Lie-Gruppen

Einführung und Grundlagen

Florentine Bunke
Hans Georg Freiermuth
Norbert Göb
Hermann Schönecker
Mathias Schulze

Sommersemester 1996
Wintersemester 1996/1997

Inhaltsverzeichnis

1 Lie-Gruppen: Definition und Beispiele

1.1 Topologische Grundlagen

Definition 1.1 *Ein topologischer Raum M heißt* **zusammenhängend**, *wenn für alle offenen Teilmengen $\emptyset \neq A, B \subset M$ mit $A \cup B = M$ folgt, daß $A \cap B \neq \emptyset$.*

(vgl. [Heuser]).

Definition 1.2 *Eine Teilmenge $A \subset M$ eines topologischen Raumes heißt* **zusammenhägend**, *wenn A in der induzierten Topologie zusammenhägend ist.*

Definition 1.3 *Sei $p \in M$ ein Element eines topologischen Raumes, so heißt die größte zusammenhägende Teilmenge $Z \subset M$ mit $p \in Z$ die* **Zusammenhangskomponente** *von p.*

Lemma 1.4 *Die Zusammenhangskomponenten einer Mannigfaltigkeit M sind offen.*

Ohne Beweis.

Lemma 1.5 *Ein topologischer Raum M ist genau dann zusammenhägend, wenn $M, \emptyset$ die einzigen Mengen sind, die zugleich offen und abgeschlossen sind.*

BEWEIS:

„$\Rightarrow$“ Sei M zusammenhägend, $\emptyset \neq A \subseteq M$ offen und abgeschlossen. (Also $A^C := M \setminus A$ offen). Dann ist $A \cup A^C = M$ und $A \cap A^C = \emptyset$. Da M zusammenhägend ist, kann nur $A^C = \emptyset$ gelten.

„$\Leftarrow$“ Seien $M, \emptyset$ die einzigen offenen und abgeschlossenen Mengen, $\emptyset \neq A, B \subseteq M$ offen mit $A \cup B = M$. Angenommen $A \cap B = \emptyset$. Dann wäre $A = B^C$ offen, d.h. B abgeschlossen. Widerspruch.

□

Lemma 1.6 *Das Bild einer zusammenhägenden Menge unter einer stetigen Abbildung ist zusammenhägend.*

BEWEIS: Sei M zusammenhägend, $f : M \to N$ stetig und surjektiv. Angenommen, N wäre nicht zusammenhägend. Dann gäbe es offene Teilmengen $\emptyset \neq A, B \subset N$ mit $A \cup B = N$, $A \cap B = \emptyset$. Also $f^{-1}(A) =: \mathcal{A}, f^{-1}(B) =: \mathcal{B}$ offen (da f stetig). Da f surjektiv ist, sind $\mathcal{A}, \mathcal{B} \neq \emptyset$ (da $A, B \neq \emptyset$). Sei nun $x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, so ist $f(x) \in A \cap B = \emptyset$, also ist auch $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Sei andererseits $x \in M$. Dann ist $f(x) \in A \cup B$, also $f(x) \in A$ oder $f(x) \in B$, d.h. $x \in \mathcal{A}$ oder $x \in \mathcal{B}$. Daher ist $x \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} = M$.
Daß nun $\emptyset \neq \mathcal{A}, \mathcal{B}$ mit $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = M$ und $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ gefolgert wurde, widerspricht der Tatsache, daß M zusammenhägend ist. Daher muß die Annahme, N sei nicht zusammenhägend, falsch sein und das Lemma 1.6 ist bewiesen.

□

Definition 1.7 *Sei $(M, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ heißt* **Basis von** $\mathcal{O}$, *wenn sich jede offene Menge $O \in \mathcal{O}$ als Vereinigung*

$$\bigcup_{i \in I} B_i = O$$

darstellen läßt, wobei $B_i \in \mathcal{B}$.

1.2 Definition der Lie-Gruppe

Definition 1.8 *Eine Gruppe $(G, \cdot)$, die gleichzeitig eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, heißt* **Lie-Gruppe**, *wenn die Abbildung $G \times G \to G$, $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma\tau^{-1}$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung ist.*

1.3 Direkte Folgen der Definition

Corollar 1.9 *Sei G eine Lie-Gruppe, dann sind*

$$\tau \mapsto \tau^{-1} \quad \textit{und} \quad (\sigma,\tau) \mapsto \sigma\tau$$

$\mathcal{C}^\infty$-Abbildungen.

BEWEIS:

1. $\tau \mapsto \tau^{-1}$ ist die Komposition der $\mathcal{C}^\infty$-Abbildungen $\tau \mapsto (1,\tau) \mapsto 1 \cdot \tau^{-1} = \tau^{-1}$, also ebenfalls eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung.

2. $(\sigma,\tau) \mapsto \sigma\tau$ ist Komposition von $(\sigma,\tau) \mapsto (\sigma,\tau^{-1}) \mapsto \sigma(\tau^{-1})^{-1} = \sigma\tau$ und daher $\mathcal{C}^\infty$.

□

Corollar 1.10 *Sei G eine Lie-Gruppe. Dann gilt:*

1. *die Zusammenhangskomponente $E \subset G$ des neutralen Elements 1 ist ebenfalls eine Lie-Gruppe.*

2. *die Zusammenhangskomponenten von G sind diffeomorph zu E.*

BEWEIS:

1. - E ist zusammenhägend, also ist E nach Lemma 1.4 offen. Daher ist $E \subseteq G$ eine Untermannigfaltigkeit von höchstens gleicher Dimension.
   - E ist Untergruppe von G:
     – Sei $x \in E$. Wegen Corollar 1.9 ist die Abbildung $f : E \to G$, $\xi \mapsto \xi x$ differenzierbar, also insbesondere stetig. Nach Lemma 1.6 ist $f(E)$ zusammenhägend. Wegen $f(1) = x \in E$ ist $f(E) \subseteq E$, wie unmittelbar aus der Definition der Zusammenhangskomponente hervorgeht. Also ist $\forall x,y \in E$ auch $xy \in E$.
     – Analog folgt aus $g : E \to G$, $x \mapsto x^{-1}$ ist $\mathcal{C}^\infty$, daß $g(E) \subseteq E$, denn $g(1) = 1 \in E$. Also ist mit $x \in E$ auch $x^{-1} \in E$.

     Daher ist E Untergruppe von G

   Insgesamt folgt, daß E eine Lie-Gruppe ist.

2. Sei $Z \subseteq G$ eine Zusammenhangskomponente, $z \in Z$ beliebig. Analog zu obigem ist $E \to G$, $\xi \mapsto \xi z$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung. Daher ist ($1 \cdot z = z \in Z$, Lemma 1.6) $Ez \subseteq Z$. Ebenso ist $Z \to G$, $\eta \mapsto \eta z^{-1}$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung, also $Zz^{-1} \subseteq E$. Durch einsetzen sieht man daß die beiden o.g. Abbildungen zueinander invers sind, also Diffeomorphismen zwischen E und Z.

□

Corollar 1.11 *Sei G eine Lie-Gruppe mit höchstens abzählbarer Basis. Dann besteht G aus höchstens abzählbar vielen Zusammenhangskomponenten.*

BEMERKUNG: Bei [Warner] besitzt jede Mannigfaltigkeit per def. eine abzählbare Basis („second countability“). Daher besitzt dort eine Lie-Gruppe insbesondere eine abzählbare Basis.
BEWEIS: Seien $(Z_i)_{i\in I}$ (I eine Indexmenge) die Zusammenhangskomponenten von G, d.h. $G = \dot{\bigcup}_{i\in I} Z_i$.

Sei $\mathcal{B} =: (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Basis von G. Sei $i \in I$. Da Z_i offen ist (Lemma 1.4), ist $Z_i = \bigcup_{k\in K_i} B_k$, $B_k \neq \emptyset$, $\emptyset \neq K_i \subseteq \mathbb{N}$ (sonst $Z_i = \emptyset$). Daher ist

$$\begin{aligned} G &= \dot{\bigcup_{i\in I}} Z_i \\ &= \dot{\bigcup_{i\in I}} \bigcup_{k\in K_i} B_k \\ &= \bigcup_{k\in \bigcup_{i\in I} K_i} B_k \end{aligned}$$

Es ist also $\dot{\bigcup\limits_{i\in I}} K_i \subseteq \mathbb{N}$, denn wäre die Vereinigung nicht disjunkt, so wäre mit $k \in K_i \cap K_j$ für $i,j \in I$ insbesondere $B_k \subseteq Z_i \cap Z_j = \emptyset$, was ein Widerspruch zu $B_k \neq \emptyset$ wäre. Da also $\dot{\bigcup\limits_{i\in I}} K_i \subseteq \mathbb{N}$ ist, kann man I in $\mathbb{N}$ einbetten vermöge $I \hookrightarrow \mathbb{N}$, $i \mapsto \min(K_i)$. Also ist I abzählbar.

□

Lemma 1.12 *Ist G eine zusammenhägende Lie-Gruppe und $U \subseteq G$ eine Umgebung von 1. Dann ist*

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n,$$

wobei $U^n := \left\{ \prod_{i=1}^{n} x_i \mid x_i \in U \right\}$.

Beweis: Sei $V \subseteq U$ offen mit $1 \in V$, s.d. $V^{-1} = V$ ($V^{-1} := \{\sigma^{-1} \mid \sigma \in V\}$). (z.B. $V = U \cap U^{-1} \neq \emptyset$, falls U offen, denn der Schnitt von offenen Mengen ist offen, $1 \in U \cap U^{-1}$, $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ *stetig* also U^{-1} offen). Sei

$$H := \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n.$$

$H \subseteq G$ ist eine Untergruppe, wie man sofort verifiziert. Weiterhin ist V^n ist offen, da $\forall \sigma \in H$ die Abbildung $V \to \sigma V$ stetig ist. Also ist $H \subseteq G$ offen, als Vereinigung offener Mengen. Da H Gruppe ist, ist $x \sim y :\Leftrightarrow xy^{-1} \in H$ eine Äquivalenzrelation. Diese unterteilt H in (disjunkte) Äquivalenzklassen. Also ist

$$H^C = \bigcup_{[x]\neq[1]} xH.$$

Da jedes xH offen ist, ist auch H^C offen. Also ist H offen und zugleich abgeschlossen, $H \neq \emptyset$, G ist zusammenhängend. Also folgt mit Lemma 1.5, daß $H = G$.

□

Corollar 1.13 *Ist G eine zusammenhägende Lie-Gruppe, so hat G eine abzählbare Basis.*

Beweis: Sei $V \subseteq G$ eine Umgebung der 1. Über die Karte $V \overset{\text{stetig}}{\longleftrightarrow} A \subseteq \mathbb{R}^d$ besitzt V eine abzählbare Basis, denn $\mathbb{R}^d$ hat eine abzählbare Basis. Nach dem Lemma 1.12 hat damit auch

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$$

eine abzählbare Basis.

□

Corollar 1.14 *Besteht eine Lie-Gruppe G aus abzählbar vielen Zusammenhangskomponenten, so besitzt G eine abzählbare Basis.*

Beweis: Alle Zusammenhangskomponenten sind diffeomorph zur Komponente der 1 (Corollar 1.10). Diese besitzt wegen Corollar 1.13 eine abzählbare Basis. Da G aus abzählbar vielen abzählbaren Komponenten besteht, ist die Vereinigung der Basen der einzelnen Komponenten wieder abzählbar, also eine abzählbare Basis von G.

□

1.4 Beispiele

Beispiel 1.15 $(\mathbb{R}^n, +)$ *ist eine Lie-Gruppe.*

Beweis: Mit dem Atlas $\{\mathrm{id}\}^\sim$, d.h. mit der Vervollständigung des Atlas, der nur die Identität id auf $\mathbb{R}^n$ enthält, ist $\mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Da die Abbildung $(x,y) \mapsto x - y$ polynomial ist, ist sie insbesondere $\mathcal{C}^\infty$.

□

Beispiel 1.16 $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ *ist eine Lie-Gruppe. ($\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$).*

Beweis: Mit dem Atlas $\{(x + \imath y) \mapsto (x,y)\}^\sim$ ist $\mathbb{C}^*$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Die Gruppenabbildung

$$(x_1 + \imath x_2, y_1 + \imath y_2) \mapsto xy^{-1} = \frac{1}{y_1^2 + y_2^2}(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \imath(x_2 y_1 - x_1 y_2))$$

ist $\mathcal{C}^\infty$, da sie rational und $y \neq 0$ ist.

□

Beispiel 1.17 *Der Einheitskreis $S^1 \subset \mathbb{C}^*$ ist eine Lie-Gruppe mit der Multiplikation auf $\mathbb{C}$.*

Beweis: Sei $p = (0, p_2) \in \{(0,1), (0,-1)\}$, so ist für $x = (x_1, x_2) \neq p$ die Abbildung

$$x \mapsto \frac{p_2 x_1}{p_2 - x_2}$$

eine Karte (stereographische Projektion), die einen $\mathcal{C}^\infty$-Atlas erzeugt. Also ist S^1 eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Die Gruppenoperation $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto xy^{-1} = (x_1 y_1 + x_2 + y_2, x_2 y_1 - x_1 y_2)$ ist $\mathcal{C}^\infty$ (vgl. Beispiel 1.16). Also ist $(S^1, \cdot)$ Lie-Gruppe.

□

Beispiel 1.18 *Seien G, H Lie-Gruppen, so ist $G \times H$ mit den „Produktoperationen" und der Produkt-Struktur als $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit eine Lie-Gruppe.*

Beweis: $G \times H$ ist Hausdorffsch in der Produkttopologie (vgl. Vektoranalysis). Die Produktkarten

$$\begin{aligned} \varphi \times \psi : \quad G \times H &\to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ (x,y) &\mapsto (\varphi(x), \psi(y)) \end{aligned}$$

sind $\mathcal{C}^\infty$. Weiterhin ist die Gruppenoperation

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto (x_1 x_2^{-1}, y_1 y_2^{-1})$$

koordinatenweise, also insgesamt, $\mathcal{C}^\infty$. Daher ist $G \times H$ eine Lie-Gruppe.

□

Beispiel 1.19 *Der n-Torus $(S^1)^n$ ist eine Lie-Gruppe*

Beweis: $(S^1)^n$ ist Lie-Gruppe wegen Beispiel 1.17 und Beispiel 1.18.

□

Beispiel 1.20 *Die Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ der invertierbaren $n \times n$-Matrizen ist mit der Matrix-Multiplikation eine Lie-Gruppe.*

BEWEIS: $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$ ist Hausdorffsch als Teilraum. Für alle $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ ist $\det(A) \neq 0$. Da det als polynomiale Funktion stetig ist, gibt es eine Umgebung $U(A) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $U(A) \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Daher ist $\mathrm{id}_{U(A)}$ eine Karte von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Deshalb ist $\{\mathrm{id}\}^{\sim}$ ein $\mathcal{C}^\infty$-Atlas, also $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Nun zu den Gruppenoperationen: $(A,B) \mapsto A \circ B = \left(\sum_{\lambda=1}^{n} a_{i\lambda} b_{\lambda j}\right)_{ij}$ ist komponentenweise polynomial, also $\mathcal{C}^\infty$. Auch $A \mapsto A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left(\det(A_i^j)\right)_{ij}$ ist als komponentenweise rationale Funktion $\mathcal{C}^\infty$. Damit ist insbesondere die Komposition $(A,B) \mapsto A \circ B^{-1}$ dieser Abbildungen $\mathcal{C}^\infty$ und deshalb $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ Lie-Gruppe.

□

Beispiel 1.21 *Die Menge D der oberen Dreiecksmatrizen in $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist eine Lie-Gruppe.*

BEWEIS: $D \subseteq \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ ist Untermannigfaltigkeit (vgl. Beispiel 1.20). D ist auch Untergruppe von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, denn

$$\begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(\cdot)} \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \end{pmatrix}.$$

Also ist D eine Lie-Gruppe.

□

Beispiel 1.22 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ *ist mit der Operation $(A,x)(B,y) := (AB, Ay + x)$ eine Lie-Gruppe.*

ANSCHAUUNG: Man kann diese Lie-Gruppe als die Gruppe der affinen Abbildungen („Bewegungen“) des $\mathbb{R}^n$ ansehen mit $(A,x) \longleftrightarrow (\xi \mapsto A\xi + x)$. Die Gruppenoperation ist dann lediglich die Komposition dieser Abbildungen.
BEWEIS: Als Produkt zweier Mannigfaltigkeiten ist $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit (vgl. Beispiele 1.15 und 1.20). Mit dem neutralen Element $(\mathrm{id}, 0)$ ist $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ eine Gruppe, da die Operation die Komposition der durch die Elemente gegebenen (invertierbaren) Abbildungen ist. Da die Gruppenoperation $(A,x)(B,y) = (AB, Ax + y)$ komponentenweise linear ist, ist sie auch $\mathcal{C}^\infty$. Wegen $(A,x)(A^{-1}, -A^{-1}x) = (AA^{-1}, A(-A^{-1}x) + x) = (\mathrm{id}, 0)$ ist $(A,x)^{-1} = (A^{-1}, -A^{-1}x)$ und daher ist $(A,x) \mapsto (A,x)^{-1}$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung (vgl. Beweis zu Beispiel 1.20). Also ist $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ eine Lie-Gruppe.

□

Beispiel 1.23 $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ *ist Lie-Gruppe mit $(s_1,t_1)(s_2,t_2) := (s_1 s_2, s_1 t_2 + t_1)$.*

ANSCHAUUNG UND BEWEIS: Dies ist ein Spezialfall von Beispiel 1.22.

□

2 Liealgebren und linksinvariante Vektorfelder

Definition 2.1 VEKTORFELDER
Sei M eine $\mathbb{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit.
Eine Abbildung $X : M \to T(M) := \dot{\bigcup}_{m\in M} T_m M$ mit $X_m := X(m) \in T_m M$, für alle $m \in M$, heißt Vektorfeld auf *M.*
Für eine $\mathbb{C}^\infty$-Funktion $f \in \mathbb{C}^\infty(U)$ auf $U \subset M$ offen, sei die Funktion $X(f)$ durch $X(f)(m) := X(m)(f) = X_m(f)$, für alle $m \in M$, definiert.
X heißt $\mathbb{C}^\infty$, wenn $X(f) \in \mathbb{C}^\infty(U)$, für alle $f \in \mathbb{C}^\infty(U)$ mit $U \subset M$ offen.

Definition 2.2 DIFFERENTIAL
Seien M und N $\mathbb{C}^\infty$-Mannigfaltigkeiten, $m \in M$ und $\phi : M \to N$ eine $\mathbb{C}^\infty$-Abbildung.
Die Abbildung $T_m\phi : T_m M \to T_{\phi(m)} N$ mit $T_m\phi(\xi_m)(g) := \xi_m(g \circ \phi)$, für alle $\xi_m \in T_m M$ und $g \in \mathbb{C}^\infty(U(\phi(m)))$, heißt Differential von *ϕ in m.*
Die Abbildung $T\phi : T(M) \to T(N)$ ist dann punktweise definiert durch $T\phi(\xi_m) := T_m\phi(\xi_m) \in N_{\phi(m)}$, für alle $\xi_m \in T_m M$.

Bemerkung 2.3 *Ist $f \in \mathbb{C}^\infty(M)$ eine $\mathbb{C}^\infty$-Funktion, so bezeichne $d_m f$ das Element $d_m f \in T_m^* M := (T_m M)^*$ des Cotangentialraumes von M in m mit $d_m f(\xi_m) := \xi_m(f)$, für alle $\xi_m \in T_m M$. Durch punktweise Definition $df(\xi_m) := d_m f(\xi_m)$, für alle $\xi_m \in T_m M$, erhält man das* Totale Differential von *f.*
Identifiziert man $\mathbb{R} = T_x\mathbb{R}$ durch $\frac{d}{dr}(x) = 1$, für alle $x \in \mathbb{R}$, so ist

$$\begin{aligned}
T_m f(\xi_m)(g) &= \xi_m(g \circ f) \\
&= \xi_m(f)\tfrac{d}{dr}(f(m))(g), \quad \forall_{\xi_m \in T_m M,\, g \in \mathbb{C}^\infty(U(f(m)))} \\
\Leftrightarrow \quad T_m f(\xi_m) &= d_m f(\xi_m)\tfrac{d}{dr}(f(m)) = d_m f(\xi_m), \quad \forall_{\xi_m \in T_m M} \\
\Leftrightarrow \quad Tf &= df.
\end{aligned}$$

Satz und Definition 2.4 LIE-KLAMMERN
Ist M eine $\mathbb{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit und sind X und Y $\mathbb{C}^\infty$-Vektorfelder auf M.
Dann erhält man durch $[X,Y]_m(\cdot) := X_m(Y(\cdot)) - Y_m(X(\cdot))$, für alle $m \in M$, ein Vektorfeld $[X,Y]$ auf M, das Lie-Klammer *von X und Y heißt.*

BEWEIS:
Seien $U \subset M$ offen, $f, g \in \mathbb{C}^\infty(U)$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ beliebig.
Da $X, Y \in \mathbb{C}^\infty(U)$ ist $X(f), Y(f) \in \mathbb{C}^\infty(U)$ und somit $X_m(Y(f)) - Y_m(X(f))$ definiert.
Wegen

$$\begin{aligned}
X(fg)(m) &= X_m(fg) = f(m)X_m(g) + g(m)X_m(f) \\
&= f(m)X(g)(m) + g(m)X(f)(m) \\
&= (fX(g) + gX(f))(m), \quad \forall_{m\in U}
\end{aligned}$$

ist $X(fg) = fX(g) + gX(f)$ und analog $Y(fg) = fY(g) + gY(f)$.
Mit

$$\begin{aligned}
X(Y(fg)) - Y(X(fg))(m) &= X_m(Y(fg)) - Y_m(X(fg)) \\
&= X_m(fY(g) + gY(f)) - Y_m(fX(g) + gX(f)) \\
&= f(m)X_m(Y(g)) + Y(g)(m)X_m(f) \\
&\quad + g(m)X_m(Y(f)) + Y(f)(m)X_m(g) \\
&\quad - f(m)Y_m(X(g)) - X(g)(m)Y_m(f) \\
&\quad - g(m)Y_m(X(f)) - X(f)(m)Y_m(g) \\
&= f(m)X_m(Y(g)) + Y_m(g)X_m(f) \\
&\quad + g(m)X_m(Y(f)) + Y_m(f)X_m(g) \\
&\quad - f(m)Y_m(X(g)) - X_m(g)Y_m(f) \\
&\quad - g(m)Y_m(X(f)) - X_m(f)Y_m(g) \\
&= f(m)(X_m(Y(g)) - Y_m(X(g))) \\
&\quad + g(m)(X_m(Y(f)) - Y_m(X(f))) \\
&= (f(X(Y(g)) - Y(X(g))) \\
&\quad + g(X(Y(f)) - Y(X(f))))(m), \quad \forall_{m\in U}
\end{aligned}$$

folgt $X(Y(fg))-Y(X(fg)) = f(X(Y(g))-Y(X(g)))+g(X(Y(f))-Y(X(f)))$ und somit $[X,Y](fg) = f[X,Y](g)+g[X,Y](f)$.
Ebenso leicht zeigt man $[X,Y](\lambda f+\mu g) = \lambda[X,Y](f)+\mu[X,Y](g)$.
Also ist $[X,Y]_m \in T_mM$, für alle $m \in M$, und somit $[X,Y]$ ein Vektorfeld auf M.

