.

Behauptung 1: Es gilt $\tilde{\sigma}_\tau = \mathrm{sgn}(\tau) \cdot \tilde{\sigma}$, d.h. $[L(\underline{x}_\tau)] = \mathrm{sgn}(\tau) \cdot [L(\underline{x})]$.

Beweis von Behauptung 1: Wir bezeichnen die durch τ induzierte, lineare Abbildung $\Delta_n \to \Delta_n$ mit $|\tau|$. Dann gilt $L(\underline{x}_\tau) = L(\underline{x}) \circ |\tau|$. Daher genügt es zu zeigen, daß $|\tau|$ homolog zu $\mathrm{sgn}(\tau) \cdot \mathrm{id}_{\Delta_n}$ ist.

Da jede Permutation τ ein endliches Produkt von Vertauschungen ist, genügt es, zu zeigen, daß jede Vertauschung homolog zu $-\mathrm{id}_{\Delta_n}$ ist.



O.B.d.A. sei daher $\tau = (0, 1)$ die Vertauschung von 0 und 1. Wir betrachten die stetige Abbildung $\varphi : \Delta_{n+1} \to \Delta_n$, die durch $\varphi(e_0) = e_1$ und $\varphi(e_i) = e_{i-1}$ für $i = 1, \dots, n+1$ und lineare Fortsetzung definiert ist.
Da φ jede Seite, die die Kante $\overline{02}$ enthält, kontrahiert, ist $\partial\varphi = \varphi \circ \delta^0 + \varphi \circ \delta^2 = \mathrm{id}_{\Delta_n} + |\tau|$. Also ist $[|\tau|] = -[\mathrm{id}_{\Delta_n}] \in H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n; \mathbb{Z})$. Dies beweist Behauptung 1.

Wegen Behauptung 1 erhalten für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine R-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \phi_n : C_n(K) &\to H_n(|K|^n, |K|^{n-1}; \mathbb{Z}) \\ \sigma = \langle x_0, \dots, x_n \rangle &\mapsto \tilde{\sigma} = [L(x_0, \dots, x_n)]. \end{aligned}$$

Behauptung 2: $\phi_\bullet$ ist ein Isomorphismus von Komplexen, der bezüglich simplizialer Abbildungen natürlich ist.

Beweis von Behauptung 2: Alle ϕ_n sind R-Modul-Isomorphismen, da ϕ_n eine Bijektion zwischen Basiselementen definiert.

Es bleibt, die Verträglichkeit mit den Randhomomorphismen und die Natürlichkeit zu zeigen. Wir beschäftigen uns zunächst mit den Randhomomorphismen.

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $\partial_n : C_n(K) \to C_{n-1}(K)$ und $d'_n : H_n(|K|^n, |K|^{n-1}; \mathbb{Z}) \to H_{n-1}(|K|^{n-1}, |K|^{n-2}; \mathbb{Z})$ die Randhomomorphismen. Dabei sei $d'_n =: j'_{n-1} \circ \partial'_n$ zusammengesetzt aus dem Verbindungshomomorphismus $\partial'_n : H_n(|K|^n, |K|^{n-1}; \mathbb{Z}) \to H_{n-1}(|K|^{n-1}; \mathbb{Z})$ der langen, exakten Sequenz des Paares $(|K|^n, |K|^{n-1})$ und der Inklusion $j'_{n-1} : H_{n-1}(|K|^{n-1}; \mathbb{Z}) \to H_{n-1}(|K|^{n-1}, |K|^{n-2}; \mathbb{Z})$. Ferner sei $\sigma = \langle x_0, \dots, x_n \rangle \in C_n(K)$ ein orientiertes Simplex.

Dann ist

$$\begin{aligned} \phi_{n-1}(\partial_n(\sigma)) &= \phi_{n-1}\Big(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \langle x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n \rangle\Big) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \phi_{n-1}(\langle x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n \rangle) \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [L(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n)] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [L(x_0, \dots, x_n) \circ \delta_n^i]. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$d'_n(\phi_n(\sigma)) = (j'_{n-1} \circ \partial'_n)([L(x_0, \dots, x_n)]) = \left[\sum_{i=0}^{n} (-1)^i L(x_0, \dots, x_n) \circ \delta_n^i\right].$$

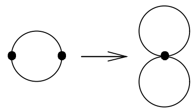
Also gilt für $n \in \mathbb{N}$ stets $\phi_{n-1} \circ \partial_n = d'_n \circ \phi_n$, d.h. $\phi_\bullet$ ist ein Morphismus von Komplexen.

Wir beweisen nun die Natürlichkeit von $\phi_\bullet$. Sei $f : K \to K'$ eine simpliziale Abbildung und $|f| : |K| \longrightarrow |K'|$ die von f induzierte, zelluläre Abbildung. Die ϕ_n und L entsprechenden Abbildungen für K' bezeichnen wir mit ϕ'_n bzw. L'. Ferner sei $n \in \mathbb{N}$ und $\sigma = \langle x_0, \dots, x_n \rangle \in C_n(K)$ ein n-Simplex. Wir erhalten $|f| \circ L(x_0, \dots, x_n) = L'(f(x_0), \dots, f(x_n))$ und somit $|f|_* \circ \phi_n = \phi'_n \circ C_n(f)$. Daher ist $\phi_\bullet$ natürlich.

$\phi_\bullet$ induziert somit den gewünschten Isomorphismus $\phi_* : H_n(K) \xrightarrow{\cong} H_n(C_\bullet(|K|, \mathcal{E}; \mathbb{Z}))$. Mit dem natürlichen Isomorphismus aus Satz 3.65 folgt die Behauptung. $\square$

3.10 Fundamentalgruppe und erste Homologiegruppe

Erinnerung: Wir haben die Fundamentalgruppe eines punktierten, topologischen Raumes (X, x_0) definiert als $\pi_1(X, x_0) = \{$Homotopieklassen von Abbildungen $(S^1, 1) \to (X, x_0)\}$. Sei $v : S^1 \to S^1 \vee S^1$ die Abbildung



(Identifizieren von ± 1)

Dann gilt für $\varphi, \psi : S^1 \to X$ die Gleichung $[\varphi] \cdot [\psi] = [(\varphi \vee \psi) \circ v] \in \pi_1(X, x_0)$.

Definition:
Sei $\varepsilon : \Delta_1 \to S^1$ die Abbildung $(1-t, t) \mapsto e^{2\pi i t}$. Die Homologieklasse von ε bezeichnen wir mit $\mathbf{1} \in H_1(S^1; \mathbb{Z})$.
(X, x_0) sei ein punktierter, topologischer Raum. Dann sei $h_1 : \pi_1(X, x_0) \to H_1(X; \mathbb{Z})$ diejenige Abbildung, die durch $[\varphi] \mapsto \varphi_*(\mathbf{1})$ gegeben ist. Diese ist wohldefiniert, da aus $[\varphi] = [\psi]$ stets $\varphi_* = \psi_*$ folgt.

Geometrisch bedeutet die Definition von h_1 folgendes: Man kann jeden geschlossenen Weg in (X, x_0) als 1-Zykel auffassen. h_1 ordnet jeder Homotopieklasse geschlossener Wege die Homologieklasse des entsprechenden 1-Zykels zu.

Satz 3.67. *X sei ein topologischer Raum und $x_0 \in X$ sei ein beliebiger Punkt. Dann gilt:*

1. *h_1 ist ein bezüglich stetiger Abbildungen von Paaren natürlicher Gruppenhomomorphismus.*
2. *Ist X wegzusammenhängend, so ist die Sequenz*

$$\{1\} \longrightarrow [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)] \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{h_1} H_1(X; \mathbb{Z}) \longrightarrow \{0\}$$

exakt, d.h. $H_1(X; \mathbb{Z}) \cong \pi_1(X, x_0)^{\mathrm{ab}}$.
Hierbei bezeichne $[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$ den Kommutator von $\pi_1(X, x_0)$, d.h. $[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$ ist die von $\{aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in \pi_1(X, x_0)\}$ erzeugte Untergruppe von $\pi_1(X, x_0)$. Entsprechend bezeichen wir mit $\pi_1(X, x_0)^{\mathrm{ab}}$ die abelsch gemachte Fundamentalgruppe, d.h.

$$\pi_1(X, x_0)^{\mathrm{ab}} := \pi_1(X, x_0)/[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)].$$

Beweis für den Spezialfall, daß X homotopieäquivalent zu einem CW-Komplex ist. Wir beweisen zunächst die Natürlichkeit: Sei $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ eine punktierte, stetige Abbildung. Dann gilt für jedes $[\varphi] \in \pi_1(X, x_0)$

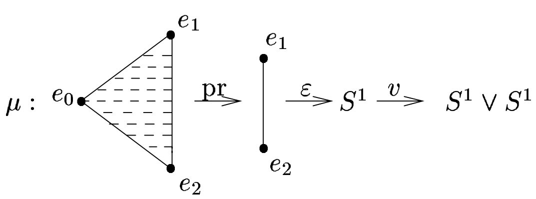
$$f_*(h_1([\varphi])) = f_*(\varphi_*(\mathbf{1})) = (f \circ \varphi)_*(\mathbf{1}) = h_1([f \circ \varphi]) = h_1(f_*[\varphi]).$$

Somit ist h_1 natürlich.

Der Beweis der zweiten Aussage erfolgt in drei Schritten.

- h_1 ist ein <u>Homomorphismus</u>: Wir beweisen zunächst für die kanonischen Inklusionen $i_1, i_2 : S^1 \hookrightarrow S^1 \vee S^1$, daß $v_*(\mathbf{1}) = i_{1*}(\mathbf{1}) + i_{2*}(\mathbf{1})$ gilt. Hierzu betrachten wir die Abbildung

$$\mu : \Delta_2 \to S^1 \vee S^1,\ (x_0, x_1, x_2) \mapsto v(\varepsilon(x_1 + \frac{x_0}{2}, x_2 + \frac{x_0}{2})).$$



Es gilt $\partial\mu = v \circ \varepsilon - i_2 \circ \varepsilon + i_1 \circ \varepsilon \circ \tau$, wobei $\tau : \Delta_1 \to \Delta_1$, $e_0 \mapsto e_1$, $e_1 \mapsto e_0$ linear sei. Da Vertauschung von Ecken das Vorzeichen der Homologieklasse verändert (vgl. Beweis der Behauptung 1 im Beweis von Satz 3.66), erhalten wir $0 = v_*(\mathbf{1}) - i_{1*}(\mathbf{1}) - i_{2*}(\mathbf{1})$.

Daher gilt für $[\varphi], [\psi] \in \pi_1(X, x_0)$ stets

$$\begin{aligned} h_1([\varphi]\cdot[\psi]) = h_1([(\varphi \vee \psi) \circ v]) = (\varphi \vee \psi)_*(v_*(\mathbf{1})) &= (\varphi \vee \psi)_*(i_{1*}(\mathbf{1})) + (\varphi \vee \psi)_*(i_{2*}(\mathbf{1})) \\ &= \varphi_*(\mathbf{1}) + \psi_*(\mathbf{1}) = h_1([\varphi]) + h_1([\psi]). \end{aligned}$$

- Wegen der bereits gezeigten Natürlichkeit und da Homotopieäquivalenzen Isomorphismen von π_1 und von H_1 induzieren, können wir o.B.d.A. annehmen, daß X ein CW-Komplex ist, denn wir haben für diesen Beweis vorausgesetzt, daß X homotopieäquivalent zu einem CW-Komplex ist. Da X wegzusammenhängend ist, können wir überdies o.B.d.A. annehmen, daß $x_0 \in X$ die einzige 0-Zelle von X ist (vgl. [StöZie, Satz 5.5.17]), und daß alle anheftenden Abbildungen $\varphi_e : S^1 \to X^1$ von 2-Zellen e die Eigenschaft $\varphi_e(1) = x_0$ haben.

  Wir betrachten zunächst den <u>Spezialfall $X = X^1$</u>. Wegen obiger Annahmen ist dann $X \simeq \bigvee_{j\in J} S^1$ mit einer geeigneten Menge J. Für endliches J wissen wir nach Korollar 2.18, daß $\pi_1(X, x_0)$ die freie Gruppe ist, die von den Homotopieklassen der kanonischen Einbettungen $i_j : S^1 \to \bigvee_{j\in J} S^1$ erzeugt wird. Für unendliches J geht dies aus [StöZie, Satz 5.5.9] hervor.

  Andererseits ist $H_1(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^J$ die freie, abelsche Gruppe, die von den Homologieklassen $\{[i_j \circ \varepsilon] | j \in J\}$ erzeugt wird. Dies folgt aus dem Ausschneidungssatz (Satz 3.44), der Tatsache, daß $x_0 \in X$ eine kontrahierbare Umgebung besitzt, und daß $\bigoplus \circ H_1 = H_1 \circ \coprod$ ist (Lemma 3.35). Da $h_1([i_j]) = [i_j \circ \varepsilon]$ ist, folgt unmittelbar die Behauptung.

- Nun wenden wir uns dem allgemeineren Fall <u>$\dim(X) > 1$</u> zu. Die Inklusion $j : X^2 \subseteq X$ induziert je einen Isomorphismus $\pi_1(j)$ und $H_1(j)$, was für $\pi_1(j)$ aus der Tatsache, daß D^k, $k \geq 2$ einfach zusammenhängend ist und für $H_1(j)$ aus Lemma 3.63 folgt. Daher können wir o.B.d.A. $X = X^2$ annehmen. Sei $i : X^1 \subseteq X$ die Inklusion. Wir erhalten folgendes, kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \{1\} \arrow[r] & \mathrm{Ker}(i_*) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \pi_1(X^1, x_0) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "h_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \pi_1(X, x_0) \arrow[r] \arrow[d, "h_1"'] & \{1\} \\ \{0\} \arrow[r] & \mathrm{Ker}(i_*) \arrow[r] & H_1(X^1;\mathbb{Z}) \arrow[r, "i_*"] & H_1(X;\mathbb{Z}) \arrow[r] & \{0\}. \end{tikzcd}$$

Die Kommutativität $i_* \circ h_1 = h_1 \circ i_*$ ergibt sich aus der Natürlichkeit von h_1. Die Abbildung α wird wegen der Exaktheit in $\pi_1(X^1, x_0)$ und $H_1(X^1;\mathbb{Z})$ und der Kommutativität des Diagramms von h_1 induziert. Obiges Diagramm besitzt exakte Zeilen, denn einerseits ist $H_1(X^2, X^1;\mathbb{Z}) = \{0\}$ nach Satz 3.60, andererseits kann man mittels zellulärer Approximation zeigen, daß $i_* = \pi_1(i)$ surjektiv ist.

Da $h_1 : \pi_1(X^1, x_0) \to H_1(X^1;\mathbb{Z})$ und $i_* = H_1(i) : H_1(X^1;\mathbb{Z}) \to H_1(X;\mathbb{Z})$ beide surjektiv sind und obiges Diagramm kommutiert, ist auch $h_1 : \pi_1(X, x_0) \to H_1(X;\mathbb{Z})$ surjektiv. Also ist

$$\{1\} \longrightarrow \mathrm{Ker}(h_1) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{h_1} H_1(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow \{0\}$$

exakt. Wir müssen also nur noch $\mathrm{Ker}(h_1) = [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$ nachweisen. Hierzu wenden wir zunächst das Schlangenlemma (Lemma 3.4) auf obiges Diagramm an und erhalten die exakte Sequenz

$$\mathrm{Ker}(h_1 : \pi_1(X^1, x_0)) \to H_1(X^1;\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Ker}(h_1 : \pi_1(X, x_0) \to H_1(X;\mathbb{Z})) \longrightarrow \mathrm{Coker}(\alpha). \qquad (*)$$

Mittels zellulärer Approximation für Homotopien und Kompaktheitsargumenten kann man zeigen, daß $\mathrm{Ker}(\pi_1(i))$ von den Homotopieklassen $[f_e]$ der anheftenden Abbildungen f_e von 2-Zellen e erzeugt ist. Die lange, exakte Homologiesequenz (vgl. Satz 3.34) des Paares (X, X^1) liefert, daß

$$\mathrm{Ker}(H_1(i)) = \mathrm{Im}\left(\partial : H_2(X^2, X^1;\mathbb{Z}) \to H_1(X^1;\mathbb{Z})\right)$$

ist. Daher ist $\mathrm{Ker}(H_1(i))$ von den Rändern $[f_e \circ \varepsilon]$ der 2-Zellen erzeugt. Wir erhalten, daß α surjektiv sein muß, d.h. $\mathrm{Coker}(\alpha) = \{0\}$. Da wir bereits $\mathrm{Ker}(h_1 : \pi_1(X^1, x_0) \to H_1(X^1;\mathbb{Z})) = [\pi_1(X^1, x_0), \pi_1(X^1, x_0)]$

gezeigt haben, liefert die exakte Sequenz (∗) folgendes, kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccc} [\pi_1(X^1,x_0),\pi_1(X^1,x_0)] & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(h_1:\pi_1(X,x_0)\to H_1(X;\mathbb{Z})) & \longrightarrow & \{0\} \\ \big\downarrow & \circlearrowleft & \big\downarrow & & \\ \pi_1(X^1,x_0) & \xrightarrow{\pi_1(i)} & \pi_1(X,x_0) & \longrightarrow & \{1\}. \end{array}$$

Einfache, gruppentheoretische Überlegungen liefern daher $\mathrm{Ker}(h_1) = [\pi_1(X,x_0),\pi_1(X,x_0)]$.

□

3.11 Beispiele von Homologiegruppen

3.11.1 Berechnung von $H_q(S^n;R)$

Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann ist S^n ein CW-Komplex mit einer 0-Zelle e_0 und einer n-Zelle e_n. Daher ist der zelluläre Komplex $C_\bullet(S^n,\{e_0,e_n\};R)$ von der Gestalt $\dots\{0\} \to \underset{(n)}{R} \to \{0\} \to \dots \to \underset{(0)}{R} \to \{0\}$, bzw. $\dots\{0\} \to \underset{(0)}{R^2} \to \{0\}\dots$, falls $n=0$ ist. In allen Fällen (auch für $n=1$) ist der Randhomomorphismus $d=0$ (vgl. Abschnitt 3.11.2). Gemäß Satz 3.65 erhalten wir also für $q \in \mathbb{Z}$

$$H_q(S^n;R) \cong H_q(C_\bullet(S^n,\{e_0,e_n\};R)) = \begin{cases} R^2 & ,q=n=0 \\ R & ,q\in\{0,n\},\ n\neq 0 \\ \{0\} & ,\text{sonst.} \end{cases}$$

Dies entspricht dem bereits bekannten Ergebnis aus Satz 3.53. Jedoch können wir den Beweis von Satz 3.53 nicht durch den eben geführten ersetzen, da wir Satz 3.53 im Beweis von Satz 3.65 verwendet haben.

3.11.2 Berechnung von $H_q(\bigvee_{j\in J} S^n;R)$

Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ und J eine nichtleere Indexmenge. Dann ist $\bigvee_{j\in J} S^n$ ein CW-Komplex $(X,\mathcal{E})$ mit einer 0-Zelle e_0 und zu jedem $j \in J$ einer n-Zelle e_j. Daher ist für $q \in \mathbb{Z}$ stets

$$C_q(X,\mathcal{E};R) = \begin{cases} R & ,q=0 \\ R^{(J)} & ,q=n \\ \{0\} & ,\text{sonst.} \end{cases}$$

Für $n > 1$ erhalten wir hieraus mit Satz 3.65 direkt

$$H_q(\bigvee_{j\in J} S^n;R) \cong \begin{cases} R & ,q=0 \\ R^{(J)} & ,q=n \\ \{0\} & ,q\notin\{0,n\}. \end{cases}$$

Für $n=1$ erhalten wir dieses Ergebnis, da die Erzeuger $\Delta_1 \xrightarrow{\varepsilon} S^1 \xrightarrow{i_j} X$ von $C_1(X,\mathcal{E};R)$ die Eigenschaft $i_j(\varepsilon(0,1)) = i_j(\varepsilon(1,0))$ haben, also in $\mathrm{Ker}(d_1 : C_1(X,\mathcal{E};R) \to C_0(X,\mathcal{E};R))$ liegen.

3.11.3 Berechnung von $H_q(\mathbb{CP}^n;R)$

Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und $n \in \mathbb{N}$. Der komplexe, projektive Raum $\mathbb{CP}^n$ hat bekanntlich eine Zellenzerlegung $e_0 \cup e_2 \cup e_4 \cup \dots \cup e_{2n}$. Daher liefert Satz 3.65 für $q \in \mathbb{Z}$ stets

$$H_q(\mathbb{CP}^n;R) = \begin{cases} R & ,q=0,2,\dots,2n \\ \{0\} & ,\text{sonst.} \end{cases}$$

3.11.4 Berechnung von $H_q(\mathbb{RP}^n; R)$

Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und $n \in \mathbb{N}$. Als CW-Komplex hat $\mathbb{RP}^n$ eine Zellenzerlegung $\mathcal{E} = \{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ mit je einer k-Zelle für $k = 0, \ldots, n$. Also hat der zelluläre Komplex $C_\bullet(\mathbb{RP}^n, \mathcal{E}; R)$ die Gestalt

$$\{0\} \longrightarrow \underset{(n)}{R} \xrightarrow{d_n} \underset{(n-1)}{R} \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots \xrightarrow{d_1} \underset{(0)}{R} \longrightarrow \{0\}.$$

Zur Berechnung der Homologie müssen wir daher Information über die Randhomomorphismen d_n gewinnen. Hierzu untersuchen wir die $(2:1)$-Überlagerung $S^n \xrightarrow{p} \mathbb{RP}^n$ mit einer speziellen CW-Struktur auf S^n (so daß p zellulär wird).

Für $q \in \mathbb{N}$ schreiben wir $e_q^\pm := \{(x_1, \ldots, x_{q+1}) \in S^q | \pm x_{q+1} > 0\} \subseteq S^q$ für die obere bzw. untere Hemisphäre. Die Abbildung $\phi_q^\pm : D^q \to S^q$, die jedem $x = (x_1, \ldots, x_q) \in D^q$ das Element $\phi_q^\pm(x) := (x_1, \ldots, x_q, \pm\sqrt{1 - \|x\|^2})$ zuordnet, verwenden wir als charakteristische Abbildung für $e_q^\pm$. Dann ist $\partial D^q = S^{q-1}$, und $\phi_q^\pm|_{\partial D^q} : S^{q-1} \to S^q$ ist die äquatoriale Einbettung.

Somit erhalten wir eine CW-Struktur auf $S^n = e_n^+ \cup e_n^- \cup \cdots \cup e_0^+ \cup e_0^-$ mit äquatorialem q-Gerüst $S^q \subseteq S^n$. Die $e_q := p(e_q^+) \subseteq \mathbb{RP}^n$ mit den charakteristischen Abbildungen $p \circ \phi_q^+ : D^q \to \mathbb{RP}^n$ für $q = 0, \ldots, n$ definieren eine CW-Struktur auf $\mathbb{RP}^n$, für die p zellulär wird.

Für jedes $q = 0, \ldots, n$ wählen wir einen Homöomorphismus $\sigma_q : \Delta_q \xrightarrow{\cong} D^q$, dessen Homologieklasse wir mit $\mathbf{1}_q := [\sigma_q] \in H_q(D^q, S^{q-1}; R)$ bezeichnen.

Wir wählen die **orientierten** Zellen

$$\begin{array}{rcl} (\phi_q^\pm)_*(\mathbf{1_q}) & =: & e_q^\pm \in H_q(S^q, S^{q-1}; R) \\ (p \circ \phi_q^+)_*(\mathbf{1_q}) & = & p_*(e_q^+) =: e_q \in H_q(\mathbb{RP}^q, \mathbb{RP}^{q-1}; R) \end{array}$$

als Basis der jeweiligen, zellulären R-Moduln.

Lemma 3.68. *Mit obigen Notationen gilt:*

1. $p_*(e_q^-) = (-1)^q \cdot p_*(e_q^+) \in H_q(\mathbb{RP}^q, \mathbb{RP}^{q-1}; R)$ *für alle* $q \in \mathbb{N}$.
2. *Für die Randhomomorphismen* d_q *von* $\{H_q(S^q, S^{q-1}; R)\}_{q\in\mathbb{N}}$, *die durch*

$$d_q : H_q(S^q, S^{q-1}; R) \xrightarrow{\partial_q} H_{q-1}(S^{q-1}; R) \xrightarrow{j_{q-1}} H_{q-1}(S^{q-1}, S^{q-2}; R),$$

gegeben sind, gilt stets $d_q(e_q^+) = d_q(e_q^-) = \lambda \cdot (e_{q-1}^+ - e_{q-1}^-)$ *mit einer Einheit* $\lambda \in R$.

Beweis.

1. Wir zeigen zunächst, daß für $-\mathrm{id}_{D^q} : D^q \to D^q$ die Gleichung

$$(-\mathrm{id}_{D^q})_* = (-1)^q \cdot \mathrm{id}_{H_q(D^q, S^{q-1}; R)} : H_q(D^q, S^{q-1}; R) \to H_q(D^q, S^{q-1}; R)$$

gilt. Dazu sei $S_i : D^q \to D^q$, $(x_1, \ldots, x_q) \mapsto (x_1, \ldots, -x_i, \ldots, x_q)$ die Spiegelung an der i-ten Koordinaten-Hyperebene. Dann ist $-\mathrm{id}_{D^q} = S_1 \circ S_2 \circ \cdots \circ S_q$. Also genügt es, zu zeigen, daß $(S_\nu)_* = -\mathrm{id}_{H_q(D^q, S^{q-1}; R)}$ ist. Wir können den Homöomorphismus $\sigma_q : \Delta_q \longrightarrow D^q$ derart wählen, daß S_ν genau der Transposition $\tau = (0, 1)$ entspricht. Im Beweis von Satz 3.66 haben wir bereits gesehen, daß $|\tau|_* = -\mathrm{id}_{H_q(\Delta_q, \partial\Delta_q; R)}$ ist, also $(S_\nu)_* = -\mathrm{id}_{H_q(D^q, S^{q-1}; R)}$.

Sei $A : S^q \to S^q$, $(x_1, \ldots, x_{q+1}) \mapsto (-x_1, \ldots, -x_{q+1})$ die antipodale Abbildung. Dann ist $A \circ \phi_q^- = \phi_q^+ \circ (-\mathrm{id}_{D^q})$ und $p \circ A = p$. Wir erhalten also

$$p_*(e_q^-) = p_*(\phi_{q*}^-(\mathbf{1}_q)) = p_*(A_*(\phi_{q*}^-(\mathbf{1}_q))) = p_*(\phi_{q*}^+(-\mathrm{id}_{D^q})_*(\mathbf{1}_q)) = (-1)^q p_*(e_q^+).$$

Dies beweist die erste Teilbehauptung.

2. Sei $q \geq 1$. Dann betrachten wir das folgende, kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd}
 & \{0\} = \tilde{H}_q(D^q;R) \arrow[r] & H_q(D^q,S^{q-1};R) \arrow[r, "\partial'_q", "\cong"'] \arrow[d, "(\phi_q^{\pm})_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \tilde{H}_{q-1}(S^{q-1};R) \arrow[r] \arrow[d, equal, "(\phi_q^{\pm}|_{S^{q-1}})_* = (\mathrm{id}_{S^{q-1}})_*"] & \{0\} \\
\underbrace{\tilde{H}_q(S^{q-1};R)}_{=\{0\}} \arrow[r] & \tilde{H}_q(S^q;R) \arrow[r, "j_q"] & H_q(S^q,S^{q-1};R) \arrow[r, "\partial_q"] & \tilde{H}_{q-1}(S^{q-1};R) \arrow[r] & \underbrace{\tilde{H}_{q-1}(S^q;R)}_{=\{0\}}
\end{tikzcd}$$

Die Exaktheit der Zeilen erhält man aus den langen Homologiesequenzen der Tripel $(D^q, S^{q-1}, \{x_0\})$ und $(S^q, S^{q-1}, \{x_0\})$ unter Verwendung von Lemma 3.51, Lemma 3.52 und Korollar 3.41. Daher ist ∂'_q ein Isomorphismus. Die Kommutativität des Diagramms ergibt sich aus der Natürlichkeit der langen, exakten Sequenz der Tripel. Schließlich liefert Satz 3.53, daß $\tilde{H}_q(S^{q-1};R) = \{0\}$ und $\tilde{H}_{q-1}(S^q;R) = \{0\}$.

Es ergibt sich

$$\partial_q(e_q^+) = \partial_q(\phi_{q*}^+(\mathbf{1}_q)) = \partial'_q(\mathbf{1}_q) = \partial_q(\phi_{q*}^-(\mathbf{1}_q)) = \partial_q(e_q^-).$$

Da $\mathbf{1}_q$ ein Erzeuger von $H_q(D^q, S^{q-1};R) \cong R$ (vgl. Lemma 3.57) und ∂'_q ein Isomorphismus ist, muß $\partial'_q(\mathbf{1}_q) = \partial_q(e_q^{\pm})$ ein Erzeuger von $\tilde{H}_{q-1}(S^{q-1};R) \cong R$ sein.

