Aussagenlogische Kalküle der zweiwertigen Logik

Wolfgang Eiden

Februar 2000

Zusammenfassung
Ein Teilaspekt der formalen Logik besteht in der Untersuchung wie die logischen Konsequenzen (insbesondere die Tautologien) einer vorgegebenen Formelmenge unter Verwendung gewisser Reglements schrittweise hergeleitet werden können. Hierbei ist die Logik bestimmt durch eine konsequente Trennung von Syntax und Semantik. Diese Abhandlung stellt exemplarisch das Tableau-Kalkül und das Kalkül des natürlichen Schließens vor.

2000 Mathematics Subject Classification: 03B05, 03B30, 03B35

1 Das Fundament der zweiwertigen Aussagenlogik

1.1 Aussagenlogische Formeln

Zuerst möchten wir vereinbaren, was wir unter einer Formelmenge verstehen:

Definition 1.1 *Sei $\mathcal{V}$ eine Menge von Variablen, $\mathfrak{B} := \{\neg, \wedge, \vee\}$ eine Menge von Funktoren und $\mathbb{B} := \{0, 1\}$. Die Menge Ψ aller Formeln über $\mathfrak{B}$ ist die kleinste Menge mit den Eigenschaften:*

$$\text{(1) } \mathbb{B}, \mathcal{V} \subseteq \Psi \quad \text{(2) Aus } \mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \Psi \text{ folgt: } \neg\mathrm{P}\,,\ \mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}\,,\ \mathrm{P} \vee \mathrm{Q} \in \Psi$$

Dann heisst $\mathcal{X} \subseteq \Psi$ Formelmenge über der Funktorbasis $\mathfrak{B}$.

1.2 Erfüllbarkeit

Damit wir einer Formel einen Wahrheitswert zuzuorden können, führen wir in Anlehnung an die zwei Grundprinzipien der klassischen Logik (Zweiwertigkeit und Extensionalität) den Begiff der Bewertung wie folgt ein:

Definition 1.2 *Eine Bewertung ist eine Abbildung $\Phi : \mathcal{V} \to \mathbb{B}$. Sie wird fortgesetzt zur Abbildung $\Phi : \Psi \to \mathbb{B}$ durch $\Phi(\neg P) := 1 - \Phi(P)$, $\Phi(P \wedge Q) := min(\Phi(P), \Phi(Q))$ und $\Phi(P \vee Q) := max(\Phi(P), \Phi(Q))$ mit $P, Q \in \Psi$.*

Nun können wir die Erfüllbarkeit einer Formel definieren:

Definition 1.3 *Eine Bewertung Φ erfüllt $P \in \Psi$, symbolisch $\models_\Phi P$ genau dann, wenn $\Phi(P) = 1$ gilt. Eine Formelmenge $\mathcal{X} \subseteq \Psi$ heißt erfüllbar, wenn es eine Bewertung Φ gibt mit $\models_\Phi P$ für alle $P \in \mathcal{X}$.*

Beispiel.

Seien $P, Q \in \mathcal{V}$ Variablen und Φ eine Bewertung mit $\Phi(P) = 1$ und $\Phi(Q) = 0$. Dann erfüllt Φ die Formelmenge $\{(P \vee Q) \wedge \neg Q; \neg Q\}$, da

$$\begin{aligned}
\Phi((P \vee Q) \wedge \neg Q) &= min(\Phi(P \vee Q), \Phi(\neg Q)) \\
&= min(max(\Phi(P), \Phi(Q)), 1 - \Phi(Q)) \\
&= min(max(1, 0), 1 - 0) = min(1, 1) = 1 \\
\Phi(\neg Q) &= 1 - \Phi(Q) = 1 - 0 = 1
\end{aligned}$$

1.3 Tautologien

Eine besonders wichtige Klasse von Formeln sind die Tautologien:

Definition 1.4 *Eine Formel $P \in \Psi$, heißt Tautologie (oder allgemeingültig bzw. logisch gültig), symbolisch $\models P$, wenn jede Bewertung P erfüllt.*

Beispiel.

Es gilt $\models P \vee (\neg P)$ und $\{P; P \to Q\} \models Q$

Seien Φ, Φ' beliebige Bewertungen mit $\Phi'(P) = 1$ und $\Phi'(P \to Q) = 1$. Dann gilt $\Phi(P \vee (\neg P)) = max(\Phi(P), \Phi(\neg P)) = max(\Phi(P), 1 - \Phi(P)) = 1$. Ferner ist wegen $P \to Q := \neg P \vee Q$ und $1 = \Phi'(\neg P \vee Q) = max(\Phi'(\neg P), \Phi'(Q)) = max(0, \Phi'(Q))$ auch $\Phi'(Q) = 1$.

Um die Allgemeingültigkeit einer Aussage zu beweisen, ist es meist einfacher die Unerfüllbarkeit der negierten Aussage zu zeigen. Gerechtfertigt wird diese Vorgehensweise von folgendem

Satz 1.5 *Es sei $P \in \Psi$ eine beliebige Formel. Dann ist P genau dann eine Tautologie, wenn $\{\neg P\}$ unerfüllbar ist.*

Beweis.

Sei P eine Tautologie. Dies ist nach Definition genau dann der Fall, wenn jede Bewertung P erfüllt. Dies ist aber gleichbedeutend mit $\{\neg P\}$ unerfüllbar.