$\square$

Definition 2.5 Lie-Algebren
Ein $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathfrak{g}$ mit einem bilinearen Operator $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ heißt Lie-Algebra, falls für alle $x,y,z \in \mathfrak{g}$ gilt:

- $[x,y] = -[y,x]$ *(Anti-Kommutativität)*
- $[[x,y],z]+[[z,x],y]+[[y,z],x] = 0$ *(Jakobi-Identität)*

Definition 2.6 Invariante Vektorfelder
Sei G eine Lie-Gruppe.
Für jedes $\sigma \in G$ definiert man die Diffeomorphismen

$$\begin{array}{lll} l_\sigma(\tau) & := \sigma\cdot\tau & \text{(Links-Translation)} \\ r_\sigma(\tau) & := \tau\cdot\sigma & \text{(Rechts-Translation)} \end{array}$$

Sei X ein Vektorfeld auf G.
X heißt links-invariant, wenn $Tl_\sigma \circ X = X \circ l_\sigma$, für alle $\sigma \in G$.
X heißt rechts-invariant, wenn $Tr_\sigma \circ X = X \circ r_\sigma$, für alle $\sigma \in G$.

Satz 2.7 *Sei G eine Lie-Gruppe und $\mathfrak{g}$ die Menge der auf G links-invarianten Vektorfelder. Dann ist $\mathfrak{g}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und die Abbildung $\alpha : \mathfrak{g} \to T_eG$ mit $\alpha(X) = X(e)$ ein Isomorphismus.*

Beweis:

- $\mathfrak{g}$ ist ein <u>$\mathbb{R}$-Vektorraum</u>:
  Definiert man die Addition und $\mathbb{R}$-Skalar-Multiplikation auf $\mathfrak{g}$ punktweise für alle $X,Y \in \mathfrak{g}$ und $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ durch

  $$(\lambda X+\mu Y)(\cdot) := \lambda X(\cdot)+\mu Y(\cdot),$$

  so werden die $\mathbb{R}$-Vektorraumgesetze auf $\mathfrak{g}$ durch die auf den Tangentialräumen induziert.
  Sind $X,Y \in \mathfrak{g}$, so ist

  $$\begin{aligned} Tl_\sigma \circ (\lambda X+\mu Y) &= \lambda Tl_\sigma \circ X + \mu Tl_\sigma \circ Y \\ &= \lambda X \circ l_\sigma + \mu Y \circ l_\sigma \\ &= (\lambda X+\mu Y)\circ l_\sigma \end{aligned}$$

  und daher $\lambda X+\mu Y \in \mathfrak{g}$.

- α ist offensichtlich <u>linear</u>.

- α ist <u>surjektiv</u>:
  Sei $\xi_e \in T_eG$.
  Definiert man das Vektorfeld $X(\tau) := T_el_\tau(\xi_e)$, für alle $\tau \in G$, so ist $X \in \mathfrak{g}$, denn

  $$\begin{aligned} X(l_\sigma(\tau)) &= X(\sigma\tau) \\ &= X(l_{\sigma\tau}(e)) \\ &= T_el_{\sigma\tau}(X(e)) \\ &= T_el_{\sigma\tau}(\xi_e) \\ &= T_e(l_\sigma \circ l_\tau)(\xi_e) \\ &= (T_\tau l_\sigma \circ T_el_\tau)(\xi_e) \\ &= T_\tau l_\sigma(T_el_\tau(\xi_e)) = T_\tau l_\sigma(X(\tau)), \quad \forall_{\tau\in G} \\ \Rightarrow \quad X \circ l_\sigma &= Tl_\sigma \circ X, \end{aligned}$$

und es ist

$$\begin{aligned}\alpha(X) &= X(e)\\ &= T_e l_e(\xi_e) = \xi_e.\end{aligned}$$

- α ist injektiv:
  Seien $X, Y \in \mathfrak{g}$ mit $X(e) = \alpha(X) = \alpha(Y) = Y(e)$.
  Dann ist

$$\begin{aligned} X(\sigma) &= X(\sigma e)\\ &= X(l_\sigma(e))\\ &= Tl_\sigma(X(e))\\ &= Tl_\sigma(Y(e))\\ &= Y(l_\sigma(e))\\ &= Y(\sigma e) = Y(\sigma), \quad \forall_{\sigma\in G}\\ \Rightarrow \quad X &= Y.\end{aligned}$$

Corollar 2.8 $\dim(\mathfrak{g}) = \dim(T_eG) = \dim(G)$.

Bemerkung 2.9 *Sei M eine $\mathbb{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit mit Koordinatenumgebungen $(U, x_1, \ldots, x_n)$ und $(V, y_1, \ldots, y_n)$. $M \times M$ ist dann eine $\mathbb{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit mit den Koordinatenumgebungen $(U \times V, z_1, \ldots, z_{2n})$ mit $z_i(\sigma,\tau) = x_i(\sigma)$ und $z_{n+i}(\sigma,\tau)) = y_i(\tau)$, für alle $i = 1, \ldots, n$, und somit*

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial}{\partial z_i}((\sigma,\tau))f(\cdot,\cdot) &= \tfrac{\partial}{\partial x_i}(\sigma)f(\cdot,\tau)\\ \tfrac{\partial}{\partial z_{n+i}}((\sigma,\tau))f(\cdot,\cdot) &= \tfrac{\partial}{\partial y_i}(\tau)f(\sigma,\cdot),\end{aligned}$$

für alle $(\sigma,\tau) \in U \times V$ und $f \in \mathbb{C}^\infty(U \times V)$.
Seien nun

$$\begin{aligned} X_\sigma &= \textstyle\sum_{i=1}^n \phi_i(\sigma)\frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma), \quad \forall_{\sigma\in U}\\ Y_\tau &= \textstyle\sum_{i=1}^n \psi_i(\tau)\frac{\partial}{\partial y_i}(\tau), \quad \forall_{\tau\in V}\end{aligned}$$

$\mathbb{C}^\infty$-Vektorfelder auf M.
Dann ist $(X,Y)_{(\sigma,\tau)}$ definiert durch

$$\begin{aligned}(X,Y)_{(\sigma,\tau)}(f(\cdot,\cdot)) &:= X_\sigma(f(\cdot,\tau)) + Y_\tau(f(\sigma,\cdot))\\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n \phi_i(\sigma)\frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma)f(\cdot,\tau) + \sum_{i=1}^n \psi_i(\tau)\frac{\partial}{\partial y_i}(\tau)f(\sigma,\cdot)\\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n \phi_i(\sigma)\frac{\partial}{\partial z_i}((\sigma,\tau))f(\cdot,\cdot) + \sum_{i=1}^n \psi_i(\tau)\frac{\partial}{\partial z_{n+i}}((\sigma,\tau))f(\cdot,\cdot)\\ &= \left(\textstyle\sum_{i=1}^n \phi_i(\sigma)\frac{\partial}{\partial z_i} + \sum_{i=1}^n \psi_i(\tau)\frac{\partial}{\partial z_{n+i}}\right)_{(\sigma,\tau)}(f(\cdot,\cdot))\end{aligned}$$

ein $\mathbb{C}^\infty$-Vektorfeld auf $M \times M$.

Satz 2.10 *Sei G eine Lie-Gruppe. Dann sind die auf G links-invarianten Vektorfelder $\mathbb{C}^\infty$.*

Beweis:
Sei $\mathfrak{g}$ die Menge der auf G links-invarianten Vektorfelder, $X \in \mathfrak{g}$ und $f \in \mathbb{C}^\infty(G)$. Wegen

$$\begin{aligned} X(f)(\sigma) &= X(\sigma)(f)\\ &= X(l_\sigma(e))(f)\\ &= Tl_\sigma(X(e))(f)\\ &= Tl_\sigma(X_e)(f) = X_e(f\circ l_\sigma)\end{aligned}$$

ist zu zeigen, daß $\sigma \mapsto X_e(f \circ l_\sigma)$ eine $\mathbb{C}^\infty$-Funktion ist.
Dies geschieht durch Darstellung als Komposition der $\mathbb{C}^\infty$-Abbildungen

$$\begin{aligned} \phi : G\times G \to G, &\quad \phi(\sigma,\tau) &:= \sigma\cdot\tau,\\ (\cdot,\tau) : G \to G\times G, &\quad (\cdot,\tau)(\sigma) &:= (\sigma,\tau),\\ (\sigma,\cdot) : G \to G\times G, &\quad (\sigma,\cdot)(\tau) &:= (\sigma,\tau).\end{aligned}$$

Y sei ein beliebiges $\mathbb{C}^\infty$-Vektorfeld auf G mit $Y(e) = X(e)$.
$(0, Y)$ ist dann ein $\mathbb{C}^\infty$-Vektorfeld auf $G \times G$,
und somit $(0, Y)(f \circ \phi) \circ (\cdot, e)$ eine $\mathbb{C}^\infty$-Funktion auf G.
Nun ist

$$\begin{aligned}
(0,Y)(f\circ\phi)\circ(\cdot,e)(\sigma) &= (0,Y)(f\circ\phi)(\sigma,e)\\
&= (0,Y)_{(\sigma,e)}(f\circ\phi)\\
&= 0_\sigma(f\circ\phi\circ(\cdot,e)) + Y_e(f\circ\phi\circ(\sigma,\cdot))\\
&= X_e(f\circ\phi\circ(\sigma,\cdot)) = X_e(f\circ l_\sigma).
\end{aligned}$$

Satz 2.11 *Sei G eine Lie-Gruppe. Dann ist die Lie-Klammer von zwei auf G links-invarianten Vektorfeldern selbst ein auf G links-invariantes Vektorfeld.*

BEWEIS:
Sei $\mathfrak{g}$ die Menge der auf G links-invarianten Vektorfelder und $X, Y \in \mathfrak{g}$. Nach 2.10 sind dann X und Y $\mathbb{C}^\infty$ und daher ihre Lie-Klammer $[X, Y]$ definiert.
Nun ist

$$\begin{aligned}
Tl_\sigma([X,Y]_m)(f) &= [X,Y]_m(f\circ l_\sigma)\\
&= X_m(Y(f\circ l_\sigma)(\cdot)) - Y_m(X(f\circ l_\sigma)(\cdot))\\
&= X_m(Y(\cdot)(f\circ l_\sigma)) - Y_m(X(\cdot)(f\circ l_\sigma))\\
&= X_m(Tl_\sigma(Y(\cdot))(f)) - Y_m(Tl_\sigma(X(\cdot))(f))\\
&= X_m(Y(l_\sigma(\cdot))(f)) - Y_m(X(l_\sigma(\cdot))(f))\\
&= X_m(Y(f)(l_\sigma(\cdot))) - Y_m(X(f)(l_\sigma(\cdot)))\\
&= X_m(Y(f)\circ l_\sigma) - Y_m(X(f)\circ l_\sigma)\\
&= Tl_\sigma(X(m))(Y(f)) - Tl_\sigma(Y(m))(X(f))\\
&= X(l_\sigma(m))(Y(f)) - Y(l_\sigma(m))(X(f))\\
&= X_{l_\sigma(m)}(Y(f)) - Y_{l_\sigma(m)}(X(f))\\
&= [X,Y]_{l_\sigma(m)}(f), \quad \forall_{m\in G, f\in\mathbb{C}^\infty(G)}\\
\Rightarrow \quad Tl_\sigma\circ[X,Y] &= [X,Y]\circ l_\sigma.
\end{aligned}$$

Satz 2.12 *Sei G eine Lie-Gruppe und $\mathfrak{g}$ die Menge der auf G links-invarianten Vektorfelder. Mit der Lie-Klammer als Operator ist $\mathfrak{g}$ dann eine Lie-Algebra.*

BEWEIS:

- Nach 2.7 ist $\mathfrak{g}$ ein <u>$\mathbb{R}$-Vektorraum</u>.
  Sei $[\cdot,\cdot]$ die Lie-Klammer. Dann ist $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ nach 2.11 <u>definiert</u> und offensichtlich <u>bilinear</u>.

- <u>Anti-Kommmutativität:</u>

$$\begin{aligned}
[X,Y]_m(\cdot) &= X_m(Y(\cdot)) - Y_m(X(\cdot))\\
&= -(Y_m(X(\cdot)) - X_m(Y(\cdot))) = -[Y,X]_m(\cdot), \quad \forall_{m\in G}\\
\Rightarrow \quad [X,Y] &= -[Y,X].
\end{aligned}$$

- <u>Jakobi-Identität:</u>

$$\begin{aligned}
[[X,Y],Z]_m(\cdot) + [[Z,X],Y]_m(\cdot) + [[Y,Z],X]_m(\cdot) &=\\
[X,Y]_m(Z(\cdot)) - Z_m([X,Y](\cdot))&\\
+[Z,X]_m(Y(\cdot)) - Y_m([Z,X](\cdot))&\\
+[Y,Z]_m(X(\cdot)) - X_m([Y,Z](\cdot)) &=\\
X_m(Y(Z(\cdot))) - Y_m(X(Z(\cdot)))&\\
-Z_m(X(Y(\cdot))) + Z_m(Y(X(\cdot)))&\\
+Z_m(X(Y(\cdot))) - X_m(Z(Y(\cdot)))&\\
-Y_m(Z(X(\cdot))) + Y_m(X(Z(\cdot)))&\\
+Y_m(Z(X(\cdot))) - Z_m(Y(X(\cdot)))&\\
-X_m(Y(Z(\cdot))) + X_m(Z(Y(\cdot))) &= 0, \quad \forall_{m\in G}\\
\Rightarrow \quad [[X,Y],Z] + [[Z,X],Y] + [[Y,Z],X] &= 0.
\end{aligned}$$

3 Beispiele von Liealgebren

3.1 Definition der Liealgebra

Definition 3.1 LIEALGEBRA
Sei G eine Liegruppe. Die Liealgebra $\mathfrak{g}$ der auf G linksinvarianten Vektorfelder mit der Lieklammer als Operator wird die zur Liegruppe G gehörende Liealgebra genannt. Durch den Isomorphismus $\alpha : \mathfrak{g} \longrightarrow T_eG$ mit $\alpha(X) = X(e)$ (vgl. Satz 2.4) erhält der Tangentialraum T_eG eine Liealgebrenstruktur: Sind $v, w \in T_eG$ und sind $X, Y \in g$, so daß $X(e) = v$ und $Y(e) = w$, dann ist diese durch $[v, w] = [X, Y](e)$ definiert. Mit dieser zusätzlichen Struktur wird auch oft T_eG als die Liealgebra von G bezeichnet.

BEMERKUNG ZUR BASISDARSTELLUNG
Bilden $v_1, ..., v_n \in T_eG$ eine Basis des Tangentialraumes T_eG, dann bilden die Vektorfelder $X_1, ..., X_n \in \mathfrak{g}$ eine Basis von $\mathfrak{g}$, wobei X_r definiert ist durch $X_r : \tau \longmapsto Tl_\tau(v_r)$. Dieses Vektorfeld ist gerade das Urbild von $v_r \in T_eG$, unter dem Isomorphismus α (Satz 2.4). Jedes linksinvariante Vektorfeld läßt sich nun als Linearkombination dieser Basiselemente darstellen, insbesondere gilt also auch für das Klammerprodukt: $[X_i, X_j] = \sum_h c^h_{ij} X_h$. Die reellen Koeffizienten c^h_{ij} werden als Strukturkonstanten von G bezeichnet. In der gegebenen Basis ist dann die Multiplikation in T_eG definiert durch $[v_i, v_j] = \sum_h c^h_{ij} v_h$. T_eG und g sind als Liealgebren eindeutig durch die Strukturkonstanten bestimmt, welche aber gewisse Bedingungen, wie $c^h_{ij} + c^h_{ji} = 0$ und $\sum_r (c^r_{ij} c^s_{rk} + c^r_{jk} c^s_{ri} + c^r_{ki} c^s_{rj}) = 0$ erfüllen müssen, damit die Antikommunitativität und die Jakobi-Identität gelten.

3.2 Beziehungen zwischen Liegruppen und Liealgebren

BEMERKUNG ZUR MOTIVATION DER BETRACHTUNG DER LIEALGEBREN
Ein wichtiger Grund für die Betrachtung der Liealgebren ist die Tatsache, daß diese ein nützliches Hilfsmittel bei der Untersuchung und Klassifizierung der Liegruppen bis auf lokale Isomorphie darstellen.

Definition 3.2 LOKALE ISOMORPHIE
Zwei Liegruppen G und H heißen lokal isomorph, wenn es Umgebungen U und V der Einselemente gibt und wenn es eine bijektive, $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung φ mit $\mathcal{C}^\infty$-Umkehrabbildung ψ gibt, $\varphi : G \supset U \longrightarrow V \subset H$, so daß
für $x, y \in U$ und $x * y \in U$ gilt $\varphi(x * y) = \varphi(x) * \varphi(y)$ und
für $z, w \in V$ und $z * w \in V$ gilt $\psi(z * w) = \psi(z) * \psi(w)$.

Es gilt dann folgender

Satz 3.3 *Zwei Liegruppen sind genau dann lokal isomorph wenn ihre Liealgebren isomorph sind. Sind die Liegruppen zusätzlich einfach zusammenhängend, so gibt es eine bijektive Zuordnung zwischen den Isomorphieklassen der Liealgebren und den Isomorphieklassen einfach zusammenhängender Liegruppen. (Es existieren nicht- isomorphe, zusammenhängende Liegruppen mit isomorphen Liealgebren, z.B. gilt: $\mathbb{R}^m \times T^n$ und $\mathbb{R}^s \times T^l$, mit $m \neq s, n \neq l$, aber $m + n = s + l := k$, sind nicht-isomorphe Liegruppen mit Liealgebra $\mathbb{R}^k$.)*

3.3 Die Liegruppe $\mathbb{R}$ und ihre Liealgebra

BEISPIEL: DIE LIEGRUPPE $\mathbb{R}$ UND IHRE LIEALGEBRA
Die Gruppenoperation ist die Addition: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $(\sigma, \tau) \longmapsto \sigma + \tau$. Es sei die Linkstranslation l_σ gegeben: $l_\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\tau \longmapsto l_\sigma(\tau) = \sigma + \tau$.
Sei X ein Vektorfeld auf $\mathbb{R}, X_\sigma = f(\sigma)\frac{d}{dr}(\sigma)$ Sei g eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion auf $\mathbb{R}$. Nun gilt:
X ist ein linksinvariantes Vektorfeld auf $\mathbb{R} \Longleftrightarrow$
$X(l_\sigma(\tau))(g) = Tl_\sigma(X(\tau))(g)$ für alle $\sigma \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow$
$f(l_\sigma(\tau))\frac{d}{dr}(l_\sigma(\tau))g = Tl_\sigma(f(\tau)\frac{d}{dr}(\tau))(g)$
$= f(\tau)\frac{d}{dr}(\tau)(g \circ l_\sigma) = f(\tau)\frac{d}{dr}(l_\sigma(\tau)g\frac{d}{dr}(\tau)l_\sigma$
$= f(\tau)\frac{d}{dr}(l_\sigma(\tau))g$

$\Longrightarrow f(l_\sigma(\tau)) = f(\sigma+\tau) = f(\tau)$ für alle $\sigma \in \mathbb{R}$
$\Longrightarrow f = \lambda = const.$
$\Longrightarrow X_\sigma = \lambda \frac{d}{dr}(\sigma)$.
Insgesamt folgt: Die Liealgebra von $\mathbb{R}$ besteht aus den konstanten Vektorfeldern $\{\lambda\frac{d}{dr} | \lambda \in \mathbb{R}\}$ auf $\mathbb{R}$. Außerdem gilt für das Liesche Klammerprodukt zweier solcher Vektorfelder $X = \lambda\frac{d}{dr}$ und $Y = \mu\frac{d}{dr}$:
$[X,Y]_m(f) := X_m(Y(f)) - Y_m(X(f))$
$= X(Y(f))(m) - Y(X(f))(m)$
$= \lambda\frac{d}{dr}(\mu\frac{d}{dr}f)(m) - \mu\frac{d}{dr}(\lambda\frac{d}{dr}f)(m) = 0$

Dies gibt Anlaß zu folgender

Definition 3.4 *Eine Liealgebra $\mathfrak{g}$ heißt abelsch, wenn $[X,Y] = 0$ für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$. Dann ist die Liealgebra gleich ihrem Zentrum $C(\mathfrak{g}) := \{X \in \mathfrak{g} \,|\, [X,Y] = 0$ für alle $Y \in \mathfrak{g}\}$*

3.4 Die Liegruppe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ und ihre Liealgebra

Definition 3.5 *Seien $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ zwei Liealgebren. Eine Abbildung $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ heißt ein Liealgebrenhomomorphismus, wenn gilt: φ ist linear und verträglich mit dem Lieschen Klammerprodukt: $\varphi[x,y] = [\varphi(x), \varphi(y)]$ für alle $x, y \in \mathfrak{g}$.*
Die Klasse aller Liealgebren zusammen mit den Mengen $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ bildet die Kategorie der Liealgebren.