Sei nun $q \geq 0$. Dann ist $\partial_q(e_q^+ - e_q^-) = 0$, da $\partial_0 = 0$ ist und für $q \geq 1$ stets $\partial_q(e_q^+) = \partial_q(e_q^-)$ gilt. Da e_q^+, e_q^- eine Basis von $H_q(S^q, S^{q-1};R)$ und $\mathrm{Ker}(\partial_q) \cong R$ ist, erhalten wir $\mathrm{Ker}(\partial_q) = (e_q^+ - e_q^-) \cdot R$. Da $\mathrm{Ker}(\partial_q) = \mathrm{Im}(j_q)$ ist, muß $e_q^+ - e_q^-$ ein Erzeuger von $\mathrm{Im}(j_q) = j_q(\tilde{H}_q(S^q;R))$ sein. Daher erhalten wir $e_q^+ - e_q^- = \lambda' j_q(\partial_{q+1}(e_{q+1}^{\pm}))$ mit einer Einheit $\lambda' \in R$, d.h. $d_{q+1}(e_{q+1}^{\pm}) = \lambda \cdot (e_q^+ - e_q^-)$ mit $\lambda := (\lambda')^{-1}$.

□

Zur Berechnung der Homologie von $\mathbb{RP}^n$ betrachten wir nun die zellulären Komplexe von S^n und $\mathbb{RP}^n$ und zwischen ihnen die durch p induzierte Abbildung. Wir erhalten für $q \in \mathbb{N}$ das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H_q(S^q, S^{q-1};R) \arrow[r, "d_q"] \arrow[d, "p_*"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_{q-1}(S^{q-1}, S^{q-2};R) \arrow[d, "p_*"] \\
\underbrace{H_q(\mathbb{RP}^q, \mathbb{RP}^{q-1};R)}_{=e_q \cdot R} \arrow[r, "d_q"] & \underbrace{H_{q-1}(\mathbb{RP}^{q-1}, \mathbb{RP}^{q-2};R)}_{=e_{q-1} \cdot R}.
\end{tikzcd}$$

Nach Lemma 3.68 gibt es eine Einheit $\lambda \in R$ mit

$$\begin{aligned}
d_q(e_q) = d_q(p_*(e_q^+)) = p_*(d_q(e_q^+)) = p_*(\lambda(e_{q-1}^+ - e_{q-1}^-)) &= \lambda(1-(-1)^{q-1})e_{q-1} \\
&= \begin{cases} 2\lambda e_{q-1} & , q \equiv 0 \mod 2 \\ \{0\} & , q \equiv 1 \mod 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Also hat der zelluläre Komplex von $\mathbb{RP}^n$ die folgende Gestalt:

$$\{0\} \longrightarrow \underset{(n)}{R} \longrightarrow \underset{}{\dots} \xrightarrow{0} \underset{(2k)}{R} \xrightarrow{\cdot 2\lambda} \dots \xrightarrow{0} \underset{(2)}{R} \xrightarrow{\cdot 2\lambda} \underset{(1)}{R} \xrightarrow{0} \underset{(0)}{R} \longrightarrow \{0\}.$$

Daher erhalten wir:

Proposition 3.69. *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $q \in \mathbb{N}$ stets*

$$H_q(\mathbb{RP}^n;R) = \begin{cases} R & , q = 0 \\ R & , q = n \equiv 1 \mod 2 \\ R/2R & , 1 \leq q < n,\ q \equiv 1 \mod 2 \\ \{0\} & , \textit{sonst}. \end{cases}$$

Beweis. Dies ergibt sich direkt aus obigen Überlegungen. □

3.12 Jordan-Brouwerscher Separationssatz

Der klassische Jordansche Kurvensatz besagt: Ist $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$ stetig und injektiv, so hat $\mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$ genau zwei Wegzusammenhangskomponenten (das Innere und das Äußere der Kurve $f(S^1)$) mit gemeinsamem Rand $f(S^1)$. Dieser Satz ist ohne Homologietheorie sehr schwer zu beweisen, da nur die Stetigkeit von f (und die Injektivität) vorausgesetzt wird, es aber sehr komplizierte und schwer zu beherrschende stetige Abbildungen von S^1 nach $\mathbb{R}^2$ gibt. Man denke beispielsweise an die Jordankurve, die ganz $\mathbb{R}^2$ überdeckt; diese ist das Bild einer stetigen, surjektiven — aber nicht injektiven — Abbildung $S^1 \to \mathbb{R}^2$.

Die Homologietheorie kann man zum Beweis des Jordanschen Kurvensatzes verwenden, da $H_0(X;R)$ die Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten von X angibt: Sind X_i, $i \in I$ die Wegzusammenhangskomponenten von X, so ist $H_0(X;R) \cong \bigoplus_{i\in I} R$, wie aus Lemma 3.35 hervorgeht. Wir wollen in diesem Abschnitt den Jordanschen Kurvensatz und dessen Verallgemeinerung auf beliebige Dimensionen beweisen. Grundlegend ist hierzu der folgende „Nicht-Separationssatz für Scheiben“. Wie üblich notieren wir mit $\tilde{H}_\bullet(-;R)$ die reduzierten Homologiegruppen.

Proposition 3.70 (Nicht-Separationssatz für Scheiben). *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und $k \le n$ natürliche Zahlen. Dann gilt:*

1. *Ist $f : D^k \to S^n$ stetig und injektiv, so ist für $q \in \mathbb{Z}$ stets $\tilde{H}_q(S^n \setminus f(D^k);R) = \{0\}$. Insbesondere wird S^n nicht von $f(D^k)$ zerlegt.*
2. *Sei $k < n$ und $f : S^k \to S^n$ stetig und injektiv. Dann gilt für $q \in \mathbb{Z}$ stets*

$$\tilde{H}_q(S^n \setminus f(S^k);R) = \begin{cases} R & ,q = n-k-1 \\ \{0\} & ,\textit{sonst.} \end{cases}$$

Beweis.

1. Bekanntlich ist $D^k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| \le 1\}$ homöomorph zu $I^k := I \times \cdots \times I$ (k Kopien). Wir müssen also zeigen, daß für $q \in \mathbb{N}$ stets $\tilde{H}_q(S^n \setminus f(I^k);R) = \{0\}$ ist. Für $q < 0$ ist dies trivial.

   Dies beweisen wir induktiv über k. Für $k = 0$ ist I^k ein Punkt, also $S^n \setminus f(I^k) = S^n \setminus \{x_0\} \simeq D^n$. Wegen der Homotopieäquivalenz der Homologie (Korollar 3.40) und der Tatsache, daß D^n kontrahierbar ist, erhalten wir $\tilde{H}_q(S^n \setminus f(I^k);R) = \{0\}$ (vgl. Satz 3.34).

   Wir gehen nun davon aus, daß die Aussage für jedes $k < k_0$ bereits bewiesen ist, und zeigen sie für k_0. Sei $f : I^{k_0} \to S^n$ stetig und injektiv (und $k_0 \le n$). Wir setzen

$$\begin{aligned} A_0 &:= I^{k_0}, \\ B_1 &:= I^{k_0-1} \times \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ B_2 &:= I^{k_0-1} \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{aligned}$$

   Dann ist $A_0 = B_1 \cup B_2$ und $B_1 \cap B_2 = I^{k_0-1} \times \left\{\frac{1}{2}\right\} \cong I^{k_0-1}$. Da f injektiv ist, gilt $S^n \setminus f(B_1 \cap B_2) = (S^n \setminus f(B_1)) \cup (S^n \setminus f(B_2))$. Die Mayer-Vietoris-Sequenz (vgl. Satz 3.49) für $(S^n \setminus f(B_1)) \cup (S^n \setminus f(B_2)) \cong S^n \setminus f(I^{k_0-1})$ lautet

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \tilde{H}_{q+1}(S^n \setminus f(B_1 \cap B_2);R) \longrightarrow \tilde{H}_q(S^n \setminus f(A_0);R) \xrightarrow{\alpha} \\ \longrightarrow \tilde{H}_q(S^n \setminus f(B_1);R) \oplus \tilde{H}_q(S^n \setminus f(B_2);R) \longrightarrow \tilde{H}_q(S^n \setminus f(B_1 \cap B_2);R) \longrightarrow \cdots. \end{aligned}$$

   Nach Induktionsvoraussetzung verschwinden der erste und der letzte Term, also ist $\alpha = i_{1*} \oplus (-i_{2*})$ mit $i_\nu : S^n \setminus f(A_0) \subseteq S^n \setminus f(B_\nu)$ für $\nu \in \{1,2\}$ ein Isomorphismus.

   Wir nehmen $\tilde{H}_q(S^n \setminus f(A_0)) \ne \{0\}$ an. Dann gäbe es ein $x \in \tilde{H}_q(S^n \setminus f(A_0))$ mit $x \ne 0$, also mit $i_{1*}(x) \ne 0$ oder $i_{2*}(x) \ne 0$. O.B.d.A. gelte $i_{1*}(x) \ne 0$. Wir setzen

$$j_1 := i_1, \; A_1 := B_1.$$

Wie A_0 unterteilen wir jetzt A_1, wenden die Mayer-Vietoris-Sequenz an. Wir erhalten $i_{1*}(j_{1*}(x)) \neq 0$ oder $i_{2*}(j_{1*}(x)) \neq 0$. Dieses Verfahren iterieren wir. Dadurch erhalten wir eine Folge

$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_i \supseteq \ldots$$

mit

(a) $A_\infty := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k = I^{k_0-1} \times \{a\}$ für ein $a \in I$.
(b) $j_{k*}(x) \neq 0$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, wobei $j_k : S^n \setminus f(A_0) \subseteq S^n \setminus f(A_k)$ die Inklusion ist.

Sei $j_\infty : S^n \setminus f(A_0) \subseteq S^n \setminus f(A_\infty)$. Dann gilt aufgrund der Induktionsvoraussetzung $j_{\infty *}(x) = 0$, denn $H_q(S^n \setminus f(A_\infty); R) = H_q(S^n \setminus f(I^{k_0-1}); R) = \{0\}$.

Sei $\sigma_x = \sum_{i=0}^{k} c_i\sigma_i$, $\sigma_i : \Delta_q \to S^n \setminus f(A_0)$ eine singuläre Kette, die x repräsentiert. Da $j_{\infty_*}(x) = 0$ ist, existiert eine singuläre Kette $\sigma_y = \sum_{j=0}^{l} \alpha_j\sigma'_j$, $\sigma'_j : \Delta_{q+1} \to S^n \setminus f(A_\infty)$, so daß $\sigma_x = d(\sigma_y)$ in $S_q(S^n \setminus f(A_\infty))$ gilt. Da $\sigma'_j(\Delta_{q+1})$ für jedes $j = 0, \ldots, l$ kompakt ist, gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\bigcup_{j=0}^{l} \sigma'_j(\Delta_{q+1}) \subseteq S^n \setminus f(A_m)$. Dies hat jedoch zur Folge, daß $\sigma_x = d(\sigma_y)$ schon in $S_q(S^n \setminus f(A_q))$ gilt. Also ist $j_{m*}(x) = 0$, im Widerspruch zur Konstruktion der j_{k*}. Somit muß $\tilde{H}_q(S^n \setminus f(A_0)) = \{0\}$ sein.

2. Sei $f : S^k \to S^n$ stetig und injektiv. Wir zerlegen S^k in die (abgeschlossene) obere und untere Halbsphäre $H^k_\pm$ und erhalten $S^k = H^k_+ \cup H^k_-$, $H^k_+ \cap H^k_- \cong S^{k-1}$, $H^k_+ \cong H^k_- \cong D^k$, sowie die Mayer-Vietoris-Sequenz

$$\cdots \to \tilde{H}_{q+1}(S^n \setminus f(H^k_+); R) \oplus \tilde{H}_{q+1}(S^n \setminus f(H^k_-); R) \to \tilde{H}_{q+1}(S^n \setminus f(S^{k-1}); R)$$
$$\to \tilde{H}_q(S^n \setminus f(S^k); R) \to \tilde{H}_q(S^n \setminus f(H^k_+); R) \oplus \tilde{H}_q(S^n \setminus f(H^k_-); R) \longrightarrow \ldots.$$

Aus der ersten Teilbehauptung folgt, daß die beiden mittleren Terme isomorph sind. Wir erhalten induktiv

$$\tilde{H}_q(S^n \setminus f(S^k); R) \cong \tilde{H}_{q+1}(S^n \setminus f(S^{k-1}); R) \cong \cdots \cong \tilde{H}_{q+k+1}(S^n; R).$$

Da nach Satz 3.53

$$\tilde{H}_{q+k+1}(S^n; R) = \begin{cases} R & , q+k+1 = n \\ \{0\} & , \text{sonst} \end{cases}$$

gilt, erhalten wir hieraus die zweite Teilbehauptung.

□

Korollar 3.71. *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, $n \geq 2$, $0 \leq k \leq n$ natürliche Zahlen und $f : D^k \to \mathbb{R}^n$ stetig und injektiv. Dann gilt für jedes $i \in \mathbb{N}$*

$$\tilde{H}_i(\mathbb{R}^n \setminus f(D^k); R) = \begin{cases} R & , i = n-1 \\ \{0\} & , \textit{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Die stereographische Projektion liefert einen Homöomorphismus $\mathbb{R}^n \cong S^n \setminus \{P\}$, wobei P der Nordpol von S^n sei. Also gibt es eine Menge $B \subseteq S^n \setminus \{P\}$, $B \cong f(D^k)$, so daß gilt:

$$\mathbb{R}^n \setminus f(D^k) \cong S^n \setminus (B \cup \{P\}).$$

Wir betrachten die exakte Homologiesequenz des Paares $(S^n \setminus B, S^n \setminus (B \cup \{P\}))$:

$$\ldots \longrightarrow H_{i+1}(S^n \setminus B; R) \longrightarrow H_{i+1}(S^n \setminus B, S^n \setminus (B \cup \{P\}); R)$$
$$\xrightarrow{\partial_{i+1}} H_i(S^n \setminus (B \cup \{P\}); R) \longrightarrow H_i(S^n \setminus B; R) \longrightarrow \ldots.$$

Aus Proposition 3.70 folgt, daß ∂_{i+1}, $i \geq 1$ für $k \leq n$ ein Isomorphismus ist. Nach dem Ausschneidungssatz (Satz 3.44) erhalten wir

$$H_{i+1}(S^n, S^n \setminus \{P\}; R) \cong H_{i+1}(S^n \setminus B, S^n \setminus (B \cup \{P\}); R).$$

Da der Südpol Q den Deformationsretrakt $\{Q\} \subseteq S^n \setminus \{P\}$ liefert, folgt aus der Homotopieinvarianz (Korollar 3.42)

$$H_{i+1}(S^n, S^n \setminus \{P\}; R) \cong H_{i+1}(S^n, \{Q\}; R) = \tilde{H}_{i+1}(S^n; R),$$

und daraus mit Satz 3.53 die Behauptung für $i \geq 1$. Falls $i = 0$ ist, so folgt $\{0\} = \tilde{H}_1(S^n; R) \cong H_1(S^n \setminus B, S^n \setminus (B \cup \{P\}); R)$, da $n \geq 2$ ist. Also erhalten wir mit obigem $\tilde{H}_0(S^n \setminus (B \cup \{P\}); R) \cong \tilde{H}_0(S^n \setminus B; R) \cong \{0\}$. □

Aus Proposition 3.70 erhalten wir nun

Satz 3.72 (Jordan-Brouwerscher Separationssatz). *Sei $n \geq 1$ und $f : S^{n-1} \to S^n$ stetig und injektiv. Dann hat $S^n \setminus f(S^{n-1})$ genau zwei Wegzusammenhangskomponenten U_1, U_2 mit $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2 = f(S^{n-1})$.*

Für $n = 2$ ist dies der Jordansche Kurvensatz.

Beweis. Nach Proposition 3.70 gilt $\tilde{H}_0(S^n \setminus f(S^{n-1}); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, also $H_0(S^n \setminus f(S^{n-1}); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Nach Lemma 3.35 hat $S^n \setminus f(S^{n-1})$ daher genau zwei Wegzusammenhangskomponenten U_1 und U_2.

Wir zeigen nun, daß $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2 = f(S^{n-1})$ ist. Da $\partial U_i \subseteq f(S^{n-1})$ ist, folgt $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2 \subseteq f(S^{n-1})$.

Sei umgekehrt ein $x = f(y) \in f(S^{n-1})$ gegeben. Dann ist $S^{n-1} \setminus \{y\} \cong D^{n-1}$ und $(S^n \setminus f(S^{n-1})) \cup \{x\} = S^n \setminus (f(S^{n-1}) \setminus \{x\}) = S^n \setminus f(S^{n-1} \setminus \{y\})$. Aus Proposition 3.70 ergibt sich $H_0((S^n \setminus f(S^{n-1})) \cup \{x\}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, d.h. $(S^n \setminus f(S^{n-1})) \cup \{x\}$ ist wegzusammenhängend. Seien nun $x_1 \in U_1$, und $x_2 \in U_2$. Dann gibt es einen Weg $w : I \to (S^n \setminus f(S^{n-1})) \cup \{x\}$ mit $w(0) = x_1$ und $w(1) = x_2$. Da $S^n \setminus f(S^{n-1})$ nicht wegzusammenhängend ist, existiert ein t mit $w(t) = x$. Daher ist $x \in (w(I) \cap \bar{U}_1) \cap (w(I) \cap \bar{U}_2)$, d.h. $x \in \bar{U}_1 \cap \bar{U}_2$. □

3.13 Lefschetzscher Fixpunktsatz

Definition:
Sei X ein topologischer Raum, dessen Homologiegruppen $H_q(X) := H_q(X; \mathbb{Z})$ stets endlich erzeugte $\mathbb{Z}$-Moduln sind. Dann heißt

$$\beta_q(X) := \mathrm{rg}(H_q(X; \mathbb{Z}))$$

für $q \in \mathbb{Z}$ die ***q*-te Bettizahl von *X***, und

$$\chi(X) := \sum_{q \in \mathbb{Z}} (-1)^q \beta_q(X) = \sum_{q \in \mathbb{N}} (-1)^q \beta_q(X)$$

nennen wir die **(topologische) Euler(-Poincaré)-Charakteristik von *X***.

Die Abbildung χ entspricht, mit den Notationen aus Abschnitt 3.1.3, der Euler-Poincaré-Charakteristik des singulären Kettenkomplexes $S_\bullet(X)$ bzgl. der Euler-Poincaré-Abbildung rg. Die Euler-Poincaré-Charakteristik hat gegenüber den Bettizahlen und Homologiegruppen den Vorteil, daß sie sich einfacher berechnen läßt — $\chi(X)$ läßt sich oft berechnen, ohne $\beta_q(X)$ zu kennen.

Ist X ein simplizialer Komplex oder ein CW-Komplex, so läßt sich die Homologie mittels simplizialer bzw. zellulärer Kettenkomplexe berechnen, wie wir in Abschnitt 3.9 gesehen haben:

1. Ist $X = |K|$ und K ein simplizialer Komplex, so gilt für $q \in \mathbb{N}$ stets $H_q(X; \mathbb{Z}) \cong H_q(C_\bullet(K))$.
2. Ist $(X, \mathcal{E})$ ein CW-Komplex, so gilt für $q \in \mathbb{N}$ stets $H_q(X; \mathbb{Z}) \cong H_q(C_\bullet(X, \mathcal{E}; \mathbb{Z}))$.

Nach Satz 3.9 gilt damit, falls $C_q(K)$ bzw. $C_q(X, \mathcal{E}; \mathbb{Z})$ für alle $q \in \mathbb{N}$ endlich erzeugt ist, und X ein (endlicher[8]) simplizialer Komplex bzw. ein endlicher CW-Komplex ist:

1. $\chi(X) = \sum_{q \in \mathbb{N}} (-1)^q \cdot \mathrm{rg}(C_q(K_\bullet)) = \sum_{q \in \mathbb{N}} (-1)^q \cdot \#\{\sigma \mid \sigma \text{ ist } q\text{-Simplex}\}$.

[8] Gemäß unserer Definition ist jeder simpliziale Komplex endlich.

2. $\chi(X) = \sum_{q\in\mathbb{N}}(-1)^q \cdot \mathrm{rg}(C_q(X,\mathcal{E};\mathbb{Z})) = \sum_{q\in\mathbb{N}}(-1)^q \cdot \#\{e \in \mathcal{E} \mid \dim(e) = q\}$.

Wir erhalten somit den

Satz 3.73 (Verallgemeinerter Eulerscher Polyedersatz). *Sei $(X,\mathcal{E})$ ein endlicher CW-Komplex. Dann ist*

$$\chi(X) = \sum_{q\in\mathbb{N}}(-1)^q \cdot \#\{e \in \mathcal{E} \mid \dim(e) = q\}.$$

Beweis. Dies geht direkt aus obigen Überlegungen hervor. □

Achtung: Im allgemeinen gilt nicht $\beta_q(X) = \mathrm{rg}(C_q(K))$ oder $\beta_q(X) = \mathrm{rg}(C_q(X,\mathcal{E};\mathbb{Z}))$.

Beispiele:

1. Für $n \in \mathbb{N}$, $X = \mathbb{R}^n$ und $q \in \mathbb{N}$ folgt nach Lemma 3.51
$$H_q(\mathbb{R}^n;\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & ,q=0 \\ \{0\} & ,\text{sonst} \end{cases}, \text{ d.h. } \beta_q(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} 1 & ,q=0 \\ 0 & ,\text{sonst} \end{cases}, \text{ also } \chi(\mathbb{R}^n) = 1.$$
2. Für $n \geq 1$, $X = S^n$ und $q \in \mathbb{N}$ gilt gemäß Satz 3.53
$$H_q(S^n;\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & ,q\in\{0,n\} \\ \{0\} & ,\text{sonst} \end{cases}, \text{ d.h. } \beta_q(S^n) = \begin{cases} 1 & ,q\in\{0,n\} \\ 0 & ,\text{sonst} \end{cases}, \text{ also } \chi(S^n) = 1 + (-1)^n.$$
Damit gilt für gerades $n \in \mathbb{N}$ stets $\chi(S^n) = 2$, und für ungerades $n \in \mathbb{N}$ gilt $\chi(S^n) = 0$.
3. Für den Torus T^2 und beliebiges $q \in \mathbb{N}$ gilt nach Satz 3.59
$$H_q(T^2;\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & ,q\in\{0,2\} \\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & ,q=1 \\ \{0\} & ,\text{sonst} \end{cases}, \text{ d.h. } \beta_q(T^2) = \begin{cases} 1 & ,q\in\{0,2\} \\ 2 & ,q=1 \\ 0 & ,\text{sonst} \end{cases}, \text{ also } \chi(T^2) = 0.$$
4. Für $n \in \mathbb{N}$, $X = \mathbb{CP}^n$ und $q \in \mathbb{N}$ haben wir in Abschnitt 3.11.3 gesehen, daß
$$H_q(\mathbb{CP}^n;\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & ,q \text{ gerade}, q \leq 2n \\ \{0\} & ,\text{sonst} \end{cases} \text{ ist, d.h. } \chi(\mathbb{CP}^n) = \beta_0 + \beta_2 + \cdot + \beta_{2n} = n+1.$$
5. Für $n \in \mathbb{N}$, $X = \mathbb{RP}^n$ und $q \in \mathbb{N}$ liefert Proposition 3.69
$$H_q(\mathbb{RP}^n;\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & ,q=0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & ,q \text{ ungerade}, q<n \\ \mathbb{Z} & ,q=n \text{ und } n \text{ ungerade} \\ \{0\} & ,\text{sonst} \end{cases}, \text{ d.h. } \beta_q = \begin{cases} 1 & ,q=0 \\ 1 & ,q=n, n \text{ ungerade} \\ 0 & ,\text{sonst.} \end{cases}$$
Somit ist $\chi(\mathbb{RP}^n) = 1$ für jedes gerade $n \in \mathbb{N}$ und $\chi(\mathbb{RP}^n) = 0$ für ungerade $n \in \mathbb{N}$.

Korollar 3.74.

1. *Sei $(X,\mathcal{E})$ ein endlicher CW-Komplex. Dann hängt*
$$\sum_{q\in\mathbb{N}}(-1)^q \cdot \#\{e \in \mathcal{E} \mid \dim(e) = q\}$$
nicht von der CW-Zerlegung $\mathcal{E}$ ab.
2. *Ist $X = |K|$ für einen (endlichen) simplizialen Komplex K, so gilt*
$$\chi(X) = \sum_{q\in\mathbb{N}}(-1)^q \cdot \#\{\sigma \in K \mid \dim(\sigma) = q\}.$$
Insbesondere ist die rechte Seite dieser Gleichung unabhängig von der Polyederzerlegung K von X.

Beweis. Dies folgt offensichtlich aus Satz 3.73. □

Korollar 3.75 (Eulerscher Polyedersatz). *Sei K eine Polyederzerlegung von S^2, d.h. $S^2 \cong |K|$. Dann gilt*

$$\#\,\text{Ecken} - \#\,\text{Kanten} + \#\,\text{Flächen} = 2.$$

Beweis. In obigem Beispiel haben wir $\chi(S^2) = 2$ gesehen. Außerdem gilt für eine Polyederzerlegung K von S^2 stets $\#\,\text{Ecken} - \#\,\text{Kanten} + \#\,\text{Flächen} = \sum(-1)^q \cdot \#\{\sigma \in K \mid \dim(\sigma) = q\} = \chi(|K|)$. □

Der folgende Satz demonstriert erneut die Nützlichkeit der Mayer-Vietoris-Sequenz. Beim Übergang von der Mayer-Vietoris-Sequenz der Homologiegruppe zur Euler-Charakteristik verwandelt sich die Sequenz in eine Summe:

Satz 3.76 (Additivität der Euler-Poincaré-Charakteristik). *Seien X ein topologischer Raum und $A, B \subseteq X$ Teilmengen mit $X = A^\circ \cup B^\circ$. Sind $\chi(X)$, $\chi(A)$, $\chi(B)$ und $\chi(A \cap B)$ definiert, so gilt*

$$\chi(X) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B).$$

Beweis. Wir fassen die Mayer-Vietoris-Sequenz (vgl. Satz 3.49)

$$\cdots \to H_q(A \cap B; \mathbb{Z}) \to H_q(A; \mathbb{Z}) \oplus H_q(B; \mathbb{Z}) \to H_q(X; \mathbb{Z}) \to \dots$$

als exakten Komplex auf. Dann erhalten wir gemäß Korollar 3.10 die Gleichung

$$\sum_{q \in \mathbb{Z}} (-1)^q \Big(\mathrm{rg}(H_q(A \cap B; \mathbb{Z})) - \mathrm{rg}(H_q(A; \mathbb{Z}) \oplus H_q(B; \mathbb{Z})) + \mathrm{rg}(H_q(X; \mathbb{Z})) \Big) = 0,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Zum Abschluß geben wir einige wichtige Anwendungen der Homologietheorie, die Aussagen über die Existenz von Fixpunkten liefern. Die zugehörigen Beweise werden wir allerdings nur zitieren. Wir benötigen hierfür zunächst den Begriff der Lefschetz-Zahl.

Definition:
Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Basis $(v_1, \dots, v_n)$, und $\varphi : V \to V$ sei eine lineare Abbildung mit $\varphi(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j$. Dann heißt

$$\mathrm{Sp}(\varphi) := a_{11} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

die **Spur von φ**.

Man kann zeigen, daß die Spur einer linearen Abbildung unabhängig von der Wahl der Basis von V ist.

Definition:
Sei X ein topologischer Raum, dessen totale Homologie $H_*(X, \mathbb{Z})$ endlich erzeugt sei, und $f : X \to X$ sei eine stetige Abbildung. Wir setzen

$$\lambda_q(f) := \mathrm{Sp}(f_* : H_q(X; \mathbb{R}) \to H_q(X; \mathbb{R})) \quad \text{für } q \in \mathbb{N} \text{ und}$$
$$\lambda(f) := \sum_{q \in \mathbb{N}} (-1)^q \lambda_q(f) \in \mathbb{R}.$$

Wir nennen $\lambda(f)$ die **Lefschetz-Zahl** oder den **Lefschetz-Index** von f.

Bemerkung:
Es gilt stets $\lambda_q(\mathrm{id}_X) = \beta_q(X)$, sowie $\lambda(\mathrm{id}_X) = \chi(X)$.