$\square$

2 Der Tableau-Kalkül

Ein Verfahren um die Erfüllbarkeit einer endlichen Formelmenge $\mathcal{X} \subseteq \Psi$ effektiv nachzuweisen ist das Tableau-Verfahren. Es beruht auf der Idee durch Umformungsregeln (wie beispielsweise den DeMorgan'schen Regeln) das Problem der Erfüllbarkeit von $\mathcal{X}$ auf dasjenige einfacherer Formelmenge zu reduzieren.

Beispiele

1. Wir wollen die Erfüllbarkeit von $\mathcal{X} = \{P; \neg(P \wedge Q); R; Q \vee R\}$ zeigen:

$P; \neg(P \wedge Q); R; Q \vee R$

$P; \neg P; R; Q \vee R$ $\qquad$ $P; \neg Q; R; Q \vee R$

$P; \neg Q; Q; R$ $\qquad$ $P; \neg Q; R$

Die durch den rechten Endknoten repräsentierte Formelmenge $\{P; \neg Q; R\}$ hat offenbar die erfüllende Bewertung Φ mit $\Phi(P) = 1$, $\Phi(Q) = 1 - \Phi(\neg Q) = 0$ und $\Phi(R) = 1$. Sicherlich erfüllt Φ auch jeden Vorgängerknoten, insbesondere auch die Formelmenge $\mathcal{X}$. Für die beiden anderen Endknoten können jedoch keine erfüllenden Bewertungen Φ'_1 und Φ'_2 angegeben werden, da $\Phi'(P') \neq \Phi'(\neg P')$ für jede Bewertung Φ'.

2. Wir wollen die Unerfüllbarkeit von $\mathcal{X} = \{P; \neg P \vee Q; \neg Q\}$ zeigen:

$P; \neg P \vee Q; \neg Q$

$P; \neg P; \neg Q$ $\qquad$ $P; Q; \neg Q$

Offensichtlich gibt es für keinen Endknoten erfüllende Bewertungen.

2.1 Tableaux

Formal können wir Tableaux folgendermaßen einführen:

Definition 2.1 *Ein endlicher binärer Baum τ, dessen Knoten endliche Formelmengen sind, heisst ein Tableau für $\mathcal{X}_0$ (mit $\mathcal{X}_0$ endliche Formelmenge in der Funktorbasis $\mathfrak{B}$), falls gilt:*

1. *$\mathcal{X}_0$ ist Wurzel von τ*
2. *der Übergang von einem Knoten zu dem (bzw. den beiden) nachfolgenden Knoten vollzieht sich ausschließlich gemäss einer der folgenden Regeln:*

$$\frac{\mathcal{X}; \neg\neg P}{\mathcal{X}; P}, \frac{\mathcal{X}; P \wedge Q}{\mathcal{X}; P; Q}, \frac{\mathcal{X}; P \vee Q}{\mathcal{X}; P \mid \mathcal{X}; Q}, \frac{\mathcal{X}; \neg(P \wedge Q)}{\mathcal{X}; \neg P \mid \mathcal{X}; \neg Q}, \frac{\mathcal{X}; \neg(P \vee Q)}{\mathcal{X}; \neg P; \neg Q}$$

3. *geschlossene Knoten (d.h. die Formelmenge enthält mindestens eine Formel und gleichzeitig deren Negation) sind Endknoten.*
4. *auf nichtgeschlossene Endknoten von τ ist eine weitere Anwendung der Regeln unmöglich*

Ein Tablau τ heisst geschlossen, wenn sämtliche Endknoten von τ geschlossen sind.

Schließlich stellt sich die Frage, ob zu jeder endlichen Formelmenge ein Tablau angegeben werden kann. Das dies möglich ist, zeigt folgender

Satz 2.2 *Zu jeder endlichen Formelmenge $\mathcal{X}$ existiert mindestens ein Tableau.*

Beweis.

Nach Voraussetzung ist $\mathcal{X}$ endlich. Da die einzelnen Formeln von $\mathcal{X}$ beim Abarbeiten gemäß den angegebenen Regeln verkürzt werden terminiert das Verfahren. Allerdings liegt kein Determinismus vor, da bei der Anwendbarkeit mehrerer Regeln eine beliebige ausgewählt werden kann.

□

2.2 Konsistenz und Beweisbarkeit

Ist eine Formelmenge $\mathcal{X}$ über der Funktorbasis $\mathfrak{B}$ erfüllbar, so existiert offenbar mindestens ein nichtgeschlossenes Tableau zu $\mathcal{X}$. Dieser Umstand motiviert folgende

Definition 2.3 *$\mathcal{X}$ heisst konsistent im T-Kalkül, wenn kein geschlossenes Tableau für $\mathcal{X}$ existiert, ansonsten heisst $\mathcal{X}$ inkonsistent im T-Kalkül. Eine Formel P heisst beweisbar im T-Kalkül, wenn $\{\neg P\}$ inkonsistent im T-Kalkül ist.*

Beispiel.

Es sei $T = (P \wedge Q) \vee (\neg P \vee \neg Q)$. Um T im T-Kalkül zu beweisen, zeigen wir die Inkonsistenz von $\{\neg T\}$:

$$\begin{array}{ccc}
 & \neg((P \wedge Q) \vee (\neg P \vee \neg Q)) & \\
 & \mid & \\
 & \neg(P \wedge Q); \neg(\neg P \vee \neg Q) & \\
\neg P; \neg(\neg P \vee \neg Q) & & \neg Q; \neg(\neg P \vee \neg Q) \\
\mid & & \mid \\
\neg P; \neg\neg P; \neg\neg Q & & \neg Q; \neg\neg P; \neg\neg Q \\
\mid & & \mid \\
\neg P; P; Q & & \neg Q; P; Q
\end{array}$$

2.3 Korrektheit des T-Kalküls

Wir zeigen nun die die Korrektheit des T-Kalküls:

Lemma 2.4 *Jede endliche, erfüllbare Formelmenge $\mathcal{X}$ ist T-konsistent.*

Beweis.