Beispiel: Die Liegruppe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ und ihre Liealgebra

1. Sei $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ die Menge der reellen $n \times n-$ Matrizen. Mit der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation wird $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ ein $\mathbb{R}$ - Vektorraum. Definiert man für $A, B \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ den bilinearen Operator $[A,B] := A \circ B - B \circ A$,so sind die Antikommutativität und die Jakobi-Identität erfüllt und $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ wird damit zu einer Liealgebra.

2. Betrachte $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$.
   Es gilt: Die Determinantenfunktion $\det : \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar und somit stetig.
   $\Longrightarrow \det^{-1}\{0\}$ ist abgeschlossen
   $\Longrightarrow \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) = (\det^{-1}\{0\})^C$ ist offen
   $\Longrightarrow \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ besitzt eine Standardstruktur als offene Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$.
   Es bezeichne nun x folgende globale Karte:

   $$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) & \overset{(x_{ij})_{1\leq i,j\leq n}}{\longrightarrow} & \mathbb{R}^{n^2} \\ A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} & \longmapsto & (a_{11}, ...a_{1n}, a_{21}, ..., a_{nn}) \end{array}$$

   Mit der Matrizenmultiplikation als Gruppenoperation ist außerdem die Abbildung $(A,B) \longrightarrow A \circ B^{-1}$ $\mathcal{C}^\infty$. Also ist $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ eine Liegruppe.

3. Sei nun g die Menge der linksinvarianten Vektofelder auf $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.
   Sei $\mu : T_e(\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})) \longrightarrow \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$; $\mu : v \longmapsto (v(x_{ij}))_{1\leq i,j\leq n}$ die kanonische Identifizierung von $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ mit ihrem Tangentialraum in der Einheitsmatrix e.
   Sei $\alpha : \mathfrak{g} \longrightarrow T_e(\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})) = T_e(\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}))$ (=Identifizierung der Tangentialräume, da $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ offen in $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$) mit $X \longmapsto X(e) = X_e$ der Isomorphismus aus Satz 2.4. Dann sei $\beta = \mu \circ \alpha$

   $$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{g} & \overset{\alpha}{\longrightarrow} & T_e(\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})) & \overset{\mu}{\longrightarrow} & \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & X(e) = X_e & \longmapsto & (X_e(x_{ij}))_{1\leq i,j\leq n} \end{array}$$

   Behauptung: β ist ein Liealgebrenisomorphismus und somit kann $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ als Liealgebra von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ betrachtet werden.
   Beweis:

(a) Verträglichkeit mit dem Lieschen Klammerprodukt:
Zu zeigen: $\beta([X,Y])_{ij} = [\beta(X),\beta(Y)]_{ij}, \forall X,Y \in \mathfrak{g}$
Dazu:

$$(x_{ij} \circ l_\sigma)(\tau) = x_{ij}(\sigma\cdot\tau) = \textstyle\sum_k x_{ik}(\sigma)\cdot x_{kj}(\tau) \qquad (1)$$

Außerdem gilt mit $Y \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned}
(Y(x_{ij}))(\sigma) &= Y(\sigma)(x_{ij})\\
&= Y(l_\sigma(e))(x_{ij})\\
&= Tl_\sigma(Y(e))(x_{ij})\\
&= Tl_\sigma(Y_e)(x_{ij})\\
&= Y_e(x_{ij}\circ l_\sigma)\\
&\overset{(1)}{=} Y_e(\textstyle\sum_k x_{ik}(\sigma)\cdot x_{kj})\\
&= \textstyle\sum_k x_{ik}(\sigma)\cdot Y_e(x_{kj})\\
&= \textstyle\sum_k x_{ik}(\sigma)\cdot \mu(Y_e)_{kj}\\
&= \textstyle\sum_k x_{ik}(\sigma)\cdot \mu(\alpha(Y))_{kj}\\
&= \textstyle\sum_k x_{ik}(\sigma)\cdot \beta(Y)_{kj} \qquad (2)
\end{aligned}$$

Nun folgt:

$$\begin{aligned}
\beta([X,Y])_{ij} &= [X,Y]_e(x_{ij})\\
&= X_e(Y(x_{ij})) - Y_e(X(x_{ij}))\\
&\overset{(2)}{=} X_e(\textstyle\sum_k x_{ik}\cdot\beta(Y)_{kj}) - Y_e(\sum_k x_{ik}\cdot\beta(X)_{kj})\\
&= \textstyle\sum_k X_e(x_{ik})\cdot\beta(Y)_{kj} - \sum_k Y_e(x_{ik})\cdot\beta(X)_{kj}\\
&= \textstyle\sum_k \beta(X)_{ik}\cdot\beta(Y)_{kj} - \sum_k \beta(Y)_{ik}\cdot\beta(X)_{kj}\\
&= (\beta(X)\cdot\beta(Y))_{ij} - (\beta(Y)\cdot\beta(X))_{ij}\\
&= (\beta(X)\cdot\beta(Y) - \beta(Y)\cdot\beta(X))_{ij}\\
&= [\beta(X),\beta(Y)]_{ij}
\end{aligned}$$

(b) Zunächst gilt:
Sei x die obige Karte von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, dann bilden die Vektoren $e_{ij} := (\frac{\partial}{\partial x_{ij}})_e$ eine Basis des Tangentialraumes $T_e(\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$. Das linksinvariante Vektorfeld X_{ij}, welches den e_{ij} entsprechenden Basisvektor von g bildet, erhält man durch: (vgl. Abschitt 3.1)

$$g \quad \longmapsto Tl_g(e_{ij})$$

Dafür gilt (mit einer $\mathcal{C}^\infty$-Funktion f):

$$\begin{aligned}
Tl_g(e_{ij})(f) &= Tl_g(\tfrac{\partial}{\partial x_{ij}}|_e)(f)\\
&= \tfrac{\partial}{\partial x_{ij}}|_e(f\circ l_g)\\
&= \textstyle\sum_{r,s} \frac{\partial}{\partial x_{rs}}|_{l_g(e)} f\cdot \frac{\partial}{\partial x_{ij}}|_e(\sum_h g_{rh}\cdot x_{hs})\\
&= \textstyle\sum_{h,r,s} (\frac{\partial}{\partial x_{ij}} g_{rh}x_{hs})_e(\frac{\partial}{\partial x_{rs}})_g(f)\\
&= \textstyle\sum_{h,r,s} (g_{rh}\frac{\partial}{\partial x_{ij}} x_{hs})_e(\frac{\partial}{\partial x_{rs}})_g(f)\\
&= \textstyle\sum_{h,r,s} (g_{rh}\cdot\delta_{ih}\cdot\delta_{js})_e(\frac{\partial}{\partial x_{rs}})_g(f)\\
&= \textstyle\sum_r g_{ri}(\frac{\partial}{\partial x_{rj}})_g(f)\\
\Longrightarrow \qquad X_{ij}(g) &= \textstyle\sum_r x_{ri}(g)\cdot(\frac{\partial}{\partial x_{rj}})_g\\
\Longrightarrow \qquad X_{ij} &= \textstyle\sum_r x_{ri}\cdot\frac{\partial}{\partial x_{rj}}
\end{aligned}$$

Dann folgt: $[X_{ij},X_{kl}] = \delta_{kj}X_{il} - \delta_{il}X_{kj}$
Beweis:
Mit $X_{ij} = \sum_r x_{ri}\cdot\frac{\partial}{\partial x_{rj}}$ und $X_{kl} = \sum_s x_{sk}\cdot\frac{\partial}{\partial x_{sl}}$ gilt

$$\begin{aligned}
X_{ij}(X_{kl}) &= \textstyle\sum_r x_{ri}\cdot\frac{\partial}{\partial x_{rj}}(\sum_s x_{sk}\cdot\frac{\partial}{\partial x_{sl}})\\
&= \textstyle\sum_{rs} x_{ri}\cdot(\delta_{rs}\cdot\delta_{kj}\cdot\frac{\partial}{\partial x_{sl}} + x_{sk}\cdot\frac{\partial}{\partial x_{rj}}\cdot\frac{\partial}{\partial x_{sl}})\\
&= \textstyle\sum_r x_{ri}\cdot\delta_{kj}\cdot\frac{\partial}{\partial x_{rl}} + \sum_{r,s} x_{ri}\cdot x_{sk}\cdot\frac{\partial}{\partial x_{rj}}\cdot\frac{\partial}{\partial x_{sl}}\\
&= \delta_{kj}\cdot X_{il} + \textstyle\sum_{r,s} x_{ri}\cdot x_{sk}\cdot\frac{\partial}{\partial x_{rj}}\cdot\frac{\partial}{\partial x_{sl}}
\end{aligned}$$

und analog

$$X_{kl}(X_{ij}) \quad = \delta_{il} \cdot X_{kj} + \sum_{r,s} x_{sk} \cdot x_{ri} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{sl}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{rj}}.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} [X_{ij}, X_{kl}] &= X_{ij}(X_{kl}) - X_{kl}(X_{ij}) \\ &= \delta_{kj} X_{il} - \delta_{il} X_{kj} \end{aligned}$$

Nach der Bemerkung zur Basisdarstellung (siehe 3.1) ist die Multiplikation in $T_e(\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$ in der Basis $\{e_{ij}\}$ gegeben durch $[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{kj} \cdot e_{il} - \delta_{il} \cdot e_{kj}$.
Andererseits besitzt $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ die kanonische Basis $\{E_{ij}, 1 \leq i,j \leq n\}$ mit $E_{ij} = (\delta_{ir} \cdot \delta_{js})_{1 \leq r,s \leq n}$, in der die Liealgebrenstruktur definiert ist durch

$$\begin{aligned} [E_{ij}, E_{kl}] &= E_{ij} \circ E_{kl} - E_{kl} \circ E_{ij} \\ &= \delta_{kj} \cdot E_{il} - \delta_{il} \cdot E_{kj}. \end{aligned}$$

Der durch $X_{ij} \longmapsto e_{ij} \longmapsto E_{ij}$ definierte Vektorraumisomorphismus ist der Isomorphismus der sich entsprechenden Liealgebren:

$$\begin{array}{ccccc} g & \longrightarrow & T_e(\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})) & \longrightarrow & (n,\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & X_e & \longmapsto & (X_e(x_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n} \end{array}$$

Beispiel
Sei $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \subset \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ die Teilmenge der invertierbaren, komplexen Matrizen. $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ ist mit der Basis $\{E_{kl}, 1 \leq k,l \leq n\} \cup \{i \cdot E_{kl}, 1 \leq k,l \leq n\}$ ein Vektorraum der Dimension $2 \cdot n^2$, der durch $[A,B] = A \circ B - B \circ A$ zu einer Liealgebra wird. Die offene Teilmenge $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ ist mit ihrer Mannigfaltigkeit- und Gruppenstruktur eine Liegruppe. Analog zu Beispiel 3.4 kann $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ als die Liealgebra von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ angesehen werden.

Beispiel
Sei V ein n-dimensionaler reeller bzw. komplexer Vektorraum. Dann ist die Menge $\mathrm{End}(V)$ der Endomorphismen von V ein reeller bzw. komplexer Vekorraum der Dimension n^2 bzw. $2 \cdot n^2$. Definiert man für $f,g \in \mathrm{End}(V)$ $[f,g] := f \circ g - g \circ f$, wird $\mathrm{End}(V)$ zu einer Liealgbra. Die Menge $\mathrm{Aut}(V)$ der Automorphismen erhält als offene Teilmenge eine Mannigfaltigkeitsstruktur und wird dann mit der Komposition als Gruppenoperation zu einer n^2- bzw. $2 \cdot n^2$-dimensionalen Liegruppe, als deren Liealgebra $\mathrm{End}(V)$ angesehen werden kann.

Bemerkung Allgemeiner gilt:
Ist A eine R-Algebra mit Einselement, dann bildet die Menge A^* der invertierbaren Elemente von A eine Liegruppe und die Liealgebra von A^* kann mit der mit ihrer Vektorraumstruktur und dem Kommutator $[x,y] = x \cdot y - y \cdot x$ versehenen Algebra A identifiziert werden.

3.5 Die Liealgebren einiger klassischer Gruppen

Definition 3.6

1. *Sei G eine Liegruppe. Eine Liegruppe H, die sowohl eine Untergruppe als auch eine Untermannigfaltigkeit von G ist, heißt eine Lie-Untergruppe von G.*

2. *Eine Teilmenge $\mathfrak{h}$ einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt eine Lie- Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, wenn $\mathfrak{h}$ ein Untervektorraum von $\mathfrak{g}$ ist und wenn für $X, Y \in \mathfrak{h}$ auch $[X,Y] \in \mathfrak{h}$ ist.*

Satz 3.7 *Für ein $A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ sei die Exponentialabbildung* exp *gegeben durch* $\exp(A) = e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$. *Sei H eine Untergruppe der Liegruppe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ und sei $\mathfrak{h}$ ein Untervektorraum der Liealgebra $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$. Sei U eine Umgebung der 0 in $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$, die unter der Exponentialabbildung diffeomorph zu einer Umgebung V der Identität in $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ ist. Gilt dann $\exp(U \cap \mathfrak{h}) = H \cap V$, so ist H eine Lie-Untergruppe von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, $\mathfrak{h}$ ist eine Lie-Unteralgebra von $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ und $\mathfrak{h}$ ist die Liealgebra von H.*

(vgl. [Warner], p. 104, 3.34)

Beispiel: Die spezielle lineare Gruppe und ihre Liealgebra

Es gilt: $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) | det(A) = 1\}$ ist eine Lie- Untergruppe von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ mit Liealgebra $sl(n,\mathbb{C}) := \{A \in (n,\mathbb{C}) | spur(A) = 0\}$.

1. Es gilt: $det(e^A) = e^{spur(A)}$

   Beweis: $A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ ist trigonalisierbar, d,h es existiert ein $B \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ mit $B \circ A \circ B^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$, wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte bezeichnen. Dann folgt: $e^{B\circ A\circ B^{-1}} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$ und somit $det(e^A) = det(e^{B\circ A\circ B^{-1}}) \neq 0$.

   Daraus folgt erstens $e^A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ für alle $A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ und zweitens erhält man

   $$\begin{aligned} det(e^A &= det(e^{B\circ A\circ B^{-1}}) \\ &= e^{\lambda_1} \cdot \ldots e^{\lambda_n} \\ &= e^{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n} \\ &= e^{spur(B\circ A\circ B^{-1})} \\ &= e^{spur(A)}, \end{aligned}$$

   denn $(-spur(A))$ ist gleich dem Koeffizienten vor $t^{(n-1)}$ des charakteristischen Polynoms und wegen $\chi_A(t) = \chi_{B\circ A\circ B^{-1}}(t)$ gilt also $spur(A) = spur(B \circ A \circ B^{-1})$.

2. Es folgt nun:

   $$\begin{aligned} & A \in sl(n,\mathbb{C}) \cap U \\ \iff & e^{spur(A)} = e^0 = 1 = det(e^A) \\ \iff & e^A \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) \cap V \end{aligned}$$

Beispiel: Die Unitäre Gruppe und ihre Liealgebra

Es gilt: $\mathrm{U}(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{C}) \mid \overline{A}^T = A^{-1}\}$ ist eine Lie-Untergruppe von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ mit der Menge der antihermiteschen Matrizen mit $u(n) = \{A \in (n,\mathbb{C}) \mid \overline{A} + A^T = 0\}$ als Liealgebra.

Beweis:

Sei U eine Umgebung von 0 in $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$, diffeomorph unter der Exponentialabbildung zu einer Umgebung V der Identität in $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. Man kann annehmen, daß mit $A \in U$ auch $\overline{A}, A^T, -A \in U$. Ist nun $A \in U \cap u(n)$, dann ist

$$\begin{aligned} & \overline{(e^A)}^T && = e^{\overline{A}^T} = e^{-A} \\ \Longrightarrow \quad & \overline{(e^A)}^T \circ e^A && = e^{-A} \circ e^A = e^0 = I \\ \Longrightarrow \quad & (e^A)^{-1} && = \overline{(e^A)}^T \\ \Longrightarrow \quad & e^A \in \mathrm{U}(n) \cap V. \end{aligned}$$

Ist umgekehrt $A \in U$ und $e^A \in \mathrm{U}(n) \cap V$, dann gilt:

$$\begin{aligned} & e^{-A} && = (e^A)^{-1} = \overline{(e^A)}^T = e^{\overline{A}^T} \\ \Longrightarrow \quad & -A && = \overline{A}^T \ \ (\text{mit} - A, \overline{A}^T \in U) \\ \Longrightarrow \quad & A && \in U \cap u(n) \end{aligned}$$

Bemerkung Allgemeiner gilt:

Sei A eine endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Algebra mit Einselement und sei auf A eine Involution $f : x \longmapsto x^\star$ gegeben ($f \circ f = id_A$) mit $(\lambda x)^\star = \lambda x^\star, \lambda \in \mathbb{K}$ (Linearität).

Dann ist die Menge H der $x \in A^*$ (=Menge der invertierbaren Elemente von A) mit $x^\star a x = a$, $a \in A^*$

beliebig, eine Liesche Untergruppe von A^* und die Liesche Algebra von H läßt sich mit dem Vektorteilraum von A identifizieren, der durch die Gleichung $x^\star a + ax = 0$ gegeben ist.

Daraus ergibt sich noch das

Beispiel
Die bezüglich einer beliebigen nichtentarteten Hermiteschen Form φ mit Gramscher Matrix Φ unitären Transformationen mit Matrixdarstellung S bilden eine Liegruppe: $\{S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \mid \overline{S}^T \circ \Phi \circ S = \Phi\}$ mit Liealgebra

$$\{S \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C}) \mid \overline{S}^T \circ \Phi + \Phi \circ S = 0\}.$$

Beispiel: Die Liealgebren anderer klassischer Gruppen

1. Komplexe orthogonale Gruppe:
   $\mathrm{O}(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) | A^{-1} = A^T\}$ ist Lie-Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ mit Liealgebra $o(n; \mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C}) | A + A^T = 0\}$

2. Spezielle unitäre Gruppe:
   $\mathrm{SU}(n) := \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ ist Lie-Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ mit Liealgebra $su(n) := u(n) \cap sl(n, \mathbb{C})$

3. Reelle spezielle lineare Gruppe:
   $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) := \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ist Lie-Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ mit Liealgebra $sl(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) | spur(A) = 0\}$

4. Reelle orthogonale Gruppe:
   $\mathrm{O}(n) := \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ist Lie-Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ mit Liealgebra $o(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) | A + A^T = 0\}$

5. Spezielle orthogonale Gruppe:
   $\mathrm{SO}(n) := \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ ist Lie-Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ mit Liealgebra $o(n) \cap sl(n, \mathbb{R}) = o(n)$,
   denn $o(n) \subset sl(n, \mathbb{R})$,da für jedes $A \in o(n)$ gilt:
   $0 = spur(0) = spur(A + A^T) = spur(A) + spur(A^T) = 2 * spur(A)$
   $\xRightarrow{char(\mathbb{R}) \neq 2} spur(A) = 0 \qquad \Longrightarrow A \in sl(n, \mathbb{R})$

4 Links–invariante Formen

4.1 Notationen und Vorbemerkungen

Sei $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine Familie von R–Moduln. Wie üblich wird das kartesische Produkt als

$$\prod_{\alpha\in A} M_\alpha := \{(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \mathrm{Abb}(A, \bigcup_{\alpha\in A} M_\alpha) \mid x_\alpha \in M_\alpha \;\forall\, \alpha \in A\}$$

definiert.

$$\bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha \subset \prod_{\alpha\in A} M_\alpha$$

sei die Menge der (x_α), für die nur endlich viele $x_\alpha \neq 0$ sind.

Definition 4.1 *Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n. Man setzt:*

$$\Lambda^\bullet T_m^*M := \mathbb{R} \oplus T_m^*M \oplus \Lambda^2 T_m^*M \oplus \Lambda^3 T_m^*M \oplus \cdots \oplus \Lambda^n T_m^*M \qquad , m \in M$$

(„Äußere Algebra von T_m^*M“)

$$\Lambda^p T^*M := \dot{\bigcup_{m\in M}} \Lambda^p T_m^*M$$

(„Äußeres p–Bündel über M“)

$$\Lambda^\bullet T^*M := \dot{\bigcup_{m\in M}} \Lambda^\bullet T_m^*M$$

(„Bündel der Äußeren Formen über M“)

Bemerkungen In der Definition wurde für $\Lambda^\bullet T_m^*M$ der Begriff „Algebra“ verwendet. Dies ist gerechtfertigt, denn $\Lambda^\bullet T_m^*M$ ist zusammen mit der Wedge–Multiplikation eine (nicht kommutative) $\mathbb{R}$–Algebra. Diese Operation ist folgendermaßen erklärt: Seien $\xi_0 + \cdots + \xi_i$, $\eta_0 + \cdots + \eta_j \in \Lambda^\bullet T_m^*M$. Dann ist

$$(\xi_0 + \cdots + \xi_i) \wedge (\eta_0 + \cdots + \eta_j) := \zeta_0 + \cdots + \zeta_m + \cdots,$$

wobei $\zeta_m := \sum_{p+q=m} \xi_p \wedge \eta_q$ gesetzt wird. Das $\wedge$ in der letzten Summe ist über die Multiplikationsabbildung μ definiert. Seien $(U, x_1, \ldots, x_n)$ Koordinaten mit $m \in U$:

$$\Lambda^p T_m^*M \otimes \Lambda^q T_m^*M \xrightarrow{\mu} \Lambda^{p+q} T_m^*M \;, \quad \mu(\xi_p \otimes \eta_q) := \xi_p \wedge \eta_q$$

$$= (\sum_{i_1<\cdots<i_p} \alpha_{i_1\ldots i_p} d_m x_{i_1} \wedge \ldots \wedge d_m x_{i_p}) \wedge (\sum_{j_1<\cdots<j_q} \beta_{j_1\ldots j_q} d_m x_{j_1} \wedge \ldots \wedge d_m x_{j_q})$$

$$:= \sum_{\substack{1\le i_1<\ldots<i_p\le n \\ 1\le j_1<\ldots<j_q\le n}} \alpha_{i_1\ldots i_p}\beta_{j_1\ldots j_q} d_m x_{i_1} \wedge \ldots \wedge d_m x_{i_p} \wedge d_m x_{j_1} \wedge \ldots \wedge d_m x_{j_q}$$

Für diese Abbildung verifiziert man sofort $(\xi_p\wedge\eta_q)\wedge\tau_r = \xi_p\wedge(\eta_q\wedge\tau_r)$ und $\xi_p\wedge\eta_q = (-1)^{pq}\eta_q\wedge\xi_p$. Man rechnet leicht nach, daß $\Lambda^\bullet T_m^*M$ mit diesen Operationen „+“, „$\wedge$“ und der üblichen Skalaroperation eine Algebra der Dimension 2^n ist (weiteres vgl. [LA-Skript], §20).