Lemma 3.77. *Sei X ein topologischer Raum, dessen totale Homologie $H_*(X; \mathbb{Z})$ endlich erzeugt sei, und $f : X \to X$ sei eine stetige Abbildung. Dann sind $\lambda_q(f)$ für $q \in \mathbb{N}$ und damit $\lambda(f)$ ganze Zahlen.*

Beweis. Wir werden in Abschnitt 3.14, Satz 3.84 bzw. Korollar 3.85 zeigen, daß für jedes $q \in \mathbb{N}$

$$H_q(X;\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} H_q(X;\mathbb{R}), \quad [\sigma] \otimes r \mapsto r \cdot [\sigma]$$

ein Isomorphismus ist. Voraussetzungsgemäß ist $H_q(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{\beta_q} \oplus T$, wobei T ein Torsionsmodul ist. Seien $v_1, \ldots, v_{\beta_q} \in H_q(X;\mathbb{Z})$ derart gegeben, daß sie eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathbb{Z}^{\beta_q}$ induzieren. Insbesondere gilt für $i = 1, \ldots, \beta_q$ stets $f_*(v_i) = \sum_{j=1}^{\beta_q} n_{ij} v_j + x$ mit $x \in T$ und $n_{ij} \in \mathbb{Z}$. Andererseits gilt

$$H_q(X;\mathbb{R}) \cong (\mathbb{Z}^{\beta_q} \oplus T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{\beta_q} \oplus (T \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{\beta_q}$$

und $v_1, \ldots, v_{\beta_q}$ ist eine $\mathbb{R}$-Basis von $H_q(X,\mathbb{R})$. Dies liefert $\lambda_q(f_*) = n_{11} + \cdots + n_{\beta_q \beta_q} \in \mathbb{Z}$ und somit die Behauptung. □

Satz 3.78 (Fixpunktsatz von Lefschetz). *Sei X ein (kompaktes[9]) Polyeder, $f : X \to X$ stetig und $\lambda(f) \neq 0$. Dann hat f (mindestens) einen Fixpunkt.*

Beweis. Sei $X = |K|$ und K ein (endliches) Polyeder. Wir nehmen an, daß f keinen Fixpunkt hat. Dann gilt

1. Da f keinen Fixpunkt besitzt und X als Polyeder hausdorffsch ist, gibt es zu jedem $x \in X$ disjunkte, offene Umgebungen U_x und $U_{f(x)}$ von x bzw. $f(x)$ mit $f(U_x) \subseteq U_{f(x)}$. Nach Lemma 1.38 auf Seite 1.38 gibt es eine Verfeinerung K' von K, so daß jeder Eckenstern von K' in einem U_x enthalten ist. Somit gibt es zu für $\sigma \in K'$ stets ein $x \in |K|$, sodaß $|\sigma| \cap f(|\sigma|) \subseteq U_x \cap f(U_x) \subseteq U_x \cap U_{f(x)} = \emptyset$.

2. Gemäß Satz 1.39 auf Seite 47 wählen wir nun eine feinere Unterteilung K'' von K' und eine simpliziale Approximation f' von f, so daß

$$f' : K'' \to K'$$

eine simpliziale Abbildung ist. Für ein beliebiges q-Simplex $\sigma \in K'$ gibt es eine Familie $\{\sigma''_j \mid j \in J\} \subseteq K''$ von Simplizes $\sigma''_j \subseteq \sigma$ mit $|\sigma| = \bigcup_{j \in J} |\sigma''_j|$. Da f' simpliziale Approximation von f ist, gilt $f'(\sigma''_j) \neq \sigma$, denn andernfalls wäre $|f'|(|\sigma''_j|) = |\sigma|$, d.h. für jede Ecke y von $|\sigma|$ und $x \in |f'|^{-1}(y)$ wäre $y = |f'|(x) = f(x) \in \sigma \cap f(\sigma)$ — im Widerspruch zur Konstruktion von K'.

3. Nach Proposition 1.41 ergibt sich $f \simeq f'$, was nach Satz 3.39 zur Folge hat, daß $f_* = f'_*$ ist. Also gilt $\lambda(f) = \lambda(f')$.

4. Sei

$$f'_{\#q} : C_q(K') \xrightarrow{\tau} C_q(K'') \xrightarrow{f'_*} C_q(K')$$

die Komposition aus der Unterteilungsabbildung τ und f'_*. Dann gilt für jedes $\sigma \in K'$

$$\tau(\sigma) = \sum_{\substack{\sigma'' \in K'' \\ |\sigma''| \subseteq |\sigma|}} \sigma''.$$

Nach obigem kommt daher $\sigma \in K'$ nicht in der Kette $f'_{\#q}(\sigma)$ vor, d.h. $\mathrm{Sp}(f'_{\#q}) = 0$.

Wegen Satz 3.66 ist $\lambda(f') = \lambda(f'_{\#})$. Hieraus erhalten wir aber $\lambda(f) = \lambda(f'_{\#}) = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung $\lambda(f) \neq 0$.

Daher hat f einen Fixpunkt.

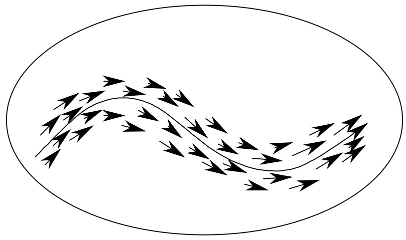
□

Definition:
Sei X ein topologischer Raum und $\varphi : X \times \mathbb{R} \to X$, $(x,t) \mapsto \varphi_t(x)$ eine stetige Abbildung. Dann heißt φ genau dann **Fluß auf X**, wenn gilt:

[9] Definitionsgemäß ist ein Polyeder homöomorph zum Träger eines simplizialen Komplexes. Simpliziale Komplexe haben wir als endliche Mengen von Simplizes definiert. Somit ist gemäß unserer Definition jedes Polyeder kompakt.

1. Für jedes $x \in X$ ist $\varphi_0(x) = x$.
2. Für jedes $x \in X$ und je zwei $s, t \in \mathbb{R}$ ist $\varphi_s(\varphi_t(x)) = \varphi_{s+t}(x)$

Für einen Fluß $\varphi : X \times \mathbb{R} \to X$ auf einem topologischen Raum X ist somit für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Abbildung $\varphi_t : X \to X$ ein Homöomorphismus mit $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$.
Wir können uns einen Fluß als Lösung einer Differentialgleichung $\dot{\varphi}(x) = V(x)$ mit einem Vektorfeld V vorstellen. $\varphi_t(x)$ stellt somit die Position eines „Teilchens" zum Zeitpunkt t dar, welches sich zum Zeitpunkt 0 an der Stelle $\varphi_0(x)$ befindet und unter dem „Einfluß" des Vektorfeldes V steht.



Eine Flußlinie in einem Vektorfeld

Satz 3.79. *Ist X ein (kompaktes) Polyeder mit $\chi(X) \neq 0$, so hat jeder Fluß φ auf X (mindestens) einen Fixpunkt (d.h. es gibt ein $x_0 \in X$ mit $\varphi_t(x_0) = x_0$ für alle $t \in \mathbb{R}$).*

Beweis. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $\varphi_t : X \to X$ homotop zu id_X. Also ist $\lambda(\varphi_t) = \lambda(\mathrm{id}_X) = \chi(X) \neq 0$.

Nach dem Lefschetzschen Fixpunktsatz (Satz 3.78) hat jedes φ_t daher einen Fixpunkt. Zu zeigen ist nun, daß es ein $x_0 \in X$ gibt, das für alle $t \in \mathbb{R}$ ein Fixpunkt von φ_t ist.

Hierzu sei für $n \in \mathbb{N}$

$$A_n := \{x \in X \mid \varphi_{\frac{1}{2^n}}(x) = x\}$$

die Menge der Fixpunkte von $\varphi_{\frac{1}{2^n}}$. Dann gilt:

1. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $A_n \neq \emptyset$, da jedes φ_t einen Fixpunkt besitzt.
2. Für $n \in \mathbb{N}$ ist A_n das Urbild der Diagonalen $\Delta = \{(x, x) \in X \times X\}$ unter der Abbildung $x \mapsto (x, \varphi_{\frac{1}{2^n}}(x))$. Da X hausdorffsch ist, ist Δ abgeschlossen, d.h. A_n ist abgeschlossen.
3. Für $n \in \mathbb{N}$ ist $A_{n+1} \subseteq A_n$: Sei dazu $x \in A_{n+1}$. Dann gilt
$$\varphi_{1/2^n}(x) = \varphi_{1/2^{n+1}+1/2^{n+1}}(x) = \varphi_{1/2^{n+1}}(\varphi_{1/2^{n+1}}(x)) = x,$$
d.h. $x \in A_n$.
4. Da X kompakt ist, ist also $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$. Sei $x_0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Dann ist $\varphi_{1/2^n}(x_0) = x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher ist $\varphi_{k/2^n}(x_0) = \underbrace{\varphi_{1/2^n} \circ \cdots \circ \varphi_{1/2^n}}_{k}(x_0) = x_0$ für alle $k, n \in \mathbb{N}$ Für $k, n \in \mathbb{N}$ folgt hieraus auch $\varphi_{-k/2^n}(x_0) = \left(\varphi_{k/2^n}\right)^{-1}(x_0) = x_0$. Daher ist $\varphi_t(x_0) = x_0$ für alle $t \in \mathbb{Q}$, denn jedes $t \in \mathbb{Q}$ ist eine dyadische Zahl, d.h. eine endliche Summe $t = \sum_{i=0}^{n} \frac{k_i}{2^i}$. Da die rationalen Zahlen in $\mathbb{R}$ dicht liegen und φ stetig ist, erhalten wir $\varphi_t(x_0) = x_0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

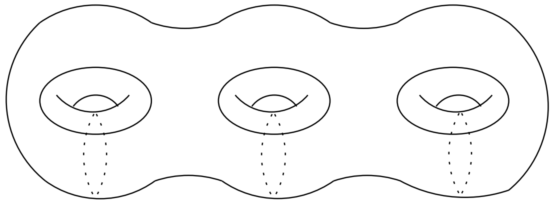
□

Korollar 3.80 („Igel kann man nicht kämmen"). *Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade. Dann besitzt jedes Vektorfeld auf der n-Sphäre S^n eine Singularität.*

Beweis. In obigem Beispiel haben wir gesehen, daß $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n = 2$ ist. Ein Vektorfeld hat genau dann eine Singularität, wenn der zugehörige Fluß einen Fixpunkt hat. Satz 3.79 liefert somit die Behauptung. □

Bemerkung:
Für eine geschlossene, orientierbare Riemannsche Fläche X vom Geschlecht g gilt

$$H_q(X; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , q = 0, 2 \\ \mathbb{Z}^{2g} & , q = 1. \end{cases}$$

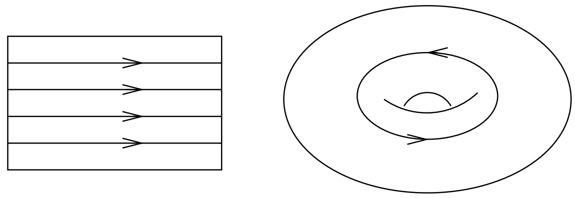


Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g = 3$

Korollar 3.81. *Außer auf dem Torus hat jeder Fluß auf einer Riemannschen Fläche einen Fixpunkt. Auf dem Torus existiert ein Fluß ohne Fixpunkte: der parallele Fluß.*

Beweis.

Sei X eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht g. Dann gilt $\chi(X) = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g$ nach obiger Bemerkung. Also ist $\chi(X) = 0$ genau dann, wenn $g = 1$ ist, d.h. wenn X homöomorph zum Torus ist. Daß der parallele Fluß keinen Fixpunkt besitzt, ist offensichtlich.



paralleler Fluß

□

3.14 Koeffiziententheoreme und Künneth-Formel

Definition:
Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, $(K_\bullet, d_\bullet^K)$ ein Komplex von R-Moduln und M ein R-Modul.

1. Wir definieren einen Kettenkomplex

$$(K_\bullet \otimes_R M, d_\bullet) := (C_\bullet, d_\bullet)$$

durch $C_n := K_n \otimes_R M$ und $d_n := d_n^K \otimes \mathrm{id}_M$ für $n \in \mathbb{Z}$.

2. Die n-te Homologie

$$H_n(K_\bullet; M) := H_n(K_\bullet \otimes_R M, d_\bullet)$$

von $(K_\bullet \otimes_R M, d_\bullet)$ heißt ***n*-te Homologiegruppe von $K_\bullet$ mit Werten in M**.

3. Ist (X, A) ein topologisches Paar, so bezeichnen wir die n-te Homologie

$$H_n(X, A; M) := H_n(S_\bullet(X, A; R) \otimes_R M)$$

des Komplexes $(S_\bullet(X, A; R) \otimes_R M, d_\bullet)$ als ***n*-te Homologiegruppe von (X, A) mit Werten in M**.

Beispiel:
Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Dann ist R eine abelsche Gruppe, also ein $\mathbb{Z}$-Modul. Daher gilt für jedes topologische Paar (X, A)

$$S_n(X, A; R) \cong S_n(X, A; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R,$$

denn sowohl $S_n(X, A; R)$ als auch $S_n(X, A; \mathbb{Z})$ sind freie R- bzw. $\mathbb{Z}$-Moduln.

Beweis der Freiheit. Definitionsgemäß ist $S_n(X; R)$ frei mit der Basis

$$\underbrace{\{\sigma : \Delta_n \to A \mid \sigma \text{ stetig}\}}_{=:\mathcal{A}} \cup \underbrace{\{\sigma : \Delta_n \to X \mid \sigma \text{ stetig mit } \sigma(\Delta_n) \not\subseteq A\}}_{=:\mathcal{B}},$$

wobei $\mathcal{A}$ eine Basis von $S_n(A; R)$ ist. Folglich repräsentiert $\mathcal{B}$ eine Basis von $S_n(X, A; R) = S_n(X; R)/S_n(A; R)$. □

Daher entspricht obige Definition von $H_n(X, A; R) := H_n(S(X, A; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R)$ unserer früheren Definition von $H_n(X, A; R) := H_n(S(X, A; R))$.

Im allgemeinen ist jedoch $H_n(X; R) \ncong H_n(X; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R$.

Lemma 3.82. *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, $K_\bullet$ ein Komplex von R-Moduln und M ein R-Modul. Dann definiert die Zuordnung $[z] \otimes m \mapsto [z \otimes m]$ einen natürlichen Homomorphismus*

$$\kappa : H_n(K_\bullet) \otimes_R M \to H_n(K_\bullet; M).$$

Ist M flach, so ist κ ein Isomorphismus.

Beweis. Seien $h = [z] \in H_n(K_\bullet)$ und $m \in M$. Dann ist z ein n-Zykel in $K_\bullet$, und folglich ist $z \otimes_R m$ ein n-Zykel in $K_\bullet \otimes_R M$. Man sieht leicht ein, daß $[z \otimes_R m] \in H_n(K_\bullet \otimes_R M)$ nur von h und m abhängt, und daß diese Abhängigkeit bilinear ist. Also ist κ ein Homomorphismus. Die Natürlichkeit von κ ist ebenfalls leicht ersichtlich.

Sei nun M flach. Definitionsgemäß ist $\{0\} \to B_n(K_\bullet) \to Z_n(K_\bullet) \to H_n(K_\bullet) \to \{0\}$ exakt. Wie üblich sei hierbei $B_n(K_\bullet) = \mathrm{Im}(d_{n+1})$ und $Z_n(K_\bullet) = \mathrm{Ker}(d_n)$, d.h. $H_n(K_\bullet) = Z_n(K_\bullet)/B_n(K_\bullet)$. Da M flach ist, ist auch

$$\{0\} \to B_n(K_\bullet) \otimes_R M \to Z_n(K_\bullet) \otimes_R M \to H_n(K_\bullet) \otimes_R M \to \{0\}$$

exakt. Tensoriert man die exakte Sequenz

$$\{0\} \longrightarrow Z_n(K_\bullet) \longrightarrow K_n \xrightarrow{d_n} B_{n-1}(K_\bullet) \longrightarrow \{0\}$$

von Homomorphismen mit M, so folgt aus der Flachheit von M, daß $B_{n-1}(K_\bullet) \otimes_R M \cong B_{n-1}(K_\bullet \otimes_R M)$ und $Z_n(K_\bullet) \otimes_R M \cong Z_n(K_\bullet \otimes_R M)$ ist mit Isomorphismen, die κ induzieren. Hieraus ergibt sich die Behauptung $\kappa : H_n(K_\bullet) \otimes_R M \cong H_n(K_\bullet \otimes_R M)$. □

Satz 3.83 (algebraisches, universelles Koeffiziententheorem). *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, $(K_\bullet, d_\bullet)$ ein Komplex von R-Moduln und M ein R-Modul. Falls für alle $n \in \mathbb{Z}$ die R-Moduln $Z_n(K_\bullet) := \mathrm{Ker}(d_n)$ und $B_n(K_\bullet) := \mathrm{Im}(d_{n+1})$ flach sind, so existiert für jedes $n \in \mathbb{Z}$ eine (in beiden Argumenten) natürliche, exakte Sequenz*

$$\{0\} \to H_n(K_\bullet) \otimes_R M \to H_n(K_\bullet; M) \to \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(K_\bullet), M) \to \{0\}.$$

Falls $B_{n-1}(K_\bullet)$ projektiv ist, spaltet diese Sequenz.

Beweis. Wir betrachten die exakte Sequenz

$$\{0\} \longrightarrow Z_n(K_\bullet) \longrightarrow K_n \xrightarrow{d_n} B_{n-1}(K_\bullet) \longrightarrow \{0\}.$$

Tensorieren mit M liefert nach Satz 3.26 die exakte Sequenz

$$\mathrm{Tor}_1^R(B_{n-1}(K_\bullet), M) \longrightarrow Z_n(K_\bullet) \otimes_R M \longrightarrow K_n \otimes_R M \xrightarrow{d_n \otimes \mathrm{id}_M} B_{n-1}(K_\bullet) \otimes_R M \longrightarrow \{0\}.$$

Da $B_{n-1}(K_\bullet)$ flach ist, ist $\mathrm{Tor}_1^R(B_{n-1}(K_\bullet), M) = \{0\}$, wie wir in Proposition 3.25 gezeigt haben. Daher erhalten wir die kurze exakte Sequenz

$$\{0\} \longrightarrow Z_n(K_\bullet) \otimes_R M \longrightarrow K_n \otimes_R M \xrightarrow{d_n \otimes \mathrm{id}_M} B_{n-1}(K_\bullet) \otimes_R M \longrightarrow \{0\}.$$

Wir betrachten $Z_\bullet := (Z_n(K_\bullet))_{n \in \mathbb{Z}}$ und $B_\bullet := (B_n(K_\bullet))_{n \in \mathbb{Z}}$ als Unterkomplexe von $K_\bullet$ mit der Einschränkung von d als Differential. Dieses ist auf $Z_\bullet$ und auf $B_\bullet$ das Null-Differential. Daher ist $H_n(Z_\bullet) = Z_n(K_\bullet)$ und $H_n(B_\bullet) = B_n(K_\bullet)$. Da $Z_n(K_\bullet)$ und $B_n(K_\bullet)$ nach Voraussetzung flach sind, erhalten wir hieraus analog zu Lemma 3.82 die Gleichungen $H_n(Z_\bullet \otimes_R M) \cong H_n(Z_\bullet) \otimes_R M \cong Z_n(K_\bullet) \otimes_R M$ und

$H_n(B_\bullet \otimes_R M) \cong B_n(K_\bullet) \otimes_R M$. Die zur obigen kurzen, exakten Sequenz gehörige lange, exakte Homologiesequenz (vgl. Satz 3.6) lautet also

$$\ldots \xrightarrow{\partial_n} Z_n(K_\bullet) \otimes_R M \longrightarrow H_n(K_\bullet \otimes_R M) \longrightarrow B_{n-1}(K_\bullet) \otimes_R M \xrightarrow{\partial_{n-1}} Z_{n-1}(K_\bullet) \otimes_R M \longrightarrow \ldots, \qquad (*)$$

und der Randhomomorphismus ∂_n wird durch die Inklusion $B_n(K_\bullet) \subseteq Z_n(K_\bullet)$ induziert. Aus der Rechtsexaktheit des Tensorproduktes (Proposition 3.17) folgt, daß $B_n(K_\bullet) \otimes_R M \xrightarrow{\partial_n} Z_n(K_\bullet) \otimes_R M \longrightarrow H_n(K_\bullet) \otimes_R M \longrightarrow \{0\}$ exakt ist, d.h. $\mathrm{Coker}(\partial_n) = H_n(K_\bullet) \otimes_R M$. Durch Einschränken der Homomorphismen der Sequenz (*) erhalten wir daher die exakte Sequenz

$$\{0\} \to H_n(K_\bullet) \otimes_R M \to H_n(K_\bullet \otimes_R M) \to \mathrm{Ker}(\partial_{n-1}) \to \{0\}.$$

Wir tensorieren die exakte Sequenz $\{0\} \to B_{n-1}(K_\bullet) \to Z_{n-1}(K_\bullet) \to H_{n-1}(K_\bullet) \to \{0\}$ mit M und erhalten gemäß Satz 3.26 die lange, exakte Sequenz

$$\begin{aligned} \cdots \mathrm{Tor}_1^R(Z_{n-1}(K_\bullet), M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(K_\bullet); M) \longrightarrow B_{n-1}(K_\bullet) \otimes_R M & \\ \xrightarrow{\partial_{n-1}} Z_{n-1}(K_\bullet) \otimes_R M \longrightarrow H_{n-1}(K_\bullet) \otimes_R M \longrightarrow \{0\} & \qquad (**) \end{aligned}$$

Da $Z_{n-1}(K_\bullet)$ als flach vorausgesetzt ist, gilt $\mathrm{Tor}_1^R(Z_{n-1}(K_\bullet), M) = \{0\}$. Also ist $\mathrm{Ker}(\partial_{n-1}) = \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(K_\bullet); M)$. Somit erhalten wir wegen $H_n(K_\bullet \otimes_R M) = H_n(K_\bullet; M)$ die behauptete exakte Sequenz.

Sei nun $B_{n-1}(K_\bullet)$ projektiv. Dann spaltet die Sequenz

$$\{0\} \longrightarrow Z_n(K_\bullet) \longrightarrow K_n \xrightarrow{d_n} B_{n-1}(K_\bullet) \longrightarrow \{0\},$$

wie wir in Lemma 3.19 bewiesen haben. Sei $s : B_{n-1}(K_\bullet) \to K_n$ ein Rechts-Inverses von d_n (vgl. Lemma 3.7). Dann ist $s \otimes \mathrm{id}_M$ offenbar ein Rechtsinverses von $d_n \otimes \mathrm{id}_M$. Wir erhalten folgendes, kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(K_\bullet), M) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{s}"] & B_{n-1}(K_\bullet) \otimes_R M \arrow[r, "\partial_{n-1}"] \arrow[d, "s \otimes \mathrm{id}_M"] & Z_{n-1}(K_\bullet) \otimes_R M \arrow[d, "\mathrm{Inkl.} \otimes \mathrm{id}_M"] \\
\{0\} \arrow[r] & Z_n(K_\bullet \otimes_R M) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Proj.}"] & K_n \otimes_R M \arrow[r, "d_n \otimes \mathrm{id}_M"] & K_{n-1} \otimes_R M \\
& H_n(K_\bullet \otimes_R M). & &
\end{tikzcd}$$

Dabei resultiert die obere Zeile aus Sequenz (**), da $Z_{n-1}(K_\bullet)$ flach, also $\mathrm{Tor}_1^R(Z_{n-1}(K_\bullet), M) = \{0\}$ ist. Die mittlere Zeile ist die Definition des Differentials $d_n \otimes \mathrm{id}_M$ von $K_\bullet \otimes M$. Ferner ist $\tilde{s}$ die Einschränkung von $s \otimes \mathrm{id}_M$. Die Komposition $\mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(K_\bullet), M) \to H_n(K_\bullet \otimes_R M)$ ist ein Rechts-Inverses zu $H_n(K_\bullet \otimes_R M) \to \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(K_\bullet), M)$, denn diese Abbildung ordnet jedem $h \in H_n(K_\bullet \otimes_R M)$ das Bild eines Repräsentanten $\tilde{h} \in Z_n(K_\bullet \otimes_R M)$ unter $d_n \otimes \mathrm{id}_M$ in $\mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(K_\bullet), M)$ zu. Somit spaltet obige Sequenz. □

Satz 3.84 (topologisches universelles Koeffiziententheorem). *Sei R ein Hauptidealring, M ein R-Modul und (X, A) ein topologisches Paar. Dann existiert eine natürliche, exakte Sequenz*

$$\{0\} \to H_n(X, A; R) \otimes_R M \to H_n(X, A; M) \to \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(X, A; R), M) \to \{0\}.$$

Diese Sequenz spaltet.

Beweis. $S_n(X, A; R) = S_n(X; R)/S_n(A, R)$ ist ein freier R-Modul, wie wir im Beispiel vor Lemma 3.82 bewiesen haben. Da R ein Hauptidealring ist, sind auch die Untermoduln $B_n(X, A; R)$ und $Z_n(X, A; R)$ frei (vgl. Bemerkung auf Seite 125), also insbesondere projektiv und somit flach (vgl. Lemma 3.18). Daher liefert Satz 3.83 unsere Aussage. □

Korollar 3.85. *Sei R ein Hauptidealring, (X, A) ein topologisches Paar und M ein R-Modul. Ist M oder $H_{n-1}(X, A; R)$ torsionsfrei (z.B. falls R ein Körper ist), so gilt*

$$H_n(X, A; R) \otimes_R M \cong H_n(X, A; M).$$

Beweis. Gemäß Proposition 3.25 ist $\operatorname{Tor}_1^R(H_{n-1}(X, A; R), M) = \{0\}$. Nach Satz 3.84 folgt hieraus die Behauptung. □

Satz 3.86 (Koeffizientensequenz). *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und $(K_\bullet, d_\bullet)$ ein Komplex flacher R-Moduln. Ferner sei*

$$\{0\} \to L \to M \to N \to \{0\}$$

eine exakte Sequenz von R-Moduln. Dann existiert eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \to H_n(K_\bullet; L) \to H_n(K_\bullet; M) \to H_n(K_\bullet; N) \to H_{n-1}(K_\bullet; L) \to \ldots .$$

Beweis. Da K_n flach ist, ist

$$0 \to K_\bullet \otimes_R L \to K_\bullet \otimes_R M \to K_\bullet \otimes_R N \to 0$$

eine exakte Sequenz von Komplexen. Die Behauptung folgt aus der zugehörigen langen, exakten Homologiesequenz (vgl. Satz 3.6). □

Korollar 3.87 ((mod p)-Bocksteinsequenz). *Sei (X, A) ein topologisches Paar und $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Dann existiert eine lange, exakte Sequenz*

$$\ldots \longrightarrow H_n(X, A; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cdot p} H_n(X, A; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_n(X, A; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n-1}(X, A; \mathbb{Z}) \longrightarrow \ldots,$$

wobei $\cdot p$ der von der Multiplikation mit p induzierte Homomorphismus sei.

Beweis. Offenbar ist

$$\{0\} \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot p} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \{0\},$$

eine exakte Sequenz von $\mathbb{Z}$-Moduln. $S_n(X, A; \mathbb{Z})$ ist für jedes $n \in \mathbb{Z}$ frei, also insbesondere flach. Daher liefert Satz 3.86 die Behauptung. □

Wir verallgemeinern nun das Tensorprodukt eines Komplexes mit einem Modul auf das Tensorprodukt zweier Komplexe.

Definition:
Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und $(K_\bullet, d_\bullet^K)$, $(L_\bullet, d_\bullet^L)$ zwei Komplexe von R-Moduln. Dann definieren wir das Tensorprodukt $K_\bullet \otimes_R L_\bullet$ von $K_\bullet$ und $L_\bullet$ vermöge

$$\begin{aligned}
(K_\bullet \otimes_R L_\bullet, d_\bullet) &:= (C_\bullet, d_\bullet) \quad \text{mit} \\
C_n &:= \bigoplus_{p+q=n} K_p \otimes_R L_q \quad \text{für } n \in \mathbb{Z} \text{ und} \\
d_n(x_p \otimes y_q) &:= d_p^K(x_p) \otimes y_q + (-1)^p x_p \otimes d_q^L(y_q) \quad \text{für } x_p \in K_p,\ y_q \in K_q,\ \text{mit } n = p + q.
\end{aligned}$$

Man verifiziert leicht, daß $(K_\bullet \otimes_R L_\bullet, d_\bullet)$ tatsächlich ein Komplex ist, und daß je zwei Komplexmorphismen $f : K_\bullet \to K'_\bullet$ und $g : L_\bullet \to L'_\bullet$ einen Komplexmorphismus $f \otimes g : K_\bullet \otimes_R L_\bullet \to K'_\bullet \otimes_R L'_\bullet$ induzieren.