Sei τ ein beliebiges Tableau für $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ ein Knoten in τ. Wir zeigen zunächst:

Ist $\mathcal{Y}$ erfüllbar, so ist auch der Nachfolgeknoten (falls genau einer existiert) bzw. einer der beiden Nachfolgeknoten erfüllbar. Ist umgekehrt der Nachfolgeknoten oder wenigstens einer der beiden Nachfolgeknoten von $\mathcal{Y}$ erfüllbar, so ist auch $\mathcal{Y}$ erfüllbar.

Da der Übergang von einem Knoten zu dem nachfolgenden bzw. den beiden nachfolgenden Knoten ausschließlich gemäß einer der fünf definierten Regeln erfolgt, genügt es, die Verträglichkeit dieser Regeln mit der obigen Behauptung nachzuweisen. Sei also $\frac{\mathcal{X}';P_1}{\mathcal{X}';P_2}$ bzw. $\frac{\mathcal{X}';P_1}{\mathcal{X}';P_2 \mid \mathcal{X}';P_3}$ die beim Übergang verwendete Regel und Φ eine Bewertung mit $\Phi(\mathcal{X}') = 1$. Dann gilt

- $\Phi(\neg\neg P) = 1$ gdw. $1 - (1 - \Phi(P)) = 1$ gdw $\Phi(P) = 1$.
- $\Phi(P \wedge Q) = 1$ gdw. $min(\Phi(P), \Phi(Q)) = 1$ gdw. $\Phi(P) = \Phi(Q) = 1$
- $\Phi(P \vee Q) = 1$ gdw. $max(\Phi(P), \Phi(Q)) = 1$ gdw. $\Phi(P) = 1$ oder $\Phi(Q) = 1$
- $\Phi(\neg(P \wedge Q)) = 1$ gdw. $\Phi(P \wedge Q) = 0$ gdw. $\Phi(P) = 0$ oder $\Phi(Q) = 0$ gdw. $\Phi(\neg P) = 1$ oder $\Phi(\neg Q) = 1$
- $\Phi(\neg(P \vee Q)) = 1$ gdw. $\Phi(P \vee Q) = 0$ gdw. $\Phi(P) = \Phi(Q) = 0$ gdw. $\Phi(\neg P) = \Phi(\neg Q) = 1$

Damit folgt die Existenz eines Weges in τ, der von der erfüllbaren Wurzel $\mathcal{X}$ über lauter erfüllbare Knoten bis zu einem erfüllbaren Endknoten führt. Da ein erfüllbarer Endknoten aber nicht geschlossen sein kann, folgt somit unmittelbar die T-Konsistenz der Formelmenge $\mathcal{X}$.

□

2.4 Adäquatheit

Anschaulich ist klar, dass die T-konsistenten Formelmengen mit den erfüllbaren Mengen übereinstimmen. Dies ist auch die Aussage des Adäquatheitssatzes:

Satz 2.5 (Adäquatheitssatz) *Eine endliche Formelmenge $\mathcal{X}$ ist T-konistent genau dann, wennn $\mathcal{X}$ erfüllbar ist.*

Beweis.

Wir haben bereits im Lemma 2.4 gezeigt, dass jede endliche, erfüllbare Formelmenge $\mathcal{X}$ T-konsistent ist. Sei also $\mathcal{X}$ eine endliche, T-konsistente Formelmenge und τ ein Tableau für $\mathcal{X}$. Da $\mathcal{X}$ T-konsistent, ist τ ein nichtgeschlossenes Tableau. Also existiert mindestens ein nichtgeschlossener Endknoten $\mathcal{Y}$ auf den eine weitere Regelanwendung unmöglich ist. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn er aus Variablen oder negierten Variablen besteht. Offenbar ist durch $\Phi(P) = 1$ gdw. $P \in \mathcal{Y}$ eine erfüllende Bewertung für $\mathcal{Y}$ definiert. Aus dem Beweis zum Lemma 2.4 wissen wir, dass eine Bewertung Φ einen Knoten erfüllt, falls Φ mindestens einen Nachfolgeknoten erfüllt. Betrachten wir den vom Endknoten $\mathcal{Y}$ zur Wurzel $\mathcal{X}$ führende Rückweg in τ, so erfüllt Φ also sämtliche Knoten dieses Weges. Insbesondere erfüllt Φ damit die Wurzel $\mathcal{X}$.

□

2.5 Erweiterbarkeit

Bisher haben wir uns auf $\mathfrak{B} := \{\neg, \wedge, \vee\}$ als Funktorbasis beschränkt. Da logische Formeln oftmals Implikationen und Äquivalenzen enthalten, stellt sich die Frage wie Formelmengen über einer erweiterten Funktorbasis im T-Kalkül behandelt werden können. Antwort darauf gibt uns der folgende

Satz 2.6 *Sei $\mathfrak{B}' \supseteq \mathfrak{B}$ eine Erweiterung der Funktorbasis $\mathfrak{B}$. Dann gilt auch bei Erweiterung der Regelmenge mit den (auf der Funktorbasis $\mathfrak{B}$ operierenden) Zerlegungsregeln der Funktoren aus $\{\mathfrak{B}' \setminus \mathfrak{B}\}$ der Adäquatheitssatz.*

Beweis.