Definition 4.2 *Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n.*

- *Eine Abbildung $M \xrightarrow{\omega_p} \Lambda^p T^*M$ heißt (differenzierbare) p–***Form***, wenn für alle Koordinatenumgebungen $(U, x_1, \ldots, x_n)$ die Koeffizientenfunktionen $f_{i_1 \ldots i_p}$ der jeweiligen lokalen Darstellung*

$$\omega_p|_U = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} f_{i_1 \ldots i_p} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

$\mathcal{C}^\infty$ auf U sind. Die Menge der differenzierbaren p–Formen wird mit $E^p(M)$ bezeichnet.

- *Analog heißt eine Abbildung $M \xrightarrow{\omega} \Lambda^\bullet T^*M$ (differenzierbare)* **Form***, wenn die lokalen Koeffizientenfunktionen $\mathcal{C}^\infty$ sind. Sei wieder $(U, x_1, \ldots, x_n)$ eine Karte. In diesem Fall wird $\omega|_U$ so dargestellt:*

$$\omega|_U = \sum_\Phi f_\Phi dx_\Phi \, ,$$

wobei $\Phi := \mathfrak{P}(\{1, \ldots, n\})$ ist und $dx_\Phi := dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$ für $\Phi = \{i_1 < \cdots < i_p\}$ bzw. $dx_\Phi := 1_{\mathcal{C}^\infty(U)}$ für $\Phi = \emptyset$ sind. Die Menge aller differenzierbaren Formen wird $E^\bullet(M)$ genannt.

Bemerkung $E^p(M)$ und $E^\bullet(M)$ sind $\mathbb{R}$–Vektorräume und $\mathcal{C}^\infty(M)$–Moduln, $E^\bullet(M)$ ist sogar $\mathbb{R}$–Algebra. Man definiert die Operationen punktweise:

- $\omega, \eta \in E^p(M)$ bzw. $\omega, \eta \in E^\bullet(M)$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(\omega + \eta)(m) := \omega(m) + \eta(m) \qquad \forall\, m \in M$$

$$(\lambda \cdot \omega)(m) := \lambda \cdot \omega(m) \qquad \forall\, m \in M$$

- $\omega, \eta \in E^\bullet(M)$:

$$(\omega \wedge \eta)(m) := \omega(m) \wedge \eta(m) \qquad \forall\, m \in M$$

Die Vektorraum- und Algebrengesetze werden nun von denen auf den Räumen $\Lambda^p T_m^* M$ und $\Lambda^\bullet T_m^* M$ induziert. Es bleibt zu zeigen, daß Summe und Produkt auch $\mathcal{C}^\infty$ sind. Dies folgt unmittelbar aus den Ringeigenschaften des Raumes der $\mathcal{C}^\infty(U)$– Koeffizientenfunktionen, wenn man $\omega + \eta$, $\omega \wedge \eta$, $\lambda\omega$ und $f\omega$ lokal ausrechnet.

Zum Schluß dieses Abschnittes werden noch die zum Differential duale Abbildung, die Kotangentialabbildung, und deren Verallgemeinerung auf $\Lambda^p T_m^* M$, die Liftungsabbildung, eingeführt.

Definition 4.3 *Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $M \xrightarrow{\phi} N$ eine differenzierbare Abbildung. Die zum Differential $T_m M \xrightarrow{T_m \phi} T_{\phi(m)} N$ duale Abbildung:*

$$T_m^* M \xleftarrow{T_m^* \phi} T_{\phi(m)}^* N \quad , \quad T_m^* \phi(\eta)(\xi) := (\eta \circ T_m \phi)(\xi) \text{ für alle } \eta \in T_{\phi(m)}^* N \text{ und } \xi \in T_m M$$

heißt **Kotangentialabbildung**.

Die Abbildung $T^*\phi$ ist punktweise $\mathbb{R}$–linear und T^* ist ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten nach der Kategorie der Vektorräume, also:
Seien $M \xrightarrow{\phi} N$, $N \xrightarrow{\psi} P$ differenzierbar. Dann gilt:

- $T_m^*(\psi \circ \phi) = T_m^* \phi \circ T_{\phi(m)}^* \psi$
- $T_m^*(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{T_m^* M}$

Aufgrund der Linearität kann man $T^*\phi$ verallgemeinern:

Definition 4.4 *Die $T^*_{\phi(m)}N \xrightarrow{T^*_m\phi} T^*_mM$ zugeordnete lineare Abbildung*

$$\Lambda^p T^*_m\phi \;:\; \Lambda^p T^*_{\phi(m)}N \longrightarrow \Lambda^p T^*_m M$$

wird mit $\phi^* := \Lambda^p T^*\phi$ abgekürzt und **Liftungsabbildung** *genannt. Es gilt:*

$$\phi^*(\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_p) = T^*_m\phi(\eta_1) \wedge \ldots \wedge T^*_m\phi(\eta_p)$$

für monomiale Elemente $\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_p \in \Lambda^p T^*_{\phi(m)}N$.

Dank der Liftungsabbildung ist es möglich, p–Formen, die über der Bildmannigfaltigkeit N definiert sind, „zurückzuziehen“, d.h. zu einer p–Form über M zu machen.

Lemma 4.5 *Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension m bzw. n und $M \xrightarrow{\phi} N$ eine differenzierbare Abbildung. Dann beruhen auf der Definition der Liftungsabbildung $\Lambda^p T^*_{\phi(m)}N \xrightarrow{\phi^*} \Lambda^p T^*_m M$ u.a. die folgenden Feststellungen:*

- *Sei $\omega_p \in E^p(N)$ eine p–Form. Dann ist durch $(\phi^*\omega_p)(m) := \phi^*(\omega_p(\phi(m))$ eine differenzierbare p–Form auf M definiert. Sei $(U, x_1, \ldots, x_m)$ eine Koordinatenumgebung mit $m \in U$, $(V, y_1, \ldots, y_n)$ eine mit $\phi(m) \in V$ und $\phi_\nu := y_\nu \circ \phi$. Dann hat $\phi^*\omega_p$ auf U die lokale Darstellung:*

$$(\phi^*\omega_p)|_U = \sum_{1\leq\nu_1<\cdots<\nu_p\leq n} (f_{\nu_1\cdots\nu_p} \circ \phi) d\phi_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{\nu_p},$$

  wenn $\omega_p|_V = \sum f_{\nu_1\cdots\nu_p} dy_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dy_{\nu_p}$.

- *Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\omega_p, \omega'_p \in E^p(N)$ und $\omega_q \in E^q(N)$. Dann ist:*

  - $\phi^*(\alpha\omega_p + \beta\omega'_p) = \alpha\phi^*\omega_p + \beta\phi^*\omega'_p$
  - $\phi^*(\omega_p \wedge \omega_q) = \phi^*\omega_p \wedge \phi^*\omega_q$.

- *Sei $N \xrightarrow{\psi} P$ eine differenzierbare Abbildung und $\omega_p \in E^p(P)$. Es gilt: $(\psi \circ \phi)^*\omega_p = \phi^*(\psi^*\omega_p)$*

- d *bezeichne die äußere Ableitung. Sei $\omega_p \in E^p(N)$. Dann ist: $\phi^*\mathrm{d}\omega_p = \mathrm{d}\phi^*\omega_p$.*

Die angeführten Eigenschaften werden im übernächsten Abschnitt benötigt.

4.2 p–Formen als alternierende multilineare Abbildungen

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n und $m \in M$. Macht man Gebrauch von den Isomorphismen $\Lambda^p T^*_m M \cong (\Lambda^p T_m M)^* \cong \mathrm{Altmult}((T_m M)^p, \mathbb{R})$ so lassen sich die differenzierbaren p–Formen mit multilinearen, alternierenden Abbildungen von glatten Vektorfeldern auf $\mathcal{C}^\infty(M)$–Funktionen identifizieren. Denn:

Lemma 4.6 *$V(M)$ bezeichne die Menge der differenzierbaren Vektorfelder auf M. Dann wird jedem $\omega \in E^p(M)$ eine Abbildung $\tilde{\omega} : V(M)^p \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ zugeordnet, die alternierend und multilinear über dem $\mathcal{C}^\infty(M)$–Modul $V(M)$ ist. Ebenso gilt die Umkehrung.*

Beweis

Nach dem Basissatz für alternierende Produkte ist die Abbildung $\Lambda^p T^*_m M \xrightarrow{\kappa} (\Lambda^p T_m M)^*$ ein Isomorphismus der beiden $\mathbb{R}$–Vektorräume. Faßt man $\mathrm{Altmult}((T_m M)^p, \mathbb{R})$ als $\mathbb{R}$–Vektorraum mit argumentweise definierten Operationen auf, so ist wegen der universellen Eigenschaft des äußeren Produkts auch $(\Lambda^p T_m M)^* \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Altmult}((T_m M)^p, \mathbb{R})$ eine strukturtreue Abbildung (vgl. hierzu [LA-Skript], §18). Für monomiale Elemente sieht die Zuordnungsvorschrift von $\alpha \circ \kappa$ so aus:

$$\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_p \longmapsto \alpha \circ \kappa(\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_p),$$

wobei für beliebiges $(\xi_1,\ldots,\xi_p) \in T_mM^p$ gilt:

$$\begin{aligned}
\alpha\circ\kappa(\eta_1\wedge\ldots\wedge\eta_p)(\xi_1,\ldots,\xi_p) &= (\kappa(\eta_1\wedge\ldots\wedge\eta_p)\circ\tau)(\xi_1,\ldots,\xi_p)\\
&= \kappa(\eta_1\wedge\ldots\wedge\eta_p)(\xi_1\wedge\ldots\wedge\xi_p)\\
&= \det(\eta_i(\xi_j))
\end{aligned}$$

Sei $\omega \in E^p(M)$, $X_1,\ldots,X_p \in V(M)$, $m \in M$ beliebig, und seien $(U,x_1,\ldots,x_n)$ lokale Koordinaten mit $m \in U$. Jedem $\omega(m)$ ist eindeutig eine alternierende Multilinearform $\tilde{\omega}(m) := (\alpha\circ\kappa)(\omega(m))$ zugeordnet. Die hierdurch induzierte Abbildung $\tilde{\omega}(X_1,\ldots,X_p) \,:\, M \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\tilde{\omega}(X_1,\ldots,X_p)(m) := \tilde{\omega}(m)(X_1(m),\ldots,X_p(m))$$

ist Element von $\mathcal{C}^\infty(M)$, denn für alle $m \in M$ gilt:

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}(X_1,\ldots,X_p)(m) &= \tilde{\omega}(m)(X_1(m),\ldots,X_p(m))\\
&= \left(\sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\ldots i_p}(m)\,\kappa(d_mx_{i_1}\wedge\ldots\wedge d_mx_{i_p})\right)(X_1(m)\wedge\ldots\wedge X_p(m))\\
&= \sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\ldots i_p}(m)\det\begin{pmatrix} d_mx_{i_1}(X_1(m)) & \cdots & d_mx_{i_1}(X_p(m))\\ \vdots & & \vdots\\ d_mx_{i_p}(X_1(m)) & \cdots & d_mx_{i_p}(X_p(m))\end{pmatrix}\\
&= \sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\ldots i_p}(m)\det\begin{pmatrix} X_1(m)(x_{i_1}) & \cdots & X_p(m)(x_{i_1})\\ \vdots & & \vdots\\ X_1(m)(x_{i_p}) & \cdots & X_p(m)(x_{i_p})\end{pmatrix}\\
&= \sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\ldots i_p}(m)\det\begin{pmatrix} X_1(x_{i_1})(m) & \cdots & X_p(x_{i_1})(m)\\ \vdots & & \vdots\\ X_1(x_{i_p})(m) & \cdots & X_p(x_{i_p})(m)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Da die $f_{i_1\cdots i_p} \in \mathcal{C}^\infty(U)$ und die $X_\mu(x_{i_\nu})$ ebenfalls $\mathcal{C}^\infty$ sind, ist auch $\tilde{\omega}(X_1,\ldots,X_p) \in \mathcal{C}^\infty(M)$.
Es bleibt zu zeigen, daß die Abbildung $V(M)^p \xrightarrow{\tilde{\omega}} \mathcal{C}^\infty(M)$, $(X_1,\ldots,X_p) \mapsto \tilde{\omega}(X_1,\ldots,X_p)$ alternierend und multilinear über dem $\mathcal{C}^\infty(M)$–Modul $V(M)$ ist.
Dies sieht man sofort, da die Abbildung $\tilde{\omega}(m)$ alternierend und multilinear über $\mathbb{R}$ ist:
Seien $X, Y \in V(M)$ und $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ beliebig gewählt. Für jedes $m \in M$ gilt:

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}(X_1,\ldots,fX+gY,\ldots,X_p)(m) &= \tilde{\omega}(m)(X_1(m),\ldots,f(m)X(m)+g(m)Y(m),\ldots,X_p(m))\\
&= f(m)\tilde{\omega}(m)(X_1(m),\ldots,X(m),\ldots,X_p(m))\\
&\quad +g(m)\tilde{\omega}(m)(X_1(m),\ldots,Y(m),\ldots,X_p(m))\\
&= f(m)\tilde{\omega}(X_1,\ldots,X,\ldots,X_p)(m)\\
&\quad +g(m)\tilde{\omega}(X_1,\ldots,Y,\ldots,X_p)(m)\\
&= (f\,\tilde{\omega}(X_1,\ldots,X,\ldots,X_p)+g\,\tilde{\omega}(X_1,\ldots,Y,\ldots,X_p))(m)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\tilde{\omega}(X_1,\ldots,X_{i-1},X,X_{i+1},\ldots,X_{j-1},X,X_{j+1},\ldots,X_p)(m) &&=\\
&\tilde{\omega}(m)(X_1(m),\ldots,X_{i-1}(m),X(m),X_{i+1}(m),\ldots,X_{j-1}(m),X(m),X_{j+1}(m),\ldots,X_p(m)) &&= 0
\end{aligned}$$

Nun zur Umkehrung.
Sei $V(M)^p \xrightarrow{\tilde{\omega}} \mathcal{C}^\infty(M)$ eine alternierende, $\mathcal{C}^\infty(M)$–multilineare Abbildung. Angenommen, die Funktionswerte $\tilde{\omega}(X_1,\ldots,X_p)(m)$ der Bildfunktion wären nur von den Werten der Vektorfelder **an der Stelle** m abhängig.
Dann ließe sich der Abbildung $\tilde{\omega}$ in umgekehrter Richtung eine alternierende multilineare Form $\tilde{\omega}(m)$ auf $(T_mM)^p$ zuordnen, und somit gäbe es über die eingangs angeführten Isomorphismen zur $\tilde{\omega}$ eine p–Form ω. Explizit:
Sei $(\xi_1,\ldots,\xi_p) \in (T_mM)^p$ beliebig. Wähle $V_1,\ldots,V_p \in V(M)$ derart, daß $V_i(m) = \xi_i, \quad i = 1,\ldots,p$.

Diese glatten Vektorfelder existieren, da es auf M eine differenzierbare Partition der Eins gibt. Definiere dann:

$$\tilde{\omega}(m)(\xi_1, \ldots, \xi_p) := \tilde{\omega}(V_1, \ldots, V_p)(m)$$

$\tilde{\omega}(m)$ ist nach Annahme **wohldefiniert**, also unabhängig von der Wahl der V_i. Aus der Multilinearität der Abbildung $\tilde{\omega}$ folgt sofort die der Form $\tilde{\omega}(m)$. Setze $\omega(m) := (\kappa^{-1} \circ \alpha^{-1})(\tilde{\omega}(m))$. Durch $m \mapsto \omega(m)$ ist dann eine p–Form definiert. Diese ist auch **glatt**.

Der Beweis der Differenzierbarkeit wird für $p = 1$ geführt:
Sei $m_0 \in M$ beliebig und $(U, x_1, \ldots, x_n)$ eine Karte mit $m_0 \in U$. Zu zeigen ist, daß die Koeffizientenfunktionen f_i in der Darstellung $\omega|_U = \sum f_i dx_i$ auf U $\mathcal{C}^\infty$ sind. Sei $m \in U$ beliebig. Wähle n linear unabhängige Tangentialvektoren $\xi_1, \ldots, \xi_n \in T_m M$ und zu ihnen glatte Vektorfelder $V_1, \ldots, V_n$ mit $V_j(m) = \xi_j$ (z.B. $\phi \cdot \xi_j$, wenn ϕ eine glatte Funktion mit $\phi = 1$ auf $V \subset U$ und $\phi = 0$ auf $M \backslash U$ ist). Dann gilt für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\tilde{\omega}(m)(\xi_j) = \sum_{i=1}^{n} f_i(m) \kappa(d_m x_i)(\xi_j) = \sum_i f_i(m) \xi_j(x_i) = \sum_i f_i(m) V_j(m)(x_i) = \tilde{\omega}(V_j)(m)$$

Da die V_j glatt sind, sind die Funktionen $V_j(x_i) \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Ebenso ist $\tilde{\omega}(V_j)$ nach Voraussetzung auf M differenzierbar. Weiter sind die ξ_j linear unabhängig, ebenso die $d_m x_i$ aus dem dazugehörigen Dualraum. Somit gilt $\det(V_j(m)(x_i)) \neq 0$ für alle $m \in U$. Dann ist aber das LGS $\sum_i f_i(m) V_j(m)(x_i) = \tilde{\omega}(V_j)(m)$ eindeutig lösbar und die Lösungsfunktionen f_i sind glatt auf U.

Zum Schluß des Beweises wird nun exemplarisch für $p = 1$ die Wohldefiniertheit der Form $\tilde{\omega}(m)$ gezeigt. Diese beruht auf der Annahme, daß $\tilde{\omega}(X)(m)$ nur von dem Wert des Feldes X an der Stelle m abhängt. Im Fall $p = 1$ reicht es zu zeigen, daß aus $X(m) = 0$ auch $\tilde{\omega}(X)(m) = 0$ folgt, denn seien $X, Y \in V(M)$ mit $X \neq Y$, aber $X(m) = Y(m) = \xi$. Dann ist $(X - Y)(m) = 0$. Daraus folgt: $\tilde{\omega}(X - Y)(m) = 0$. Wegen der (Multi-)linearität von $\tilde{\omega}$ gilt somit $\tilde{\omega}(X)(m) = \tilde{\omega}(m)(\xi) = \tilde{\omega}(Y)(m)$.

Also sei $X(m) = 0$. Wie üblich seien $(U, x_1, \ldots, x_n)$ Koordinaten mit $m \in U$. Lokal gilt $X|_U = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Insbesondere ist $f_i(m) = 0$. Wähle ϕ wie bereits oben und setze $X_i := \phi \frac{\partial}{\partial x_i}$. Die Felder X_i sind differenzierbar. Für $X|_U$ hat man dann:

$$X|_U = \sum_{i=1}^{n} f_i X_i + (1 - \phi) X|_U$$

Daher gilt:

$$\tilde{\omega}(X)(m) = \sum_{i=1}^{n} f_i(m) \tilde{\omega}(X_i)(m) + ((1 - \phi)(m))(\tilde{\omega}(X)(m)) = 0$$

Also impliziert $X(m) = 0$ wie behauptet $\tilde{\omega}(X)(m) = 0$.

□

Anmerkung Im folgenden Abschnitt wird manchmal $\tilde{\omega}$ mit ω identifiziert und sowohl die Form als auch die Abbildung mit ω bezeichnet.

4.3 Links–invariante Formen

Der Begriff der Links-Invarianz kann mit Hilfe der Liftungsabbildung auch für Formen eingeführt werden. In Analogie zu den Vektorfeldern stellt sich heraus, daß eine beliebige links–invariante Form bereits vollständig durch den Wert, den sie an der Stelle e annimmt, bestimmt ist.

Definition 4.7 *Sei G eine Lie–Gruppe der Dimension n.*

- *Eine (nicht notwendig differenzierbare) p–Form ω_p heißt* **links–invariant**, *wenn $l_\sigma^* \omega_p = \omega_p$ für alle $\sigma \in G$ gilt. Die Menge der links–invarianten p–Formen sei $E^p_{l\,inv}(G)$.*

- *Eine Form $\omega = \omega_0 + \cdots + \omega_p$, $p \le n$ nennt man links–invariant, wenn für $q = 0, \ldots, p$ die q–Formen ω_q links–invariant sind. Weiter sei*

  $$E^{\bullet}_{l\,inv}(G) = \bigoplus_{p=0}^{n} E^{p}_{l\,inv}(G)$$

  die Menge der links–invarianten Formen.

Die links–invarianten 1–Formen sind auch als **Maurer–Cartan Formen** bekannt.

Erläuterungen Die Differenzierbarkeit der links–invarianten Formen muß nicht vorausgesetzt werden, da die Links-Invarianz die Differenzierbarkeit impliziert (vgl. Satz 4.8).
Die Links-Invarianz bedeutet genauer: $(l_\sigma^*\omega_p)(\tau) = l_\sigma^*(\omega_p(l_\sigma(\tau))) = l_\sigma^*(\omega_p(\sigma\tau)) = \omega_p(\tau)$ für alle $\tau \in G$. Beispielsweise gilt für eine 0–Form, also für $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$:

$$f(\sigma) = (l_{\sigma^{-1}}^* f)(\sigma) = (f \circ l_{\sigma^{-1}})(\sigma) = f(e) \qquad \forall\, \sigma \in G$$

Also sind alle links–invarianten 0–Formen die konstanten Funktionen auf G. Für eine 1–Form $\eta \in E^1_{l\,inv}(G)$ sieht man:

$$\eta(\sigma) = (l_{\sigma^{-1}}^*\eta)(\sigma) = l_{\sigma^{-1}}^*(\eta(e)) = T_\sigma^* l_{\sigma^{-1}}(\eta(e)) = \eta(e) \circ T_\sigma l_{\sigma^{-1}} \qquad \forall\, \sigma \in G$$

Die allgemeine Situation erkennt man aus Punkt (2) des folgenden Satzes.

