Faserbündel von Varietäten und Invariantentheorie

Ein einführendes Skript

Holger Weigand [1]

22. Dezember 1998

[1]e-mail: weigand@mathematik.uni-kl.de

Einleitung

Die Hauptaufgabe des vorliegenden Skriptes besteht darin, eine *elementare* Theorie von Faserbündeln lokal-algebraischer Varietäten (über einem algebraisch abgeschlossenen Körper beliebiger Charakteristik) zu entwickeln, wobei die entsprechenden Aussagen möglichst vollständig bewiesen werden (Kapitel 2). Hierbei wird das historisch ältere Konzept des Faserbündels mit Strukturgruppe G und typischer Faser F verwendet. Die Darstellung folgt dabei im wesentlichen entsprechenden Theorien, wie sie in der Topologie oder Differentialgeometrie üblich sind; vgl. [Ste] und [Hir]. Für die Konstruktion von Faserbündeln von zentraler Bedeutung ist dabei die Verklebung von lokalen Modellen der Form

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[rr, "h_i", "\cong"'] \arrow[dr, "\pi_i"'] & & U_i \times_k F \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U_i & \end{tikzcd}$$

vermöge eines Cozyklus $\{g_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{G})$, d. h. die U_i setzen sich zur sogenannten *Basisvarietät* X und die V_i zur *Totalvarietät* Y zusammen. Im Sinne dieses Konzeptes werden *assoziierte Faserbündel* via Cozyklen durch „Austauschen" der typischen Faser konstruiert. Die im lokal-trivialen Fall hierzu alternative Konstruktion von assoziierten Faserbündeln aus Prinzipalbündeln, wie sie etwa in [Hus] dargestellt ist, wird hier keine Verwendung finden.

Bei der Beschreibung von Varietäten und Morphismen werden - wie in der klassischen algebraischen Geometrie - nur abgeschlossene Punkte berücksichtigt. Um eine Kompatibilität dieses Kalküls mit der hier verwendeten Hauptreferenz *Éléments de Géométrie Algébrique* [EGA] von Grothendieck/Dieudonné herzustellen, wurde ein Kapitel 0 vorangestellt.

Kapitel 1 dient als knappe Einführung, sowohl in die Theorie der algebraischen Gruppen, als auch in die geometrische Invariantentheorie. Beschränkt wurde dabei die Darstellung zum einen auf Begriffe, die für das grundlegende Verständnis der Theorien notwendig sind und zum anderen auf Sätze, die in Kapitel 2, sowie in der Anwendung bei Modul-Problemen benötigt werden. In diesem Sinne ist Kapitel 1 als Einführung in die umfangreiche Standardliteratur zu verstehen, wobei die zahlreichen und exakten Literaturreferenzen ein tiefer gehendes Studium der Materie ermöglichen sollen (vgl. Literaturverzeichnis).

In gewisser Weise als Bindeglied zwischen Kapitel 1 und Kapitel 2 dient der Abschnitt 2.5, wo spezielle geometrische Quotienten im Zusammenhang mit Prinzipalbündeln untersucht werden. Tatsächlich zeigt sich, daß gewisse Quotienten von Varietäten nach freien Gruppenoperationen die Struktur von Zariski-lokal-trivialen Prinzipalbündeln besitzen.

Zum schnelleren Auffinden der hier behandelten Begriffe und Definitionen wurde ein ausführliches Sachregister angefügt.

Ganz herzlich bedanken möchte ich mich bei Herrn Professor G. Trautmann für zahlreiche fruchtbare Diskussionen, sowie bei Herrn Dr. B. Kreußler für das akribische Lesen des Manuskriptes und wichtige Korrekturhinweise. Ebenso gilt mein Dank Herrn Dr. habil. K. Zuo, mit dem ich einige längere Beweise von wichtigen Sätzen des 2. Kapitels durchsprechen konnte.

Allen, die mir bei Computerproblemen hilfreich zur Seite standen, gilt mein herzlicher Dank: Dr. O. Bachmann, A. Frühbis-Krüger, T. Keilen, U. P. Klein, Dr. B. Kreußler, K. Krüger, P. Leopold, Dr. C. Lossen, Dr. W. Pohl, J. Schmidt, Dr. H. Schönemann, Dr. W. Veith, M. Wenk und T. Wichmann.

Kaiserslautern, im Dezember 1998 H. Weigand

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Ultraschemata und Varietäten

Vorbemerkung: Der Sinn dieses „nullten" Kapitels (das im Prinzip als Anhang gelesen werden kann) besteht in der Begründung der in der Literatur häufig stillschweigend gemachten Vereinbarung, bei der Betrachtung von algebraischen Schemata (über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k) nur *abgeschlossene* Punkte zu berücksichtigen. Der Vorteil dieser *lokal-klassischen* Sichtweise liegt in der Möglichkeit der Verwendung eines geometrisch-topologischen Kalküls, wie er in der klassischen algebraischen Geometrie üblich ist. Im folgenden soll versucht werden, dieses Konzept (das das historisch ursprüngliche ist, vgl. [FAC]) in der wesentlich allgemeineren Darstellung *Éléments de Géométrie Algébrique* [EGA] wiederzufinden. Als Hauptreferenz hierfür dient der Anhang von [EGA I].