Erweitert man die Funkturbasis $\mathfrak{B}$ und die angegebene Regelmenge gemäß der Satzvoraussetzung, so handelt es sich bei den neuen Regeln nur um abkürzende Reglements auf Basis der bereits existierenden. Also gilt auch dann der Adäquatheitssatz. Vorausgesetzt wird selbstverständlich, dass die Zerlegungsregeln korrekt sind. Dies kann aber im allgemeinen leicht nachgerechnet werden.

$\square$

Beispiel.

Sei $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B} \cup \{\rightarrow\}$ eine Erweiterung der Funktorbasis $\mathfrak{B}$. Wegen $P \rightarrow Q := \neg P \vee Q$ wird die Regelmenge um die Zerlegungsregeln

$$\frac{\mathcal{X}; P \rightarrow Q}{\mathcal{X}; \neg P \mid \mathcal{X}; Q}$$

und

$$\frac{\mathcal{X}; \neg(P \rightarrow Q)}{\mathcal{X}; P; \neg Q}$$

ergänzt. Wir wollen die Korrektheit der angegebenen Zerlegungsregeln voraussetzen (diese kann leicht durch Nachrechnen gezeigt werden) und damit die Gültigkeit der Kontrapositionsregel

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$$

zeigen:

$$\begin{array}{ccc}
 & \neg((P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)) & \\
 & | & \\
 & (P \rightarrow Q); \neg(\neg Q \rightarrow \neg P) & \\
 & | & \\
 & (P \rightarrow Q); \neg Q; \neg\neg P & \\
 & | & \\
 & (P \rightarrow Q); \neg Q; P & \\
 \swarrow & & \searrow \\
\neg P; \neg Q; P & & Q; \neg Q; P
\end{array}$$

3 Der Kalkül des natürlichen Schließens

Es gibt viele Kalküle, in der eine vollständige, syntaktische Charakterisierung der semantisch definierten Folgerungsrelation $\models$ stattfindet. Die Regeln dieser Kalküle beziehen sich auf eine Relation $\vdash$ zwischen Formelmengen $\mathcal{X}$ und Formeln P. Als Vertreter eines (reinen) Regel-Kalküls betrachten wir nun das *Kalkül des natürlichen Schließens* (S-Kalkül).

3.1 Das Regelsystem des S-Kalküls

Kennzeichnend für reine Regelsysteme ist, dass diese nur Schlußregeln und keine Axiome verwenden:

Definition 3.1 *Seien P, Q, R beliebige Formeln. Dann besteht das Regelsystem des S-Kalküls aus folgenden Regeln:*

$$(\to a)\,\frac{\mathcal{X} \vdash P \parallel \mathcal{X} \vdash P \to Q}{\mathcal{X} \vdash Q}, \quad (\wedge a)\,\frac{\mathcal{X}; P \wedge Q}{\mathcal{X} \vdash P, Q}, \quad (\vee a)\,\frac{\mathcal{X}; P \vdash R \parallel \mathcal{X}; Q \vdash R}{\mathcal{X}; P \vee Q \vdash R},$$

$$(\to b)\,\frac{\mathcal{X}; P \vdash Q}{\mathcal{X} \vdash P \to Q}, \quad (\wedge b)\,\frac{\mathcal{X} \vdash P, Q}{\mathcal{X}; P \wedge Q}, \quad (\vee b)\,\frac{\mathcal{X} \vdash P}{\mathcal{X} \vdash P \vee Q, Q \vee P},$$

$$(\neg k)\,\frac{\mathcal{X}; \neg P \vdash Q, \neg Q}{\mathcal{X} \vdash P}$$

3.2 Die Ableitungsrelation des S-Kalküls

Es stellt sich nun die Frage, wie logische Konsequenzen einer Formelmenge $\mathcal{X}$ unter Verwendung der angegebenen Regeln hergeleitet werden können. Dazu betrachten wir die folgenden Beispiele:

- Trivialerweise gilt $\{P, P \to Q\} \vdash P, P \to Q$. Anwendung der Regel $(\to a)$ liefert $\{P, P \to Q\} \vdash Q$. Wegen $\{P, P \to Q\} \vdash P$ gilt nach Anwendung der Regel $(\wedge b)$
$$\{P, P \to Q\} \vdash P \wedge Q.$$
- Die Abschlußregel
$$\frac{\mathcal{X} \vdash P \parallel \mathcal{X}; P \vdash Q}{\mathcal{X} \vdash Q}$$
können wir folgendermaßen herleiten: Die Anwendung der Regel $(\to b)$ auf die Prämisse $\mathcal{X}; P \vdash Q$ liefert $\mathcal{X} \vdash P \to Q$. Durch Anwendung der Regel $(\to a)$ folgt somit $\mathcal{X} \vdash Q$.