Satz 4.8 *Sei G eine n–dimensionale Lie–Gruppe. Dann gilt:*

1. *Links–invariante Formen sind differenzierbar.*

2. *$E^{\bullet}_{l\,inv}(G)$ ist eine Unteralgebra der Algebra $E^{\bullet}(G)$ aller differenzierbaren Formen auf G. Die Abbildung $E^{\bullet}_{l\,inv}(G) \xrightarrow{\alpha} \Lambda^{\bullet} T_e^* G$; $\alpha(\omega) := \omega(e)$ ist ein $\mathbb{R}$–Algebren–Isomorphismus. Speziell liefert diese Abbildung einen natürlichen Isomorphismus zwischen $E^1_{l\,inv}(G)$ und T_e^*G. Nach Satz 2.7 kann man $E^1_{l\,inv}(G)$ als Dualraum der Lie–Algebra $\mathfrak{g}$ auffassen.*

3. *Gilt $\omega \in E^1_{l\,inv}(G)$ und $X \in \mathfrak{g}$, so ist die Funktion $\omega(X) \in \mathcal{C}^\infty(G)$ konstant auf G. Dies ist genau der Effekt, wenn man nach (2) ω als Element von $\mathfrak{g}^*$ ansieht und ein links–invariantes Vektorfeld auf ω anwendet.*

4. *Seien $\omega \in E^1_{l\,inv}(G)$ und $X, Y \in \mathfrak{g}$. Dann ist $\mathrm{d}\omega \in E^2_{l\,inv}(G)$, und für die Funktion $\mathrm{d}\omega(X,Y)$ gilt:*

   $$\mathrm{d}\omega(X,Y) = -\omega[X,Y]$$

5. *Sei $\omega_1, \ldots, \omega_n$ die zu einer gegebenen Basis $X_1, \ldots, X_n$ von $\mathfrak{g}$ duale Basis von $E^1_{l\,inv}(G)$. Dann gibt es durch die Darstellung*

   $$[X_i, X_j] = \sum_{k=0}^{n} c_{ij}^k X_k \qquad \forall\, i, j = 1, \ldots, n$$

   eindeutig bestimmte **Strukturkonstanten***, die folgende Eigenschaften haben:*

   (a) $$c_{ij}^k + c_{ji}^k = 0$$

   (b) $$\sum_{r=1}^{n} (c_{ij}^r c_{rk}^s + c_{jk}^r c_{ri}^s + c_{ki}^r c_{rj}^s) = 0$$

   für alle $i, j, k, s \in \{1, \ldots, n\}$.

   Die äußeren Ableitungen der ω_k sind gegeben durch die Maurer–Cartan Gleichungen:

   $$\mathrm{d}\omega_k = \sum_{1 \le i < j \le n} c_{ij}^k \omega_j \wedge \omega_i$$

Beweis
(1) Nach der Definiton von $E^{\bullet}_{l\,inv}(G)$ als direkte Summe reicht es zu zeigen, daß die links–invarianten p–Formen glatt sind.
Sei $\omega \in E^{p}_{l\,inv}(G)$. Dann ist $(l^*_{\sigma^{-1}}\omega)(\sigma) = l^*_{\sigma^{-1}}(\omega(e)) = \omega(\sigma)$ für alle $\sigma \in G$, daher hat man:

$$l^*_{\sigma^{-1}} \,:\, \Lambda^p T^*_e G \longrightarrow \Lambda^p T^*_\sigma G\,; \quad \omega(e) \mapsto \omega(\sigma) = (l^*_{\sigma^{-1}}\omega)(\sigma)$$

$(U, t_1, \ldots, t_n)$ sei eine Koordinatenumgebung von e. Die Abbildung

$$U \times U \longrightarrow V\,; \quad (\sigma,\tau) \mapsto \sigma^{-1}\tau$$

ist $\mathcal{C}^\infty$ nach Definition der Lie–Gruppe. Ohne Einschränkung sei V Umgebung der Eins mit Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$. Nun sei $\sigma_0 \in G$ beliebig. Dann bildet

$$\sigma_0 U \times \sigma_0 U \longrightarrow G\,; (\sigma,\tau) \mapsto \sigma^{-1}\tau$$

auch nach V ab, denn $\sigma \in \sigma_0 U \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma_0^{-1}\sigma \in U$, also:

$$\sigma_0^{-1}\sigma =: \tilde\sigma \in \; U \;\ni \tilde\tau := \sigma_0^{-1}\tau$$

$$\sigma^{-1}\tau = \tilde\sigma^{-1}\sigma_0^{-1}\sigma_0\tilde\tau = \tilde\sigma^{-1}\tilde\tau \in V$$

Die p–Form ω habe in e die Darstellung:

$$\omega(e) = \sum_{i_1<\cdots<i_p} c_{i_1\ldots i_p} d_e x_{i_1} \wedge \ldots \wedge d_e x_{i_p}$$

Wähle jetzt $f_\nu := x_\nu \circ l_{\sigma^{-1}}$, also $f_\nu(\sigma,\tau) = x_\nu(\sigma^{-1}\tau)$. f_ν ist somit $\mathcal{C}^\infty$ auf $\sigma_0 U \times \sigma_0 U$.
Sei $\sigma \in \sigma_0 U$ fest. Setze nun:

$$\omega^\sigma := f^*_{\sigma^{-1}}\omega|_{\sigma_0 U} = \sum_{i_1<\cdots<i_p} c_{i_1\ldots i_p} df_{i_1} \wedge \ldots \wedge df_{i_p}.$$

Dann gilt für alle $\tau \in \sigma_0 U$:

$$\omega^\sigma(\tau) = \sum_{j_1<\cdots<j_p}\left(\sum_{i_1<\cdots<i_p} c_{i_1\ldots i_p}\frac{\partial(f_{i_1},\ldots,f_{i_p})}{\partial(t_{j_1},\ldots,t_{j_p})}(\sigma,\tau)\right) d_\sigma t_{j_1} \wedge \ldots \wedge d_\sigma t_{j_p}$$

Speziell also:

$$\begin{aligned} \omega(\sigma) &= (l^*_{\sigma^{-1}}\omega)(\sigma) = \omega^\sigma(\sigma) \\ &= \sum_{j_1<\cdots<j_p}\left(\sum_{i_1<\cdots<i_p} c_{i_1\ldots i_p}\frac{\partial(f_{i_1},\ldots,f_{i_p})}{\partial(t_{j_1},\ldots,t_{j_p})}(\sigma,\sigma)\right) d_\sigma t_{j_1} \wedge \ldots \wedge d_\sigma t_{j_p} \end{aligned}$$

Aus der Differenzierbarkeit von $c_{i_1\ldots i_p}\frac{\partial(f_{i_1},\ldots,f_{i_p})}{\partial(t_{j_1},\ldots,t_{j_p})}(\sigma,\sigma)$ auf $\sigma_0 U \times \sigma_0 U$ folgt somit die Differenzierbarkeit von ω.

(2) Behauptung: $E^{\bullet}_{l\,inv}(G)$ ist eine $\mathbb{R}$–Unteralgebra von $E^\bullet(G)$.
Da nach (1) alle links–invarianten Formen glatt sind, sind die Operationen auf $E^{\bullet}_{l\,inv}(G)$ die von $E^\bullet(G) = \bigoplus_{p=1}^n E^p(G)$ induzierten. $E^{\bullet}_{l\,inv}(G)$ ist bezüglich dieser Operationen auch abgeschlossen, denn:
Seien $\omega = \omega_0 + \cdots + \omega_p$ und $\omega' = \omega'_0 + \cdots + \omega'_q$ links–invariante Formen, also $l^*_\sigma\omega_i = \omega_i$ und $l^*_\sigma\omega'_i = \omega'_i$ für alle $\sigma \in G$. Weiter wähle $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist zu zeigen, daß $\omega + \omega'$, $\omega \wedge \omega'$ und $\alpha\omega$ Elemente von $E^{\bullet}_{l\,inv}(G)$ sind. Nach Definition der Operationen (siehe 4.1) und Definition der Linksinvarianz bei Formen, reicht es $\omega_i + \omega'_i$, $\alpha\omega_i$ und $\omega_i \wedge \omega'_j$ mit $\omega_i, \omega'_i \in E^{i}_{l\,inv}(G)$ und $\omega'_j \in E^{j}_{l\,inv}(G)$ zu betrachten:

$$l^*_\sigma(\omega_i + \omega'_i) = l^*_\sigma\omega_i + l^*_\sigma\omega'_i = \omega_i + \omega'_i\,,$$

$$l_\sigma^*(\omega_i \wedge \omega_j') = l_\sigma^*\omega_i \wedge l_\sigma^*\omega_j' = \omega_i \wedge \omega_j' \,,$$

$$l_\sigma^*(\alpha\omega_i) = \alpha \cdot l_\sigma^*\omega_i = \alpha\omega_i$$

für alle $\sigma \in G$ (vgl. Lemma 4.5). Damit ist die Behauptung gezeigt.

Nun zum **Algebren–Isomorphismus**. Zuerst wird gezeigt, daß $E^p_{l\,inv}(G) \xrightarrow{\alpha_p} \Lambda^p T_e^* G;\ \omega_p \mapsto \omega_p(e)$ ein $\mathbb{R}$–Vektorraum–Isomorphismus ist. Man sieht mit den gleichen Argumenten wie oben bei $E^\bullet_{l\,inv}(G)$, daß $E^p_{l\,inv}(G)$ alle $\mathbb{R}$–Vektorraumeigenschaften hat. Offenbar ist α_p auch $\mathbb{R}$–**linear**: Seien $\omega_p, \omega_p' \in E^p_{l\,inv}(G)$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\alpha_p(a\omega_p + b\omega_p') = (a\omega_p + b\omega_p')(e) = a\omega_p(e) + b\omega_p'(e) = a \cdot \alpha_p(\omega_p) + b \cdot \alpha_p(\omega_p')$$

Mehr noch, seien $\omega_p \in E^p_{l\,inv}(G)$ und $\omega_q' \in E^q_{l\,inv}(G)$ mit $m = p + q \;\Rightarrow$

$$\alpha_m(\omega_p \wedge \omega_q') = (\omega_p \wedge \omega_q')(e) = \omega_p(e) \wedge \omega_q'(e) = \alpha_p(\omega_p) \wedge \alpha_q(\omega_q')$$

α_p ist **injektiv**, denn seien $\omega_p, \omega_p' \in E^p_{l\,inv}(G)$ mit $\alpha_p(\omega_p) = \alpha_p(\omega_p')$. Dann gilt für alle $\sigma \in G$:

$$\omega_p(\sigma) = (l_{\sigma^{-1}}^*\omega_p)(\sigma) = l_{\sigma^{-1}}^*(\omega_p(e)) = l_{\sigma^{-1}}^*(\omega_p'(e)) = (l_{\sigma^{-1}}^*\omega_p')(\sigma) = \omega_p'(\sigma)$$

Also ist $\omega_p = \omega_p'$.
Die Abbildung ist aber auch **surjektiv**, denn sei $\eta_p \in \Lambda^p T_e^* G$ beliebig, so definiere eine p–Form $\overline{\omega}_p$ per $\overline{\omega}_p(\sigma) = l_{\sigma^{-1}}^*(\eta_p)$. Diese ist links–invariant, denn für alle $\tau \in G$ gilt:

$$(l_\tau^*\overline{\omega}_p)(\sigma) = l_\tau^*(\overline{\omega}_p(\tau\sigma) = l_\tau^*(l_{(\tau\sigma)^{-1}}^*(\eta_p)) = (l_{\sigma^{-1}\tau^{-1}} l_\tau)^*(\eta_p) = l_{\sigma^{-1}}^*(\eta_p) = \overline{\omega}_p(\sigma)$$

Da $\alpha_p(\overline{\omega}_p) = \overline{\omega}_p(e) = l_e^*(\eta_p) = \eta_p$ gilt, ist α_p also Vektorraum–Isomorphismus.
Sei nun $\omega = \omega_0 + \cdots + \omega_p \in E^\bullet_{l\,inv}(G)$ beliebig. Definiere dann die Abbildung:

$$E^\bullet_{l\,inv}(G) \xrightarrow{\alpha} \Lambda^\bullet T_e^* G; \quad \omega \mapsto \alpha(\omega) := \alpha_0(\omega_0) + \cdots + \alpha_p(\omega_p)$$

Diese ist **injektiv**. Denn seien $\omega = \omega_0 + \cdots + \omega_p,\ \omega' = \omega_0' + \cdots + \omega_q' \in E^\bullet_{l\,inv}(G)$ mit $\alpha(\omega) = \alpha(\omega')$, also $\alpha_0(\omega_0) + \cdots + \alpha_p(\omega_p) = \alpha_0(\omega_0') + \cdots + \alpha_q(\omega_q')$. Da die Summen in der letzten Gleichung direkt sind, folgt $p = q$ und $\alpha_i(\omega_i) = \alpha_i(\omega_i')$ für $i = 1, \ldots, p$. Aus der Injektivität der α_i folgt $\omega_i = \omega_i'$ und somit $\omega = \omega'$.
α ist auch **surjektiv**. Sei $\eta = \eta_0 + \cdots + \eta_p \in \Lambda^\bullet T_e^* G$ beliebig. Definiere dann eine Form $\overline{\omega}$ folgenderma-ßen: $\overline{\omega}(\sigma) := \overline{\omega}_0(\sigma) + \cdots + \overline{\omega}_p(\sigma)$ für alle $\sigma \in G$, wobei $\overline{\omega}_i(\sigma) := l_{\sigma^{-1}}^*(\eta_i)$ ist. Somit ist $\overline{\omega}$ links–invariant und es gilt:

$$\alpha(\overline{\omega}) = \alpha_0(\overline{\omega}_0) + \cdots + \alpha_p(\overline{\omega}_p) = \eta_0 + \cdots + \eta_p = \eta.$$

Zum Schluß wird gezeigt, daß α **strukturtreu** ist.
Es seien $\omega = \omega_0 + \cdots + \omega_p,\ \omega' = \omega_0' + \cdots + \omega_q' \in E^\bullet_{l\,inv}(G)$ und $a, b \in \mathbb{R}$. O.B.d.A sei $p \leq q$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\alpha(a\omega + b\omega') &= \alpha((a\omega_0 + b\omega_0') + \cdots + (a\omega_p + b\omega_p') + b\omega_{p+1}' + \cdots + b\omega_q') \\
&= \sum_{i=0}^{p} \alpha_i(a\omega_i + b\omega_i') + \alpha_{p+1}(b\,\omega_{p+1}') + \cdots + \alpha_q(b\,\omega_q') \\
&= \sum_{i=0}^{p} (a\alpha_i(\omega_i) + b\alpha_i(\omega_i')) + b\alpha_{p+1}(\omega_{p+1}') + \cdots + b\alpha_q(\omega_q') \\
&= a\sum_{i=0}^{p} \alpha_i(\omega_i) + b\sum_{i=0}^{q} \alpha_i(\omega_i') \\
&= a\alpha(\omega) + b\alpha(\omega')
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\alpha(\omega \wedge \omega') &= \alpha((\omega_0 + \cdots + \omega_p) \wedge (\omega'_0 + \cdots + \omega'_q)) \quad = \quad \alpha\left(\sum_{i=0}^{p+q} \sum_{\substack{\mu+\nu=i\\ \mu\le p,\nu\le q}} \omega_\mu \wedge \omega'_\nu\right) \\
&= \sum_{i=0}^{p+q} \alpha_i \left(\sum_{\substack{\mu+\nu=i\\ \mu\le p,\nu\le q}} \omega_\mu \wedge \omega'_\nu\right) \quad = \quad \sum_{i=0}^{p+q} \sum_{\substack{\mu+\nu=i\\ \mu\le p,\nu\le q}} \alpha_i(\omega_\mu \wedge \omega'_\nu) \\
&= \sum_{i=0}^{p+q} \sum_{\substack{\mu+\nu=i\\ \mu\le p,\nu\le q}} \alpha_\mu(\omega_\mu) \wedge \alpha_\nu(\omega'_\nu) \\
&= (\alpha_0(\omega_0) + \cdots + \alpha_p(\omega_p)) \wedge (\alpha_0(\omega'_0) + \cdots + \alpha_p(\omega'_p)) \quad = \quad \alpha(\omega) \wedge \alpha(\omega')
\end{aligned}
$$

(3) Betrachte zuerst rein formal die Abbildung $G \stackrel{\omega(X)}{\longrightarrow} \mathbb{R}$, $\omega(X)(\sigma) := \omega(\sigma)(X(\sigma))$. Nach Lemma 4.6 ist diese $\mathcal{C}^\infty$ auf G, da die Links–Invarianz sowohl des Feldes X als auch der 1–Form ω jeweils die Differenzierbarkeit impliziert. Mehr noch, für alle $\sigma \in G$ gilt dann:

$$
\begin{aligned}
\omega(X)(\sigma) &= \omega(\sigma)(X(\sigma)) \quad = \quad (l^*_{\sigma^{-1}}\omega)(\sigma)(X(\sigma)) \\
&= l^*_{\sigma^{-1}}(\omega(e))(X(\sigma)) \quad = \quad (\omega(e) \circ T_\sigma l_{\sigma^{-1}})(X(\sigma)) \\
&= \omega(e)(T_\sigma l_{\sigma^{-1}}(X(\sigma))) \quad = \quad \omega(e)(X(e))
\end{aligned}
$$

Damit ist $\omega(X)$ konstant auf G.
Alternativ kann man, wenn man (2) und Satz 2.7 verwendet, gemäß der folgenden Isomorphiekette die 1–Form ω mit dem Element $\omega(e) \circ \tilde{\alpha} \in \mathfrak{g}^*$ identifizieren:

$$
\begin{array}{ccccc}
E^1_{l\,inv}(G) & \stackrel{\alpha}{\longrightarrow} & T^*_e G & \stackrel{\tilde{\alpha}^*}{\longrightarrow} & \mathfrak{g}^* \\
\omega & \longmapsto & \omega(e) & \longmapsto & \omega(e) \circ \tilde{\alpha}
\end{array}
$$

Dann gilt aber $\omega(X) = (\omega(e) \circ \tilde{\alpha})(X) = \omega(e)(\tilde{\alpha}(X)) = \omega(e)(X(e)) = konst.$

(4) Sei $\omega \in E^1_{l\,inv}(G)$. Dann ist $\mathrm{d}\omega \in E^2_{l\,inv}(G)$. Es gilt nämlich für alle $\sigma \in G$:

$$l^*_\sigma(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(l^*_\sigma\omega) = \mathrm{d}\omega$$

Seien $X, Y \in \mathfrak{g}$. Wähle eine beliebige Karte $(U, x_1, \ldots, x_n)$. Lokal habe die Form die Darstellung $\omega|_U = \sum f_i dx_i$. Für alle $\sigma \in U$ folgt dann:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega(X,Y)(\sigma) &= \mathrm{d}\omega(\sigma)(X(\sigma), y(\sigma)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (d_\sigma f_i \wedge d_\sigma x_i)(X(\sigma), Y(\sigma)) \\
&= \sum_i \det \begin{pmatrix} d_\sigma f_i(X(\sigma)) & d_\sigma f_i(Y(\sigma)) \\ d_\sigma x_i(X(\sigma)) & d_\sigma x_i(Y(\sigma)) \end{pmatrix} \\
&= \sum_i \left[d_\sigma f_i(X(\sigma)) \cdot d_\sigma x_i(Y(\sigma)) - d_\sigma f_i(Y(\sigma)) \cdot d_\sigma x_i(X(\sigma))\right] \\
&= \sum_i [X(\sigma)(f_i) \cdot Y(\sigma)(x_i) - Y(\sigma)(f_i) \cdot X(\sigma)(x_i)] \\
&= \sum_i [X(\sigma)(f_i) \cdot Y(x_i)(\sigma) - Y(\sigma)(f_i) \cdot X(x_i)(\sigma)]
\end{aligned}
$$

Andererseits ist nach (3) $\omega(Y) = konst$, also

$$c = \left(\sum_i f_i(\sigma) d_\sigma x_i\right)(Y(\sigma)) = \sum_i f_i(\sigma) Y(\sigma)(x_i) = \left(\sum_i f_i Y(x_i)\right)(\sigma) \quad \forall\, \sigma \in U$$

Für alle $\sigma \in U$ folgt dann:

$$0 = X(\sigma)\left(\sum_i f_i Y(x_i)\right) = \sum_i X(\sigma)(f_i \cdot Y(x_i)) = \sum_i [f_i(\sigma) \cdot X(\sigma)(Y(x_i)) + Y(x_i)(\sigma) \cdot X(\sigma)(f_i)]$$

Somit gilt:

$$-\sum_i f_i(\sigma) \cdot X(\sigma)(Y(x_i)) = \sum_i Y(x_i)(\sigma) \cdot X(\sigma)(f_i)$$

Analog erhält man:

$$-\sum_i f_i(\sigma) \cdot Y(\sigma)(X(x_i)) = \sum_i X(x_i)(\sigma) \cdot Y(\sigma)(f_i)$$

Eine Substitution ergibt dann:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega(X,Y)(\sigma) &= \sum_i f_i(\sigma)[Y(\sigma)(X(x_i)) - X(\sigma)(Y(x_i))] \quad = \quad -\sum_i f_i(\sigma)([X,Y](\sigma)(x_i)) \\ &= -\sum_i f_i(\sigma) d_\sigma x_i([X,Y](\sigma)) \quad = \quad -\omega([X,Y])(\sigma) \qquad \forall\, \sigma \in U \end{aligned}$$

Da die Karte beliebig gewählt war, folgt die Behauptung.