Lemma 3.88. *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und $(K_\bullet, d_\bullet^K)$, $(L_\bullet, d_\bullet^L)$ zwei Komplexe von R-Moduln. Dann erhalten wir für $p, q \in \mathbb{Z}$ einen natürlichen Homomorphismus*

$$\begin{aligned}
\kappa : H_p(K_\bullet) \otimes_R H_q(L_\bullet) &\to H_{p+q}(K_\bullet \otimes_R L_\bullet). \\
[x] \otimes [y] &\mapsto [x \otimes y]
\end{aligned}$$

Beweis. Für $p, q \in \mathbb{Z}$, $x \in K_p$ und $y \in K_q$ gilt $d_{p+q}(x \otimes y) = (d_p^K x) \otimes y + (-1)^p x \otimes (d_q^L y)$. Also ist das Tensorprodukt zweier Zykeln ein Zykel und das Tensorprodukt eines Zykels mit einem Rand ist ein Rand. Somit ist κ wohldefiniert. Die Natürlichkeit und die Linearität von κ sind offensichtlich. □

Satz 3.89 (algebraische Künneth-Formel). *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und $(K_\bullet, d_\bullet^K)$, $(L_\bullet, d_\bullet^L)$ zwei Komplexe von R-Moduln. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ seien $Z_n(K_\bullet) := \operatorname{Ker}(d_n^K)$ und $B_n(K_\bullet) := \operatorname{Im}(d_{n+1}^K)$ projektive R-Moduln. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{Z}$ eine natürliche, exakte, spaltende Sequenz*

$$\{0\} \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p(K_\bullet) \otimes_R H_q(L_\bullet) \xrightarrow{\kappa} H_n(K_\bullet \otimes_R L_\bullet) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \operatorname{Tor}_1^R(H_p(K_\bullet), H_q(L_\bullet)) \longrightarrow \{0\}.$$

Beweisskizze. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 3.83. $B_\bullet(K_\bullet)$ und $Z_\bullet(K_\bullet)$ werden als Komplexe mit trivialem Randhomomorphismus aufgefaßt. Dann ist

$$H_n(B_\bullet(K_\bullet) \otimes_R L_\bullet) = \bigoplus_{p+q=n} B_p(K_\bullet) \otimes_R H_q(L_\bullet),$$
$$H_n(Z_\bullet(K_\bullet) \otimes_R L_\bullet) = \bigoplus_{p+q=n} Z_p(K_\bullet) \otimes_R H_q(L_\bullet).$$

Wir tensorieren für $p, q \in \mathbb{Z}$ die exakte Sequenz $\{0\} \longrightarrow Z_p(K_\bullet) \longrightarrow K_p \xrightarrow{d_p^K} B_{p-1}(K_\bullet) \longrightarrow \{0\}$ mit L_q. Da $B_{p-1}(K_\bullet)$ projektiv, also nach Lemma 3.18 flach ist, erhalten wir hieraus gemäß Satz 3.26 und Proposition 3.25 die exakte Sequenz $\{0\} \to Z_p(K_\bullet) \otimes_R L_q \to K_p \otimes_R L_q \to B_{p-1}(K_\bullet) \otimes_R L_q \to \{0\}$. Indem wir diese Sequenzen für $p + q = n$ aufsummieren, erhalten wir die exakte Sequenz

$$0 \to Z_\bullet(K_\bullet) \otimes_R L_\bullet \to K_\bullet \otimes L_\bullet \to B_{\bullet-1}(K_\bullet) \otimes_R L_\bullet \to 0$$

von Komplexen. Deren lange, exakte Homologiesequenz induziert die oben behauptete Sequenz. Hierzu betrachtet man u.a. die projektive Auflösung

$$\{0\} \to B_n(K_\bullet) \to Z_n(K_\bullet) \to H_n(K_\bullet) \to \{0\}$$

von $H_n(K_\bullet)$, die man mit $L_\bullet$ tensoriert, um $\bigoplus \operatorname{Tor}_1^R(H_p(K_\bullet), H_q(L_\bullet))$ zu berechnen. Die Spaltung ergibt sich wie im Satz 3.83 aus der Spaltung von $B_{\bullet-1}(K_\bullet) \to K_\bullet$. Ausführliche Beweise sind beispielsweise in [StöZie] oder in [Dold] zu finden. □

Das Tensorprodukt von Komplexen ist für die Topologie interessant, da es mit dem kartesischen Produkt topologischer Räume zusammenhängt. Dies werden wir in der topologischen Künneth-Formel sehen. Hierfür benötigen wir allerdings eine Beziehung auf dem Niveau singulärer Komplexe. Diese ist Inhalt des folgenden Satzes.

Satz 3.90 (Satz von Eilenberg-Zilber). *Seien X, Y zwei topologische Räume und R ein kommutativer Ring mit Einselement. Dann gibt es natürliche, bis auf Homotopie von Komplexen eindeutig bestimmte, homotopieinverse Morphismen (***Eilenberg-Zilber-Abbildungen***)*

$$\varphi : S_\bullet(X; R) \otimes_R S_\bullet(Y; R) \to S_\bullet(X \times Y; R), \quad \psi : S_\bullet(X \times Y; R) \to S_\bullet(X; R) \otimes_R S_\bullet(Y; R),$$

die in der Dimension 0 mit der identischen Abbildung $S_0(X; R) \otimes_R S_0(Y; R) = S_0(X \times Y; R)$ übereinstimmen. Ferner sind die Homotopien $\psi \circ \varphi \simeq \operatorname{id}_{S_\bullet(X;R) \otimes_R S_\bullet(Y;R)}$ und $\varphi \circ \psi \simeq \operatorname{id}_{S_\bullet(X \times Y;R)}$ natürlich.

Beweis. Der Beweis ist technisch und umfangreich, weshalb wir ihn hier nicht angeben. Er kann beispielsweise in [StöZie] oder in [Ossa] nachgelesen werden.

Eine Möglichkeit, φ zu definieren ist beispielsweise die folgende: Seien je ein singuläres Simplex $\sigma \in S_p(X; R)$ und $\tau \in S_q(Y; R)$ gegeben. $m_{p,q} : \Delta_{p+q} \to \Delta_p \times \Delta_q$ sei irgendein Homöomorphismus. Dann definieren wir die **Produktkette** $\sigma \times \tau \in S_{p+q}(X \times Y)$ als Komposition

$$\sigma \times \tau : \Delta_{p+q} \xrightarrow{m_{p,q}} \Delta_p \times \Delta_q \xrightarrow{\sigma \times \tau} X \times Y.$$

Wir notieren $(\sigma \times \tau) \circ m_{p,q}$ als $\sigma \times \tau$. Die Abbildung φ definieren wir nun über

$$\begin{aligned}\varphi : S_p(X;R) \otimes_R S_q(Y;R) &\to S_{p+q}(X \times Y;R)\\ \sigma \otimes \tau &\mapsto \sigma \times \tau\end{aligned}$$

und lineare Fortsetzung. Wir nennen φ die **Produktketten-Abbildung**. Man kann zeigen, daß sie eine Ketten-Homotopieäquivalenz ist. Sie ist bis auf Homotopie eindeutig bestimmt. Auch für die Homotopieinverse $\psi : S_\bullet(X \times Y) \xrightarrow{\simeq} S_\bullet(X) \otimes_R S_\bullet(Y)$ kann man eine geometrische Konstruktion angeben (vgl. [StöZie], [Ossa]). □

Jede Eilenberg-Zilber-Abbildung induziert einen eindeutig bestimmten Isomorphismus

$$\varphi_* : H_n(S_\bullet(X;R) \otimes_R S_\bullet(Y;R)) \xrightarrow{\cong} H_n(X \times Y;R).$$

Die Komposition mit $\kappa : [x] \otimes [y] \mapsto [x \otimes y]$ aus Lemma 3.88 liefert das **Homologie-Kreuzprodukt**

$$\begin{aligned}\times : H_p(X;R) \otimes_R H_q(Y;R) &\to H_{p+q}(X \times Y;R)\\ [x] \otimes [y] &\mapsto \varphi_*[x \otimes y].\end{aligned}$$

Satz 3.91 (Künneth-Formel). *Sei R Hauptidealring und X, Y topologische Räume. Dann existiert für jedes $n \in \mathbb{Z}$ eine in X und Y natürliche, exakte Sequenz*

$$\{0\} \to \bigoplus_{p+q=n} H_p(X;R) \otimes_R H_q(Y;R) \xrightarrow{\times} H_n(X \times Y;R) \to \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R(H_p(X;R), H_q(Y;R)) \to \{0\}.$$

Ist $H_p(X;R)$ oder $H_p(Y;R)$ für jedes $p \in \mathbb{Z}$ ein flacher R-Modul (z.B. für R ein Körper), so ist $\times$ ein Isomorphismus.

Beweis. Die Aussage folgt aus der algebraischen Künneth-Formel und dem Satz von Eilenberg-Zilber. □

Beispiel:
Für den Torus $T^2 = S^1 \times S^1$ erhalten wir aus der Künneth-Formel

$$\begin{aligned}&H_0(T^2;\mathbb{Z}) = H_0(S^1;\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H_0(S^1,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} = \mathbb{Z},\\ &H_1(T^2;\mathbb{Z}) = (H_0(S^1;\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H_1(S^1;\mathbb{Z})) \oplus (H_1(S^1;\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H_0(S^1;\mathbb{Z})) = (\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},\\ &H_2(T^2;\mathbb{Z}) = H_1(S^1;\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H_1(S^1;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} = \mathbb{Z},\end{aligned}$$

da $H_i(S^1;\mathbb{Z})$ stets frei ist und für $i \geq 2$ stets $H_i(S^1) = \{0\}$ gilt. Dies stimmt mit unseren früheren Rechnungen überein.

Bemerkung:
Die Künneth-Formel läßt sich unter geeigneten Voraussetzungen auf die relative Homologie verallgemeinern (vgl. [Ossa]).

Kapitel 4

Kohomologie und Dualität bei Mannigfaltigkeiten

4.1 Kohomologie von Komplexen

Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und

$$(K^\bullet, d^\bullet) : \ldots \xrightarrow{d^{n-2}} K^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} K^n \xrightarrow{d^n} K^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \ldots$$

ein aufsteigender Komplex von R-Moduln. Dann heißt der R-Modul

$$H^n(K^\bullet) := \mathrm{Ker}(d^n)/\mathrm{Im}(d^{n-1})$$

die n-te Kohomologiegruppe von $K^\bullet$ (vgl. Definition auf Seite 106).

Durch $K_n := K^{-n}$ und $d_n = d^{-n} : K_n \to K_{n-1}$ wird aus dem aufsteigenden Komplex $(K^\bullet, d^\bullet)$ ein absteigender Komplex $(K_\bullet, d_\bullet)$ und selbstverständlich ist $H^{-n}(K^\bullet) = H_n(K_\bullet)$. Umgekehrt wird analog aus jedem absteigenden Komplex ein aufsteigender. Daher benötigt man eigentlich nur einen der beiden Begriffe „Kohomologie" und „Homologie". Der Grund, warum doch beide Begriffe verwendet werden, liegt darin, daß sowohl aufsteigende wie absteigende Komplexe in natürlicher Weise vorkommen: In der Algebra sind häufig die aufsteigenden Komplexe und damit die Kohomologie natürlich gegeben; in der Topologie dagegen sind die absteigenden Komplexe (z.B. $S_\bullet(X)$) und damit die Homologie natürlich gegeben. In der Topologie kommt ein wichtiger Grund hinzu, auch Kohomologiegruppen zu betrachten. Diese werden allerdings nicht durch Spiegelung der Indizes, sondern durch Dualisieren gewonnen, d.h. durch Anwenden des Funktors $\mathrm{Hom}_R(-, R)$ auf $S_\bullet(X)$. Die so definierte Kohomologie $H^*(X)$ trägt neben der R-Modul-Struktur eine Ring-Struktur. Dies gilt für die Homologie $H_*(X)$ nicht. Dies ist der Hauptgrund, in der Topologie Kohomologiegruppen zu betrachten.

Definition:
Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und

$$(K_\bullet, d_\bullet) : \ldots \longrightarrow K_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} K_n \xrightarrow{d_n} K_{n-1} \longrightarrow \ldots$$

ein absteigender Komplex von R-Moduln und M ein R-Modul. Wir definieren einen aufsteigenden Komplex $(\mathrm{Hom}_R(K_\bullet, M), d^\bullet)$ durch

$$d^n := (-1)^n d^t_{n+1} : \mathrm{Hom}_R(K_n, M) \to \mathrm{Hom}_R(K_{n+1}, M)$$

für $n \in \mathbb{Z}$, wobei $d^t_{n+1} : \mathrm{Hom}_R(K_n, M) \to \mathrm{Hom}_R(K_{n+1}, M)$, $\varphi \mapsto \varphi \circ d_{n+1}$ die zu $d_{n+1} : K_{n+1} \to K_n$ duale Abbildung sei. Wir nennen $\mathrm{Hom}_R(K_n, M)$ die ***n*-te Kokettengruppe von $K_\bullet$ mit Werten in M**. Die Koketten aus $\mathrm{Ker}(d^n)$ bezeichnen wir als ***n*-Kozykel**, die aus $\mathrm{Im}(d^{n-1})$ als ***n*-Koränder** von $K_\bullet$ mit Werten in M.

Für $n \in \mathbb{Z}$ definieren wir die **n-te Kohomologiegruppe** von $K_\bullet$ mit Koeffizienten in M als

$$\begin{aligned} H^n(K_\bullet; M) &:= H^n(\mathrm{Hom}_R(K_\bullet, M), d^\bullet) \\ &= \mathrm{Ker}(d^n)/\mathrm{Im}(d^{n-1}). \end{aligned}$$

Das Vorzeichen $(-1)^n$ im Differential wird sich später (beim Beweis der Poincaré-Dualität, Satz 4.37) als nützlich erweisen — in der älteren Literatur wird es meist weggelassen. Die Kohomologiegruppen bleiben davon offensichtlich unberührt.

Lemma 4.1 (lange, exakte Kohomologiesequenz). *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, M ein R-Modul und $K_\bullet, K'_\bullet, K''_\bullet$ Komplexe von R-Moduln. Wenn die Sequenz $0 \to \mathrm{Hom}_R(K'_\bullet, M) \to \mathrm{Hom}_R(K_\bullet, M) \to \mathrm{Hom}_R(K''_\bullet, M) \to 0$ exakt ist, so gibt es eine natürliche, lange, exakte Sequenz*

$$\begin{aligned} \cdots \to H^n(K'_\bullet; M) \to H^n(K_\bullet; M) \to H^n(K''_\bullet; M) \\ \to H^{n+1}(K'_\bullet; M) \to H^{n+1}(K_\bullet; M) \to H^{n+1}(K''_\bullet; M) \to \dots . \end{aligned}$$

Beweis. Wir definieren (absteigende) Komplexe $L_\bullet, L'_\bullet, L''_\bullet$ durch

$$L_n := \mathrm{Hom}_R(K_{-n}, M),\ L'_n := \mathrm{Hom}_R(K'_{-n}, M),\ L''_n := \mathrm{Hom}_R(K''_{-n}, M)$$

für $n \in \mathbb{Z}$ mit den gegebenen Differentialen. Dann ist $0 \to L''_\bullet \to L_\bullet \to L'_\bullet \to 0$ eine exakte Sequenz absteigender Komplexe, d.h. nach Satz 3.6 existiert die gesuchte lange, exakte Sequenz. □

Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen $H_n(K_\bullet)$ und $H^n(K_\bullet; M)$ untersuchen. Dabei gehen wir ähnlich vor wie beim universellen Koeffiziententheorem für $H_n(K_\bullet \otimes_R M)$.

Definition:
Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, $K_\bullet$ ein absteigender Komplex von R-Moduln und M ein R-Modul. Eine n-Kokette $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(K_n, M)$ läßt sich dann auf eine n-Kette $c \in K_n$ anwenden: Wir bezeichnen

$$\langle \varphi, c \rangle := \varphi(c) \in M$$

als **Skalarprodukt** oder **Kroneckerprodukt** von φ und c oder als **Auswertung** von φ auf c. Haben φ und c verschiedene Dimension ($\varphi \in \mathrm{Hom}_R(K_p, M)$, $c \in K_q$ mit $p \neq q$), so setzen wir $\langle \varphi, c \rangle := 0$.

Korollar 4.2. *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, $K_\bullet$ ein absteigender Komplex von R-Moduln und M ein R-Modul. Dann ist das Skalarprodukt bilinear, und für $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(K_n, M)$ und $c \in K_{n+1}$ gilt die* **Korand-Formel** $\langle d^n(\varphi), c \rangle = (-1)^n \cdot \langle \varphi, d_{n+1}(c) \rangle$.

Beweis. Offensichtlich. □

Das Skalarprodukt induziert somit eine R-lineare Abbildung, den **Auswertungs-Homomorphismus**,

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}_R(K_\bullet, M) \otimes_R K_\bullet \to M, \\ &\qquad \sum_{p+q=n} \varphi_p \otimes c_q \mapsto \begin{cases} \langle \varphi_{\frac{n}{2}}, c_{\frac{n}{2}} \rangle & , n \text{ gerade} \\ 0 & , n \text{ ungerade,} \end{cases} \end{aligned}$$

da $\langle \varphi_p, c_q \rangle = 0$ ist für $p \neq q$.

Lemma 4.3. *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, $K_\bullet$ ein absteigender Komplex von R-Moduln und M ein R-Modul. Dann induziert der Auswertungs-Homomorphismus einen natürlichen Homomorphismus*

$$\kappa : H^n(K_\bullet; M) \to \mathrm{Hom}_R(H_n(K_\bullet), M)$$

mit $\kappa([\varphi])([c]) = \varphi(c)$. Ist M ein injektiver R-Modul, so ist κ ein Isomorphismus.

Beweis. Die Wohldefiniertheit folgt aus der Korand-Formel, die Natürlichleit aus der offensichtlichen Natürlichkeit des Skalarprodukts. Also ist κ ein natürlicher Homomorphismus.

Ist M injektiv, so ist $\mathrm{Hom}_R(-,M)$ definitionsgemäß ein exakter Funktor, also sind die Funktoren $\mathrm{Hom}_R(-,M)$ und $H_n(-)$ vertauschbar (siehe auch Beweis von Satz 4.4). □

Satz 4.4 (algebraisches Koeffiziententheorem für Kohomologie). *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und $(K_\bullet, d_\bullet)$ ein Kettenkomplex, so daß $Z_n(K_\bullet)$ und $B_n(K_\bullet)$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$ projektiv sind. Dann existiert für jedes $n \in \mathbb{Z}$ eine natürliche, spaltende, exakte Sequenz*

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(H_{n-1}(K_\bullet), M) \longrightarrow H^n(K_\bullet; M) \xrightarrow{\kappa} \mathrm{Hom}_R(H_n(K_\bullet), M) \longrightarrow \{0\},$$

wobei $\kappa : [\varphi] \longmapsto ([c] \mapsto \varphi(c))$ vom Auswertungs-Homomorphismus induziert ist.

Beweis. Wir betrachten die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow Z_\bullet(K_\bullet) \longrightarrow K_\bullet \xrightarrow{d_\bullet} B_{\bullet-1}(K_\bullet) \longrightarrow 0$$

von Komplexen. Da $B_{\bullet-1}(K_\bullet)$ projektiv ist, liefert die Anwendung von $\mathrm{Hom}_R(-,M)$ nach Satz 3.30 und Proposition 3.29 die kurze, exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(B_{\bullet-1}(K_\bullet), M) \xrightarrow{d^*_\bullet} \mathrm{Hom}_R(K_\bullet, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(Z_\bullet(K_\bullet), M) \longrightarrow 0$$

von Koketten-Komplexen. Deren lange, exakte Kohomologiesequenz (vgl. Lemma 4.1) ist

$$\begin{aligned} \ldots \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(Z_{n-1}(K_\bullet), M) &\xrightarrow{\partial^*_{n-1}} \mathrm{Hom}_R(B_{n-1}(K_\bullet), M) \longrightarrow H^n(K_\bullet, M) \longrightarrow \\ \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(Z_n(K_\bullet), M) &\xrightarrow{\partial^*_n} \mathrm{Hom}_R(B_n(K_\bullet), M) \longrightarrow \ldots . \end{aligned}$$

Dabei ist ∂^*_n durch die Inklusion $B_n(K_\bullet) \hookrightarrow Z_n(K_\bullet)$ induziert. Hieraus erhalten wir durch Aufteilen in kurze exakte Sequenzen

$$\{0\} \to \mathrm{Coker}(\partial^*_n) \to H^{n+1}(K_\bullet, M) \to \mathrm{Ker}(\partial^*_{n+1}) \to \{0\}. \tag{*}$$

Anwendung von $\mathrm{Hom}_R(-,M)$ auf die exakte Sequenz

$$\{0\} \to B_n(K_\bullet) \to Z_n(K_\bullet) \to H_n(K_\bullet) \to \{0\}$$

liefert wegen der Projektivität von $Z_n(K_\bullet)$

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(\partial^*_n) &\cong \mathrm{Hom}_R(H_n(K_\bullet), M), \\ \mathrm{Coker}(\partial^*_n) &\cong \mathrm{Ext}^1_R(H_n(K_\bullet), M) \end{aligned}$$

und damit die behauptete, exakte Sequenz.

Wir zeigen nun, daß die Sequenz (*) spaltet: Hierzu betrachten wir zunächst die exakte Sequenz

$$\{0\} \longrightarrow Z_n(K_\bullet) \longrightarrow K_n \xrightarrow{d_n} B_{n-1}(K_\bullet) \longrightarrow \{0\}.$$

Diese spaltet, da $B_{n-1}(K_\bullet)$ projektiv ist (vgl. Lemma 3.19). Daher existiert gemäß Lemma 3.7 ein Linksinverses $\sigma : K_n \to Z_n(K_\bullet)$ der Inklusion $Z_n(K_\bullet) \hookrightarrow K_n$.

σ induziert einen Homomorphismus

$$\sigma^* : \mathrm{Hom}_R(Z_n(K_\bullet)/B_n(K_\bullet), M) \to \mathrm{Hom}_R(K_n/B_n(K_\bullet), M).$$

Andererseits kann man mit obigem leicht nachvollziehen, daß

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R(K_n/B_n(K_\bullet), M) &= \mathrm{Ker}\left(\mathrm{Hom}(K_n, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(B_n, M) \xrightarrow{d^*_{n+1}} \mathrm{Hom}_R(K_{n+1}, M)\right) \\ &= Z^{n+1}(\mathrm{Hom}_R(K_\bullet, M)) \end{aligned}$$

gilt. Somit induziert σ_* die gesuchte Spaltung von (*). □

4.2 Singuläre Kohomologiegruppen

Definition:
Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, (X, A) ein topologisches Paar und M ein R-Modul.

1. Unter der Gruppe der **n-dimensionalen, singulären Koketten von (X, A) mit Werten in M** verstehen wir den R-Modul

$$S^n(X, A; M) := \mathrm{Hom}_R(S_n(X, A; R), M)$$

2. Den **Korand-Operator** $d = d^n : S^n(X, A; M) \to S^{n+1}(X, A; M)$ definieren wir über $(d^n(\varphi))(\sigma) = (-1)^n \varphi(d_{n+1}(\sigma))$ für alle $\varphi \in S^n(X, A; M)$ und alle $\sigma \in S_{n+1}(X, A; R)$ und lineare Fortsetzung. Dann gilt offenbar $d \circ d = 0$, also ist $(S^\bullet(X, A; M), d^\bullet)$ ein Komplex von R-Moduln.

3. Wir nennen $\varphi \in S^n(X, A; M)$ genau dann einen **n-Kozykel**, falls $d^n(\varphi) = 0$ ist, und einen **n-Korand**, falls $\varphi \in \mathrm{Im}(d^{n-1})$ ist. $Z^n(X, A; M)$ bezeichne die **Gruppe der n-Kozykel**, $B^n(X, A; M)$ die **Gruppe der n-Koränder**, und

$$H^n(X, A; M) := Z^n(X, A; M)/B^n(X, A; M) = H^n(S^\bullet(X, A; M), d^\bullet)$$

heißt die **n-te singuläre Kohomologiegruppe von (X, A) mit Werten in M**.

Bemerkung:
Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, (X, A) ein topologisches Paar und M ein R-Modul. Dann erkennt man leicht die Isomorphie

$$S^n(X, A; M) \cong \{\varphi \in \mathrm{Hom}_R(S_n(X, R), M) \mid \varphi|_{S_n(A;R)} = 0\}.$$

Da $S_n(X, A; R)$ ein freier R-Modul über der Menge $\mathcal{S}_n(X) \setminus \mathcal{S}_n(A)$ der singulären n-Simplizes $\sigma : \Delta_n \to X$ mit $\mathrm{Im}(\sigma) \not\subseteq A$ ist, können wir $S^n(X; M)$ und $S^n(X, A; M)$ auch als die Menge aller Funktionen

$$\varphi : \mathcal{S}_n(X) \to M \text{ bzw.}$$
$$\varphi : \mathcal{S}_n(X) \setminus \mathcal{S}_n(A) \to M$$

auffassen. Die R-Moduln $S^n(X; M)$ und $S^n(X, A; M)$ sind somit isomorph zur direkten Summe von $\#\mathcal{S}_n(X)$ bzw. $\#(\mathcal{S}_n(X) \setminus \mathcal{S}_n(A))$ Kopien von M.

Bemerkung:
Ist M freier (projektiver, flacher) R-Modul (z.B. $M = R$), so ist $S^n(X, A; M)$ ebenfalls ein freier (projektiver, flacher) R-Modul.

Aufgrund obiger Argumente können wir $S^n(X, A; M)$ auch als $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_n(X, A; \mathbb{Z}), M)$ definieren.

Definition:
Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, M ein R-Modul und $f : (X, A) \to (Y, B)$ eine stetige Abbildung topologischer Paare. $f_* : S_\bullet(X, A; R) \to S_\bullet(Y, B; R)$ sei die induzierte Abbildung der Ketten-Komplexe. Wir definieren die **zu f_* duale Abbildung f^*** durch

$$\begin{aligned} f^* := \mathrm{Hom}_R(f_*, M) : S^\bullet(Y, B; M) &\to S^\bullet(X, A; M) \\ \varphi &\mapsto \varphi \circ f_*. \end{aligned}$$

f^* ist offenbar ein Morphismus von Koketten-Komplexen, induziert also einen Homomorphismus der Kohomologiegruppen

$$f^* := H^n(f, M) : H^n(Y, B; M) \to H^n(X, A; M).$$

Korollar 4.5. *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und M ein R-Modul. Dann ist $H^n : \mathrm{Top}^2 \to \mathrm{Mod}_R$ ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der Raumpaare in die Kategorie der R-Moduln.*

Beweis. Dies ergibt sich direkt aus obiger Definition der dualen Abbildung. □

In Abschnitt 4.3 werden wir zeigen, daß H^n sogar ein Funktor $\mathrm{Homtop}^2 \to \mathrm{Mod}_R$ ist.

Aus dem algebraischen Koeffiziententheorem erhalten wir sofort:

Satz 4.6 (topologisches Koeffiziententheorem für Kohomologie). *Sei R ein Hauptidealring, M ein R-Modul und (X, A) ein topologisches Paar. Dann existiert für jedes $n \in \mathbb{Z}$ eine natürliche, spaltende, exakte Sequenz*

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(H_{n-1}(X, A; R), M) \longrightarrow H^n(X, A; M) \xrightarrow{\kappa} \mathrm{Hom}_R(H_n(X, A; R), M) \longrightarrow \{0\},$$

wobei $\kappa : [\varphi] \longmapsto ([c] \mapsto \varphi(c))$ vom Auswertungs-Homomorphismus induziert ist.

Beweis. Da R ein Hauptidealring und $S_n(X, A; R)$ frei ist, sind auch $B_n(S_\bullet(X, A; R))$ und $Z_n(S_\bullet(X, A; R))$ frei, also insbesondere projektiv. Daher folgt die Behauptung aus Satz 4.4. □

Korollar 4.7. *Sei R ein Hauptidealring, M ein R-Modul und (X, A) ein topologisches Paar. Ist $H_{n-1}(X, A; R)$ frei (z.B. falls R ein Körper ist) oder M injektiv, so induziert der Auswertungs-Homomorphismus den Isomorphismus*

$$\begin{aligned} \kappa : H^n(X, A; M) &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_R(H_n(X, A; R), M), \\ [\varphi] &\longmapsto ([c] \mapsto \varphi(c)) \,. \end{aligned}$$

Beweis. Der R-Modul $H_{n-1}(X, A; R)$ ist projektiv, falls er frei ist (vgl. Lemma 3.18). Daher können wir in beiden Fällen Proposition 3.29 anwenden, d.h. $Ext^1_R(H_{n-1}(X, A; R), M) = \{0\}$. Nach Satz 4.6 folgt hieraus die Behauptung. □

4.3 Eilenberg-Steenrod-Axiome für Kohomologie

Wir formulieren jetzt die wesentlichen Eigenschaften der singulären Kohomologietheorie.