Die angegebenen Beispiele zeigen den Weg, wie der Begriff der Ableitbarkeit im S-Kalkül definiert werden kann:

Definition 3.2 *Ist $P \in \mathcal{X}$, so heisst P <u>0-stufig</u> aus $\mathcal{X}$ ableitbar, symbolisch $\mathcal{X} \vdash_0 P$, und das Paar $(\mathcal{X}, P)$ heisst <u>0-stufige Ableitungsbeziehung</u>. Sei $n > 0 \in \mathbb{N}$ und der Begriff der k-stufigen Ableitungsbeziehung für alle $k < n$ erklärt. Dann ist P <u>n-stufig</u> aus $\mathcal{X}$ ableitbar, symbolisch $\mathcal{X} \vdash_n P$, und das Paar $(\mathcal{X}, P)$ heisst <u>n-stufige Ableitungsbeziehung</u>, wenn dieses Paar das Ergebnis einer Anwendung einer S-Kalkül-Regel auf Ableitbarkeitsbeziehungen der Stufe $k < n$ ist.*

<u>Beispiel.</u>

Offenbar gilt $\{P, P \to Q\} \vdash_1 Q$. Ist aber $P = Q$, so gilt trivialerweise auch $\{P, P \to Q\} \vdash_0 Q$. Die Ableitungsstufe ist also im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

Basierend auf der Definition der n-stufigen Ableitungsbeziehung können wir nun den Begriff der Ableitbarkeit einführen:

Definition 3.3 *Die Formel P heisst aus der Formelmenge $\mathcal{X}$ <u>ableitbar</u>, symbolisch $\mathcal{X} \vdash P$, wenn $\mathcal{X} \vdash_n P$ für mindestens ein $n \in \mathbb{N}$.*

3.3 Grundeigenschaften der Ableitungsrelation

Im folgenden Satz wollen wir wichtige Eigenschaften der Ableitungsrelation herausstellen:

Satz 3.4 *Seien $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$ Formelmengen und P, Q Formeln. Dann gilt:*

i) Aus $\mathcal{X} \vdash P$ und $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}'$ folgt: $\mathcal{X}' \vdash P$ (Monotoniesatz)

ii) Es gilt $\mathcal{X}; P \vdash Q$ genau dann, wenn $\mathcal{X} \vdash P \to Q$ gilt. (Deduktionstheorem)

iii) Gilt $\mathcal{X} \vdash P$, so existiert eine endliche Teilmenge $\mathcal{X}' \subseteq \mathcal{X}$ mit $\mathcal{X}' \vdash P$. (Endlichkeitssatz)

Beweis.

ad i) Sei $\mathcal{X} \vdash_0 P$, d.h. $P \in \mathcal{X}$. Dann folgt $P \in \mathcal{X}'$ und somit $\mathcal{X}' \vdash P$. Sei also $\mathcal{X} \vdash_n P$.
Im Fall $(\to a)$ gibt es eine Formel Q und $\mathbb{N} \ni \mathrm{k}, \mathrm{m} \leq \mathrm{n}$ mit $\mathcal{X} \vdash_k Q$ und $\mathcal{X} \vdash_m Q \to P$. Da nach Induktionsvoraussetzung $\mathcal{X}' \vdash Q$ und $\mathcal{X}' \vdash Q \to P$ gilt, folgt durch Anwendung der Regel $(\to a)$ $\mathcal{X}' \vdash P$.
Im Fall $(\to b)$ ist P von der Form $Q \to R$ und es gilt $\mathcal{X}; Q \vdash_k R$ mit $\mathbb{N} \ni \mathrm{k} \leq \mathrm{n}$. Wegen $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}'$ gilt auch $\mathcal{X} \cup \{Q\} \subseteq \mathcal{X}' \cup \{Q\}$, also nach Induktionsvoraussetzung auch $\mathcal{X}'; Q \vdash R$. Durch Andwendung von Regel $(\to b)$ folgt $\mathcal{X}' \vdash P$. Die übrigen Fälle des Induktionsschrittes verlaufen analog.

ad ii) Sei $\mathcal{X}; P \vdash Q$. Durch Anwendung von Regel $(\to b)$ folgt $\mathcal{X} \vdash P \to Q$. Sei also $\mathcal{X} \vdash P \to Q$. Dann gilt nach dem Monotoniesatz auch $\mathcal{X}; P \vdash P \to Q$. Wegen $\mathcal{X}; P \vdash P$ gilt durch Anwendung von Regel $(\to a)$ $\mathcal{X}; P \vdash Q$.

ad iii) Sei $\mathcal{X} \vdash_0 P$, d.h. $P \in \mathcal{X}$. Dann gilt $\mathcal{X}' := \{P\} \subseteq X$ und $\mathcal{X}' \vdash P$. Sei also $\mathcal{X} \vdash_n P$ mit $n > 0$. Dann gibt es eine Formel Q mit $\mathcal{X} \vdash_{n-1} Q \vdash_1 P$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert $\mathcal{X}_Q$ mit $\mathcal{X}_Q \subseteq \mathcal{X}$, $\mathcal{X}_Q$ endlich und P entsteht durch Anwendung der Regel R_P auf $\{\mathcal{X}; \mathcal{X}_Q\}$. Sei nun $\mathcal{X}_\delta$ die bei der Regel R_P verwendeten Prämissen aus $\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_Q$. Dann gilt $\mathcal{X}_\delta$ endlich. Somit gilt $\mathcal{X}' := \mathcal{X}_Q \cup \mathcal{X}_\delta \subseteq \mathcal{X}$ endlich und $\mathcal{X}' \vdash P$.