(5) Wähle eine Basis $X_1, \ldots, X_n$ der Liealgebra $\mathfrak{g}$ (z.B. X_i mit $X_i(\sigma) := T_e l_\sigma(\frac{\partial}{\partial x_i}(e))$, wenn $\frac{\partial}{\partial x_1}(e), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(e)$ die Basis von $T_e G$ in den Koordinaten $(U(e); x_1, \ldots, x_n)$ ist). Nach Satz 2.11 ist $[X_i, X_j]$ links–invariant. Somit existiert folgende Basisdastellung:

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=0}^{n} c_{ij}^k X_k \qquad \forall\, i,j = 1, \ldots, n$$

Nun gilt $c_{ij}^k + c_{ji}^k = 0$, denn für alle $i,j = 1, \ldots, n$ ist

$$\sum_k c_{ij}^k X_k = [X_i, X_j] = -[X_j, X_i] = \sum_k (-c_{ji}^k) X_k.$$

Da die X_k eine Basis bilden, folgt auch $c_{ij}^k = -c_{ji}^k \quad \forall\, k \in \{1, \ldots, n\}$.
Ebenfalls direkt aus den Liealgebra–Eigenschaften erhält man:

$$\sum_{r=1}^{n} (c_{ij}^r c_{rk}^s + c_{jk}^r c_{ri}^s + c_{ki}^r c_{rj}^s) = 0 \text{ für alle } i,j,k,s \in \{1, \ldots, n\}.$$

Denn:

$$\begin{aligned} 0 &= [[X_i, X_j], X_k] + [[X_j, X_k], x_i] + [[X_k, X_i], X_j] \\ &= \left[\sum_r c_{ij}^r X_r, X_k\right] + \left[\sum_r c_{jk}^r X_r, X_i\right] + \left[\sum_r c_{ki}^r X_r, X_j\right] \\ &= \sum_r c_{ij}^r [X_r, X_k] + \sum_r c_{jk}^r [X_r, X_i] + \sum_r c_{ki}^r [X_r, X_j] \\ &= \sum_r c_{ij}^r \left(\sum_s c_{rk}^s X_s\right) + \sum_r c_{jk}^r \left(\sum_s c_{ri}^s X_s\right) + \sum_r c_{ki}^r \left(\sum_s c_{rj}^s X_s\right) \\ &= \sum_s \left(\sum_r (c_{ij}^k c_{rk}^s + c_{jk}^r c_{ri}^s + c_{ki}^r c_{rj}^s)\right) X_s \end{aligned}$$

Da die X_s linear unabhängig sind, folgt:

$$\sum_{r=1}^{n} (c_{ij}^r c_{rk}^s + c_{jk}^r c_{ri}^s + c_{ki}^r c_{rj}^s) = 0 \qquad \forall\, s \in \{1, \ldots, n\}$$

Zum Schluß noch der Beweis der Maurer–Cartan Gleichungen. Fasse $E^1_{l\,inv}(G)$ nach (2) als Dualraum der Liealgebra $\mathfrak{g}$ auf. Sei $\omega_1, \ldots, \omega_n$ die zu $X_1, \ldots, X_n$ duale Basis von $E^1_{l\,inv}(G)$. Dann sind die $\omega_i \wedge \omega_j$ mit $1 \leq i < j \leq n$ eine Basis von $\Lambda^2 E^1_{l\,inv}(G) \cong E^2_{l\,inv}(G)$. Nach (4) gilt $d\omega \in E^2_{l\,inv}(G)$ Daher existiert eine eindeutige Darstellung:

$$\mathrm{d}\omega_k = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a^k_{ij} \omega_i \wedge \omega_j .$$

Zu zeigen ist, daß $a^k_{ij} = -c^k_{ij}$ gilt. Betrachte wie in Abschnitt 4.2 die Isomorphiekette

$$\Lambda^2 E^1_{l\,inv}(G) \xrightarrow{\kappa} (\Lambda^2 \mathfrak{g})^* \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Altmult}(\mathfrak{g}^2, \mathbb{R}).$$

Einerseits ist

$$\widetilde{\mathrm{d}\omega_k}(X_i, X_j) = \left(\sum_{m<n} a^k_{mn} (\widetilde{\omega_m \wedge \omega_n}) \right) (X_i, X_j) = \sum_{m<n} a^k_{mn} \kappa(\omega_m \wedge \omega_n)(X_i \wedge X_j) = a^k_{ij} \, ,$$

da nach dem Basissatz für alternierende Produkte die $\kappa(\omega_m \wedge \omega_n)$ dual zu den $X_i \wedge X_j$ sind. Andererseits ist nach (4): $\mathrm{d}\omega_k(X_i, X_j) = -\omega_k([X_i, X_j])$, um genauer zu sein: $\widetilde{\mathrm{d}\omega_k}(X_i, X_j) = -\widetilde{\omega_k}([X_i, X_j])$. Dann gilt:

$$\widetilde{\mathrm{d}\omega_k}(X_i, X_j) = -\widetilde{\omega_k}(\sum_l c^l_{ij} X_l) = -\sum_l c^l_{ij} \widetilde{\omega_k}(X_l) = -\sum_l c^l_{ij} \kappa(\omega_k)(X_l) = -c^k_{ij}$$

Das zweite Gleichheitszeichen gilt wegen der Multilinearität der Abbildung $\widetilde{\omega_k}$ (vgl. 4.2), das letzte wegen des Basissatzes.
Also hat man:

$$\mathrm{d}\omega_k = \sum_{i<j} a^k_{ij} \omega_i \wedge \omega_j = -\sum_{i<j} c^k_{ij} \omega_i \wedge \omega_j = \sum_{i<j} c^k_{ij} \omega_j \wedge \omega_i .$$

□

4.4 Die linksinvarianten Formen der $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$

$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ist mit der Operation $\circ$ und der globalen Karte

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \xrightarrow{x_{ij}} \mathbb{R}; \quad A = (a_{ij}) \mapsto a_{ij}$$

eine Lie–Gruppe der Dimension n^2.

Linksinvariante 0–Formen
Sei $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}))$. Nach Voraussetzung ist $(l^*_{A^{-1}} f)(A) = f(A)$ für alle $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Daher gilt $f(I) = f(A) \; \forall \; A$, also $f \equiv c$. Die linksinvarianten 0–Formen sind somit die konstanten Funktionen.

Linksinvariante p–Formen
Wegen $E^p_{l\,inv}(\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})) \cong \Lambda^p E^1_{l\,inv}(\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}))$ reicht es, die linksinvarianten 1–Formen auszurechnen. Aus Satz 4.8 verwendet man den Isomorphismus:

$$E^1_{l\,inv}(\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})) \xrightarrow{\alpha} T^*_I \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$$

Behauptung: Die Formen

$$\omega_{ij} \, : \, A \mapsto \sum_k x_{ik}(A^{-1}) d_A x_{kj}$$

bilden eine Basis von $E^1_{l\,inv}(\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}))$ und entsprechen unter α den $d_I x_{ij}$.

Beweis: Es gilt $\omega_{ij}(A) = d_I x_{ij} \circ T_A l_{A^{-1}}$. Man rechnet sofort nach, daß gilt:

$$\omega_{ij}(A)\left(\frac{\partial}{\partial x_{kl}}(A)\right) = x_{ik}(A^{-1})\delta_{jl}$$

Andererseits ist aber ω_{ij} von der Form:

$$\omega_{ij}(A) = \sum_{r,s} f^{ij}_{rs}(A) d_A x_{rs}$$

und daher: $\omega_{ij}(A)\left(\frac{\partial}{\partial x_{kl}}(A)\right) = f^{ij}_{kl}(A)$. Dadurch erhält man:

$$\omega_{ij}(A) = \sum_{k,l} x_{ik}(A^{-1})\delta_{jl} d_A x_{kl} = \sum_k x_{ik}(A^{-1}) d_A x_{kj}.$$

□

5 Homomorphismen

Definition 5.1 *Seien G, H Lie-Gruppen. Eine Abbildung $\varphi : G \to H$ heißt* **(Liegruppen-)Homomorphismus**, *wenn φ $\mathcal{C}^\infty$ und Gruppenhomomorphismus ist. φ heißt* **Isomorphismus**, *falls φ zusätzlich ein Diffeomorphismus ist. Im Falle $G = H$ heißt ein Isomorphismus auch* **Automorphismus**. *Ist $H = Aut(V)$ für einen Vektorraum V oder $H = Gl(n,\mathbb{C})$ oder $H = Gl(n,\mathbb{R})$, dann heißt ein Homomorphismus $\varphi : G \to H$* **Darstellung** *der Liegruppe G.*

Definition 5.2 *Seien $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ Lie-Algebren. Ein Liealgebrenhomomorphismus $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ heißt* **Darstellung** *der Liealgebra $\mathfrak{g}$, falls $\mathfrak{h} = End(V)$ für einen Vektorraum V oder $\mathfrak{h} = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ oder $\mathfrak{h} = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$.*

Sei $\varphi : G \to H$ Homomorphismus. Da $\varphi(e_G) = e_H$, ist $T_e\varphi$ $(=: d\varphi_e =: d\varphi)$ eine lineare Abbildung von T_eG $(=: G_e)$ nach T_eH. Mit der Identifikation $\alpha_1 : \mathfrak{g} \to T_eG$ mit $\alpha_1(X) = X(e)$, $\quad \alpha_2 : \mathfrak{h} \to H_e$ mit $\alpha_2(Y) = Y(e)$ erhält man eine induzierte Abbildung, die auch mit $T_e\varphi$ bezeichnet wird:

$$\begin{tikzcd} T_eG \arrow[r, "T_e\varphi"] & T_eH \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\alpha_1"] \arrow[r, dashed, "T_e\varphi"'] & \mathfrak{h} \arrow[u, "\alpha_2"] \end{tikzcd}$$

Bemerkung. *Für $X \in \mathfrak{g}$ ist das linksinvariante Vektorfeld $T_e\varphi(X) \in \mathfrak{h}$ eindeutig bestimmt durch*

$$T_e\varphi(X)(e) = T_e\varphi\big(X(e)\big).$$

Beweis. Sei $Y \in \mathfrak{h}$ linksinvariantes Vektorfeld, $Y(e) = T_e\varphi\big(X(e)\big) = T_e\varphi(X)(e)$. Sei $\sigma \in H$. Dann ist

$$Y(\sigma) = Y\big(l_\sigma(e)\big) = T_el_\sigma(Y(e)) = T_el_\sigma\big(T_e\varphi(X)(e)\big) = T_e\varphi(X)\big(l_\sigma(e)\big) = T_e\varphi(X)(\sigma).$$

Damit ist $Y = T_e\varphi(X)$.

Definition 5.3 *Seien M, N Mannigfaltigkeiten, $\varphi : M \to N$ $\mathcal{C}^\infty$. Zwei (glatte, d. h. $\mathcal{C}^\infty$)-Vektorfelder X auf M, Y auf N heißen* **φ-verträglich**, *falls*

$$T_e\varphi \circ X = Y \circ \varphi.$$

Lemma 5.4 *Sei $\varphi : M \to N$ $\mathcal{C}^\infty$. Seien X, X' (glatte) Vektorfelder auf M bzw. Y, Y' auf N. Falls X φ-verträglich mit Y und X' φ-verträglich mit Y', so ist $[X,X']$ φ-verträglich mit $[Y,Y']$.*

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $T_e\varphi \circ X = Y \circ \varphi$ und $T_e\varphi \circ X' = Y' \circ \varphi$. Zu zeigen ist:

$$T_e\varphi \circ [X,X'] = [Y,Y'] \circ \varphi.$$

Zur Abkürzung definiere Xf durch $Xf(m) := X(m)(f)$, analog $(T_e\varphi \circ X)(f)(m) := (T_e\varphi \circ X)(m)(f)$ für $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$, $m \in M$.
Dann gilt: $(Y' \circ \varphi)(f) = Y'f \circ \varphi$, denn $(Y' \circ \varphi)(f)(m) = (Y' \circ \varphi)(m)(f) = Y'(\varphi(m))(f) = (Y'f \circ \varphi)(m)$.
Seien nun $m \in M$, $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$. Dann ist zu zeigen:

$$T_e\varphi([X,X'](m))\,(f) = [Y,Y'](\varphi(m))\,(f):$$

$$\begin{aligned}
T_e\varphi([X,X'](m))\,(f) &\overset{\text{Def. } T_e\varphi}{=} [X,X'](m)\,(f\circ\varphi) \\
&\overset{\text{Def. } [\,,\,]}{=} X(m)\,\big(X'(f\circ\varphi)\big) - X'(m)\,\big(X(f\circ\varphi)\big) \\
&\overset{\text{Def. } T_e\varphi}{=} X(m)\,\big((T_e\varphi\circ X')(f)\big) - X'(m)\,\big((T_e\varphi\circ X)(f)\big) \\
&= X(m)\,\big((Y'\circ\varphi)(f)\big) - X'(m)\,\big((Y\circ\varphi)(f)\big) \\
&= X(m)\,(Y'f\circ\varphi) - X'(m)\,(Yf\circ\varphi) \\
&\overset{\text{Def. } T_e\varphi}{=} T_e\varphi(X(m))\,(Y'f) - T_e\varphi(X'(m))\,(Yf) \\
&= Y(\varphi(m))\,(Y'f) - Y'(\varphi(m))\,(Yf) \\
&\overset{\text{Def. } [\,,\,]}{=} [Y,Y'](\varphi(m))\,(f)
\end{aligned}$$

Satz 5.5 *Seien G, H Lie-Gruppen mit Liealgebren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$. Sei $\varphi : G \to H$ Homomorphismus. Dann gilt:*

1. *Für jedes $X \in \mathfrak{g}$ sind X und $T_e\varphi(X)$ φ-verträglich.*

2. *$T_e\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ist Liealgebrenhomomorphismus.*

Beweis. (a) Sei $\tilde{X} := T_e\varphi(X)$. Dann gilt für $\sigma \in G$

$$l_{\varphi(\sigma)} \circ \varphi = \varphi \circ l_\sigma, \qquad \text{da} \quad \varphi(\sigma) \cdot \varphi(\tau) = \varphi(\sigma \cdot \tau).$$

Dann folgt mit der Linksinvarianz von $\tilde{X}$ und X:

$$\begin{aligned} \tilde{X}\big(\varphi(\sigma)\big) &= \tilde{X}\big(l_{\varphi(\sigma)}(e)\big) = T_e l_{\varphi(\sigma)} \circ \tilde{X}(e) = T_e l_{\varphi(\sigma)}\big(T_e\varphi(X(e))\big) \\ &= T_e(l_{\varphi(\sigma)} \circ \varphi)\,\big(X(e)\big) = T_e(\varphi \circ l_\sigma)\,\big(X(e)\big) = T_e\varphi\big(dl_\sigma(X(e))\big) \\ &= T_e\varphi\big(X(l_\sigma(e))\big) = T_e\varphi\big(X(\sigma)\big), \\ \text{also} \qquad T_e\varphi(X) \circ \varphi &= T_e\varphi \circ X. \end{aligned}$$

(b) $T_e\varphi$ ist als Tangentialabbildung linear. Damit $T_e\varphi$ Liealgebrenhomomorphismus ist, genügt es also zu zeigen, daß für X, $Y \in \mathfrak{g}$

$$T_e\varphi\big([X,Y]\big) = [T_e\varphi(X), T_e\varphi(Y)] \quad \text{oder} \quad \widetilde{[X,Y]} = [\tilde{X}, \tilde{Y}]$$

Es ist X φ-verträglich mit $\tilde{X}$ und Y mit $\tilde{Y}$. Nach Lemma 5.4 folgt, daß $[X,Y]$ φ-vertäglich mit $[\tilde{X},\tilde{Y}]$ ist, d. h. $T_e\varphi \circ [X,Y] = [\tilde{X},\tilde{Y}] \circ \varphi$. Damit folgt

$$[\tilde{X},\tilde{Y}](e) = [\tilde{X},\tilde{Y}]\,(\varphi(e)) = T_e\varphi\big([X,Y](e)\big)$$

Außerdem ist nach Kap. 2 $[\tilde{X},\tilde{Y}]$ linksinvariant. Nach Bemerkung ist $\widetilde{[X,Y]}$ eindeutig bestimmt als dasjenige linksinvariante Vektorfeld auf H, dessen Wert im Einselement $T_e\varphi\big([X,Y](e)\big)$ ist. Also ist

$$\widetilde{[X,Y]} = [\tilde{X},\tilde{Y}].$$

Homomorphismen und linksinvariante Formen

Erinnerung an die Kotangentialabbildung: Seien N, M Mannigfaltigkeiten, $\varphi : M \to N$ $\mathcal{C}^\infty$, $m \in M$. Dann sei

$$\begin{aligned} T_m^*\varphi = \delta\varphi : T_{\varphi(m)}^*N &\to T_m^*M \\ \delta\varphi(\omega)(v) &= \omega\big(T_m\varphi(v)\big) \quad \text{für} \quad \omega \in T_{\varphi(m)}^*N,\ v \in T_mM \end{aligned}$$

die duale Abbildung zu $T_m\varphi$ $(= d\varphi)$.

Definition 5.6 *Eine Familie $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ von 1-Formen auf einer Mannigfaltigkeit M heißt* **unabhängig**, *falls für jedes $m \in M$ die Familie $(\omega_1(m), \ldots, \omega_n(m)) \subset T_m^*M$ linear unabhängig ist.*

Definition 5.7 *Ein Ideal $\mathfrak{J} \subset E^\bullet(M)$ heißt* **differenzierbares Ideal**, *falls es abgeschlossen unter äußerer Differentiation d ist, d. h. $d(\mathfrak{J}) \subset \mathfrak{J}$.*

Lemma 5.8 *Sei $\varphi : G \to H$ Liegruppenhomomorphismus. Ist ω linksinvariante Form, so ist die Liftung $\delta\varphi(\omega) = \varphi^*\omega$ differenzierbare Form auf G.*

Beweis. $(\varphi^*\omega)(m) := \varphi^*\big(\omega(\varphi(m))\big)$ ist nach Kap. 4 differenzierbare Form auf G. Außerdem gilt

$$l_\sigma^*\varphi^*\omega = (\varphi \circ l_\sigma)^*\omega = (l_{\varphi(\sigma)} \circ \varphi)^*\omega = \varphi^* l_{\varphi(\sigma)}^*\omega = \varphi^*\omega$$

wegen der Linksinvarianz von ω. Damit ist auch $\varphi^*\omega$ linksinvariant.

Somit ist $\varphi^* : E^1_{l\,\mathrm{inv}}(H) \to E^1_{l\,\mathrm{inv}}(G)$ bzw. mit den Identifikationen $E^1_{l\,\mathrm{inv}}(G) \overset{\alpha}{\to} T^*_e G \cong \mathfrak{g}^*$ mit $\alpha(\omega) = \omega(e)$

$$\varphi^* : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{g}^*$$

die duale Abbildung von $T_e\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, denn für $\omega \in E^1_{l\,\mathrm{inv}}(H)$, $X \in \mathfrak{g}$ ist $\big(\varphi^*(\omega)\big)(X) = \omega\big(T_e\varphi(X)\big)$. Sei nun $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ Basis von $E^1_{l\,\mathrm{inv}}(H)$. Dann existieren nach den Maurer-Cartan-Gleichungen Strukturkonstanten c_{ijk}, so daß

$$d\omega_i = \sum_{j<k} c_{jki}\, \varphi^*\omega_k \wedge \varphi^*\omega_j.$$

Da die Liftung φ^* mit der äußeren Differentiation d vertauschbar ist (Vektoranalysis-Vorlesung), folgt dann

$$d\big(\varphi^*\omega_i\big) = \varphi^*(d\omega_i) = \sum_{j<k} c_{jki}\varphi^*\omega_k \wedge \varphi^*\omega_j.$$

Betrachte nun die Lie-Gruppe $G \times H$. Seien π_1, π_2 von $G \times H$ nach G bzw. H die kanonischen Projektionen. Diese sind auch Liegruppen-Homomorphismen. Sei $\mathfrak{I}$ das (zweiseitige) Ideal von Formen auf $G \times H$ (d. h. im Ring $E^\bullet(G \times H)$), das erzeugt ist von den 1-Formen

$$\{\pi_1^*\varphi^*\omega_i - \pi_2^*\omega_i : i = 1, \dots, d\}.$$

Diese Menge von 1-Formen auf $G \times H$ ist unabhängig, denn die ω_i sind unabhängig, ebenso ihre Liftungen.

Bemerkung.

1. *$\mathfrak{I}$ ist differenzierbares Ideal.*
2. *Die erzeugenden 1-Formen sind linkinvariant.*

Beweis.

(a)
$$\begin{aligned} & d\big(\pi_1^*\varphi^*\omega_i - \pi_2^*\omega_i\big) \\ &= \sum_{j<k} c_{jki}\left(\pi_1^*\varphi^*\omega_k \wedge \pi_1^*\varphi^*\omega_j \;-\; \pi_2^*\omega_k \wedge \pi_2^*\omega_j\right) \\ &= \sum_{j<k} c_{jki}\left([\pi_1^*\varphi^*\omega_k - \pi_2^*\omega_k] \wedge \pi_1^*\varphi^*\omega_j \;+\; \pi_2^*\omega_k \wedge [\pi_1^*\varphi^*\omega_j - \pi_2^*\omega_j]\right) \;\in\; \mathfrak{I} \end{aligned}$$

(b) Sei $(\sigma, \xi) \in G \times H$. Es ist $\pi_1 \circ l_{(\sigma,\xi)} = l_\sigma \circ \pi_1$ und $\pi_2 \circ l_{(\sigma,\xi)} = l_\xi \circ \pi_2$. Dann folgt

$$\begin{aligned} l^*_{(\sigma,\xi)}\big(\pi_1^*\varphi^*\omega_i - \pi_2^*\omega_i\big) &= l^*_{(\sigma,\xi)}\pi_1^*\varphi^*\omega_i - l^*_{(\sigma,\xi]}\pi_2^*\omega_i \\ &= (l_\sigma \circ \pi_1)^*\varphi^*\omega_i - (l_\xi \circ \pi_2)^*\omega_i \\ &= \pi_1^* l_\sigma^*\varphi^*\omega_i - \pi_2^* l_\xi^*\omega_i \\ &= \pi_1^*\varphi^*\omega_i - \pi_2^*\omega_i \end{aligned}$$

wegen der Linksinvarianz von $\varphi^*\omega_i$ und ω_i.