Definition:
Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Eine **Kohomologietheorie** mit Koeffizienten in R enthält für jedes $n \in \mathbb{Z}$:

1. Einen kontravarianten Funktor

$$\begin{aligned} H^n : \mathrm{Homtop}^2 &\longrightarrow \mathrm{Mod}_R \\ (X, A) &\longmapsto H^n(X, A), \\ (f : (X, A) \to (Y, B)) &\longmapsto (f^* : H^n(Y, B) \to H^n(X, A)) \end{aligned}$$

   von der Kategorie der Homotopieklassen topologischer Paare in die Kategorie der R-Moduln. Ist $A = \emptyset$ so schreiben wir $H^n(X) := H^n(X, \emptyset)$.
2. Eine natürliche Transformation

$$\partial := \partial^n : H^n(A) \to H^{n+1}(X, A).$$

Hierbei muß gelten:

1. Das **Exaktheitsaxiom** (die lange, exakte Kohomologiesequenz): Sei (X, A) ein topologisches Paar und $i : A \subseteq X$, $j : (X, \emptyset) \subseteq (X, A)$ die Inklusionen. Dann ist die folgende Sequenz exakt:

$$\ldots \xrightarrow{i^*} H^{n-1}(A) \xrightarrow{\partial^{n-1}} H^n(X, A) \xrightarrow{j^*} H^n(X) \xrightarrow{i^*} H^n(A) \xrightarrow{\partial^n} \ldots .$$

2. Das **Ausschneidungsaxiom**: Sei (X, A) ein topologisches Paar und $U \subseteq X$ offen, so daß $\bar{U} \subseteq A^\circ$ ist. Ferner sei $i : (X \setminus U, A \setminus U) \subseteq (X, A)$ die Inklusion. Dann ist

$$i^* : H^n(X, A) \xrightarrow{\cong} H^n(X \setminus U, A \setminus U)$$

   für jedes $n \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus.

3. Das **Dimensionsaxiom**: Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq 0$ gilt

$$H^n(\{x_0\}) = \{0\}.$$

Ausführlich und ohne Funktoren bedeutet dies:

Eine Kohomologietheorie mit Koeffizienten in einem kommutativen Ring R mit Einselement besteht aus:

1. Einem R-Modul $H^n(X, A)$ für jedes topologische Paar (X, A) und jedes $n \in \mathbb{Z}$. Notation: $H^n(X) := H^n(X, \emptyset)$.

2. Einem R-Modul-Homomorphismus

$$H^n(f) := f^* : H^n(Y, B) \longrightarrow H^n(X, A)$$

für jede stetige Abbildung $f : (X, A) \to (Y, B)$ topologischer Paare und jedes $n \in \mathbb{Z}$.

3. Einem R-Modul-Homomorphismus

$$\partial := \partial^n : H^n(A) \longrightarrow H^{n+1}(X, A)$$

für jedes Paar (X, A) und jedes $n \in \mathbb{Z}$, den wir als **Randhomomorphismus** bezeichnen.

Dabei müssen die Eilenberg-Steenrod-Axiome für die Kohomologietheorie gelten:

Definition:
Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Für jedes topologische Paar (X, A) und jedes $n \in \mathbb{Z}$ sei ein R-Modul $H^n(X, A)$ und ein R-Modulhomomorphismus $\partial := \partial^n : H^n(A) := H^n(A, \emptyset) \to H^{n+1}(X, A)$ gegeben. Ferner sei für jede stetige Abbildung $f : (X, A) \to (Y, B)$ und jedes $n \in \mathbb{Z}$ ein R-Modulhomomorphismus $f^* : H^n(Y, B) \to H^n(X, A)$ gegeben.

Dann bezeichnen wir die folgenden Axiome als **Eilenberg-Steenrod-Axiome der Kohomologietheorie**:

1. Das **Identitätsaxiom**: Für jedes topologische Paar (X, A) und jedes $n \in \mathbb{Z}$ ist $(\mathrm{id}_{(X,A)})^* = \mathrm{id}_{H^n(X,A)}$.
2. Das **Kompositionsaxiom**: $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ für alle stetigen Abbildungen $(X, A) \xrightarrow{f} (Y, B) \xrightarrow{g} (Z, C)$.
3. Das **Kommutativitätsaxiom**: $f^* \circ \partial = \partial \circ f^*$.
4. Das Exaktheitsaxiom.
5. Das **Homotopieaxiom**: Sind $f \simeq g : (X, A) \to (Y, B)$ zwei homotope, stetige Abbildungen topologischer Paare, so gilt für $n \in \mathbb{Z}$ stets:

$$f^* = g^* : H^n(Y, B) \to H^n(X, A).$$

6. Das Ausschneidungsaxiom.
7. Das Dimensionsaxiom.

Bemerkung:
Offenbar ist eine Theorie genau dann eine Kohomologietheorie, wenn sie die Eilenberg-Steenrod-Axiome der Kohomologie erfüllt. Eine Theorie, die bis auf das Dimensionsaxiom alle Eilenberg-Steenrod-Axiome erfüllt, heißt **verallgemeinerte Kohomologietheorie**.

Satz 4.8. *Sei R ein Hauptidealring und M ein R-Modul. Dann ist die singuläre Kohomologie $H^\bullet(-; M)$ eine Kohomologietheorie.*

Beweis. Wenn wir das Homotopieaxiom gezeigt haben, wissen wir, daß $H^n(X, A; M)$ ein (kontravarianter) Funktor $\mathrm{Homtop}^2 \to \mathrm{Mod}_R$ ist. Außerdem haben wir, da R ein Hauptidealring ist, das universelle Koeffiziententheorem (Satz 4.6). Daraus und aus den entsprechenden Sätzen der Homologietheorie werden wir den Beweis ableiten.

- Zum Homotopieaxiom: Seien $f \simeq g : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ homotope Abbildungen. Dann sind die induzierten Abbildungen $S_\bullet(f) \simeq S_\bullet(g) : C_\bullet(X,A) \to C_\bullet(Y,B)$ der singulären Komplexe kettenhomotop, wie wir in Proposition 3.38 gesehen haben. Dies bleibt bei Anwendung von $\mathrm{Hom}_R(-,M)$ offenbar erhalten. Gemäß Lemma 3.3 sind daher die induzierten Abbildungen $f^* = g^*$ gleich.

- Zum Exaktheitsaxiom: Seien (X,A) ein topologisches Paar und $i : A \subseteq X$, $j : (X,\emptyset) \subseteq (X,A)$ die Inklusionen. Da die $S_\bullet(X,A;R)$ Komplexe freier R-Moduln sind und die exakte Sequenz

  $$0 \longrightarrow S_\bullet(A;R) \xrightarrow{i} S_\bullet(X;R) \xrightarrow{j} S_\bullet(X,A;R) \longrightarrow 0$$

  von Kettenkomplexen natürlich ist, erhalten wir eine natürliche, exakte Sequenz

  $$0 \longrightarrow S^\bullet(X,A;M) \xrightarrow{j^t} S^\bullet(X;M) \xrightarrow{i^t} S^\bullet(A;M) \longrightarrow 0$$

  von Kokettenkomplexen. Hieraus erhalten wir nach Lemma 4.1 die natürliche, lange, exakte Kohomologiesequenz:

  $$\cdots \xrightarrow{\partial^{n-1}} H^n(X,A;M) \xrightarrow{j^*} H^n(X,M) \xrightarrow{i^*} H^n(A;M) \xrightarrow{\partial^n} H^{n+1}(X,A;M) \xrightarrow{j^*} \cdots$$

  Somit haben wir sowohl die Existenz der natürlichen Transformation ∂ als auch das Exaktheitsaxiom bewiesen.

- Zum Ausschneidungsaxiom: Der Ausschneidungssatz der Homologie (Satz 3.44), das universelle Koeffiziententheorem (Satz 4.6) und das Fünferlemma (Lemma 3.5) liefern das Ausschneidungsaxiom, da sowohl $\mathrm{Hom}_R(-,M)$ als auch $\mathrm{Ext}^1_R(-,M)$ Funktoren sind.

- Zum Dimensionsaxiom: Da $H_0(\{pt\};R) = R$ ein freier R-Modul und die anderen $H_q(\{pt\};R) = \{0\}$ sind, folgt die Behauptung aus Korollar 4.7.

□

4.4 Zelluläre und simpliziale Kohomologie

Nach dem universellen Koeffiziententheorem erhält man aus den natürlichen Isomorphismen zwischen singulärer, zellulärer und simplizialer Homologie entsprechende Isomorphismen für die Kohomologie. Im zellulären Fall sieht dies folgendermaßen aus:

Satz 4.9. *Sei R ein Hauptidealring, M ein R-Modul, $(X,\mathcal{E})$ ein CW-Komplex und $q \in \mathbb{Z}$ beliebig. Dann existiert ein natürlicher Isomorphismus*

$$H^q(C_\bullet(X,\mathcal{E};R);M) \cong H^q(X;M).$$

Beweis. Da für $n \in \mathbb{Z}$ stets $H_{n-1}(X^n,X^{n-1};R) = \{0\}$ aus Satz 3.60 hervorgeht, erhalten wir aus dem Korollar 4.7, daß der Auswertungshomomorphismus $\kappa : H^n(X^n,X^{n-1};M) \to \mathrm{Hom}_R(C_n(X,\mathcal{E};R),M)$ ein Isomorphismus ist.

Das Differential des zellulären Kettenkomplexes $C_\bullet(X,\mathcal{E};R)$ hatten wir als Komposition

$$d_n : C_n(X,\mathcal{E};R) = H_n(X^n,X^{n-1};R) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(X^{n-1};R) \xrightarrow{j_*} H_{n-1}(X^{n-1},X^{n-2};R) = C_{n-1}(X,\mathcal{E};R)$$

definiert. Wir wenden hierauf den Funktor $\mathrm{Hom}_R(-,M)$ an und erhalten

$$d_n^t : \mathrm{Hom}_R(C_n(X,\mathcal{E};R),M) \xleftarrow{\partial_n^t} \mathrm{Hom}_R(H_{n-1}(X^{n-1};R),M) \xleftarrow{j^t} \mathrm{Hom}_R(C_{n-1}(X,\mathcal{E};R),M).$$

Die Anwendung von κ liefert folgendes kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^n(X^n,X^{n-1};M) & \xrightarrow{\delta^n} & H^{n+1}(X^{n+1},X^n;M) \\ \kappa \big\downarrow \cong & \circlearrowleft & \cong \big\downarrow \kappa \\ \mathrm{Hom}_R(C_n(X,\mathcal{E};R),M) & \xrightarrow{d_{n+1}^t} & \mathrm{Hom}_R(C_{n+1}(X,\mathcal{E};R),M). \end{array}$$

Daher ist die zelluläre Kohomologie von X natürlich isomorph zur Kohomologie des Komplexes $(\{H^n(X^n, X^{n-1}; M)\}_n, \delta^n)$. Analog zum Beweis von Satz 3.65 erhält man hieraus die Behauptung. $\square$

Korollar 4.10. *Sei K ein simplizialer Komplex und $|K|$ dessen geometrische Realisierung. Dann erhalten wir für $q \in \mathbb{Z}$ einen natürlichen Isomorphismus*

$$H^q(|K|; M) \cong H^q(C_\bullet(K); M).$$

Beweis. Übung. $\square$

Beispiel:
Wir berechnen die Kohomologie des reellen, projektiven Raumes $\mathbb{RP}^n$: Auf Seite 160 haben wir gesehen, daß der zelluläre Komplex von $\mathbb{RP}^n$ mit Koeffizienten in einem kommutativen Ring R mit Einselement die Form

$$\{0\} \longrightarrow \underset{(n)}{R} \longrightarrow \underset{\cdots}{} \xrightarrow{0} \underset{(2k)}{R} \xrightarrow{\cdot 2\lambda} \underset{\cdots}{} \xrightarrow{0} \underset{(2)}{R} \xrightarrow{\cdot 2\lambda} \underset{(1)}{R} \xrightarrow{0} \underset{(0)}{R} \longrightarrow \{0\}$$

mit einer Einheit $\lambda \in R$ hat. Daher hat dessen dualer Komplex die Form

$$\{0\} \longleftarrow \underset{(n)}{R} \longleftarrow \underset{\cdots}{} \xleftarrow{0} \underset{(2k)}{R} \xleftarrow{\cdot 2\lambda} \underset{\cdots}{} \xleftarrow{0} \underset{(2)}{R} \xleftarrow{\cdot 2\lambda} \underset{(1)}{R} \xleftarrow{0} \underset{(0)}{R} \longleftarrow \{0\}$$

und wir erhalten:

$$H^q(\mathbb{RP}^n; R) \cong \begin{cases} R & , q = 0 \\ R & , q = n \equiv 1 \mod 2 \\ R/2R & , 1 \leq q \leq n, q \equiv 0 \mod 2 \\ \{0\} & , \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel:
Aus obigem Beispiel erhalten wir

$$H^q(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & , 0 \leq q \leq n \\ \{0\} & , \text{sonst.} \end{cases}$$

4.5 Cup- und Cap-Produkt

Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Wir wollen auf der totalen Kohomologie $H^*(X; R)$ eine Multiplikation erklären, so daß $H^*(X; R)$ ein Ring wird. Auf der totalen Homologie existiert eine solche Multiplikation im allgemeinen nicht. Dies ist der Hauptgrund, weshalb man in der algebraischen Topologie nicht allein mit der Homologietheorie auskommt.

4.5.1 Das Cup-Produkt

Wir definieren nun das Cup-Produkt auf $S^*(X; R) = \bigoplus_{q \in \mathbb{N}} S^q(X; R)$:

Definition:
Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und X ein topologischer Raum.

1. Für $p, q \in \mathbb{N}$ sei Δ_{p+q} das Standard $(p+q)$-Simplex. Die **Inklusion der p-dimensionalen Vorderseite von Δ_{p+q}** sei gegeben durch

   $$\lambda_p : \Delta_p \to \Delta_{p+q}, \quad (\lambda_0, \ldots, \lambda_p) \mapsto (\lambda_0, \ldots, \lambda_p, 0, \ldots, 0).$$

   Die **Inklusion der q-dimensionalen Rückseite von Δ_{p+q}** sei die Abbildung

   $$\rho_q : \Delta_q \to \Delta_{p+q}, \quad (\lambda_0, \ldots, \lambda_q) \mapsto (0, \ldots, 0, \lambda_0, \ldots, \lambda_q).$$

2. Für $p, q \in \mathbb{N}$ seien $c \in S^p(X;R)$ und $d \in S^q(X;R)$ singuläre Koketten. Wir definieren die $(p+q)$-dimensionale, singuläre Kokette $c \cup d \in S^{p+q}(X;R)$ folgendermaßen: Für ein singuläres $(p+q)$-Simplex $\sigma : \Delta_{p+q} \to X$ sei

$$(c \cup d)(\sigma) := \langle c \cup d, \sigma \rangle := \langle c, \sigma \circ \lambda_p \rangle \cdot \langle d, \sigma \circ \rho_q \rangle.$$

Wir werten also die p-dimensionale, singuläre Kokette c auf der p-dimensionalen Vorderseite von σ und die q-dimensionale Kokette d auf der q-dimensionalen Rückseite von σ aus und bilden das Produkt in R. Für singuläre $(p+q)$-Ketten $s \in S_{p+q}(X;R)$ definieren wir $(c \cup d)(s)$ durch lineare Fortsetzung. Damit ist $c \cup d \in \mathrm{Hom}_R(S_{p+q}(X;R), R) = S^{p+q}(X;R)$.

3. Seien $c, d \in S^*(X;R)$ beliebig, d.h. es gebe $k, l \in \mathbb{N}$ mit $c = \sum_{p=0}^k c_p$ und $d = \sum_{q=0}^l d_q$, wobei für $p = 0, \ldots, k$ stets $c_p \in S^p(X;R)$ und für $q = 0, \ldots l$ stets $d_q \in S^q(X;R)$ sei. Dann setzen wir

$$c \cup d := \sum_{p=0}^{k} \sum_{q=0}^{l} c_p \cup d_q \in S^*(X;R).$$

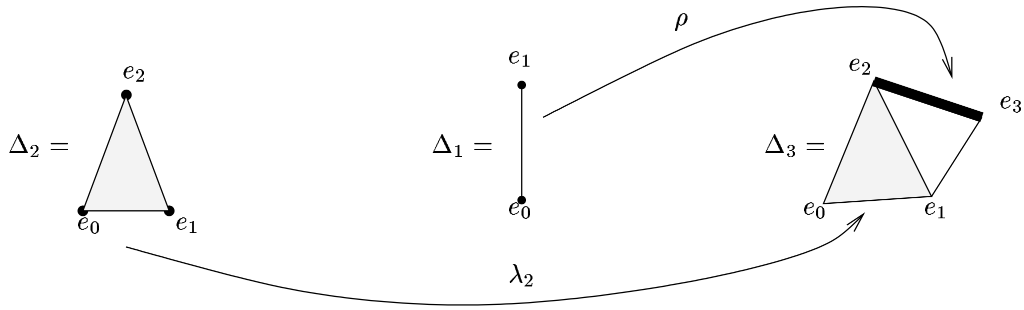
Somit haben wir eine Operation

$$\begin{aligned} \cup : S^*(X;R) \times S^*(X;R) &\to S^*(X;R) \\ (c, d) &\mapsto c \cup d \end{aligned}$$

definiert, die wir das **Cup-Produkt** auf $S^*(X;R)$ nennen. Gemäß Lemma 4.11 induziert das Cup-Produkt ein Produkt auf $H^*(X;R)$, das wir ebenfalls als „Cup-Produkt" bezeichnen.

Die Bezeichnung „Cup-Produkt" ist nicht besonders tiefsinnig — das englische Wort „cup" bedeutet „Tasse", und das Symbol $\cup$ ähnelt einer Tasse — aber weltweit üblich.

Beispiel:
Die Inklusionen der 2-dimensionalen Vorder- und der 1-dimensionalen Rückseite in Δ_3 sind in folgender Abbildung dargestellt:



Lemma 4.11. *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und X ein topologischer Raum. Dann gilt:*

1. *$(S^*(X;R), +, \cup)$ ist ein Ring mit Einselement $1 \in S^0(X;R)$, das durch $\langle 1, \sigma \rangle = 1$ für alle $\sigma \in S_0(X;R)$ definiert ist. Allerdings ist dieser Ring im allgemeinen nicht kommutativ.*

2. *Seien $a \in S^*(X;R)$ und $b \in S^q(X;R)$. Dann gilt für das Differential d in $S^*(X;R)$ die Gleichung*

$$d(a \cup b) = (-1)^q \cdot (da) \cup b + a \cup (db).$$

3. *$Z^*(X;R) := \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} Z^p(X;R)$ ist ein Unterring von $S^*(X;R)$ und $B^*(X;R) := \bigoplus_{q \in \mathbb{N}} B^q(X;R)$ ist sowohl ein rechts- als auch ein linksseitiges Ideal von $Z^*(X;R)$.*

   Daher ist $H^*(X;R) := \bigoplus_{q \in \mathbb{N}} H^q(X;R)$ eine graduierte R-Algebra[1] *mit Einselement $[1]$, was insbesondere $a \cup b \in H^{p+q}(X;R)$ für alle $p, q \in \mathbb{N}$, $a \in H^p(X;R)$ und $b \in H^q(X;R)$ zur Folge hat.*

[1] Sei R ein Ring und A ein R-Modul, der gleichzeitig ein Ring ist. Dann nennen wir A eine **R-Algebra**, wenn für $a, b \in A$ und $r, s \in R$ stets $(ra)(sb) = (rs)(ab)$ gilt. Gibt es eine Zerlegung $A = \bigoplus_{q \in \mathbb{N}} A_q$ mit R-Untermoduln A_i, so daß für $p, q \in \mathbb{N}$ stets $A_p \cdot A_q \subseteq A_{p+q}$ ist, nennen wir A eine **graduierte** R-Algebra.

4. *Ist $f : X \to Y$ stetig, so sind $f^* : S^*(Y;R) \to S^*(X;R)$ und $f^* : H^*(Y;R) \to H^*(X;R)$ zwei R-Algebra-Homomorphismen*[2].

Beweis. Die erste Teilbehauptung folgt sofort aus der Definition.

Die zweite Teilbehauptung erhält man, indem man für ein Simplex $\sigma \in S_{p+q+1}$ die auftretenden Ausdrücke explizit ausrechnet. Da die Differentiale linear sind, ergibt sich hieraus die Gleichheit der Koketten.

Aus den ersten beiden Teilaussagen erhält man sofort, daß $Z^*(X;R)$ ein Unterring von $S^*(X;R)$ und $B^*(X;R)$ ein Ideal in $Z^*(X;R)$ ist. Hieraus folgt die dritte Teilbehauptung.

Daß jede der beiden Abbildungen f^* ein R-Modulhomomorphismus ist, ist klar. Daß f^* auch ein Ringhomomorphismus ist, ergibt sich aus folgender Rechnung für $a \in S^p(X;R)$, $b \in S^q(X;R)$ und $\sigma : \Delta_{p+q} \to X$ stetig:

$$\begin{aligned}\langle f^*(a \cup b), \sigma\rangle &= \langle a \cup b, f_*(\sigma)\rangle = \langle a, f_*(\sigma) \circ \lambda_p\rangle\langle b, f_*(\sigma) \circ \rho_q\rangle \\ &= \langle a, f_*(\sigma \circ \lambda_p)\rangle\langle b, f_*(\sigma \circ \rho_q)\rangle = \langle f^*(a), \sigma \circ \lambda_p\rangle\langle f^*(b), \sigma \circ \rho_q\rangle \\ &= \langle f^*(a) \cup f^*(b), \sigma\rangle.\end{aligned}$$

□

Satz 4.12. *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und X ein topologischer Raum. Dann ist $(H^*(X;R), +, \cup)$ ein antikommutativer Ring, d.h. für $[a] \in H^p(X;R)$ und $[b] \in H^q(X;R)$ gilt*

$$[a] \cup [b] = (-1)^{pq}[b] \cup [a].$$

Bemerkung:
Diese Aussage gilt nicht für $(S^*(X;R), +, \cup)$. Daher ist der Beweis auch nicht einfach.

Beispiel $X = \Delta_1 = \overset{e_0}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{e_1}{\bullet}$:
Seien $a \in S^0(\Delta_1;R)$ und $b \in S^1(\Delta_1;R)$ derart gegeben, daß für 0-dimensionale Simplizes $\sigma \in S_0(\Delta_1;R)$ stets $\langle a, \sigma\rangle = \begin{cases} 1 & ,\sigma = e_0 \\ 0 & ,\sigma \neq e_0 \end{cases}$ und für 1-Simplizes $\sigma \in S_1(\Delta_1;R)$ stets $\langle b, \sigma\rangle = \begin{cases} 1 & ,\sigma = \mathrm{id}_{\Delta_1} \\ 0 & ,\sigma \neq \mathrm{id}_{\Delta_1} \end{cases}$ gilt. Dann gilt

$$\begin{aligned}\langle a \cup b, \mathrm{id}_{\Delta_1}\rangle &= \langle a, \mathrm{id}_{\Delta_1} \circ \lambda_0\rangle \cdot \langle b, \mathrm{id}_{\Delta_1} \circ \rho_1\rangle = \langle a, e_0\rangle \cdot \langle b, \mathrm{id}_{\Delta_1}\rangle = 1 \cdot 1 = 1 \\ \langle b \cup a, \mathrm{id}_{\Delta_1}\rangle &= \langle b, \mathrm{id}_{\Delta_1} \circ \lambda_1\rangle \cdot \langle a, \mathrm{id}_{\Delta_1} \circ \rho_0\rangle = \langle b, \mathrm{id}_{\Delta_1}\rangle \cdot \langle a, e_1\rangle = 1 \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Beweis-Idee zu Satz 4.12. (Vgl. [Greenb, pp. 166ff]). Modulo Vertauschung der Eckpunkte der Simplizes gilt die Antikommutativität auch für $S^*(X;R)$. Um diese Behauptung klarer formulieren zu können, definieren wir eine Abbildung $\theta : S_*(X;R) \to S_*(X;R)$. Hierzu sei zunächst für jedes $p \in \mathbb{N}$ die Vertauschung der Eckpunkte des p-dimensionalen Standardsimplex Δ_p gegeben durch

$$\theta'_p : \Delta_p \to \Delta_p, \quad (\lambda_0, \ldots, \lambda_p) \mapsto (\lambda_p, \lambda_{p-1}, \ldots, \lambda_0).$$

Für ein singuläres p-Simplex $\sigma : \Delta_p \to X$ setzen wir nun

$$\theta(\sigma) := (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \sigma \circ \theta'_p.$$

Durch lineare Fortsetzung erhalten wir die Abbildung $\theta : S_*(X;R) \to S_*(X;R)$. Direktes Nachrechnen liefert die oben behauptete Antikommutativität von $S^*(X;R)$ modulo Vertauschung der Eckpunkte der Simplizes:

1. $d \circ \theta = \theta \circ d$;
2. Für $\sigma \in S_{p+q}(X;R)$, $a \in S^p(X;R)$ und $b \in S^q(X;R)$ gilt stets
$$\langle a \cup b, \sigma\rangle = (-1)^{p \cdot q}\langle b \cup a, \theta(\sigma)\rangle.$$

Die duale Abbildung $\theta^t : S^*(X;R) \to S^*(X;R)$, die bekanntlich durch $\langle \theta^t c, z\rangle = \langle c, \theta z\rangle$ definiert ist, ist homotop zur Identität, induziert also die Identität auf $H^*(X;R)$. Hieraus folgt die Behauptung. □

[2] Seien R ein Ring, A, B zwei R-Algebren und $f : A \to B$ eine R-lineare Abbildung. Wir nennen f genau dann einen ***R*-Algebra-Homomorphismus**, wenn f die Multiplikationen der Ringe A, B respektiert, d.h. wenn für $a, b \in A$ stets $f(ab) = f(a)f(b)$ ist.

4.5.2 Das Cap-Produkt

Definition:
Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und X ein topologischer Raum. Für eine singuläre Kokette $a \in S^p(X;R)$ und ein singuläres Simplex $\sigma \in S_{p+q}(X;R)$ definieren wir

$$a \cap \sigma := \langle a, \sigma \circ \lambda_p \rangle \cdot (\sigma \circ \rho_q) \in S_q(X;R).$$

Lineare Fortsetzung liefert eine (lineare) Abbildung $\cap : S^*(X;R) \times S_*(X;R) \to S_*(X;R)$, die wir als **Cap-Produkt** von $S^*(X;R)$ und $S_*(X;R)$ bezeichnen. Gemäß Lemma 4.14 induziert das Cap-Produkt eine Skalarmultiplikation $\cap : H^*(X;R) \times H_*(X;R) \to H_*(X;R)$, die wir ebenfalls als Cap-Produkt bezeichnen.

Die Bezeichnung „Cap-Produkt" ist nicht besonders tiefsinnig — das englische Wort „cap" bedeutet „Mütze", und das Symbol $\cap$ ähnelt einer Mütze — aber weltweit üblich.

Bemerkung:
Für $q \in \mathbb{N}$ können wir $S_q(X;R)$ mit $\mathrm{Hom}_R(S^q(X;R), R)$ identifizieren, indem wir jedem singulären Simplex $\sigma \in S_q(X;R)$ die Abbildung $S^q(X;R) \ni b \mapsto \langle b, \sigma \rangle$ zuordnen[3].