□

3.4 Korrektheit des S-Kalküls

Wir wollen nun zeigen, dass das Regelsystem des S-Kalküls korrekt ist, d.h. dass aus einer Formelmenge $\mathcal{X}$ keine Formelmenge abgeleitet werden kann, die nicht schon semantisch aus $\mathcal{X}$ folgt. Dazu beweisen wir den folgenden

Satz 3.5 *Sei $\mathcal{X}$ eine Formelmenge und P eine Formel. Dann gilt: Aus $\mathcal{X} \vdash P$ folgt $\mathcal{X} \models P$.*

Beweis.

Den Beweis führen wir durch Induktion über die Ableitungsstufe. Sei $\mathcal{X} \vdash_0 P$, also $P \in \mathcal{X}$. Dann gilt trivialerweise $\mathcal{X} \models P$. Sei also $\mathcal{X} \vdash_n P$ mit $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Nach Induktionsvoraussetzung wissen wir, dass für alle $k < n$ aus $\mathcal{X} \vdash_k P$ auch $\mathcal{X} \models P$ folgt. Können wir nun für jede Schlußregel die Folgerungserblichkeit nachweisen, so wäre alles gezeigt. Wurde beispielsweise die Regel $(\to a)$ angewendet, so gilt $\mathcal{X} \vdash_k Q$ und $\mathcal{X} \vdash_k Q \to P$ für eine gewisse Formel Q und $\mathbb{N} \ni \mathrm{k}, \mathrm{m} < \mathrm{n}$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\mathcal{X} \models Q$ und $\mathcal{X} \models Q \to P$ und somit die Behauptung $\mathcal{X} \models P$. Analog können wir in den übrigen Fällen verfahren. Darauf sei an dieser Stelle verzichtet.

□

3.5 Konsistenz und Beweisbarkeit

Ist aus einer Formelmenge $\mathcal{X}$ gleichzeitig eine Formel Q und deren Negation herleitbar, so gilt nach dem Monotoniesatz auch $\mathcal{X}; \neg P \vdash Q, \neg Q$. Die Anwendung der Regel $(\neg k)$ liefert dann $\mathcal{X} \vdash P$. Dies motiviert folgende

Definition 3.6 *Eine Formelmenge $\mathcal{X}$ heisst <u>konsistent</u> im S-Kalkül, wenn nicht jede Formel aus $\mathcal{X}$ ableitbar ist. Andernfalls heisst $\mathcal{X}$ <u>inkonsistent</u> im S-Kalkül. Die Formel P heisst <u>beweisbar</u> im S-Kalkül, symbolisch $\vdash P$, wenn $\emptyset \vdash P$ gilt.*

Dass die Ableitbarkeit einer Formel auch durch deren Konsistenz ausgedrückt werden kann, zeigt der folgende

Satz 3.7 *Sei $\mathcal{X}$ eine Formelmenge und P eine Formel. Es gilt $\mathcal{X} \vdash P$ genau dann, wenn $\mathcal{Y} := X \cup \{\neg P\}$ S-inkonsistent ist.*

<u>Beweis.</u>

Sei $\mathcal{X} \vdash P$. Dann gilt nach Monotoniesatz auch $\mathcal{X} \cup \{\neg P\} \vdash P$ und somit $\mathcal{Y} \vdash P$. Offenbar gilt aber auch $\mathcal{Y} \vdash \neg P$ und somit ist $\mathcal{Y}$ S-inkonsistent. Durch Anwendung der Regel $(\neg k)$ folgt aus der S-Inkonstistenz von $\mathcal{Y}$, wieder $\mathcal{X} \vdash P$.

$\square$

Satz 3.8 (und Beispiel) *Im S-Kalkül gelten*

i) $\mathcal{X} \vdash P \to \neg\neg P$ *und* $\mathcal{X} \vdash \neg\neg P \to P$.

ii) die Kontrapositionsregeln

(CP1) $\frac{\mathcal{X} \vdash P \to Q}{\mathcal{X} \vdash \neg Q \to \neg P}$,

(CP2) $\frac{\mathcal{X} \vdash P \to \neg Q}{\mathcal{X} \vdash Q \to \neg P}$,

(CP3) $\frac{\mathcal{X} \vdash \neg P \to Q}{\mathcal{X} \vdash \neg Q \to P}$,

(CP4) $\frac{\mathcal{X} \vdash \neg P \to \neg Q}{\mathcal{X} \vdash Q \to P}$

<u>Beweis.</u>

ad i) Sicherlich gilt $\mathcal{X}; \neg\neg P; \neg P \vdash \neg P, \neg\neg P$. Also $\mathcal{X}; \neg\neg P \vdash P$ nach Regel $(\neg k)$. Damit gilt dann auch $\mathcal{X}; \neg\neg(\neg P) \vdash (\neg P)$. Die Anwendung des Monotoniesatzes liefert $\mathcal{X}; P; \neg(\neg\neg P) \vdash (\neg P)$ und somit $\mathcal{X}; P; \neg(\neg\neg P) \vdash (\neg P), P$. Die Anwendung der Regel $(\neg k)$ liefert dann $\mathcal{X}; P \vdash \neg\neg P$. Wenden wir auf $\mathcal{X}; \neg\neg P \vdash P$ und $\mathcal{X}; P \vdash \neg\neg P$. das Deduktionstheorem an, so erhalten wir das gewünschte.