Betrachte nun einen Homomorphismus $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ der Liealgebren von G und H. Die duale Abbildung ist

$$\begin{aligned} \psi^* : E^1_{l\,\mathrm{inv}}(H) &\to E^1_{l\,\mathrm{inv}}(G) \\ \big(\psi^*(\omega)\big)(X) &= \omega\big(\psi(X)\big) \quad \text{für } \omega \in E^1_{l\,\mathrm{inv}}(H),\ X \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

Sei wieder $\{\omega_i\}$ Basis von $E^1_{l\,\mathrm{inv}}(H)$.

Bemerkung. *Sei $\mathfrak{I}$ das Ideal der Formen auf $G \times H$, das erzeugt ist von den unabhängigen 1-Formen*

$$\{\pi_1^*\big(\psi^*(\omega_i)\big) - \pi_2^*\omega_i : i = 1, \dots, d\}.$$

Dann ist $\mathfrak{J}$ differenzierbares Ideal und die erzeugenden Formen sind linksinvariant.

Beweis. Die Bemerkung folgt nach analoger Ausrechnung wie eben unter Benutzung der Formel

$$d\big(\psi^*(\omega_i)\big) = \sum_{j<k} c_{jki}\, \psi^*(\omega_k) \wedge \psi^*(\omega_j).$$

Diese Formel gilt, denn seien X, $Y \in \mathfrak{g}$ linksinvariante Vektorfelder auf G. Dann ist nach Kap. 4

$$\begin{aligned} d\big(\psi^*(\omega_i)\big)(X,Y) &= -\psi^*(\omega_i)[X,Y] = -\omega_i\,\psi\big([X,Y]\big) \\ &= -\omega_i[\psi(X),\psi(Y)] = d\omega_i\big(\psi(X),\psi(Y)\big) \\ &= \sum_{j<k} c_{jki}\, \omega_k \wedge \omega_j\, \big(\psi(X),\psi(Y)\big) \\ &= \sum_{j<k} c_{jki}\, \psi^*(\omega_k) \wedge \psi^*(\omega_j)\,(X,Y). \end{aligned}$$

Definition 5.9 *Seien N, M Mannigfaltigkeiten. Sei $\psi : N \to M$ $\mathcal{C}^\infty$. ψ heißt* **Immersion**, *falls $d\psi_n$ nicht-singulär, d. h. injektiv, ist für jedes $n \in N$.*
(N,ψ) heißt **Untermannigfaltigkeit** *von M, falls ψ eine injektive Immersion ist.*

Definition 5.10 *Eine Untermannigfaltigkeit (N,ψ) von M heißt* **Integral-Mannigfaltigkeit** *eines Ideals $\mathfrak{J} \subset E^\bullet(M)$, falls für jedes $\omega \in \mathfrak{J}$ $\psi^*\omega \equiv 0$.*

Sei nun $f : N \to M$ $\mathcal{C}^\infty$, π_1, π_2 die kanonoischen Projektionen von $N \times M$ auf N bzw. M. Seien $\{\omega_i\}$ Formen auf M. Setze für jedes i $\mu_i := \pi_1^* f^*\omega_i - \pi_2^*\omega_i$. Sei $\mathfrak{J} \subset E^\bullet(N \times M)$ das Ideal der Formen, das erzeugt ist von den μ_i.
Die Untermannigfaltigkeit (N,g) von $N \times M$ mit $g(n) = (n, f(n))$ heißt **Graph** von f.
Diese ist Integral-Mannigfaltigkeit von $\mathfrak{J}$: Zu zeigen ist

$$g^*\mu_i = 0 \quad \text{für alle } i.$$

Es gilt: $\pi_1 \circ g =$id und $\pi_2 \circ g = f$ und damit

$$g^*\mu_i = (\pi_1 \circ g)^* f^*\omega_i - (\pi_2 \circ g)^*\omega_i = f^*\omega_i - f^*\omega_i = 0.$$

Lemma 5.11 *Sei $\{\omega_1, \ldots, \omega_d\}$ eine Basis der 1-Formen auf M. Sei $n_0 \in N$, $m_0 \in M$ und sei $U \subset N$ eine zusammenhängende, offene Umgebung von u_0. Weiter sei $f : U \to M$ $\mathcal{C}^\infty$ mit $f(n_0) = m_0$ und $f^*\omega_i =: \alpha_i|U$ für $i = 1, \ldots,$ d. Das Ideal $\mathfrak{J}$ der Formen auf $N \times M$, das erzeugt ist von*

$$\{\pi_1^*\alpha_i - \pi_2^*\omega_i : i = 1, \ldots, d\}$$

sei differenzierbar. Dann ist f eindeutig bestimmt.

Beweis. Sei $\tilde f$ eine andere solche Abbildung (d. h. $\tilde f(n_0) = m_0$, $\tilde f^*\omega_i = \alpha_i|U$). Seien $(U,\tilde g)$, (U,g) die Graphen von $\tilde f$ bzw. f auf U, d. h. $\tilde g(n) = \big(n, \tilde f(n)\big)$, $g(n) = \big(n, f(n)\big)$ für $n \in U$. Dann sind sowohl (U,g) als auch $(U,\tilde g)$ Integral-Mannigfaltigkeiten von $\mathfrak{J}$.
Es sei nun

$$H := \{n \in U : g(n) = \tilde g(n)\}.$$

Es ist $H \neq \emptyset$, da $g(n_0) = m_0 = \tilde g(n_0)$. H ist abgeschlossen wegen der Stetigkeit von g und $\tilde g$. H ist aber auch offen: Sei $g(n) = \tilde g(n)$. Nach dem Frobenius- Theorem (das hier ohne Beweis verwendet wird), ist die Integral-Mannigfaltigkeit um n eindeutig bestimmt. Deshalb existieren Umgebungen $W(n)$, $\tilde W(n)$ mit $g(W) = \tilde g(\tilde W)$. Nach Definition von g und $\tilde g$ folgt $W = \tilde W$ und $g|W = \tilde g|W$ und damit $W \subset H$.
Da U zusammenhängend ist, folgt dann $H = U$, also $g = \tilde g$ auf U und schließlich $f = \tilde f$ auf U.

Satz 5.12 *Seien G, H Liegruppen, G zusammenhängend, φ, $\psi : G \to H$ Homomorphismen. Die Liealgebrenhomomorphismen $T_e\varphi$, $T_e\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ seien identisch. Dann ist bereits $\varphi = \psi$.*

Beweis. Wegen $T_e\varphi = T_e\psi$ gilt für die duale Abbildung

$$\varphi^* = \psi^* : E^1_{l\,\mathrm{inv}}(H) \to E^1_{l\,\mathrm{inv}}(G).$$

Nach einer Bemerkung ist weiterhin das Ideal in $E^\bullet(N \times M)$, das von den Formen $\{\pi_1^*\varphi^*\omega_i - \pi_2^*\omega_i : i = 1, \ldots, d\}$ erzeugt ist, differenzierbar. Mit $n_0 = e_G$, $m_0 = e_H$, $U = G$, $\varphi(e) = e = \psi(e)$, φ und ψ $\mathcal{C}^\infty$ folgt nach Lemma 5.11: $\varphi = \psi$.

6 Flüsse und Einparametergruppen

6.1 Beziehung zwischen Flüssen und Vektorfeldern

Definition 6.1 *Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine differenzierbare Aktion Φ von $(\mathbb{R},+)$ auf M heißt* **globaler Fluß** *oder dynamisches System auf M.*

Mit anderen Worten: Eine differenzierbare Abbildung $\mathbb{R} \times M \xrightarrow{\Phi} M$ ist ein globaler Fluß, wenn für alle $x \in M$ und $\forall s,t \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $\Phi(0,x) = 0$

(ii) $\Phi(s+t,x) = \Phi(s,\Phi(t,x))$

Die Bedingungen werden klarer, wenn man sich Φ als eine durch $\mathbb{R}$ differenzierbar parametrisierte Familie von Diffeomorphismen

$$M \xrightarrow{\Phi_t} M\,; \quad x \mapsto \Phi(t,x)$$

vorstellt.
Dann lauten die Bedingungen:

(i) $\Phi_0 = \mathrm{id}_M$

(ii) $\Phi_{s+t} = \Phi_s \circ \Phi_t$

Bemerkung
$t \mapsto \Phi_t$ ist also ein Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{R},+)$ in die Gruppe der Diffeomorphismen von M.

Definition 6.2 *Ist $\mathbb{R} \times M \xrightarrow{\Phi} M$ ein Fluß und ist $x \in M$, so heißt*

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\alpha_x} M\,; \quad t \mapsto \Phi_t(x)$$

Flußlinie *durch x. Das Bild $\alpha_x(\mathbb{R})$ heißt* **Orbit** *oder* **Bahn**.

Bemerkung Faktorisiert man M nach der üblichen Äquivalenzrelation

$$x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, t \in \mathbb{R} \quad y = \Phi_t(x),$$

so ist $M/\mathbb{R} = \{\alpha_x(\mathbb{R}) \,|\, x \in M\}$. Also schneiden sich verschiedene Orbits niemals!

Nun eine kurze Bemerkung zur Klassifikation der Flußlinien:

Lemma 6.3 *Sei Φ ein globaler Fluß auf der Mannigfaltigkeit M. Dann gibt es drei Typen von Flußlinien $\mathbb{R} \xrightarrow{\alpha_x} M$:*

- *α_x ist eine injektive glatte Kurve.*
- *α_x ist eine periodische glatte Kurve.*
- *α_x ist konstant. (x heißt dann Fixpunkt)*

Beweis
Wie üblich sei $\dot{\alpha_x}(t_0) := T_{t_0}(\alpha_x)\left(\frac{\partial}{\partial t}(t_0)\right) \in T_{\alpha_x(t_0)}M$ der „Geschwindigkeitsvektor" von α_x in t_0.
$\dot{\alpha_x}(t_0)$ ist also Derivation mit $\dot{\alpha_x}(t_0)(f) = \frac{\partial}{\partial t}(t_0)(f \circ \alpha_x)\,, \quad f \in \mathcal{C}^\infty_{\alpha_x(t_0)}(M)$.
Wegen $\alpha_x(t_0+t) = \Phi(t_0,\Phi(t,x)) = (\Phi_{t_0} \circ \alpha_x)(t)$ ist insbesondere

$$\dot{\alpha_x}(t_0) = T_0(\Phi_{t_0} \circ \alpha_x)\left(\frac{\partial}{\partial t}(0)\right) = T_x\Phi_{t_0} \circ T_0\alpha_x\left(\frac{\partial}{\partial t}(0)\right) = T_x\Phi_{t_0}(\dot{\alpha_x}(0))$$

für alle $t_0 \in \mathbb{R}$.
Nach Voraussetzung ist Φ_{t_0} ein Diffeomorphismus und daher $T_x\Phi_{t_0}$ ein Isomorphismus. Also gilt $\dot{\alpha_x}(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $\dot{\alpha_x}(0) = 0$.
Es können also die Fälle $\dot{\alpha_x}(t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$ oder $\dot{\alpha_x}(t) \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$ auftreten. Im ersten Fall ist $\alpha_x(t) = x \in M \ \forall t \in \mathbb{R}$ und damit x ein Fixpunkt. Im zweiten Fall ist die Kurve α_x glatt. Ist nun α_x nicht injektiv, so existiert ein $t_0 < t_1$ mit $\alpha_x(t_0) = \alpha_x(t_1)$, also $\Phi_{t_0}(x) = \Phi_{t_1}(x)$. Daraus folgt für $t \in \mathbb{R}$: $\Phi_t \circ \Phi t_0 = \Phi_t \circ \Phi_{t_1}$ und somit $\Phi_t(x) = \Phi_{t+(t_1-t_0)}(x)$, also

$$\alpha_x(t) = \alpha_x(t + (t_1 - t_0)) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Daher ist dann die Kurve α_x periodisch.

□

Betrachtet man jetzt $U \subset M$ offen, so verlaufen im allgemeinen die Flußlinien der Punkte in U nicht ganz in U; aber aus Stetigkeitsgründen ist zumindest $\alpha_x((a_x, b_x)) \subset U$ für alle $x \in U$ und genügend kleine Intervalle (a_x, b_x) um $0 \in \mathbb{R}$. Dies gibt Anlaß zu der folgenden Definition:

Definition 6.4 *Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Sei $A \subset \mathbb{R}\times M$ offen mit $\{0\}\times M \subset A$. Weiter habe A die Eigenschaft, daß für jedes $x \in M$ der Durchschnitt $A \cap (\mathbb{R}\times\{x\})$ zusammenhängend ist. Unter einem* **lokalen Fluß** Φ *auf M versteht man eine differenzierbare Abbildung, für die gilt:*

(i) $\Phi(0, x) = x$

(ii) $\Phi(s + t, x) = \Phi(s, \Phi(t, x))$

für alle t, s und x, für die beide Seiten erklärt sind.
(a_x, b_x) bezeichne den Definitionsbereich der Flußlinie $\alpha_x : t \mapsto \Phi(t, x)$ durch x.

Bemerkung Jeder globale Fluß ist lokaler Fluß.

Im folgenden wird nun die Beziehung zwischen den Begriffen „Vektorfeld“ und “Fluß“ untersucht.

Definition 6.5 *Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $M \xrightarrow{X} TM$ ein Vektorfeld auf M. Eine Kurve $(a, b) \xrightarrow{\alpha} M$ heißt* **Integral- oder Lösungskurve**, *wenn für alle $t \in (a, b)$ $\dot{\alpha}(t) = X(\alpha(t))$ gilt.*

Man benötigt auch folgenden Begriff:

Definition 6.6 *Ist Φ ein lokaler oder globaler Fluß auf M, so heißt das Vektorfeld*

$$M \xrightarrow{\dot{\Phi}} TM\,; \quad x \mapsto \dot{\alpha_x}(0) \in T_xM$$

Geschwindigkeitsfeld *des Flusses.*

Bemerkung Jede Flußlinie α_x eines Flusses Φ ist Integralkurve des Geschwindigkeitsfeldes $\dot{\Phi}$.

Beweis
Setze $z := \alpha_x(t)$. Für alle $s \in U(0)$ gilt $\alpha_z(s) = \Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(s + t, x) = \alpha_x(s + t)$. Dies impliziert $\dot{\alpha_z}(0) = \dot{\alpha_x}(t)$. Also ist $\dot{\Phi}(\alpha_x(t))\dot{\alpha_x}(t)$ für alle $t \in (a_x, b_x)$.

□

Folgender zentrale Satz zeigt deutlich die enge Verbindung zwischen Vektorfeldern und Flüssen:

Satz 6.7 *Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $X : M \longrightarrow TM$ ein Vektorfeld. X ist Geschwindigkeitsfeld $\dot{\Phi}$ genau eines maximalen lokalen Flusses Φ, gegeben durch:*

$$A \xrightarrow{\Phi} M\,; \quad \Phi(t, x) := \alpha_x(t),$$

wobei $\alpha_x : (a_x, b_x) \longrightarrow M$ maximale Integralkurve mit $\alpha_x(0) = x$ und

$$A = \bigcup_{x\in M} (a_x, b_x) \times \{x\}$$

ist.

Der BEWEIS besteht im wesentlichen in der Übertragung der folgenden zwei Sätze aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen in die „Sprache“ der Mannigfaltigkeiten und ist etwa bei [Bröcker1] zu finden.

Satz 6.8 (Existenz) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $\Omega \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare ($\mathcal{C}^\infty$) Abbildung. Zu jedem $y \in \Omega$ gibt es eine offene Umgebung $W \subset \Omega$, ein $\varepsilon > 0$ und eine differenzierbare ($\mathcal{C}^\infty$) Abbildung*

$$\Phi \,:\, (-\varepsilon, \varepsilon) \times W \longrightarrow \Omega$$

mit der Eigenschaft $\dot{\Phi}(t,x) = f(\Phi(t,x))$ für alle $(t,x) \in (-\varepsilon,\varepsilon) \times W$.

Satz 6.9 (Eindeutigkeit) *Sind $(a_0,a_1) \xrightarrow{\alpha} \Omega$ und $(b_0,b_1) \xrightarrow{\beta} \Omega$ differenzierbare Kurven mit $\alpha(0) = \beta(0) = x$ und $\dot{\alpha}(t) = f(\alpha(t))$, $\dot{\beta}(t) = f(\beta(t))$ für jeweils alle t des Definitionsbereiches. Dann ist $\alpha(t) = \beta(t)$ für alle $t \in (a_0,a_1) \cap (b_0,b_1)$.*

BEMERKUNG Konkret berechnen kann man einen solchen lokalen Fluß Φ, dessen Geschwindigkeitsfeld $\dot{\Phi}$ mit einem gegebenen Vektorfeld X übereinstimmen soll, indem man lokale Koordinaten wählt und in diesen die entstehenden Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung löst.

6.2 Flüsse auf Lie–Gruppen

Bedingt durch die Gruppenstruktur haben Flüsse auf Lie–Gruppen besondere Eigenschaften:

Lemma 6.10 *Sei G eine Lie–Gruppe, $X \in \mathfrak{g}$ ein linksinvariantes Vektorfeld. Dann ist der durch X induzierte Fluß global.*

BEWEIS
Wie im allgemeinen Fall ist mit Hilfe der maximalen Lösungskurven $(\alpha_g,\beta_g) \xrightarrow{\alpha_g} G$, $\alpha_g(0) = g$, durch $\Phi(t,g) := \alpha_g(t)$ auf $A = \bigcup_{g \in G}(a_g,b_g) \times \{g\}$ ein maximaler lokaler Fluß definiert (vgl. Satz 6.7). Wähle nun $\varepsilon := \min(a_e,b_e)$. Dann ist $l_g\alpha_e$ Lösungskurve auf $(-\varepsilon,\varepsilon)$ für jedes $g \in G$, denn:

$$(l_g\dot{\alpha}_e)(\tau) = T_\tau(l_g\alpha_e)\left(\frac{\partial}{\partial t}(\tau)\right) = T_{\alpha_e(\tau)}l_g \circ T_\tau\alpha_e\left(\frac{\partial}{\partial t}(\tau)\right) = T_{\alpha_e(\tau)}l_g(X(\alpha_e(\tau))) = X((l_g\alpha_e)(\tau)),$$

für alle $g \in G$, $\forall\, \tau \in (-\varepsilon,\varepsilon)$. Wegen des Eindeutigkeitssatzes 6.9 ist $\alpha_g|_{(a_g,b_g)\cap(-\varepsilon,\varepsilon)} = l_g\alpha_e$, und da $A \xrightarrow{\Phi} G$ maximal ist, folgt $(-\varepsilon,\varepsilon) \subset (a_g,b_g)$ für jedes $g \in G$. Demnach ist $(-\varepsilon,\varepsilon) \times G \subset A$. Dann gilt aber auch $(-2\varepsilon,2\varepsilon) \times G \subset A$. Dazu setzt man den auf $(-\varepsilon,\varepsilon) \times G$ definierten Fluß $\Phi(t,g) = g\,\alpha_e(t)$ durch

$$(-2\varepsilon,2\varepsilon) \times G \xrightarrow{\Psi} G\,; \quad (t,g) \mapsto \Phi(\frac{t}{2},\Phi(\frac{t}{2},g))$$

auf $(-2\varepsilon,2\varepsilon) \times G$ fort. (Offenbar gilt $\Psi|_{(-\varepsilon,\varepsilon)\times G} = \Phi$, und Ψ ist differenzierbar, denn die Gruppenoperation auf G ist differenzierbar.)
Da Φ maximaler Fluß ist, folgt $A = \mathbb{R} \times G$. Dies bedeutet aber, daß $\Phi(t,g) = g\,\alpha_e(t)$ ein globaler Fluß ist.

□

BEMERKUNG Insbesondere treten dann als Flußlinien die weiter oben in Lemma 6.3 beschriebenen drei Typen auf.

Für die Einführung der Exponentialabbildung spielt der Begriff der Einparametergruppe eine wichtige Rolle.

Definition 6.11 *Eine* **Einparametergruppe** *einer Lie–Gruppe G ist ein Lie–Gruppen–Homomorphismus $(\mathbb{R},+) \xrightarrow{\alpha} (G,\cdot)$.*
Sei M_G die Menge der Einparametergruppen von G.

Jeder Einparametergruppe einer Lie–Gruppe G entspricht genau ein linksinvariantes Vektorfeld aus der zu G gehörenden Lie–Algebra. Dies sagt das folgende

Lemma 6.12 *Sei G eine Lie–Gruppe und $\mathfrak{g}$ ihre Lie–Algebra. Dann ist*

$$M_G \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{g}\,; \quad \alpha \mapsto (\sigma \mapsto T_e l_\sigma(\dot\alpha(0)))$$

eine Bijektion.

BEWEIS

1. Offentsichtlich ist $\varphi(\alpha)$ ein linksinvariantes Vektorfeld.

2. Sei $X \in \mathfrak{g}$. α^X bezeichne die globale Integralkurve von X mit $\alpha^X(0) = e$. Betrachte nun die Abbildung

   $$\mathfrak{g} \xrightarrow{\psi} M_G\,;\ X \mapsto \alpha^X$$

   Es gilt $\alpha^X \in M_G$, denn:

   - α^X ist als Integralkurve eine differenzierbare Abbildung.

   - α^X ist auch ein Gruppenhomomorphismus. Sei dazu im folgenden $\Phi^X(t,\sigma) = \sigma\alpha^X(t)$ der globale Fluß mit $\dot\Phi^X = X$. Dann gilt: $\Phi^X(t, \sigma \cdot e) = \sigma \cdot \Phi^X(t, e)$. Also ist:

     $$\begin{aligned} \alpha^X(s+t) &= \Phi^X(s+t, e) = \Phi^X(s, \Phi^X(t,e)) \\ &= \Phi^X(s, \Phi^X(t,e)\cdot e) = \Phi^X(t,e)\cdot\Phi^X(s,e) \\ &= \alpha^X(s)\cdot\alpha^X(t) \end{aligned}$$

3. Es gilt $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$, da für alle $\sigma \in G$

   $$\varphi(\alpha^X)(\sigma) = T_e l_\sigma(\dot\alpha^X(0)) = T_e l_\sigma(X(e)) = X(\sigma)$$

   ist.