Lemma 4.13. *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, X ein topologischer Raum, $a \in S^p(X;R)$ und $\sigma \in S_{p+q}(X;R)$. Dann können wir $a \cap \sigma$ als Homomorphismus $a \cap \sigma \in \mathrm{Hom}_R(S^q(X;R), R)$ auffassen, für den folgendes gilt: Für jedes $b \in S^q(X;R)$ ist*

$$(a \cap \sigma)(b) := \langle b, a \cap \sigma \rangle = \langle a \cup b, \sigma \rangle.$$

Beweis. Wir gehen davon aus, daß σ ein singuläres Simplex ist. Dann gilt definitionsgemäß

$$\langle b, a \cap \sigma \rangle = \langle b, \langle a, \sigma \circ \lambda_p \rangle \cdot (\sigma \circ \rho_q) \rangle = \langle a, \sigma \circ \lambda_p \rangle \cdot \langle b, \sigma \circ \rho_q \rangle = \langle a \cup b, \sigma \rangle.$$

Aus der Linearität von $\cap$ in σ folgt die Behauptung. □

Lemma 4.14. *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und X ein topologischer Raum. Dann gilt:*

1. *$\cap$ ist bilinear und definiert eine Skalarmultiplikation des Ringes $S^*(X;R)$ auf $S_*(X;R)$. Damit wird $S_*(X;R)$ zu einem $S^*(X;R)$-Modul.*

2. *Für alle $a \in S^p(X;R)$ und alle $z \in S_{p+q}(X;R)$ haben die Differentiale die Eigenschaft*

$$d_q(a \cap z) = (-1)^p (a \cap d_{p+q}(z)) - (d^p(a) \cap z).$$

3. *$\cap$ induziert eine Skalarmultiplikation*

$$\cap : H^p(X;R) \times H_{p+q}(X;R) \to H_q(X;R),$$

   von $H^*(X;R)$ auf $H_*(X;R)$, die wir Cap-Produkt zwischen Kohomologie und Homologie nennen. Durch das Cap-Produkt wird $H_*(X;R)$ zu einem graduierten $H^*(X;R)$-Modul[4].

4. *Ist $f : X \to Y$ stetig, so ist $f_* : H_*(X;R) \to H_*(Y;R)$ ein Modulhomomorphismus über dem Ringhomomorphismus $f^* : H^*(Y;R) \to H^*(X;R)$, d.h. für $a \in H^*(Y;R)$ und $z \in H_*(X;R)$ gilt*

$$f_*(f^*(a) \cap z) = a \cap f_*(z).$$

Beweis. Dies ergibt sich leicht aus Lemma 4.13 und den Eigenschaften von $\cup$. □

[3] Dies ist ein Ergebnis der linearen Algebra, vgl. [Scheja, Satz 41.6]
[4] d.h. für $a \in H^p(X;R)$ und $\sigma \in H_{p+q}(X;R)$ ist $a \cap \sigma \in H_q(X;R)$.

Bemerkung:
Man kann sowohl das Cup-Produkt als auch das Cap-Produkt auf Paare (X, A) topologischer Räume verallgemeinern. Wir erhalten für $p, q \in \mathbb{N}$ das Cup-Produkt

$$\cup : H^q(X, A; R) \times H^p(X, A; R) \to H^{p+q}(X, A; R).$$

Ist $i : (X, \emptyset) \subseteq (X, A)$ die Inklusion, so erhalten wir zudem ein kommutatives Diagramm (Cap-Produkt)

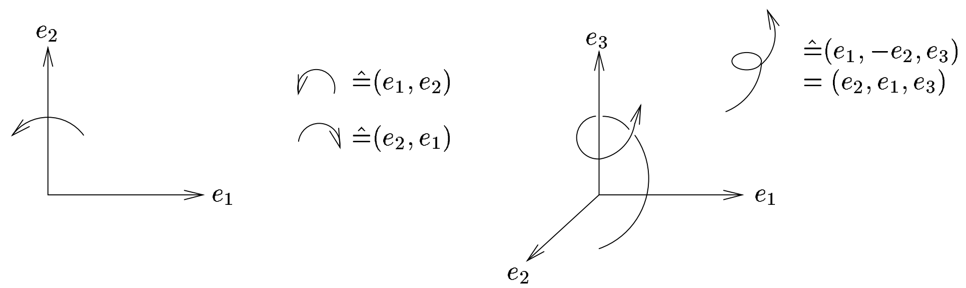
$$\begin{tikzcd}
H^p(X, A; R) \times H_n(X, A; R) \arrow[r, "\cap"] \arrow[d, "i^* \times \mathrm{id}_{H_n(X,A;R)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_{n-p}(X; R) \arrow[d, "i_*"] \\
H^p(X, R) \times H_n(X, A; R) \arrow[r, "\cap"] & H_{n-p}(X, A; R)
\end{tikzcd}$$

Für diese beiden Produkte gelten die Analoga der Lemmata 4.11 und 4.14. Daher ist $H_*(X, A; R)$ sowohl ein graduierter $H^*(X, A; R)$-Modul als auch ein graduierter $H^*(X; R)$-Modul.

4.6 Orientierung von Mannigfaltigkeiten

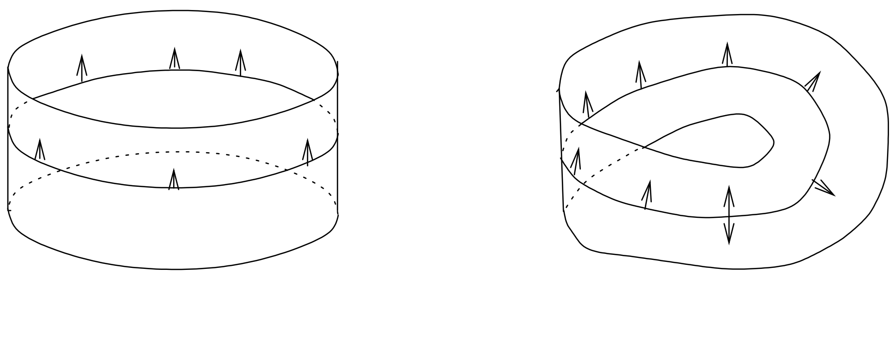
Eine Orientierung eines reellen, endlichdimensionalen Vektorraumes V definiert man als Äquivalenzklasse einer geordneten Basis. Dabei heißen zwei Basen äquivalent (oder gleich orientiert), wenn die Transformationsmatrix positive Determinante hat. V hat also genau zwei Orientierungen.

Die Orientierung visualisiert man durch „Orientierungspfeile":



Für eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M kann man in jedem Punkt $x \in M$ den Tangentialraum T_xM, einen reellen, endlichdimensionalen Vektorraum, betrachten. Man nennt eine Orientierung von T_xM dann „lokale Orientierung" von M in x. Jedoch kann man nicht jede differenzierbare Mannigfaltigkeit M mit einer globalen Orientierung versehen. Das Problem ist das folgende: Ist $y \in M$ und y mit x durch einen Weg in M verbindbar, so kann man den Weg durch endlich viele Kartenumgebungen $U_1, \ldots, U_k$ überdecken. Da die Übergangsfunktion von U_i nach U_{i+1} homotop zur Identität ist, ist die Determinante der Funktionalmatrix positiv, d.h. man kann die in x gewählte Orientierung längs des Weges nach y transportieren. M ist orientierbar, wenn dieser Transport unabhängig von der Wahl des Weges ist.

Typische Beispiele für eine orientierbare und eine nicht orientierbare Mannigfaltigkeit (mit Rand) sind das gewöhnliche Band und das Möbiusband:



Für topologische Mannigfaltigkeiten, die keine differenzierbare Struktur besitzen, ist schon die Definition einer lokalen Orientierung schwieriger. Die globalen Probleme bleiben dieselben. Die lokale Orientierung kann man mit Hilfe der „lokalen Homologie" definieren.

Wir wiederholen zunächst die Definition topologischer Mannigfaltigkeiten. Im Unterschied zu unserer früheren Definition (vgl. Seite 41) fordern wir nun jedoch nicht mehr, daß die Topologie einer Mannigfaltigkeit eine abzählbare Basis besitzt. Diese Verallgemeinerung der Definition erfordert die Verwendung des Zornschen Lemmas — welches äquivalent zum Auswahlaxiom ist — in einigen Beweisen. Wer das Auswahlaxiom nicht akzeptiert, möge die bisherige Definition verwenden.

Definition:
Ein Hausdorffraum M heißt ***n*-dimensionale (topologische) Mannigfaltigkeit**, falls jeder Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung $U = U(x)$ besitzt, die homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist. (Wegen der Invarianz der Dimension von $\mathbb{R}^n$ unter Homöomorphismen ist n eindeutig bestimmt.)

Ist $\varphi : U(x) \to \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus mit $\varphi(x) = 0$, so heißt das Paar (U, φ) eine **(lokale) Karte** von M mit Zentrum x. Die Umgebung U bezeichnen wir auch als **Koordinatenumgebung**. Ein System $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ lokaler Karten mit $\bigcup_{i \in I} U_i = M$ nennen wir einen **Atlas von *M***.

Lemma 4.15. *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann gilt für jedes $x \in M$ und jedes $q \in \mathbb{Z}$*

$$H_q(M, M \setminus \{x\}; R) \cong H_q(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R = \begin{cases} R & , q = n \\ \{0\} & , q \neq n. \end{cases}$$

Beweis. Sei (U, φ) eine lokale Karte von M mit Zentrum x. Dann gilt für alle $q \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} H_q(M, M \setminus \{x\}; R) &\cong H_q(U, U \setminus \{x\}; R) && \text{(Ausschneidung von } M \setminus U\text{; Satz 3.44)} \\ &\cong H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; R) && \text{(induziert durch } \varphi) \\ &\cong H_q(D^n, D^n \setminus \{0\}; R) && \text{(Ausschneidung von } \mathbb{R}^n \setminus D^n) \\ &\cong H_q(D^n, S^{n-1}; R) && (S^{n-1} \subseteq D^n \setminus \{0\} \text{ Deformationsretrakt; Kor. 3.42)} \\ &\cong \begin{cases} R & , q = n \\ \{0\} & , q \neq n. \end{cases} && \text{(Lemma 3.57)} \end{aligned}$$

□

Definition:
Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $x \in M$. Einen Erzeuger von $H_n(M, M \setminus \{x\}; R) \cong R$ (d.h. eine Einheit von R) nennen wir eine **lokale *R*-Orientierung von *M* in *x***. Für $R = \mathbb{Z}$ spricht man von einer **lokalen Orientierung von *M* in *x***.

Wichtig sind eigentlich nur $R = \mathbb{Z}$ und $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Es gibt genau zwei lokale ($\mathbb{Z}$-)Orientierungen von M in x und genau eine lokale $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Orientierung von M in x.

Eine globale Orientierung von M wird vorliegen, wenn man die lokalen Orientierungen auf ganz M kohärent verkleben kann. In kleinen Umgebungen von x geht dies stets:

Lemma 4.16. *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $x \in M$. Dann besitzt x eine Umgebungsbasis*[5] *$\mathcal{A}$, so daß für alle $U \in \mathcal{A}$ und für alle $y \in U$ der durch die Inklusion induzierte Homomorphismus*

$$j_y^U : H_n(M, M \setminus U; R) \to H_n(M, M \setminus \{y\}; R)$$

ein Isomorphismus ist.

Beweis. Sei (r, φ) eine lokale Karte von M mit Zentrum x. Wir setzen $\mathcal{A} := \{U_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ mit

$$U_\varepsilon := \varphi^{-1}(B_\varepsilon(0)).$$

[5]Eine **Umgebungsbasis** $\mathcal{A}$ eines Punktes x in einem topologischen Raum X ist eine Familie von Umgebungen von x, so daß es für jede Umgebung $U \subseteq X$ von x ein $V \in \mathcal{A}$ mit $V \subseteq U$ gibt.

Dann ist $\mathcal{A}$ offenbar eine Umgebungsbasis von x, und für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $y \in U_\varepsilon$ gilt

$$\begin{aligned} H_n(M, M \setminus U_\varepsilon; R) &\cong H_n(\bar U_{2\varepsilon}, \bar U_{2\varepsilon} \setminus U_\varepsilon; R) && \text{(Ausschneidung von } M \setminus \bar U_{2\varepsilon}\text{; Satz 3.44)} \\ &\cong H_n(\bar U_{2\varepsilon}, \bar U_{2\varepsilon} \setminus \{y\}; R) && (\bar U_{2\varepsilon} \setminus U_\varepsilon \subseteq \bar U_{2\varepsilon} \setminus \{y\} \text{ Deform.-retrakt; Kor. 3.42)} \\ &\cong H_n(M, M \setminus \{y\}; R) && \text{(Ausschneidung von } M \setminus \bar U_{2\varepsilon}\text{; Satz 3.44).} \end{aligned}$$

Die Komposition ist durch die Inklusion induziert. □

Definition:
Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $U \subseteq M$ ein Unterraum. Für jedes $y \in U$ sei $j_y^U : H_n(M, M \setminus U; R) \to H_n(M, M \setminus \{y\}; R)$ von der Inklusion induziert. Dann nennen wir ein Element $o \in H_n(M, M \setminus U; R)$ genau dann eine **lokale *R*-Orientierung von *M* längs *U***, wenn für jedes $y \in U$ das Element $j_y^U(o)$ ein Erzeuger von $H_n(M, M \setminus \{y\}; R)$ ist. Eine lokale $\mathbb{Z}$-Orientierung bezeichnen wir als **lokale Orientierung**.

Definition:
Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. $\{U_i\}_{i \in I}$ sei eine offene Überdeckung von M, und für jedes $i \in I$ sei o_i eine lokale R-Orientierung von M längs U_i. Dann nennen wir das System $\{(U_i, o_i)\}_{i \in I}$ ein **System lokaler *R*-Orientierungen auf *M***. Ein System lokaler $\mathbb{Z}$-Orientierungen bezeichnen wir als **System lokaler Orientierungen**.

Ein System $\{(U_i, o_i)\}_{i \in I}$ lokaler R-Orientierungen nennen wir genau dann **kohärent**, wenn für $i, j \in I$ und $x \in U_i \cap U_j$ stets $j_x^{U_i}(o_i) = j_x^{U_j}(o_j)$ gilt, wobei $j_x^{U_\nu} : H_n(M, M \setminus U_\nu; R) \to H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$ stets durch die Inklusion induziert sei.

Definition:
Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann induziert ein kohärentes System $\{(U_i, o_i)\}_{i \in I}$ lokaler R-Orientierungen auf M durch

$$x \mapsto o_x := j_x^{U_i}(o_i) \quad \text{für } i \in I \text{ und } x \in U_i$$

in jedem Punkt $x \in M$ eine wohldefinierte, lokale R-Orientierung. Wir nennen zwei kohärente Systeme lokaler R-Orientierungen **äquivalent**, falls deren induzierte, lokale R-Orientierungen übereinstimmen.

Eine ***R*-Orientierung von *M*** ist eine Äquivalenzklasse kohärenter Systeme lokaler R-Orientierungen auf M. Oft bezeichnen wir auch die von einer R-Orientierung induzierte Abbildung $x \mapsto o_x$ als R-Orientierung. Unter einer **Orientierung** verstehen wir eine $\mathbb{Z}$-Orientierung.

Eine Mannigfaltigkeit M heißt ***R*-orientierbar**, falls M eine R-Orientierung besitzt. $\mathbb{Z}$-orientierbare Mannigfaltigkeiten bezeichnen wir als **orientierbar**.

Bemerkung:
Jede Mannigfaltigkeit ist $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-orientierbar.

Definition:
Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Wir setzen

$$\tilde M := \{(x, o_x) \mid x \in M,\ o_x \text{ eine lokale Orientierung von } M \text{ in } x\}.$$

Die **Orientierungsüberlagerung** p von $\tilde M$ auf M sei die Projektion

$$p : \tilde M \to M, \quad (x, o_x) \mapsto x.$$

Für jedes $x \in M$ besteht $p^{-1}(x)$ somit aus genau zwei Punkten $o_x^\pm$, den beiden Erzeugern von $H_n(M, M \setminus x; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Nach Lemma 4.16 besitzt jeder Punkt $x \in M$ beliebig kleine Umgebungen $U = U_x$, so daß

$$p^{-1}(U) = \tilde U_x^+ \cup \tilde U_x^- = \{(y, o_y^+) \mid y \in U\} \cup \{(y, o_y^-) \mid y \in U\}$$

mit $o_y^\pm = j_y^U \circ (j_x^U)^{-1}(o_x^\pm)$ gilt, wobei $o_x^\pm$ die möglichen, lokalen Orientierungen von M in x sind.

Wir definieren eine Topologie auf $\tilde M$: Eine Teilmenge $V \subseteq \tilde M$ sei genau dann offen, wenn für alle $x \in M$ sowohl $p(V \cap \tilde U_x^+)$ als auch $p(V \cap \tilde U_x^-)$ offen in M sind.

Eine stetige Abbildung $s : M \to \tilde M$ mit $p \circ s = \mathrm{id}_M$ bezeichnen wir als **Schnitt von *p***.

Der folgende Satz rechtfertigt die Bezeichnung „Orientierungsüberlagerung“ und klärt den Sinn von Schnitten.

Satz 4.17. *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $p : \tilde{M} \to M$ deren Orientierungsüberlagerung. Dann gilt:*

1. *p ist eine 2-blättrige Überlagerung von M.*
2. *Eine Abbildung*

$$M \to \bigcup_{x \in M} H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z}), \quad x \mapsto o_x,$$

wobei o_x stets ein Erzeuger von $H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z})$ ist, ist genau dann eine Orientierung von M, wenn die Abbildung $s : M \to \tilde{M}$, $x \mapsto (x, o_x)$ stetig ist.

Eine Orientierung von M ist also dasselbe wie ein Schnitt der Orientierungsüberlagerung.

Beweis. Aufgrund der Definition der Topologie auf $\tilde{M}$ ist p stetig und offen, und für jedes x gibt es eine Umgebung U_x die durch p mit den Blättern $\tilde{U}_x^{\pm}$ überlagert wird.

Eine lokale Orientierung längs U_x wählt genau ein Blatt $\tilde{U}_x^+$ oder $\tilde{U}_x^-$ aus, folglich ist s genau dann stetig, wenn die Funktion $x \mapsto o_x$ von einem kohärenten System lokaler Orientierungen induziert ist. □

Wir können also die Überlagerungstheorie auf $\tilde{M} \longrightarrow M$ anwenden und erhalten:

Korollar 4.18. *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann gilt:*

1. *Ist M orientierbar, so ist auch jede offene Teilmenge von M orientierbar.*
2. *M ist genau dann orientierbar, wenn jede Zusammenhangskomponente von M orientierbar ist.*
3. *Ist M zusammenhängend so sind je zwei Orientierungen, die in einem Punkt übereinstimmen, identisch.*
4. *Ist M zusammenhängend und orientierbar, so besitzt M genau zwei Orientierungen.*
5. *M ist genau dann orientierbar, wenn die Orientierungsüberlagerung $p : \tilde{M} \to M$ äquivalent zur trivialen Überlagerung $\mathrm{pr}_1 : M \times S^0 \to M$ ist.*

Beweis. Zum Beweis der ersten Teilaussage sei $U \subseteq M$ offen. Da M orientierbar ist, gibt es eine Orientierung mit zugehörigem Schnitt s der Orientierungsüberlagerung p. Da U offen ist, ist $s|_U$ stetig, also gehört s zu einer Orientierung von U.

Die Zusammenhangskomponenten einer Mannigfaltigkeit sind offen, also sind die Zusammenhangskomponenten einer orientierbaren Mannigfaltigkeit stets orientierbar. Sind s_ν Schnitte von Orientierungen der Zusammenhangskomponenten U_ν von M, so können wir diese Schnitte zu einem Schnitt $s := \coprod_\nu s_\nu$ einer Orientierung von M zusammenkleben. Somit gilt die zweite Teilbehauptung.

Ein Schnitt einer Orientierung ist eine Liftung der Identität auf M. Andererseits ist eine Orientierung eindeutig durch ihren Schnitt bestimmt. Die Eindeutigkeit der Liftung (vgl. Satz 2.19) liefert daher die dritte Teilbehauptung. Die vierte Teilaussage folgt direkt aus der dritten.

Zur fünften Teilbehauptung: Sei zunächst eine Orientierung von M mit zugehörigem Schnitt s der Orientierungsüberlagerung gegeben. Dann gibt es offenbar einen Homöomorphismus $f : M \times S^0 \to \tilde{M}$ mit $(x, 1) \mapsto s(x)$ und $\mathrm{pr}_1 = p \circ f$. Also sind p und pr_1 äquivalent. Gilt andererseits $\mathrm{pr}_1 = p \circ f$ mit einem Homöomorphismus f, so ist $s : M \to \tilde{M}$, $x \mapsto f(x, 1)$ stetig mit $p \circ s = \mathrm{id}_M$. Also ist s ein Schnitt von p, d.h. s definiert eine Orientierung von M. □

Korollar 4.19. *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $x_0 \in M$ beliebig. Ist M wegzusammenhängend und besitzt $\pi_1(M, x_0)$ keine Untergruppe vom Index 2, so ist M orientierbar. Speziell sind einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten stets orientierbar.*

Beweis. M ist als Mannigfaltigkeit lokal wegzusammenhängend und semi-lokal einfach zusammenhängend, besitzt also nach Satz 2.31 eine universelle Überlagerung.

Aus dem Hauptsatz der Überlagerungstheorie (Satz 2.35 auf Seite 88) folgt, daß die Äquivalenzklassen wegzusammenhängender Überlagerungen von M bijektiv den Konjugationsklassen von Untergruppen von $\pi_1(M, x_0)$ entsprechen. Die Blätterzahl einer wegzusammenhängenden Überlagerung ist der Index der zugehörigen Untergruppe, wie wir aus Proposition 2.25 wissen. Besitzt $\pi_1(M, x_0)$ keine Untergruppe vom Index 2, so kann es daher keine wegzusammenhängende Überlagerung von M geben. Daher muß die Orientierungsüberlagerung $p : \tilde{M} \to M$ trivial sein, d.h. nach obigem Korollar 4.18 ist M orientierbar. $\square$

Lemma 4.20. *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann ist der Überlagerungsraum $\tilde{M}$ der Orientierungsüberlagerung $p : \tilde{M} \longrightarrow M$ eine orientierbare, n-dimensionale Mannigfaltigkeit.*

Beweis. Übung. $\square$

4.7 Orientierungsbündel und Fundamentalklassen

Sei M eine n-dimensionale, topologische Mannigfaltigkeit. Im vorigen Abschnitt haben wir die Orientierungsüberlagerung $p : \tilde{M} \to M$ von M konstruiert. Es ist

$$p^{-1}(x) = \{(x, o_x) \mid o_x \in H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z}),\ o_x \text{ ist erzeugend}\} \cong \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

In diesem Abschnitt wollen wir eine ∞-blättrige Überlagerung

$$p : \mathcal{O}_M \to M$$

mit Faser $p^{-1}(x) = H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ konstruieren.

Definition:
Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Wir setzen

$$\mathcal{O}_M := \{(x, \alpha_x) \mid x \in M,\ \alpha_x \in H_n(M, M \setminus \{x\})\}.$$

Für jede offene Menge $U \subseteq M$ und jedes $x \in U$ sei $j_x^U : H_n(M, M \setminus U; \mathbb{Z}) \to H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z})$ von der Inklusion induziert. Wir definieren für offene Teilmengen $U \subseteq M$ und $\alpha_U \in H_n(M, M \setminus U; \mathbb{Z})$ die Menge

$$\langle U, \alpha_U \rangle := \{(x, \alpha_x) \mid x \in U,\ \alpha_x = j_x^U(\alpha_U)\}.$$

Wir werden in Lemma 4.21 sehen, daß $\{\langle U, \alpha_U \rangle \mid U \subseteq M \text{ offen},\ \alpha_U \in H_n(M, M \setminus U; \mathbb{Z})\}$ Basis einer Topologie ist. Wir versehen $\mathcal{O}_M$ mit dieser Topologie.

$p : \mathcal{O}_M \to M$, $(x, \alpha_x) \longmapsto x$ sei die kanonische Projektion. Das Tripel $(\mathcal{O}_M, p, M)$ nennen wir das **Orientierungsbündel** oder die **Orientierungsgarbe von M**.

Lemma 4.21. *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $(\mathcal{O}_M, p, M)$ deren Orientierungsgarbe. Mit obigen Notationen gilt:*

1. *$\{\langle U, \alpha_U \rangle \mid U \subseteq M$ offen, $\alpha_U \in H_n(M, M \setminus U; \mathbb{Z})\}$ ist Basis einer Topologie auf $\mathcal{O}_M$.*
2. *Bezüglich dieser Topologie ist $p : \mathcal{O}_M \to M$ stetig und offen.*
3. *$p : \mathcal{O}_M \to M$ ist eine Überlagerung mit (diskreter) Faser $\mathbb{Z}$, d.h. für alle $x \in M$ existiert eine Umgebung U und ein Homöomorphismus $h : p^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{Z}$, so daß folgendes Diagramm kommutiert*

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "h", "\cong"'] \arrow[dr, "p"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & U \times \mathbb{Z} \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Beweis. Die erste Teilbehauptung folgt aus Lemma 1.2 und Lemma 4.16, die zweite folgt aus der dritten. Zum Beweis der dritten Teilbehauptung wählen wir $U \subseteq M$ so klein, daß $j_y^U : H_n(M, M \setminus U; \mathbb{Z}) \to H_n(M, M \setminus \{y\}; \mathbb{Z})$ für jedes $y \in U$ ein Isomorphismus ist. Gemäß Lemma 4.16 gibt es stets ein solches U. Wir definieren

$$\psi : U \times H_n(M, M \setminus U; \mathbb{Z}) \to p^{-1}(U) = \bigcup_{y \in U} \{y\} \times H_n(M, M \setminus \{y\}; \mathbb{Z})$$

durch $\psi(y, \alpha) := (y, j_y^U(\alpha))$. Für jede offene Menge $V \subseteq U$ und jedes $\alpha_V \in H_n(M, M \setminus V; \mathbb{Z})$ gilt stets $\psi^{-1}(\langle V, \alpha_V \rangle) = V \times \{\alpha_V\}$, also ist ψ stetig, sofern wir $H_n(M, M \setminus U; \mathbb{Z})$ mit der diskreten Topologie versehen. Da für offenes $V \subseteq U$ und $\alpha \in H_n(M, M \setminus U; \mathbb{Z})$ stets $\psi(V \times \{\alpha\}) = \langle V, j_V^U(\alpha) \rangle$ ist, ist ψ auch offen. Da ψ offenbar bijektiv ist, ist ψ ein Homöomorphismus. Wir wählen einen beliebigen Homöomorphismus $f : U \times \mathbb{Z} \to U \times H_n(M, M \setminus U; \mathbb{Z})$ und setzen $h := f^{-1}\psi^{-1}$. Dann gilt für jedes $(x, \alpha_x) \in p^{-1}(U)$ stets $h(x, \alpha_x) = (x, z_x)$ mit einem $z_x \in \mathbb{Z}$. Also ist $\mathrm{pr}_1 \circ h(x, \alpha_x) = x = p(x, \alpha_x)$, d.h. obiges Diagramm kommutiert. □

Definition:
Sei M eine n-dimensionale, topologische Mannigfaltigkeit. Wir definieren eine Abbildung

$$\beta : \mathcal{O}_M \to \mathbb{Z},\ (x, \alpha_x) \mapsto |\alpha_x| \in \mathbb{Z}.$$

Ferner setzen wir $\mathcal{O}_M(r) := \beta^{-1}(r)$ für $r \in \mathbb{N}$.

Bemerkung:
Sei M eine n-dimensionale, topologische Mannigfaltigkeit. Da es für jedes $x \in M$ genau zwei Isomorphismen $H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ gibt, die sich durch das Vorzeichen unterscheiden, ist β wohldefiniert, und es gilt:

1. β ist stetig (d.h. lokal konstant).
2. $\mathcal{O}_M$ ist die topologische Summe der $\mathcal{O}_M(r)$, $r \in \mathbb{N}$:
$$\mathcal{O}_M = \coprod_{r \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_M(r).$$
3. $\mathcal{O}_M(1) = \tilde{M}$ ist die Überlagerungsmannigfaltigkeit von M.
4. $\mathcal{O}_M(r) \cong \mathcal{O}_M(1)$ für $r \geq 1$ und $\mathcal{O}_M(0) \cong M$.

Definition:
Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $Z \subseteq M$ ein Unterraum. Die **Menge der Schnitte von $\mathcal{O}_M$ über Z** sei

$$\Gamma(Z, \mathcal{O}_M) := \{s : Z \to \mathcal{O}_M \text{ stetig} \mid p \circ s = \mathrm{id}_Z\}$$

Oft identifizieren wir einen Schnitt $s \in \Gamma(Z, \mathcal{O}_M)$, $x \mapsto (x, o_x)$ mit der stetigen Abbildung $x \mapsto o_x \in H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, d.h. wir fassen s als stetige Abbildung $Z \to \mathbb{Z}$ auf.

Für $s \in \Gamma(Z, \mathcal{O}_M)$ sei $\mathrm{Tr}(s)$ der Abschluß von $\{x \in Z \mid s(x) \neq 0\}$. Die Menge $\mathrm{Tr}(s)$ heißt **Träger von s**. Als Menge der **Schnitte über Z mit kompaktem Träger** definieren wir

$$\Gamma_C(Z, \mathcal{O}_M) := \{s \in \Gamma(Z, \mathcal{O}_M) \mid \mathrm{Tr}(s) \text{ kompakt}\}.$$

$\Gamma(M, \mathcal{O}_M)$ nennen wir die Menge der **globalen Schnitte von** M.