ad ii) Sei $\mathcal{X} \vdash P \to Q$. Nach dem Deduktionstheorem gilt $\mathcal{X}; P \vdash Q$ und somit auch $\mathcal{X}; \neg Q; P \vdash Q, \neg Q$. Mit dem Monotoniesatz folgt $\{\mathcal{X}; \neg Q; \neg\neg P\}; P \vdash Q, \neg Q$. Die Anwendung des Deduktionstheorems liefert nun $\{\mathcal{X}; \neg Q; \neg\neg P\} \vdash P \to Q$ und $\{\mathcal{X}; \neg Q; \neg\neg P\} \vdash P \to \neg Q$. Der auf i) angewendete Monotoniesatz liefert $\{\mathcal{X}; \neg Q; \neg\neg P\} \vdash P$ und somit folgt schließlich nach Regel $(\to a)$ $\{\mathcal{X}; \neg Q; \neg\neg P\} \vdash Q, \neg Q$. Regel $(\neg k)$ liefert nun $\mathcal{X}; \neg Q \vdash \neg P$. Mit dem Deduktionstheorem folgt dann $\mathcal{X} \vdash \neg Q \to \neg P$. Die übrigen Fälle können analog bewiesen werden.

$\square$

3.6 Äquivalenz von S-Konsistenz und T-Konsistenz

Für endliche Formelmengen bedeuten S-Konsistenz und T-Konsistenz dasselbe. Damit wir dies allerdings beweisen können, benötigen wir das folgende

Lemma 3.9 *Sei $\mathcal{X}$ eine Formelmenge und P, Q, R Formeln. Dann gilt :*

i) Aus $\mathcal{X}; P; Q \vdash R$ und $\mathcal{X} \vdash P, Q$ folgt: $\mathcal{X} \vdash R$.

ii) Die folgenden Schlußregeln sind aus den Grundschlußregeln des S-Kalküls herleitbar:

$$\frac{\mathcal{X}; P \vdash R}{\mathcal{X}; \neg\neg P \vdash R}, \frac{\mathcal{X}; P; Q \vdash R}{\mathcal{X}; P \wedge Q \vdash R}, \frac{\mathcal{X}; P \vdash R \parallel \mathcal{X}; Q \vdash R}{\mathcal{X}; P \vee Q \vdash R},$$

$$\frac{\mathcal{X}; \neg P \vdash R \parallel \mathcal{X}; \neg Q \vdash R}{\mathcal{X}; \neg(P \wedge Q) \vdash R}, \frac{\mathcal{X}; \neg P; \neg Q \vdash R}{\mathcal{X}; \neg(P \vee Q) \vdash R}$$

iii) Eine endliche T-inkonsistente Formelmenge $\mathcal{X}$ ist S-inkonsistent.

Beweis.

ad i) Zweimalige Anwendung der Regel $(\rightarrow b)$ liefert $\mathcal{X} \vdash P \rightarrow Q \rightarrow R$. Durch wiederholte Anwendung der Regel $(\rightarrow a)$ folgt schließlich $\mathcal{X} \vdash R$.

ad ii) 1. Sei $\mathcal{X}; P \vdash R$. Dann gilt nach dem Deduktionstheorem $\mathcal{X} \vdash P \rightarrow R$. Die Anwendung der Kontrapositionsregel (CP1) liefert $\mathcal{X} \vdash \neg R \rightarrow (\neg P)$. Damit folgt nach Kontrapositionsregel (CP3) $\mathcal{X} \vdash \neg(\neg P) \rightarrow R$. Das Deduktionstheorem liefert dann $\mathcal{X}; \neg\neg P \vdash R$.
2. Sei $\mathcal{X}; P; Q \vdash R$. Somit gilt $\{\mathcal{X}; P \wedge Q\}; P; Q \vdash R$ nach dem Monotoniesatz. Wegen $(\mathcal{X}; P \wedge Q) \vdash P, Q$ folgt dann aus i) $\mathcal{X}; P \wedge Q \vdash R$.
3. Diese Schlußregel ist bereits Regel des S-Kalküls (Regel $(\vee a)$).
4. Sei $\mathcal{X}; \neg P \vdash R$ und $\mathcal{X}; \neg Q \vdash R$. Dann gilt nach Anwendung des Deduktionstheorem und der Kontrapositionsregel (CP3) $\mathcal{X} \vdash \neg R \rightarrow P$ und $\mathcal{X} \vdash \neg R \rightarrow Q$. Durch Anwendung des Deduktionstheorems und der Regel $(\wedge b)$ folgt $\mathcal{X}; \neg R \vdash P \wedge Q$. Die erneute Anwendung des Deduktionstheorems und der Kontrapositionsregel (CP3) liefert $\mathcal{X} \vdash \neg(P \wedge Q) \rightarrow R$. Somit gilt nach dem Deduktionstheorem $\mathcal{X}; \neg(P \wedge Q) \vdash R$.
5. Trivialerweise gilt $\mathcal{X}; P \vdash P$ und $\mathcal{X}; Q \vdash Q$. Die Anwendung von Regel $(\vee b)$ liefert $\mathcal{X}; P \vdash P \vee Q$ und $\mathcal{X}; Q \vdash P \vee Q$. Somit gilt nach dem Deduktionstheorem $\mathcal{X} \vdash P \rightarrow (P \vee Q)$ und $\mathcal{X} \vdash Q \rightarrow (P \vee Q)$. Die Anwendung der Kontrapositionsregel (CP1) liefert dann $\mathcal{X} \vdash \neg(P \vee Q) \rightarrow \neg P$ und $\mathcal{X} \vdash \neg(P \vee Q) \rightarrow \neg Q$. Also gilt $\mathcal{X}; \neg(P \vee Q) \vdash \neg P, \neg Q$ nach dem Deduktionstheorem. Aus der Voraussetzung $\mathcal{X}; \neg P; \neg Q \vdash R$ folgt nach dem Monotoniesatz $\mathcal{X}; \neg(P \vee Q); \neg P; \neg Q \vdash R$ und damit nach i) $\mathcal{X}; \neg(P \vee Q) \vdash R$.