4. Ebenso ist auch $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{M_G}$.
   Man betrachte $\alpha \mapsto X \mapsto \alpha^X$, wobei $X := \varphi(\alpha)$. Zu zeigen ist $\alpha = \alpha^X$. Die Einparametergruppe α definiert einen Fluß

   $$\mathbb{R} \times G \xrightarrow{\Phi_\alpha} G\,; \quad (t,\sigma) \mapsto \sigma\alpha(t),$$

   wie man leicht verifiziert. Weiter ist $\dot\Phi_\alpha = X$, denn:

   $$\dot\Phi_\alpha(\sigma) = T_0(l_\sigma \circ \alpha)\left(\frac{\partial}{\partial t}(0)\right) = T_{\alpha(0)} l_\sigma \circ T_0\alpha\left(\frac{\partial}{\partial t}(0)\right) = T_e l_\sigma(\dot\alpha(0)) = \varphi(\alpha)(\sigma) = X(\sigma)$$

   Also gilt $\dot\Phi_\alpha = \dot\Phi^X = X$ und daher $\sigma\alpha(t) = \sigma\alpha^X(t)$ für alle $\sigma \in G$. Damit folgt $\alpha = \alpha^X$.

□

Zum Schluß dieses Abschnitts seien noch zwei Beispiele für Einparametergruppen erwähnt:

Beispiel 6.13 *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$–Vektorraum, betrachtet als Lie–Gruppe. Dann ist die zugehörige Lie–Algebra isomorph zu V, und die Einparametergruppe zu $v \in V$ ist $\alpha_v(t) = t \cdot v$.*

Beispiel 6.14 *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$. Nach Kapitel 2 ist* $\mathrm{Aut}(V)$ *eine Lie–Gruppe, deren Lie–Algebra isomorph zu* $\mathrm{End}(V)$ *ist. Die Einparametergruppe zu einem Endomorphismus A ist dann:*

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\alpha^A} \mathrm{Aut}(V)\,; \quad t \mapsto \exp(tA) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(tA)^\nu}{\nu!}$$

7 Die Exponentialabbildung auf Lie-Gruppen

7.1 Definition und Eigenschaften

Im folgenden Abschnitt definieren wir die Exponentialabbildung auf Lie-Gruppen und legen einige fundamentale Eigenschaften dar. Wir werden unter anderem zeigen, daß die Exponentialabbildung nahe der Null ein lokaler Diffeomorphismus ist.

Definition 7.1 *Sei G eine Lie-Gruppe und $\mathfrak{g}$ deren Lie-Algebra.*

1. *Zu einem gegebenen linksinvarianten Vektorfeld $X \in \mathfrak{g}$ sei $\alpha^X : \mathbb{R} \to G$ diejenige Einparametergruppe, für die*

   $$\dot{\alpha}^X(0) = X$$

   ist. Also gilt insbesondere $\dot{\alpha}^X(t) = X(\alpha^X(t))$ für $t \in \mathbb{R}$.

2. *Die Abbildung*

   $$\exp : \mathfrak{g} \to G, \quad X \mapsto \alpha^X(1)$$

   heißt **Exponentialabbildung**.

Lemma 7.2 *Sei $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra zu einer Lie-Gruppe G. Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ und $X \in \mathfrak{g}$ ist $\alpha^{tX}(s) = \alpha^X(ts)$.*

Beweis:
Seien $t \in \mathbb{R}$, $X \in \mathfrak{g}$. Dann gilt nach Definition

$$\dot{\alpha}^{tX}(0) = tX.$$

Sei $\beta : \mathbb{R} \to G$, $s \mapsto \alpha^X(t \cdot s)$. Dann ist β offensichtlich eine Einparametergruppe und es gilt $\dot{\beta}(0) = t \cdot X$, wie man durch Nachrechnen sieht: Seien $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}$ bzw. $(\frac{\partial}{\partial y_\nu})_{\nu=1..n}$ Basen von $\mathrm{T}_0\mathbb{R}$ bzw. T_eG. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\dot{\beta}(0) &\overset{\text{(Def.)}}{=} \mathrm{T}_0\beta\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(0)\Big) \\
&\overset{\text{(Funktoreigenschaft)}}{=} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\mathrm{d}(y_\nu \circ \beta)}{\mathrm{d}s}(0) \frac{\partial}{\partial y_\nu}(e) \\
&\overset{\text{(Kettenregel)}}{=} t \cdot \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\mathrm{d}(y_\nu \circ \alpha^X)}{\mathrm{d}s}(0) \frac{\partial}{\partial y_\nu}(e) \\
&\overset{\text{(Funktoreigenschaft)}}{=} t \cdot \mathrm{T}_0\alpha^X\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(0)\Big) \\
&\overset{(Def.)}{=} t \cdot \dot{\alpha}^X(0) \\
&\overset{\text{(Def.)}}{=} t \cdot X.
\end{aligned}$$

Da zu jedem Vektorfeld in $\mathfrak{g}$ genau eine zugehörige Einparametergruppe gehört, folgt $\alpha^{tX}(s) = \alpha^X(ts)$ für alle $s \in \mathbb{R}$.

□

Corollar 7.3 *Sei $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra zu einer Lie-Gruppe G. Dann ist für $X \in \mathfrak{g}$ die Abbildung $\varphi_X : \mathbb{R} \to G$, $t \mapsto \exp(t \cdot X)$ eine Einparametergruppe, die Integralkurve zum Vektorfeld X ist.*

Beweis: Sei $X \in \mathfrak{g}$. Dann gilt für $s, t \in \mathbb{R}$, daß

$$\begin{aligned} \exp((s+t)X) &\overset{\text{(Def.)}}{=} \alpha^{(s+t)X}(1) \\ &\overset{\text{(Lemma)}}{=} \alpha^X(s+t) \\ &\overset{\text{(Einpar.}-\text{Gr.)}}{=} \alpha^X(s) + \alpha^X(t). \end{aligned}$$

Da α_X differenzierbar ist, ist auch φ_X differenzierbar. Also ist φ_X eine Einparametergruppe. Durch analoge Rechnung wie im Lemma erhält man $\dot{\varphi}_X(0) = \dot{\alpha}^X(0) = X$, d.h. φ_X ist die Integralkurve an X.

□

Satz 7.4 *Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Dann ist die Exponentialabbildung differenzierbar.*

Beweis: Wir betrachten die Abbildung

$$\mathbb{R} \times G \times \mathfrak{g} \xrightarrow{\varphi} G \times \mathfrak{g}, \quad (t, g, X) \mapsto (g \circ \alpha^X(t), X).$$

Dies ist der Fluß des Feldes $(g, X) \mapsto (X(g), 0)$ auf $G \times \mathfrak{g}$, denn für $(g, X) \in G \times \mathfrak{g}$ gilt für $\alpha : t \mapsto (g \cdot \alpha^X(t), X)$, daß

$$\alpha(0) = (g \cdot e, X) = (g, X)$$

und

$$\dot{\alpha}(0) = (g \cdot \dot{\alpha}^X(0), 0) = (g \cdot X, 0) = (X(g), 0),$$

da X linksinvariant ist.
Als Fluß ist φ insbesondere differenzierbar. Also ist auch $\varphi|_{1 \times e \times \mathfrak{g}}$ differenzierbar. Es gilt für alle $X \in \mathfrak{g}$

$$\varphi(1, e, X) = (e \cdot \alpha^X(1), X) = (\alpha^X(1), X) = (\exp(X), 1).$$

Wegen der Differenzierbarkeit der Projektionen ist insbesondere exp differenzierbar.

□

Satz 7.5 *Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Dann ist die Ableitung der Exponentialabbildung in der Null ist die Identität.*

Beweis: Es gilt für $X \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0} \exp(tX) &= \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0} \alpha^{tX}(1) \\ &\overset{\text{Lemma}}{=} \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0} \alpha^X(t) \\ &= X. \end{aligned}$$

Daher folgt $\mathrm{T}_0 \exp(X) = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$.

□

Corollar 7.6 *Die Exponentialabbildung ist nahe der Null ein Diffeomorphismus.*

Satz 7.7 *Seien G, H Lie-Gruppen mit zugehörigen Lie-Algebren $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$. Weiter sei $f : G \to H$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus. Dann ist das folgende Diagramm kommutativ:*

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{L}f & & \\ & \mathfrak{g} & \rightarrow & \mathfrak{h} & \\ \exp & \downarrow & & \downarrow & \exp \\ & G & \rightarrow & H & \\ & & f & & \end{array}$$

Beweis: Sei $X \in \mathfrak{g}$. Dann gibt es genau eine zugehörige Einparametergruppe α^X (also $\dot{\alpha}^X(0) = X$). Da auch f ein Lie-Gruppen-Homomorphismus ist, folgt, daß $f \circ \alpha^X$ ebenfalls eine Einparametergruppe ist. Es gilt nun

$$\begin{array}{rcl}
(f \circ \alpha^X)^{\cdot}(0) & \stackrel{\text{(Def.)}}{=} & \mathrm{T}_0(f \circ \alpha^X)(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(0)) \\
& \stackrel{\text{(Funktoreigenschaft)}}{=} & (\mathrm{T}_e f \circ \mathrm{T}_0 \alpha^X)(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(0)) \\
& = & \mathrm{T}_e f(\mathrm{T}_0 \alpha^X(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(0))) \\
& \stackrel{\text{(Def.)}}{=} & \mathrm{T}_e f(\dot{\alpha}^X(0)) \\
& \stackrel{\text{(Vor.)}}{=} & \mathrm{T}_e f(X) \\
& \stackrel{\text{(Identifikation)}}{=} & \mathrm{L}f(X).
\end{array}$$

Also ist $f \circ \alpha^X = \alpha^{\mathrm{L}f(X)}$ die zu $\mathrm{L}f(X)$ gehörige Einparametergruppe. Daher gilt

$$\begin{array}{rcl}
\exp(\mathrm{L}f(X)) & = & \alpha^{\mathrm{L}f(X)}(1) \\
& = & (f \circ \alpha^X)(1) \\
& = & f(\alpha^X(1)) \\
& = & f(\exp(X).
\end{array}$$

Somit ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathrm{L}f & & \\
 & X & \mapsto & \mathrm{L}f(X) & \\
\exp & \downarrow & & \downarrow & \exp \\
 & \alpha^X(1) & \mapsto & f(\alpha^X(1)) & \\
 & & f & &
\end{array}$$

□

Corollar 7.8 *Sei G eine Lie-Gruppe, V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum. Weiter seien $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung (vgl. Definition 5.2) von G und $X \in \mathfrak{g}$ ein Element der Lie-Algebra zu G. Dann gilt*

$$\varphi(\exp(X)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathrm{L}\varphi(X))^k.$$

Beweis: Nach Satz 7.7 ist $\varphi(\exp(X)) = \exp(\mathrm{L}\varphi(X))$. Da $\mathrm{L}\varphi(X) \in \mathrm{End}(V)$ ist, gilt $\exp(\mathrm{L}\varphi(X)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathrm{L}\varphi(X))^k$, wie bereits in Beispiel 6.14 erwähnt wurde.

□

Satz 7.9 *Seien G, H zwei Lie-Gruppen mit Lie-Algebren $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$, wobei G einfach zusammenhängend sei. Weiter sei $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ein Homomorphismus der Lie-Algebren. Dann gibt es genau einen Homomorphismus $\varphi : G \to H$ mit $\mathrm{L}\varphi = \psi$.*

Da die Eindeutigkeit von φ direkt aus Satz 5.12 ([Warner], Theorem 3.16) folgt und der Beweis der Existenz zu weit führen würde, wird der Beweis dieses Satzes ausgelassen (vgl. [Warner], Theorem 3.27).

Corollar 7.10 *Ein Homomorphismus φ zwischen zwei Lie-Gruppen ist bereits durch seine Ableitung $\mathrm{L}\varphi$ in der Eins vollständig charakterisiert.*

Dies entspricht der Eindeutigkeitsaussage des Satzes.

Satz 7.11 *Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und $A \subseteq G$ eine abstrakte Untergruppe, d.h. eine Untergruppe, die nicht notwendig Lie-Untergruppe ist. Weiter seien $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ ein Untervektorraum, $U \subseteq \mathfrak{g}$ eine Umgebung der 0, $V \subseteq G$ eine Umgebung der Eins e so, daß* exp *die Menge U bijektiv auf V abbildet. Dann folgt aus*

$$\exp(\mathfrak{a} \cap U) = A \cap V,$$

daß A eine Lie-Untergruppe von G ist und $\mathfrak{a}$ eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ ist. Außerdem ist $\mathfrak{a}$ die Lie-Algebra zu A.

Ohne Beweis (vgl. [Warner], Theorem 3.34).

7.2 Beispiele

Wir geben in diesem Abschnitt Beispiele an, die zeigen, daß die Exponentialabbildung ein bequemes Hilfsmittel ist, um die Beziehungen zwischen Lie-Gruppen und Lie-Algebren zu ermitteln. Wir betrachten hierbei nur Lie-Untergruppen der Automorphismengruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Wir schreiben oft abkürzend $e^A := \exp(A)$ für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Lemma 7.12 *Seien $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Dann gilt*

$$Be^A B^{-1} = e^{BAB^{-1}}.$$

BEWEIS: Für Matrizen $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gilt bekanntlich (vgl. Beispiel 6.14)

$$e^C = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{C^\nu}{\nu!} = \lim_{\mu \to \infty} S_\mu(C),$$

wobei $S_\mu(C) := \sum_{\nu=0}^{\mu} \frac{C^\nu}{\nu!}$. Da die Matrix-Multiplikationen $D \mapsto D \circ C$, $D \mapsto C \circ D$ stetig sind, gilt insbesondere

$$\begin{aligned}
Be^A B^{-1} &= B \circ (\lim_{\mu \to \infty} S_\mu(A)) \circ B^{-1} \\
&= \lim_{\mu \to \infty} (B \circ S_\mu(A)) \circ B^{-1} \\
&= \lim_{\mu \to \infty} (B \circ S_\mu(A) \circ B^{-1}) \\
&= \lim_{\mu \to \infty} (B \circ \sum_{\nu=0}^{\mu} \frac{A^\nu}{\nu!} \circ B^{-1}) \\
&= \lim_{\mu \to \infty} (\sum_{\nu=0}^{\mu} \frac{BA^\nu B^{-1}}{\nu!}) \\
&= \lim_{\mu \to \infty} (\sum_{\nu=0}^{\mu} \frac{(BAB^{-1})^\nu}{\nu!}) \\
&= e^{BAB^{-1}}.
\end{aligned}$$

□

Satz 7.13 *Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine komplexe Matrix. Dann ist e^A invertierbar und* $\det(e^A) = e^{\mathrm{Spur}(A)}$.

BEWEIS: Bekanntlich kann A ähnlich auf eine obere Dreiecksmatrix transformiert werden. Sei also $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ so gewählt, daß $C := BAB^{-1}$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Seien $c_{ij}^{(\mu)}$ die Einträge von C^μ, $\lambda_i = c_{ii}^{(1)}$ die Eigenwerte von A bzw. C. Dann gilt für $i = 1..n$ und $\mu \in \mathbb{N}$, daß $c_{ii}^{(\mu)} = \lambda_i^\mu$ ist.

Außerdem ist C^μ wieder eine obere Dreiecksmatrix, wie man durch Nachrechnen sofort sieht. Daher ist e^C eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen e^{λ_i}. Es folgt:

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^n e_i^\lambda &= \det(e^C) \\ &= \det(e^{BAB^{-1}}) \\ &= \det(Be^AB^{-1}) \\ &= \det(B)\det(e^A)\det(B^{-1}) \\ &= \det(e^A).\end{aligned}$$

Also gilt

$$\det(e^A) = \prod_{i=1}^n e_i^\lambda = e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i} = e^{\mathrm{Spur}(A)}.$$

Da $e^x \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{C}$, folgt insbesondere, daß $\det(e^A) \neq 0$.

□

Kommen wir nun zu unserem ersten Beispiel:

Corollar 7.14 *Die Lie-Algebra zur Lie-Gruppe*

$$Sl(n,\mathbb{C}) := \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \mid \det(A) = 1\}$$

ist

$$\mathfrak{s}l(n,\mathbb{C}) := \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid \mathrm{Spur}(A) = 0\}.$$

Beweis: Daß $Sl(n,\mathbb{C}) \subseteq \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ eine Untergruppe ist, sowie daß $\mathfrak{s}l(n,\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}^{n\times n}$ ist ein Untervektorraum ist, ist offensichtlich. Nach obigem Satz 7.13 ist für jedes $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$\det(e^A) = e^{\mathrm{Spur}(A)}.$$

Daher ist $\mathrm{Spur}(A) = 0$ genau dann, wenn $\det(e^A) = 1$, d.h. $A \in \mathfrak{s}l(n,\mathbb{C})$ genau dann, wenn $e^A \in Sl(n,\mathbb{C})$. Mit Satz 7.11 folgt, daß $Sl(n,\mathbb{C})$ Lie-Gruppe und $\mathfrak{s}l(n,\mathbb{C})$ deren Lie-Algebra ist.

□

Satz 7.15 *Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ zwei kommutierende Matrizen, d.h. $AB = BA$. Dann gilt*

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

Beweis: Für die Matrixnorm $\|\cdot\|_2$, $\|C\|_2 := \sqrt{\rho(\bar{C}^T C)}$, wobei ρ den Spektralradius bezeichne, gilt stets $\|CD\|_2 \leq \|C\|_2\|D\|_2$. Daraus folgt induktiv, daß stets $\|C^k\|_2 \leq \|C\|_2^k$ ist.
Da für jedes $x \in \mathbb{R}^+$ die Exponentialreihe konvergiert, konvergiert für jedes $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ die Reihe $\exp(C)$ absolut, denn $\|\exp(C)\|_2 \leq \exp(\|C\|_2)$. Daher gilt der Satz über das Cauchy-Produkt von Reihen. Man berechnet:

$$\begin{aligned}\exp(A)\exp(B) &\overset{\text{(Def.)}}{=} \left(\sum_{k=0}^\infty \frac{A^k}{k!}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^\infty \frac{A^k}{k!}\right) \\ &\overset{\text{(Cauchy-Prod.)}}{=} \sum_{k=0}^\infty \left(\sum_{l=0}^k \frac{A^{k-l}B^l}{(k-l)!l!}\right) \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}\left(\sum_{l=0}^k \frac{k!}{(k-l)!l!}A^{k-l}B^l\right) \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}\left(\sum_{l=0}^k \binom{k}{l}A^{k-l}B^l\right) \\ &\overset{(A,B \text{kommutieren})}{=} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}(A+B)^k \\ &\overset{\text{(Def.)}}{=} \exp(A+B).\end{aligned}$$

□

Lemma 7.16 *Es gilt stets $e^0 = I$, wobei $0 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und I die n-reihige Einheitsmatrix seien.*

Beweis: Dies folgt sofort aus der Reihendarstellung der Exponentialfunktion.

□

Kommen wir nun zu zwei weiteren Beispielen:

Corollar 7.17

$$U(n) := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \mid A^{-1} = \bar{A}^T\}$$

ist eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra

$$\mathfrak{u}(n) := \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid \bar{A} + A^T = 0\}.$$

Beweis: $U(n) \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ ist offensichtlich eine Untergruppe. Ebenso ist $\mathfrak{u}(n) \subseteq \mathbb{C}^{n\times n}$ ein Untervektorraum. Sei $A \in \mathfrak{u}(n)$. Dann gilt: $\bar{A} + A^T = 0$, d.h. $\bar{A} = -A^T$. Also ist

$$\bar{A}A^T = (-A^T)(-\bar{A}) = A^T\bar{A},$$

d.h. $\bar{A}, A^T$ kommutieren. Nach Satz 7.15 folgt mit der Reihendarstellung der Exponentialfunktion

$$I = e^0 = e^{\bar{A}+A^T} = e^{\bar{A}}e^{A^T} = \overline{e^{A}}(e^A)^T.$$

Also ist $(e^A)^{-1} = \overline{(e^A)}^T$, d.h. $e^A \in U(n)$.
Sei umgekehrt $B \in U(n)$ so, daß ein $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existiert mit $e^A = B$ (da exp in der Nähe der Null lokal bijektiv ist, kann B so gewählt werden). Dann gilt

$$I = B\bar{B}^T = e^A(\overline{e^A})^T = e^A e^{\bar{A}^T},$$

d.h. $(e^A)^{-1} = e^{\bar{A}^T}$. Da andererseits

$$I = e^0 = e^{A-A} = e^A e^{-A}$$

gilt $(A(-A) = -AA = (-A)A)$, folgt

$$e^{\bar{A}^T} = (e^A)^{-1} = e^{-A}.$$

Da exp lokal bijektiv ist, folgt daraus

$$\bar{A}^T = -A \text{ bzw. } A + \bar{A}^T = 0,$$

d.h. $A \in \mathfrak{u}(n)$.
Also gilt nahe der Null $\exp(\mathfrak{u}(n)) = U(n)$, d.h. wir können Satz 7.11 anwenden.

□

Corollar 7.18

$$O(n) := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \mid A^{-1} = A^T\}$$

ist eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra

$$\mathfrak{o}(n) := \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid A + A^T = 0\}.$$

Beweis: analog zum Beweis von Corollar 7.17.

□

Literatur

[Bröcker1] Bröcker, T./Jähnich, K. *Einführung in die Differentialtopologie*. Berlin: Springer, 1973

[Bröcker2] Bröcker, T./Tammo tom Dieck *Representations of Compact Lie Groups*. Springer, 1985

[Chevalley] Chevalley, C. *Theory of Lie Groups I*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1946

[Heuser] Heuser, H. *Lehrbuch der Analysis, Teil 2*. Stuttgart: Teubner, 1993

[LA-Skript] Trautmann, G. *Lineare Algebra*, Vorlesungsskript. Kaiserslautern: 1995

[Spivak] Spivak, M. *Differential Geometry, Vol. 1*. Boston: Publish or Perish, 1970

[Warner] Warner, F.W. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. New York: Springer, 1983