Proposition 4.22. *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann gibt es Bijektionen zwischen*

1. *der Menge aller Orientierungen von M,*
2. *der Menge der globalen Schnitte $s \in \Gamma(M, \mathcal{O}_M)$ von M mit $\mathrm{Im}(s) \subseteq \mathcal{O}_M(1)$ und*
3. *der Menge der Trivialisierungen[6] der Orientierungsüberlagerung $\mathcal{O}_M(1)$ von M.*

[6] Sei $p : Y \to X$ eine Überlagerung. Wenn es zu X homöomorphe Mengen Y_i, $i \in I$ und einen Homöomorphismus $h : \coprod_{i \in I} Y_i \to Y$ derart gibt, daß die Homöomorphismen $f_i : Y_i \to X$ durch $f_i = p \circ h|_{Y_i}$ gegeben sind, so bezeichnen wir h als **Trivialisierung der Überlagerung p**.

Beweis. Die erste Bijektion folgt aus Satz 4.17. Sei s ein globaler Schnitt. Wir gehen o.B.d.A. davon aus, daß M zusammenhängend ist. Dann ist s ein Homöomorphismus von M auf eine Zusammenhangskomponente von $\tilde{M}$. Also gibt es einen Homöomorphismus $h : M \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \tilde{M}$ mit $h(-,1) = s$, der p trivialisiert, d.h. es gilt $p \circ h(-,0) = \mathrm{id}_M = p \circ h(-,1)$. Umgekehrt sei $h : M \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \tilde{M}$ eine Trivialisierung von p. Dann ist $s := h(-,1)$ offenbar ein globaler Schnitt mit $s(M) \subseteq \tilde{M} = \mathcal{O}_M(1)$. □

Beispiel eines Schnittes:
Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $A \subseteq M$ eine Teilmenge. Für $\alpha \in H_n(M, M \setminus A; \mathbb{Z})$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} j_A(\alpha) : A &\to \mathcal{O}_M \\ x &\mapsto (x, j_x^A(\alpha)) \end{aligned}$$

stetig, wie aus der Definition der Topologie auf $\mathcal{O}_M$ folgt. Also ist j_A ein Schnitt von $\mathcal{O}_M$ über A.

$\Gamma(A, \mathcal{O}_M)$ ist mit der Addition

$$(s_1 + s_2)(x) = s_1(x) + s_2(x) \in H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) \cong Z$$

eine abelsche Gruppe. Wir erhalten nun einen kanonischen Homomorphismus

$$\begin{aligned} j_A : H_n(M, M \setminus A; \mathbb{Z}) &\to \Gamma(A, \mathcal{O}_M) \\ \alpha &\mapsto j_A(\alpha). \end{aligned}$$

Satz 4.23. *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $A \subseteq M$ abgeschlossen. Dann gilt:*

1. $H_q(M, M \setminus A; \mathbb{Z}) = \{0\}$ *für jedes* $q > n$.
2. *Der Homomorphismus* $j_A : H_n(M, M \setminus A; \mathbb{Z}) \to \Gamma(A, \mathcal{O}_M)$, $\alpha \mapsto j_A(\alpha)$ *mit* $j_A(\alpha) : A \to \mathcal{O}_M$, $x \mapsto j_x^A(\alpha)$ *ist injektiv mit* $\mathrm{Im}(j_A) = \Gamma_C(A, \mathcal{O}_M)$, *d.h.*
$$j_A : H_n(M, M \setminus A; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \Gamma_C(A, \mathcal{O}_M).$$

Speziell gilt (für $A = M$)

$$\begin{aligned} &H_n(M; \mathbb{Z}) \cong \Gamma_C(M, \mathcal{O}_M) \\ &H_q(M; \mathbb{Z}) = \{0\} \text{ für alle } q > n. \end{aligned}$$

Bevor wir Satz 4.23 beweisen (siehe Seite 194), werden wir einige Folgerungen aus ihm ziehen. Falls A kompakt ist, ist klar, daß

$$\Gamma(A, \mathcal{O}_M) = \Gamma_C(A, \mathcal{O}_M)$$

gilt.

Korollar 4.24. *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $A \subseteq M$ abgeschlossen, zusammenhängend aber nicht kompakt. Dann gilt:*

$$H_n(M, M \setminus A; \mathbb{Z}) = \{0\}.$$

Speziell gilt für nicht-kompakte, zusammenhängende, n-dimensionale Mannigfaltigkeiten stets $H_n(M; \mathbb{Z}) = \{0\}$.

Beweis. Sei $\alpha \in H_n(M, M \setminus A; \mathbb{Z})$. Dann hat $j_A(\alpha)$ nach Satz 4.23 kompakten Träger, und da A nicht kompakt ist, ist $A \setminus \mathrm{Tr}(j_A(\alpha)) \neq \emptyset$.

Die Abbildung $\beta \circ j_A(\alpha) : A \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto \beta(j_x^A(\alpha))$ ist stetig, also konstant auf A. Für $x_0 \in A \setminus \mathrm{Tr}(j_A(\alpha))$ ist $\beta(j_{x_0}^A(\alpha)) = 0$, also ist $\beta(j_x^A(\alpha)) = 0$ für alle $x \in A$, d.h. $j_A(\alpha) = 0$. Da j_A injektiv ist, folgt $\alpha = 0$. □

Definition:
Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $A \subseteq M$. Wenn es einen Schnitt $s \in \Gamma(A, \mathcal{O}_M)$ gibt, so daß für jedes $x \in A$ das Element $s(x) \in H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z})$ erzeugend ist, so nennen wir M **orientierbar längs A**.

Man überlegt sich leicht, daß M genau dann orientierbar längs A ist, wenn A eine Umgebung $U \subseteq M$ besitzt, die als n-dimensionale Mannigfaltigkeit orientierbar ist.

Korollar 4.25. *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $A \subseteq M$ eine kompakte Teilmenge mit k Zusammenhangskomponenten. M sei längs A orientierbar. Dann gilt:*

$$H_n(M, M \setminus A; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^k.$$

Beweis. Da A kompakt ist, gilt $\Gamma(A, \mathcal{O}_M) = \Gamma_C(A, \mathcal{O}_M)$. Nach Satz 4.23 ist $\Gamma_C(A, \mathcal{O}_M) \cong H_n(M, M \setminus A; \mathbb{Z})$. Da M orientierbar längs A ist, ist die Überlagerung $p : \mathcal{O}_M \to M$ über A trivial:

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(A) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "p"'] & & A \times \mathbb{Z} \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & A \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] & \end{tikzcd}$$

Folglich ist $H_n(M, M \setminus A; \mathbb{Z}) \cong \Gamma(A, \mathcal{O}_M) \cong \{s : A \to \mathbb{Z} \text{ stetig}\} \cong \mathbb{Z}^k$. □

Korollar 4.26. *Sei M eine kompakte, zusammenhängende, n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann gilt:*

$$H_n(M; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{, falls } M \text{ orientierbar} \\ \{0\} & \text{, falls } M \text{ nicht orientierbar.} \end{cases}$$

Beweis. Falls M orientierbar ist, so setzen wir $A = M$ in Korollar 4.25 und erhalten $H_n(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Wir betrachten nun den Fall $H_n(M; \mathbb{Z}) \neq \{0\}$. Da M kompakt ist, erhalten wir nach Satz 4.23

$$\{0\} \neq H_n(M; \mathbb{Z}) \cong \Gamma_C(M, \mathcal{O}_M) = \Gamma(M, \mathcal{O}_M).$$

Sei $s \in \Gamma(M, \mathcal{O}_M) \setminus \{0\}$. Dann ist $\beta \circ s$ konstant, da M zusammenhängend ist. Sei also $r := \beta(s(x))$ für alle $x \in M$. Dann ist s von der Form $s = \mathrm{id}_M \times (r \cdot s')$, wobei $s'(x)$ für alle $x \in M$ ein Erzeuger von $H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ ist. Somit ist

$$\tilde{s} : M \to \mathcal{O}_M, \quad x \mapsto (x, s'(x))$$

ein Schnitt von $\mathcal{O}_M(1)$, d.h. M ist orientierbar. □

Lemma 4.27. *Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann sind $\mathbb{R}^n$ und S^n orientierbar.*

Beweis. Wir wenden uns zunächst S^n zu: Daß S^0 orientierbar ist, ist offensichtlich. Für $n > 0$ gilt $H_n(S^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ (vgl. Satz 3.53) und die Aussage folgt aus Korollar 4.26.

Wegen $\mathbb{R}^n \cong S^n \setminus \{x\} \subseteq S^n$ offen, ist auch $\mathbb{R}^n$ stets orientierbar. □

Definition:
Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Ein Element $\alpha \in H_n(M; \mathbb{Z})$ heißt genau dann **Fundamentalklasse** oder **Orientierungsklasse von M**, wenn für jedes $x \in M$ das Element

$$j_x^M(\alpha) \in H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z})$$

ein Erzeugendes ist.

Beispiel:
Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann besitzt S^n eine Fundamentalklasse. $\mathbb{R}^n$ besitzt jedoch keine Fundamentalklasse, denn einerseits ist $H_n(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z}) = \{0\}$, andererseits gilt aber $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Korollar 4.28. *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann gilt:*

1. *Wenn M eine Fundamentalklasse besitzt, so ist M orientierbar.*
2. *Ist M kompakt, so besitzt M genau dann eine Fundamentalklasse, wenn M orientierbar ist.*
3. *Ist M kompakt und orientierbar, so gibt es eine Bijektion der Fundamentalklassen von M auf die Orientierungen von M.*

Beweis. Übung. □

Korollar 4.29. *Sei $n \geq 2$ und $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge mit k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:*

$$H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus A; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^k$$

Beweis. Nach Korollar 4.25 ist $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A) \cong \mathbb{Z}^k$. Ferner erhält man aus der langen, exakten Homologiesequenz des Paares $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A)$ den Isomorphismus $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A; \mathbb{Z}) \cong H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus A; \mathbb{Z})$, indem man Korollar 3.43 benutzt. □

Bemerkung:
In Korollar 3.71 haben wir den Spezialfall $H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus f(D^m)) \cong \mathbb{Z}$ für $m \leq n$ bewiesen.

Beweis von Satz 4.23. Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $A \subseteq M$ abgeschlossen. Wir wollen beweisen, daß

1. $H_q(M, M \setminus A; \mathbb{Z}) = \{0\}$ ist für alle $q > n$.
2. $j_A : H_n(M, M \setminus A; \mathbb{Z}) \to \Gamma_C(A, \mathcal{O}_M)$ ein Isomorphismus ist.

Wir beweisen dies in fünf Schritten (siehe auch [Greenb, pp. 122ff]).

1. Beweisschritt: Seien A_1, A_2 abgeschlossen mit $A = A_1 \cup A_2$. Falls der Satz für A_1, A_2 und $A_1 \cap A_2$ gilt, so gilt er auch für $A = A_1 \cup A_2$: Die relative Mayer-Vietoris-Sequenz (Satz 3.50) zu $M \setminus A_1, M \setminus A_2 \subseteq M$ impliziert sofort $H_q(M, M \setminus A; \mathbb{Z}) = \{0\}$, falls $H_q(M, M \setminus A_1; \mathbb{Z})$, $H_q(M, M \setminus A_2; \mathbb{Z})$ und $H_q(M, M \setminus (A_1 \cap A_2); \mathbb{Z})$ verschwinden. Nach Voraussetzung ist $H_{n+1}(M, M \setminus (A_1 \cap A_2); \mathbb{Z}) = \{0\}$, also erhalten wir ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & H_n(M, M \setminus A; \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "j_A"'] & H_n(M, M \setminus A_1; \mathbb{Z}) \oplus H_n(M, M \setminus A_2; \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "j_{A_1} \oplus j_{A_2}"] & H_n(M, M \setminus (A_1 \cap A_2); \mathbb{Z}) \arrow[d, "\cong"', "j_{A_1 \cap A_2}"] \\
\{0\} \arrow[r] & \Gamma_C(A, \mathcal{O}_M) \arrow[r] & \Gamma_C(A_1, \mathcal{O}_M) \oplus \Gamma_C(A_2, \mathcal{O}_M) \arrow[r] & \Gamma_C(A_1 \cap A_2, \mathcal{O}_M).
\end{tikzcd}$$

Insgesamt folgt $H_q(M, M \setminus A; \mathbb{Z}) = \{0\}$ für $q > n$, und daß j_A ein Isomorphismus ist.

2. Beweisschritt: A sei kompakt und in einer Koordinatenumgebung $U \subseteq M$ mit Karte $\varphi : U \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$ enthalten. Ferner sei $\mathcal{O}_M|_U = \{(x, \alpha) \in \mathcal{O}_M \mid x \in U\} \cong U \times \mathbb{Z}$ trivial. Ausschneidung von $M \setminus U$ liefert

$$H_q(M, M \setminus A; \mathbb{Z}) \cong H_q(U, U \setminus A; \mathbb{Z}) \cong H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \varphi(A); \mathbb{Z}).$$

Wir können also o.B.d.A. von $M = \mathbb{R}^n$ und $\varphi(A) = A$ ausgehen. Wir unterscheiden drei Fälle:

1. Fall: $A = \Delta_p \subseteq \mathbb{R}^n$ sei ein p-Simplex: Für $q \geq n$ und $x \in A$ liefern die lange, exakte Homologiesequenz (Satz 3.34), Korollar 3.40 und Satz 3.53 das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \Delta_p; \mathbb{Z}) \arrow[r, "\cong", "\partial"'] \arrow[d, "j_x^{\Delta_p}"] & H_{q-1}(\mathbb{R}^n \setminus \Delta_p; \mathbb{Z}) \arrow[d, "\cong"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & H_{q-1}(S^{n-1}; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \{0\} & , q > n \\ \mathbb{Z} & , q = n \end{cases} \\
H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) \arrow[r, "\cong", "\partial"'] & H_{q-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) &
\end{tikzcd}$$

bzw., falls $q = n = 1$ ist:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\{0\} & \longrightarrow & H_1(\mathbb{R}, \mathbb{R}\setminus\Delta_p;\mathbb{Z}) & \underset{\partial}{\longrightarrow} & H_0(\mathbb{R}\setminus\Delta_p;\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_0(\mathbb{R};\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \{0\} \\
 & & \Big\downarrow j_x^{\Delta_p} & & \Big\downarrow\cong & & \Big\| & & \\
\{0\} & \longrightarrow & H_1(\mathbb{R}, \mathbb{R}\setminus\{x\};\mathbb{Z}) & \underset{\partial}{\longrightarrow} & H_0(\mathbb{R}\setminus\{x\};\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_0(\mathbb{R};\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \{0\}.
\end{array}$$

Daher ist $j_x^{\Delta_p}$ stets ein Isomorphismus und für $q > n$ ist $H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \Delta_p; \mathbb{Z}) = \{0\}$.
Da $\mathcal{O}_M|_U$ trivial ist, d.h. $\mathcal{O}_M|_U = p^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{Z}$, erhalten wir $\Gamma(\Delta_p, \mathcal{O}_M) \cong \mathbb{Z}$. Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \Delta_p; \mathbb{Z}) \arrow[dl, "j_{\Delta_p}"'] \arrow[dr, "j_x^{\Delta_p}", "\cong"'] & \\
\Gamma(\Delta_p, \mathcal{O}_M) \arrow[r, "\cong"] & \mathbb{Z} & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

folgt, daß j_{Δ_p} ein Isomorphismus ist. Daher haben wir in diesem Fall die Behauptung bewiesen.

2. Fall: Ist A ein endliches Polyeder, so führen wir Induktion über die Anzahl der Simplizes von A, sowie über die Dimension. Den Induktionsanfang liefert der 1. Fall, den Induktionsschritt der 1. Beweisschritt.

3. Fall: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sei eine beliebige, kompakte Teilmenge.

- Wir zeigen zunächst, daß $\underline{j_A : H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A; \mathbb{Z}) \to \Gamma(A, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}) \text{ surjektiv}}$ ist. Da $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt ist, ist A insbesondere beschränkt (Satz von Heine-Borel). Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ein endliches Polyeder, das A enthält. Da $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}$ ist, ist $\Gamma(E, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}) \to \Gamma(A, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n})$ surjektiv. Im Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus E; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{j_E} & \Gamma(E, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}) \\
j_A^E \Big\downarrow & \circlearrowleft & \Big\downarrow \\
H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{j_A} & \Gamma(A, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n})
\end{array}$$

  ist j_E nach dem 2. Fall ein Isomorphismus. Also ist j_A surjektiv.
- Wir zeigen nun, daß $\underline{\text{für } q > n \text{ stets } H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A; \mathbb{Z}) = \{0\}}$ gilt, und daß der Homomorphismus $\underline{j_A : H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A; \mathbb{Z}) \to \Gamma(A, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}) \text{ injektiv}}$ ist. Sei $q \geq n$ und $\alpha \in H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A; \mathbb{Z})$. Im Falle $q = n$ gelte $j_A(\alpha) = 0$. Wir müssen nun $\alpha = 0$ nachweisen. Sei a ein relativer Zykel, der α repräsentiert. Da A kompakt ist, gibt es ein Polyeder E, so daß $A \cup \mathrm{Tr}(a) \subseteq E$ ist. $\mathrm{Tr}(\partial(a)) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A$ ist kompakt. Also gibt es eine Triangulierung $\mathcal{E}$ von E derart, daß für $K := \bigcup_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}, \\ |\sigma| \cap A \neq \emptyset}} |\sigma|$ der Schnitt $\mathrm{Tr}(\partial(a)) \cap K$ leer ist. Dann repräsentiert a eine Homologieklasse $\alpha' \in H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K; \mathbb{Z})$ mit $j_A^K(\alpha') = \alpha$. Für $q > n$ gilt nach dem 2. Fall $H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K; \mathbb{Z}) = \{0\}$, also $\alpha' = 0$. Hieraus folgt $\alpha = j_A^K(\alpha') = 0$. Für $q = n$ haben wir $j_A(\alpha) = 0$ vorausgesetzt. Da $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ trivial ist, muß $j_K(\alpha') \in \Gamma(K, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n})$ lokal konstant sein, also $j_K(\alpha') = 0$. Nach dem 2. Fall ist j_K injektiv, d.h. $\alpha' = 0$. Daher ist $\alpha = j_A^K(\alpha') = 0$.

Da A kompakt ist, erhalten wir zudem stets $\Gamma(A, \mathcal{O}_M) = \Gamma_C(A, \mathcal{O}_M)$. Also gilt die Behauptung für jede kompakte Teilmenge $A \subseteq M$, die in einer Kartenumgebung U enthalten ist, für die $\mathcal{O}_M|_U$ trivial ist.

3. Beweisschritt: Sei $A \subseteq M$ kompakt. Dann gibt es kompakte Teilmengen $A_1, \ldots, A_m \subseteq A$ mit $A = A_1 \cup \cdots \cup A_m$, so daß die A_i stets in einer Kartenumgebung U_i enthalten sind, für die $\mathcal{O}_M|_{U_i}$ trivial ist (vgl. Lemma 4.16). Die Behauptung folgt daher aus den Beweisschritten 1 und 2.

4. Beweisschritt: Sei $U \subseteq M$ eine offene Teilmenge, so daß $\bar{U}$ kompakt ist. Ferner sei $A \subseteq U$ abgeschlossen. Dann sind $\bar{U} \setminus U$ und $A \cup (\bar{U} \setminus U)$ beide kompakt. Es gilt $M \setminus (\bar{U} \setminus U) = U \cup (M \setminus \bar{U})$, und $M \setminus (A \cup (\bar{U} \setminus U)) = (U \setminus A) \cup (M \setminus \bar{U})$. Wir betrachten nun die exakte Homologiesequenz des Tripels $(M, U \cup (M \setminus \bar{U}), (U \setminus A) \cup (M \setminus \bar{U})))$

Ausschneidung liefert

$$H_q(U, U \setminus A; \mathbb{Z}) \cong H_q(U \cup (M \setminus \bar{U}),\ (U \setminus A) \cup (M \setminus \bar{U}); \mathbb{Z}).$$

Für $q > n$ erhalten wir aus Beweisschritt 3

$$\ldots \longrightarrow \underbrace{H_{q+1}(M, U \cup (M \setminus \bar{U}); \mathbb{Z})}_{=\{0\}} \longrightarrow H_q(U, U \setminus A; \mathbb{Z}) \longrightarrow \underbrace{H_q(M, (U \setminus A) \cup (M \setminus \bar{U}); \mathbb{Z})}_{=\{0\}} \longrightarrow \ldots.$$

Folglich ist $H_q(U, U \setminus A; \mathbb{Z}) = \{0\}$ für $q > n$.

Für $q = n$ betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
\{0\} & \longrightarrow & H_n(U, U \setminus A; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_n(M, (U \setminus A) \cup (M \setminus \bar{U}); \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_n(M, U \cup (M \setminus \bar{U}); \mathbb{Z}) \\
 & & \downarrow j_A & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
\{0\} & \longrightarrow & \Gamma_C(A, \mathcal{O}_M) & \xrightarrow{i} & \Gamma_C(A \cup (\bar{U} \setminus U), \mathcal{O}_M) & \xrightarrow{r} & \Gamma_C(\bar{U} \setminus U, \mathcal{O}_M).
\end{array}$$

Die beiden letzten vertikalen Homomorphismen sind Isomorphismen nach dem 3. Beweisschritt. Die Injektivität von i sieht man wie folgt: sei $s \in \Gamma_C(A, \mathcal{O}_M)$ mit $\mathrm{Tr}(s) =: K \subseteq A$. Dann ist $i(s)|_A = s$ und $i(s)(x) = (x, 0)$ für jedes $x \notin K$. Aus dem Fünferlemma (Lemma 3.5) folgt, daß j_A ein Isomorphismus ist.

5. *Beweisschritt:* Allgemeiner Fall: Sei $A \subseteq M$ abgeschlossen. Zunächst ist $\mathrm{Im}(j_A) \subseteq \Gamma_C(A, \mathcal{O}_M)$. Hierzu sei $\alpha \in H_n(M, M \setminus A)$ gegeben. a sei ein relativer Zykel, der α repräsentiert. Dann ist $K := \mathrm{Tr}(a)$ kompakt. Für jedes $x \in A \setminus K$ ist offenbar $\mathrm{Tr}(a) \subseteq M \setminus \{x\}$, d.h. $j_x^A(\alpha) = 0$. Daher ist der Träger $\mathrm{Tr}(j_A(\alpha)) \subseteq K$, also nach Satz 1.18 kompakt. Somit ist $\mathrm{Im}(j_A) \subseteq \Gamma_C(A, \mathcal{O}_M)$.

   Wir zeigen nun, daß j_A bijektiv ist. Sei $s \in \Gamma_C(A, \mathcal{O}_M)$, $\mathrm{Tr}(s) =: K$ kompakt gegeben. Dann existiert eine offene Menge $U \subseteq M$, so daß $K \subseteq U$ und $\bar{U}$ kompakt ist. Wir setzen $A' := A \cap U$ und $s' := s|A'$, und wir erhalten das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 & H_n(U, U \setminus A'; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_n(M, M \setminus A; \mathbb{Z}) \\
 & \cong \downarrow j_{A'} & \circlearrowleft & \downarrow j_A \\
\{0\} \longrightarrow & \Gamma_C(A', \mathcal{O}_M) & \xrightarrow{i} & \Gamma_C(A, \mathcal{O}_M).
\end{array}$$

   Hierbei sei $i(t)$ für jedes $t \in \Gamma_C(A', \mathcal{O}_M)$ die Fortsetzung von t mit $i(t)(x) = (x, 0)$ für $x \in A \setminus A'$. Daher ist i injektiv. Ferner gilt $s' \in \Gamma_C(A', \mathcal{O}_M)$ und $i(s') = s$. Da $j_{A'}$ bijektiv ist und obiges Diagramm kommutiert, gibt es ein $\alpha \in H_n(M, M \setminus A; \mathbb{Z})$ mit $j_A(\alpha) = i(s') = s$. Also ist j_A surjektiv.

   Sei $\alpha \in H_q(M, M \setminus A; \mathbb{Z})$ für ein $q \geq n$ und a ein relativer Zykel, der α repräsentiert. Falls $q = n$ ist, setzen wir ferner $j_A(\alpha) = 0$ voraus. Wie oben gibt es dann eine offene Menge $U \subseteq M$ mit $\bar{U}$ kompakt und $\mathrm{Tr}(a) \subseteq U$. Also repräsentiert a ein $\alpha' \in H_q(U, U \setminus A'; \mathbb{Z})$ mit $A' := A \cap U$. Für $q > n$ folgt nach dem 4. Beweisschritt $\alpha' = 0$, also $\alpha = j_A^{A'}(\alpha') = 0$. Für $q = n$ folgt $\alpha' = 0$ aus obigem Diagramm.

□

Bemerkung:
Orientierbarkeit ist nicht invariant unter Homotopie-Äquivalenz. Das Möbiusband M ist beispielsweise nicht orientierbar, während der Kreis $S^1 \simeq M$ orientierbar ist.

Definition:
Seien M, N zwei n-dimensionale, orientierbare, kompakte und zusammenhängende Mannigfaltigkeiten, $f : M \to N$ stetig und z_M, z_N Fundamentalklassen von M bzw. N.

1. $f_* : H_n(M; \mathbb{Z}) = z_M \cdot \mathbb{Z} \to H_n(N; \mathbb{Z}) = z_N \cdot \mathbb{Z}$ erfüllt $f_*(z_M) = d \cdot z_N$. Wir nennen die Zahl $\mathrm{grad}(f) := d \in \mathbb{Z}$ den **Abbildungsgrad von f**.
2. Für $x \in M$ sei $y := f(x)$, und $z_{M,x} := j_x^M(z_M)$ bzw. $z_{N,y} := j_y^N(z_N)$ seien die lokalen Orientierungen von M in x bzw. von N in y. Der **lokale Abbildungsgrad von f in x** sei diejenige ganze Zahl $\mathrm{grad}_x(f) = d_x$, für die der Homomorphismus $f_* : H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) \to H_n(N, N \setminus \{y\}; \mathbb{Z})$ die lokale Orientierung $z_{M,x}$ auf $f_*(z_{M,x}) = d_x \cdot z_{N,y}$ abbildet.
3. Für $x \in M$ nennen wir f **orientierungserhaltend in x**, falls $\mathrm{grad}_x(f) > 0$ ist. f heißt **orientierungsumkehrend in x**, falls $\mathrm{grad}_x(f) < 0$ ist.

   Wir nennen f **orientierungserhaltend** (bzw. **orientierungsumkehrend**), falls f in jedem $x \in M$ orientierungserhaltend (bzw. orientierungsumkehrend) ist.

Satz 4.30. *Seien M, N zwei n-dimensionale, orientierte, kompakte und zusammenhängende Mannigfaltigkeiten. $f : M \to N$ sei eine stetige Abbildung und es gebe ein $y \in N$ mit endlicher Faser $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Dann gilt:*

$$\operatorname{grad}(f) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{grad}_{x_i}(f).$$

Beweis. Übung. □

Satz 4.31. *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit.*

1. *M ist genau dann orientierbar, wenn M einen Atlas besitzt, dessen Übergangsfunktionen alle orientierungserhaltend sind.*
2. *Sei M differenzierbar. Dann ist M genau dann orientierbar, wenn M einen Atlas besitzt, so daß die Jacobimatrix aller Übergangsfunktionen positive Determinante hat.*

Ohne Beweis. □

4.8 Poincaréscher Dualitätssatz

Der Dualitätssatz von Poincaré besagt in seiner einfachsten und wichtigsten Form:

Satz 4.32 (Poincaré-Dualität für kompakte Mannigfaltigkeiten). *Sei M eine n-dimensionale, orientierte, zusammenhängende und kompakte Mannigfaltigkeit. Ferner sei z_M eine Fundamentalklasse von M. Dann ist für jedes $q \in \mathbb{Z}$ der Poincaré-Homomorphismus*

$$\begin{aligned} P : H^q(M;\mathbb{Z}) &\xrightarrow{\cong} H_{n-q}(M;\mathbb{Z}) \\ c &\longmapsto c \cap z_M \end{aligned}$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Dies wird direkt aus dem Poincaréschen Dualitätssatz (Satz 4.37) hervorgehen, den wir auf Seite 201 formulieren und beweisen. □

Wir geben nun einige Folgerungen aus dem Poincaréschen Dualitätssatz für kompakte Mannigfaltigkeiten an.