ad iii) Ist $\mathcal{X}$ T-inkonsistent, so existiert ein geschlossenes Tableau τ für $\mathcal{X}$. Insbesondere sind dann sämtliche Knoten von τ T-inkonsistent. Wir zeigen nun, dass sämtliche Knoten von τ auch S-inkonsistent sind.
Offenbar gilt dies für die geschlossenen Endknoten von τ, denn es ist (wie wir bereits gesehen haben) jede Menge S-inkonsistent, wenn sie gleichzeitig eine Formel und deren Negation enthält. Sei also $\mathcal{Y}$ ein Knoten von τ, der kein Endknoten ist. Desweiteren sei der Nachfolgeknoten $\mathcal{Y}_1$ bzw. die beiden Nachfolgeknoten $\mathcal{Y}_1$ und $\mathcal{Y}_2$ S-inkonsistent. Der Satz wäre somit bewiesen, wenn wir zeigen können, dass dann auch $\mathcal{Y}$ eine S-inkonsistente Menge ist.
Da sich bei einem Tableau gemäß Definition der Übergang von einem Knoten zu dem (bzw. den beiden) nachfolgenden Knoten ausschließlich gemäss einer der Regeln

$$\frac{\mathcal{X}; \neg\neg P}{\mathcal{X}; P}, \frac{\mathcal{X}; P \wedge Q}{\mathcal{X}; P; Q}, \frac{\mathcal{X}; P \vee Q}{\mathcal{X}; P \mid \mathcal{X}; Q}, \frac{\mathcal{X}; \neg(P \wedge Q)}{\mathcal{X}; \neg P \mid \mathcal{X}; \neg Q}, \frac{\mathcal{X}; \neg(P \vee Q)}{\mathcal{X}; \neg P; \neg Q}$$

vollzieht, müssen wir nur diese Entstehungsfälle betrachten. Die Schlußregeln aus ii) entsprechen also gerade den zu betrachtenen Fällen. Setzen wir hier für R den Spezialfall $R = R_1 \wedge \neg R_1$ ein, so gilt offenbar: Ist der Nachfolgeknoten $\mathcal{Y}_1$ bzw. die beiden Nachfolgeknoten $\mathcal{Y}_1$ und $\mathcal{Y}_2$ S-inkonsistent, so ist auch $\mathcal{Y}$ S-inkonsistent. Damit ist alles gezeigt.

□

Nun können wir endlich die Äquivalenz der beiden Konsistenzbegriffe zeigen:

Satz 3.10 *Für endliche Formelmengen gilt die Äquivalenz von S-Konsistenz und T-Konsistenz.*

Beweis.

Aus einer endlichen, S-inkonsistenten Menge ist jede Formel ableitbar. Daher gilt dies insbesondere für eine Formel und deren Negation. Somit ist eine endliche, S-inkonsistente Menge unerfüllbar und damit nach Satz 2.5 T-inkonsistent. Da ferner nach Lemma 3.9 jede endliche und T-inkonsistente Formelmenge S-inkonsistent ist, gilt die Behauptung.

□

3.7 Adäquatheit

In Analogie zum Adäquatheitssatz des T-Kalküls zeigen wir nun, dass die (aus einer Formelmenge $\mathcal{X}$) im S-Kalkül ableitbaren Formeln mit den erfüllbaren Formeln übereinstimmen. Dies gelingt hier sogar für nichtendliche Formelmengen:

Satz 3.11 (Adäquatheitssatz) *Sei $\mathcal{X}$ eine Formelmenge und P eine Formel. Es gilt $\mathcal{X} \models P$ genau dann, wenn die Formel P im S-Kalkül aus der Formelmenge $\mathcal{X}$ ableitbar ist.*

Beweis.

Sei $\mathcal{X}$ eine Formelmenge und P eine Formel. Nach Satz 3.5 gilt: Aus $\mathcal{X} \vdash P$ folgt $\mathcal{X} \models P$. Also müssen wir nur noch zeigen, dass aus $\mathcal{X} \models P$ auch $\mathcal{X} \vdash P$ folgt. Sei also $\mathcal{X} \models P$ und $\mathcal{X}$ zunächst endlich. Dann ist also $\{\mathcal{X}; \neg P\}$ T-inkonsistent gemäß Satz 2.5 (Adäquatheitssatz für den T-Kalkül). Nach Satz 3.10 ist $\{\mathcal{X}; \neg P\}$ somit auch S-inkonsistent. Aus Satz 3.7 folgt damit $\mathcal{X} \vdash P$. Sei nun $\mathcal{X}$ eine unendliche Formelmenge. Nach dem Endlichkeitssatz (Satz 3.4 iii)) gibt es dann eine endliche Teilmenge $\mathcal{X}' \subseteq \mathcal{X}$ mit $\mathcal{X}' \models P$. Nach dem bisher bewiesenen gilt dann $\mathcal{X}' \vdash P$. Nach dem Monotoniesatz (Satz 3.4 i)) gilt somit aber auch $\mathcal{X} \vdash P$. Damit ist alles gezeigt.

□