Satz 4.33. *Sei M eine n-dimensionale, orientierte, zusammenhängende und kompakte Mannigfaltigkeit. Dann gilt:*

1. *Für jedes $q \in \mathbb{N}$ gibt es einen Isomorphismus $H_q(M;\mathbb{Z})/TH_q(M;\mathbb{Z}) \cong H_{n-q}(M;\mathbb{Z})/TH_{n-q}(M;\mathbb{Z})$, wobei $TH_q(M;\mathbb{Z})$ und $TH_{n-q}(M;\mathbb{Z})$ die jeweiligen Torsionsgruppen seien.*
   Speziell gilt für die Bettizahlen $\beta_q = \operatorname{rg}(H_q(M,\mathbb{Z}))$, $q \in \mathbb{Z}$ stets die Gleichung $\beta_q = \beta_{n-q}$.
2. *Für jedes $q \in \mathbb{N}$ sind die Torsionsgruppen $TH_q(M;\mathbb{Z}) \cong TH_{n-q-1}(M;\mathbb{Z})$ isomorph.*

Beweis. Das universelle Koeffiziententheorem (vgl. Satz 4.6) liefert die spaltende, exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccccc} \{0\} & \to & \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-q-1}(M;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) & \to & H^{n-q}(M;\mathbb{Z}) & \to & \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_{n-q}(M;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) & \to & \{0\} \\ & & & & \cong\big\downarrow \text{Poincaré-Dualität} & & & & \\ & & & & H_q(M;\mathbb{Z}) & & & & \end{array}$$

Nun gilt $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-q-1}(M;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \cong TH_{n-q-1}(M,\mathbb{Z})$ (Übung) und

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_{n-q}(M;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \cong H_{n-q}(M;\mathbb{Z})/TH_{n-q}(M,\mathbb{Z}).$$

Die Behauptung folgt, da $H_q(M;\mathbb{Z}) \cong H_q(M;\mathbb{Z})/TH_q(M;\mathbb{Z}) \oplus TH_q(M;\mathbb{Z})$ ist. □

Beispiel:
Ist M eine 3-dimensionale, orientierbare, kompakte und zusammenhängende Mannigfaltigkeit, so sind alle Homologiegruppen von M durch $H_1(M;\mathbb{Z})$ bestimmt:

Da M zusammenhängend ist, ist $H_0(M;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ von $H_1(M;\mathbb{Z})$ unabhängig. Mit Satz 4.33 erhalten wir

$$\begin{aligned} H_2(M;\mathbb{Z}) &\cong H_2(M;\mathbb{Z})/TH_2(M;\mathbb{Z}) \oplus TH_2(M;\mathbb{Z}) \\ &\cong H_1(M;\mathbb{Z})/TH_1(M;\mathbb{Z}) \oplus TH_0(M;\mathbb{Z}) \cong H_1(M;\mathbb{Z})/TH_1(M;\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Wegen $TH_3(M;\mathbb{Z}) \cong TH_{-1}(M;\mathbb{Z}) \cong \{0\}$ ergibt sich ferner $H_3(M;\mathbb{Z}) \cong H_0(M;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Satz 4.34. *Sei M eine n-dimensionale, orientierte, zusammenhängende und kompakte Mannigfaltigkeit. Ist n ungerade, so gilt*

$$\chi(M) = \sum_{q\in\mathbb{Z}} (-1)^q \beta_q = 0.$$

Beweis. Nach Satz 4.33 gilt $\beta_0 - \beta_n = \beta_1 - \beta_{n-1} = \cdots = 0$. □

Definition:
Seien M, N zwei n-dimensionale, orientierte, zusammenhängende und kompakte Mannigfaltigkeiten, z_M, z_N Fundamentalklassen von M bzw. N und $f : M \to N$ stetig. Dann definieren wir den **Transfer-Homomorphismus** $f_!$ als Komposition

$$f_! : H_q(N;\mathbb{Z}) \underset{\cong}{\xrightarrow{P_N^{-1}}} H^{n-q}(N;\mathbb{Z}) \xrightarrow{f^*} H^{n-q}(M;\mathbb{Z}) \xrightarrow{P_M} H_q(M;\mathbb{Z}).$$

Hierbei seien P_N und P_M die Poincaré-Homomorphismen $c \mapsto c \cap z_M$ bzw. $c \mapsto c \cap z_N$.

Lemma 4.35. *Seien M, N zwei n-dimensionale, orientierte, zusammenhängende und kompakte Mannigfaltigkeiten, z_M, z_N Fundamentalklassen von M bzw. N und $f : M \to N$ stetig. Hat f den Abbildungsgrad d, d.h. $f_*(z_M) = d \cdot z_N$, so ist für jedes $q \in \mathbb{Z}$ die Komposition*

$$H_q(N;\mathbb{Z}) \xrightarrow{f_!} H_q(M;\mathbb{Z}) \xrightarrow{f_*} H_q(N;\mathbb{Z})$$

die Multiplikation mit d.

Beweis. Einsetzen in die Definition. □

Satz 4.36. *Seien M, N zwei n-dimensionale, orientierte, zusammenhängende und kompakte Mannigfaltigkeiten. Dann gilt:*

1. *Falls es eine Abbildung $M \to N$ vom Grad $\neq 0$ gibt, so gilt für $q \in \mathbb{Z}$ stets $\beta_q(N) \leq \beta_q(M)$.*
2. *Gibt es eine Abbildung $f : M \to N$ vom Grad ± 1, so ist $f_* : H_q(M;\mathbb{Z}) \to H_q(N;\mathbb{Z})$ surjektiv und $H_q(N;\mathbb{Z})$ ist isomorph zu einer Untergruppe von $H_q(M;\mathbb{Z})$.*

Beweis. Für freie $\mathbb{Z}$-Moduln ist die Multiplikation mit einer ganzen Zahl $\neq 0$ ein injektiver Homomorphismus. Nach Lemma 4.35 erhalten wir daher $\beta_q(M) = \mathrm{rg}(H_q(M;\mathbb{Z})) \geq \mathrm{rg}(H_q(N;\mathbb{Z})) = \beta_q(N)$ für jedes $q \in \mathbb{N}$, also die erste Teilbehauptung. Ist $\mathrm{grad}(f) = \pm 1$, so ist $f_* \circ f_!$ ein Isomorphismus. Hieraus folgt die zweite Teilbehauptung. □

Beispiel:
Sei $n \geq 1$ und M eine n-dimensionale, kompakte, zusammenhängende und orientierbare Mannigfaltigkeit. Damit es eine Abbildung $f : S^n \to M$ von der n-Sphäre nach M mit Abbildungsgrad ± 1 geben kann, muß f_* ein Isomorphismus sein. Dies ist notwendig, da $\mathbb{Z}$ nur die Untergruppen $\{0\}$ und $\mathbb{Z}$ besitzt und die Homologiegruppen von S^n stets $\mathbb{Z}$ oder $\{0\}$ sind.

Beispiel:
Sei M_g eine orientierbare Riemannsche Fläche vom Geschlecht g (d.h. eine Sphäre mit g Henkeln). Dann ist

$$H_q(M_g;\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , q = 0, 2 \\ \mathbb{Z}^{2g} & , q = 1. \\ \{0\} & , \text{sonst.} \end{cases}$$

Da für $g < h$ stets $\beta_1(M_g) < \beta_1(M_h)$ ist, hat jede stetige Abbildung $M_g \to M_h$ den Grad 0.

Wir wollen den Poincaréschen Dualitätssatz auch für nicht notwendig kompakte Mannigfaltigkeiten beweisen. Dazu benötigen wir Kohomologie mit kompaktem Träger.

Definition:
Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, X ein topologischer Raum und $q \in \mathbb{Z}$. Die ***q*-te singuläre Kohomologiegruppe mit kompaktem Träger** ist der direkte Limes[7]

$$H^q_C(X;R) := \varinjlim_{K\subseteq X \text{kompakt}} H^q(X, X\setminus K;R),$$

d.h.

$$H^q_C(X;R) = \left(\bigoplus_{K\subseteq X\text{kompakt}} H^q(X,X\setminus K;R)\right)/\sim,$$

wobei für kompakte $K_1, K_2 \subseteq X$, sowie $\alpha \in H^q(X, X\setminus K_1;R)$, $\beta \in H^q(X, X\setminus K_2;R)$ genau dann $\alpha \sim \beta$ gelte, wenn es eine kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ gibt, so daß $K_1 \cup K_2 \subseteq K$ ist und

$$i_1^*(\alpha) = i_2^*(\beta)$$

mit $i_\nu : (X, X\setminus K) \subseteq (X, X\setminus K_\nu)$, für $\nu = 1, 2$ gilt.

Wir versehen $H^q_C(X;R)$ mit repräsentantenweisen Operationen. Dadurch wird $H^q_C(X;R)$ zu einem R-Modul.

Bemerkung:
Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, X ein topologischer Raum, $q \in \mathbb{Z}$ und $x \in H^q_C(X;R)$. Dann gibt es eine kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ und einen Repräsentanten $x_K \in H^q(X, X\setminus K;R)$ von x. Die Homologieklasse x_K wird ihrerseits repräsentiert durch ein

$$\tilde{x}_K \in S^q(X, X\setminus K;R) = \operatorname{Hom}_R(S_q(X;R)/S_q(X\setminus K;R), R),$$

d.h. $\tilde{x}_K$ ist eine Linearform $S_q(X;R) \to R$ mit $\tilde{x}_K|_{S_q(X\setminus K;R)} = 0$. Also existiert zu x ein Kompaktum K und eine repräsentierende Kokette, die alle singulären Ketten mit Träger in $X \setminus K$ annulliert. Man sagt daher, der Träger von x sei in K enthalten.

Bemerkung:
Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, X ein topologischer Raum und $\Gamma \subseteq \{K \subseteq X \mid K \text{ kompakt}\}$ ein **kofinales System kompakter Mengen** (d.h. für jedes kompakte $K \subseteq X$ existiert ein $K' \in \Gamma$ mit $K \subseteq K'$), so gilt für jedes $q \in \mathbb{Z}$

$$H^q_C(X;R) = \varinjlim_{K\in\Gamma} H^q(X, X\setminus K;R).$$

Beispiel:
Sei X ein kompakter, topologischer Raum. Dann gilt $H^q_C(X;\mathbb{Z}) = H^q(X, X\setminus X;\mathbb{Z}) = H^q(X;\mathbb{Z})$ nach obiger Bemerkung ($\Gamma = \{X\}$ ist ein kofinales System kompakter Mengen).

Beispiel $X = \mathbb{R}^n \cong S^n \setminus \{x\}$:
Die Menge $\{\bar{B}_r(0) \subseteq \mathbb{R}^n \mid r \in \mathbb{R}_+\}$ der abgeschlossenen Kugeln um 0 ist ein kofinales System kompakter Mengen. Für $q \in \mathbb{N}$ und $r \in \mathbb{R}_+$ erhalten wir aus $f : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} S^n\setminus\{x\}$, der Funktoreigenschaft der Kohomologie,

[7] Vgl. [Dold, Chapter VIII, 5.]

dem Ausschneidungssatz für $\{x\} \subseteq (S^n \setminus f(\bar{B}_r(0)))^\circ \subseteq S^n$ und dem Homotopieaxiom für $S^n \setminus f(\bar{B}_r(0)) \simeq \{\mathrm{pt}\}$ (vgl. Satz 4.8)

$$\begin{aligned} H^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}_r(0); \mathbb{Z}) &\cong H^q(S^n \setminus \{x\}, S^n \setminus (\{x\} \cup f(\bar{B}_r(0))); \mathbb{Z}) \cong H^q(S^n, S^n \setminus f(\bar{B}_r(0)); \mathbb{Z}) \\ &\cong \tilde{H}^q(S^n; \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Also erhalten wir $H^q_C(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z}) = \varinjlim_{r \in \mathbb{R}_+} H^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}_r(0); \mathbb{Z}) = \tilde{H}^q(S^n; \mathbb{Z})$.

Bemerkung:
Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $K \subseteq X$ kompakt. Dann ist zwar $f(K) \subseteq Y$ kompakt, aber im allgemeinen ist $f(X \setminus K) \not\subseteq Y \setminus f(K)$, d.h. f induziert im allgemeinen keine Abbildung $H^q(Y, Y \setminus f(K); \mathbb{Z}) \to H^q(X, X \setminus K; \mathbb{Z})$. Im allgemeinen induziert f nicht einmal eine Abbildung $H^q_C(Y; \mathbb{Z}) \to H^q_C(X; \mathbb{Z})$.

Es gibt jedoch zwei wichtige Klassen von Abbildungen, die eine Abbildung der Kohomologie mit kompaktem Träger induzieren:

1. $f : X \to Y$ sei eine **eigentliche**, stetige Abbildung, d.h. für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq Y$ sei $f^{-1}(K)$ kompakt. Dann existiert für jedes $q \in \mathbb{Z}$ folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \varinjlim_{L \subseteq Y \text{ kompakt}} H^q(Y, Y \setminus L; \mathbb{Z}) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, equal] & \varinjlim_{L \subseteq Y \text{ kompakt}} H^q(X, X \setminus f^{-1}(L); \mathbb{Z}) \arrow[r] & \varinjlim_{K \subseteq X \text{ kompakt}} H^q(X, X \setminus K; \mathbb{Z}) \arrow[d, equal] \\ H^q_C(Y; \mathbb{Z}) \arrow[rr, "f^*"] & & H^q_C(X; \mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$

2. Sei X ein topologischer Raum, $U \subseteq X$ offen und $i : U \to X$ die Inklusion, dann existiert folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \varinjlim_{K \subseteq U \text{ kompakt}} H^q(U, U \setminus K; \mathbb{Z}) \arrow[r, "(i^*)^{-1}"] \arrow[d, equal] & \varinjlim_{K \subseteq U \text{ kompakt}} H^q(X, X \setminus K; \mathbb{Z}) \arrow[r] & \varinjlim_{K \subseteq X \text{ kompakt}} H^q(X, X \setminus K; \mathbb{Z}) \arrow[d, equal] \\ H^q_C(U; \mathbb{Z}) \arrow[rr] & & H^q_C(X; \mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$

   Dieser Homomorphismus geht erstaunlicherweise in die gleiche Richtung wie $i : U \hookrightarrow X$.

Definition:
Sei M eine n-dimensionale, orientierbare Mannigfaltigkeit und z_M eine Orientierung von M, d.h.

$$z_M \in \Gamma(M, \mathcal{O}_M(1)) \subseteq \Gamma(M, \mathcal{O}_M)$$

sei ein Schnitt des Orientierungsbündels. $K \subseteq M$ sei kompakt. Nach Satz 4.23 ist

$$j_K : H_n(M, M \setminus K; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \Gamma(K, \mathcal{O}_M)$$

ein Isomorphismus. Daher können wir $z_K \in H_n(M, M \setminus K; \mathbb{Z})$ als das Bild von z_M unter der Komposition der Abbildungen

$$\Gamma(M, \mathcal{O}_M) \longrightarrow \Gamma(K, \mathcal{O}_M) \xrightarrow{j_K^{-1}} H_n(M, M \setminus K; \mathbb{Z})$$

definieren.

Das Cap-Produkt mit z_K liefert den Homomorphismus

$$- \cap z_K : H^q(M, M \setminus K; \mathbb{Z}) \to H_{n-q}(M; \mathbb{Z}), \quad a \mapsto a \cap z_K.$$

Falls $K \subseteq K'$ ist, so kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} H^q(M, M \setminus K; \mathbb{Z}) \arrow[d] \arrow[dr, "- \cap z_K"] & \\ H^q(M, M \setminus K'; \mathbb{Z}) \arrow[r, "- \cap z_{K'}"'] & H_{n-q}(M; \mathbb{Z}). \end{tikzcd}$$

Beim Übergang zum direkten Limes erhalten wir den Homomorphismus

$$P : H^q_C(M; \mathbb{Z}) = \varinjlim_{K \subseteq X \text{ kompakt}} H^q(M, M \setminus K; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n-q}(M; \mathbb{Z}).$$

Diesen Homomorphismus bezeichnen wir als den **Poincaré-Homomorphismus**.

Besteht K hierbei aus k Zusammenhangskomponenten, so ist $z_K \in H_n(M, M \setminus K; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^k$ (vgl. Korollar 4.25). Da es (mindestens) zwei Orientierungen gibt, gibt es auch (mindestens) zwei Poincaré-Homomorphismen, P und $-P$.

Satz 4.37 (Poincaréscher Dualitätssatz). *Sei M eine n-dimensionale, orientierte Mannigfaltigkeit. Dann ist jeder Poincaré-Homomorphismus*

$$P : H^q_C(M; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_{n-q}(M; \mathbb{Z})$$

für jedes $q \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus.

Zum Beweis benötigen wir zwei weitere Zutaten:

Satz 4.38 (relative Mayer-Vietoris-Sequenz für Kohomologie). *Sei X ein topologischer Raum und $A, B \subseteq X$ Teilmengen, so daß A, B offen in $A \cup B$ sind. Dann ist die folgende, lange Sequenz exakt:*

$$\ldots \to H^q(X, A \cup B; \mathbb{Z}) \to H^q(X, A; \mathbb{Z}) \oplus H^q(X, B; \mathbb{Z}) \to H^q(X, A \cap B; \mathbb{Z}) \to H^{q+1}(X, A \cup B; \mathbb{Z}) \to \ldots.$$

Beweis. Übung. □

Lemma 4.39. *Der direkte Limes $\varinjlim$ ist ein exakter Funktor.*

Beweis. Übung. □

Beweis des Poincaréschen Dualitätssatzes 4.37. Diesem Beweis liegt folgende Idee zugrunde: Wir beweisen den Satz für die (offene) Kugel $M = (D^n)^\circ$ in $\mathbb{R}^n$ direkt. Dann schöpfen wir M mit kleinen, offenen Mengen $U \cong (D^n)^\circ$ aus und verwenden die Mayer-Vietoris-Sequenz. Besitzt die Topologie auf M eine abzählbare Basis, so erhalten wir den Rest über Induktion. Andernfalls verwenden wir das Zornsche Lemma.

1. Schritt: Der Satz gelte für die offenen Mengen $U, V \subseteq M$ und für $U \cap V$. Wir zeigen nun, daß er dann auch für $M = U \cup V$ gilt:

Für kompakte $K \subseteq U$ und $L \subseteq V$ betrachten wir die relative Mayer-Vietoris-Sequenz für $M \setminus K, M \setminus L \subseteq M$, die Satz 4.38 liefert:

$$\cdots \to H^q(M, M \setminus (K \cap L); \mathbb{Z}) \to H^q(M, M \setminus K; \mathbb{Z}) \oplus H^q(M, M \setminus L; \mathbb{Z})$$
$$\to H^q(M, M \setminus (K \cup L); \mathbb{Z}) \to H^{q+1}(M, M \setminus (K \cap L); \mathbb{Z}) \to \ldots.$$

Hierbei haben wir benutzt, daß $(M \setminus K) \cup (M \setminus L) = M \setminus (K \cap L)$ und $(M \setminus K) \cap (M \setminus L) = M \setminus (K \cup L)$ gilt. Setzen wir $D := U \cap V$, so erhalten wir durch Ausschneidung von $M \setminus D \subseteq M \setminus (K \cap L)$, $M \setminus U \subseteq M \setminus K$ und $M \setminus V \subseteq M \setminus L$ die exakte Sequenz

$$\cdots \to H^q(D, D \setminus (K \cap L); \mathbb{Z}) \to H^q(U, U \setminus K; \mathbb{Z}) \oplus H^q(V, V \setminus L; \mathbb{Z})$$
$$\to H^q(M, M \setminus (K \cup L); \mathbb{Z}) \to H^{q+1}(D, D \setminus (K \cap L); \mathbb{Z}) \to \ldots.$$

Diese ergänzen wir zu folgendem kommutativen Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^q(D, D\setminus(K\cap L);\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\cap z_{K\cap L}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^q(U, U\setminus K;\mathbb{Z})\oplus H^q(V, V\setminus L;\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\cap z_K \oplus \cap z_L"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^q(M, M\setminus(K\cup L);\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\cap z_{K\cup L}"] & \dots \\
\cdots \arrow[r] & H_{n-q}(D;\mathbb{Z}) \arrow[r] & H_{n-q}(U;\mathbb{Z})\oplus H_{n-q}(V;\mathbb{Z}) \arrow[r] & H_{n-q}(M;\mathbb{Z}) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Die Kommutativität der Teildiagramme, die den Randhomomorphismus beinhalten, wird z.B. in [Massey, XIV, §8] gezeigt (Hierfür ist das eingeführte Vorzeichen bei d^n von Nöten). Die Kommutativität der übrigen Teildiagramme rechnet man leicht nach (siehe auch Lemma 4.14). Da der direkte Limes nach Lemma 4.39 ein exakter Funktor ist, kann man in der oberen Zeile zum direkten Limes übergehen:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^q_C(U\cap V;\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "P_{U\cap V}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^q_C(U;\mathbb{Z})\oplus H^q_C(V;\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "P_U \oplus P_V"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^q_C(M;\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "P"] & \dots \\
\cdots \arrow[r] & H_{n-q}(D;\mathbb{Z}) \arrow[r] & H_{n-q}(U;\mathbb{Z})\oplus H_{n-q}(V;\mathbb{Z}) \arrow[r] & H_{n-q}(M;\mathbb{Z}) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Nach Voraussetzung sind $P_{U\cap V}$, P_U und P_V, also auch $P_U \oplus P_V$ Isomorphismen. Aus dem Fünferlemma 3.5 folgt, daß auch P ein Isomorphismus ist.

2. Schritt: Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ ein durch die Inklusion total geordnetes System offener Mengen in $U = \bigcup_{i\in I} U_i$. Wir gehen davon aus, der Satz gelte für alle U_i und beweisen ihn für U: Für jedes $i \in I$ induzieren die Inklusionen und Poincaré-Homomorphismen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H^q_C(U_i;\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "P_{U_i}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^q_C(U;\mathbb{Z}) \arrow[d, "P_U"] \\
H_{n-q}(U_i;\mathbb{Z}) \arrow[r] & H_{n-q}(U;\mathbb{Z}).
\end{tikzcd}$$

Da der direkte Limes ein exakter Funktor ist, erhalten wir hieraus das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim_{i\in I} H^q_C(U_i;\mathbb{Z}) \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\cong"', "\varinjlim_{i\in I} P_{U_i}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^q_C(U;\mathbb{Z}) \arrow[d, "P_U"] \\
\varinjlim_{i\in I} H_{n-q}(U_i;\mathbb{Z}) \arrow[r, "\psi_2"] & H_{n-q}(U;\mathbb{Z}).
\end{tikzcd}$$

ψ_1 ist ein Isomorphismus ist, denn es gilt:

$$\psi_1 : \varinjlim_{i\in I} H^q_C(U_i;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \varinjlim_{i\in I} \varinjlim_{\substack{K_i\subseteq U_i\\ \text{kompakt}}} H^q(U_i, U_i\setminus K_i;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \varinjlim_{\substack{K_i\subseteq U\\ \text{kompakt}}} H^q(U, U\setminus K_i;\mathbb{Z}) = H^q_C(U;\mathbb{Z}).$$

Auch ψ_2 ist ein Isomorphismus: Sei $[z] \in H_{n-q}(U;\mathbb{Z})$. Dann gibt es ein $i_0 \in I$, so daß $\mathrm{Tr}(z) \subseteq U_{i_0}$ ist. Also ist $[z] \in H_{n-q}(U_{i_0};\mathbb{Z})$, d.h. ψ_2 ist surjektiv. Analog beweist man die Injektivität von ψ_2.

3. Schritt: U sei eine Koordinatenumgebung von M. Dann können wir $U \cong \mathbb{R}^n$ durch die offenen Kugeln $\{B_r(0)\}_{r\in\mathbb{R}_+}$ gemäß des zweiten Beweisschritts ausschöpfen. Daher genügt es, die Behauptung für $B := B_r(0)$ zu beweisen. Es gilt

$$H^q_C(B;\mathbb{Z}) = \varinjlim_{K\subseteq B} H^q(B, B\setminus K;\mathbb{Z}) = \varinjlim_{s\in\mathbb{R}_+} H^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus \bar{B}_s(0)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , q = n \\ \{0\} & , q \neq n \end{cases}$$

Andererseits gilt

$$H_{n-q}(B;\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , n = q \\ \{0\} & , \text{sonst.} \end{cases}$$

Somit ist die Aussage gezeigt für $n \neq q$. Falls $n = q$ ist, erhalten wir ein kommutatives Diagramm (siehe Lemma 4.13 und Satz 4.6)

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{Z} \arrow[d, "\cong"] & \mathbb{Z} \arrow[d, "\cong"] & & \\
{[a]} \arrow[d, mapsto] & \in & H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_s(0)}; \mathbb{Z}) \arrow[r, "- \cap z_{\overline{B_s(0)}}"] \arrow[d, "\cong"] & H_0(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z}) & \ni & \varphi(z_{\overline{B_s(0)}}) \\
\langle [a], - \rangle & \in & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_s(0)}; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \arrow[ur] & \ni & \varphi \arrow[ur, mapsto] &
\end{tikzcd}$$

Es bleibt zu zeigen, daß die Abbildung $\varphi \mapsto \varphi(z_{\overline{B_s(0)}})$ einen Isomorphismus $\mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$ induziert. Dies ist aber klar, da $z_{\overline{B_s(0)}}$ ein Erzeuger von $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_s(0)}; \mathbb{Z})$ ist.

4. Schritt: Wir beweisen den Satz nun im allgemeinen Fall. Dazu sei $\mathcal{M}$ die Menge aller offenen Mengen von M, für die der Satz gilt. Nach dem dritten Beweisschritt erfüllt jede Koordinatenumgebung den Satz, d.h. $\mathcal{M}$ ist nicht leer. Im zweiten Beweisschritt haben wir gezeigt, daß für jede totalgeordnete Teilmenge $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{M}$ auch deren kleinste, obere Schranke $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{M}$ ist. Daher können wir das Zornsche Lemma anwenden. Dieses besagt, daß $\mathcal{M}$ ein maximales Element U besitzt.

Angenommen, U wäre eine echte Teilmenge von M. Dann gäbe es eine Koordinatenumgebung V, die nicht in U enthalten wäre. Also wäre $U \subsetneqq U \cup V$. Nach dem ersten Beweisschritt erhielten wir den Satz auch für $U \cup V$. Also wäre $U \cup V \in \mathcal{M}$. Dies jedoch widerspräche der Maximalität von U. Somit muß $U = M$ sein.

$\square$

Literaturverzeichnis

Literatur zur Vorlesung

[StöZie] Stöcker, R. / Zieschang, H.: Algebraische Topologie. Teubner 1988.
(Das Wichtigste über kombinatorische und algebraische Topologie, viel Anschauungsmaterial, empfehlenswert.)

[Greenb] Greenberg, M.J.: Lectures on Algebraic Topology. Benjamin 1967.
(Das Wichtigste über algebraische Topologie, kurz und bündig, trocken.)

[Schube] Schubert, H.: Topologie. Teubner 1964.
(Zur mengentheoretischen, kombinatorischen und algebraischen Topologie.)

[Jänich] Jänich, K.: Topologie. Springer 1980.
(Das Wichtigste zur mengentheoretischen Topologie, typisch Jänich.)

Der Klassiker

[Seifert] Seifert, H. / Threlfall, W.: Lehrbuch der Topologie. Teubner 1934.
(Immer noch lesenswert.)

Unterhaltende und anregende Literatur

[BolEfr] Boltjanskij, V.G. / Efremovič, V.A.: Anschauliche kombinatorische Topologie. Vieweg 1986.

[HiCoVo] Hilbert, D. / Cohn-Vossen, S.: Anschauliche Geometrie. Berlin 1932.

Weiterführende Literatur

[Dold] Dold, A.: Lectures on Algebraic Topology. Springer 1972.

[Spanier] Spanier, E.H.: Algebraic Topology. McGraw-Hill 1966.

[Switzer] Switzer, R.: Algebraic Topology — Homotopy and Homology.

[Massey] Massey, W.S.: A Basic Course in Algebraic Topology. Springer 1991. Springer 1975

Literatur zur Differentialtopologie

[BröJän] Bröcker, T. / Jänich, K.: Einführung in die Differentialtopologie. Springer 1973.

[Hirsch] Hirsch, M.W.: Differential Topology. Springer 1976.

[Munkres] Munkres, J.R.: Elementary Differential Topology. Princeton Univ. Press 1966.

Literatur zur (homologischen) Algebra

[HilSta] Hilton, D.J. / Stammbach, U.: A Course in Homological Algebra. Springer 1971.

Literatur zur Geschichte der Topologie

[Scholz] Scholz, E.: Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré. Birkhäuser 1980.

[Ossa] Ossa, E.: Topologie. Vieweg 1992

Literatur zu elementaren Grundlagen

[Scheja] Scheja, G. / Storch, U.: Lehrbuch der Algebra. Teubner 1994.

Index

— **H** —

— **I** —

— **J** —

— **K** —

— L —

— M —

— N —

— O —

— P —

— Q —

— R —

— S —

— **T** —

— **U** —

— **V** —

— **Z** —