0.1 Der Begriff des Ultraschemas

0.1.1 Definition: Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper von beliebiger Charakteristik und A eine endlich erzeugte kommutative k-Algebra. Dann ist

$$(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$$

ein affines Schema über $\mathrm{Spec}(k)$; vgl. [EGA I, 6.5.1 und 1.3.4], sowie [Har, II 2.1, 2.3 und 2.5]. Man setzt nun

$$\mathrm{Spm}(A) \overset{def}{=} \{\mathfrak{a} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{a} \text{ ist maximal}\}$$

und bezeichnet mit

$$\varepsilon : \mathrm{Spm}(A) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A)$$

die kanonische Einbettung der zugrundeliegenden topologischen Räume.

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Spm}(A)} \overset{def}{=} \varepsilon^{-1}(\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$$

ist dann die Urbildgarbe bzgl. ε [EGA I, 0 3.7.1], bzw. die durch $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$ auf dem Teilraum $\mathrm{Spm}(A)$ induzierte Garbe im Sinne von [God, II 1.5].

Der geringte Raum $(\mathrm{Spm}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spm}(A)})$ wird als ***affines Ultraschema*** über $\mathrm{Spm}(k)$ oder als ***affines k-Ultraschema*** bezeichnet. Der Morphismus von geringten Räumen

$$(\mathrm{Spm}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spm}(A)}) \longrightarrow (\mathrm{Spm}(k), k)$$

heißt ***Strukturmorphismus*** von $(\mathrm{Spm}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spm}(A)})$.

0.1.2 Bemerkung: $(\mathrm{Spm}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spm}(A)})$ ist sogar ein lokal-geringter Raum, wobei sich die lokalen Ringe mit den Halmen der Strukturgarbe $\widetilde{A} = \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$ in den abgeschlossenen Punkten von $\mathrm{Spec}(A)$ identifizierten.

Andererseits läßt sich $\mathcal{O}_{\mathrm{Spm}(A)}$ ganz analog zu $\widetilde{A}$ konstruieren: Sei U offen in $\mathrm{Spm}(A)$, und für jedes maximale Ideal $\mathfrak{x} \subset A$ bezeichne $A_{\mathfrak{x}}$ die Lokalisierung von A in $\mathfrak{x}$. Dann definiert man $\mathcal{O}(U)$ als die Menge aller Abbildungen $s : U \to \coprod_{\mathfrak{x} \in U} A_{\mathfrak{x}}$, für die gilt:

(i) $s(\mathfrak{x}) \in A_{\mathfrak{x}}$ für alle $\mathfrak{x} \in U$ und

(ii) für alle $\mathfrak{x} \in U$ existiert eine Umgebung $V(\mathfrak{x}) \subset U$, sowie Elemente $g, h \in A$, so daß für jedes $\mathfrak{y} \in V$ $h \notin \mathfrak{y}$ und $s(\mathfrak{y}) = \frac{g}{h}$ gilt.

0.1.3 Definition: Ein Morphismus von geringten Räumen [EGA I, 0 4.1.1]

$$(\psi, \theta) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

heißt ***Morphismus über dem geringten Raum*** $(Z, \mathcal{O}_Z)$, falls Morphismen (ψ', θ') und (ψ'', θ'') existieren, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(X, \mathcal{O}_X) \arrow[rr, "(\psi,\theta)"] \arrow[dr, "(\psi',\theta')"'] & & (Y, \mathcal{O}_Y) \arrow[dl, "(\psi'',\theta'')"] \\
& (Z, \mathcal{O}_Z) &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Sind $\mathcal{O}_X$ und $\mathcal{O}_Y$ Garben von k-Algebren und gilt $(Z, \mathcal{O}_Z) = (\mathrm{Spm}(k), k)$, so heißt (ψ, θ) auch ***k-Morphismus*** . Für offene Teilmengen $U \subset X$ und $V \subset Y$ mit $\psi(U) \subset V$ folgt dann aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(U) & & \mathcal{O}_Y(V) \arrow[ll, "\theta_V"'] \\
& k \arrow[ul, hook] \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

daß θ_V ein k-Algebrenhomomorphismus ist.

0.1.4 Definition: Ein geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt ***k-Ultraschema***, falls für alle $x \in X$ eine offene Umgebung $U(x) \subset X$ existiert, so daß $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ k-isomorph zu einem affinen k-Ultraschema ist. $(X, \mathcal{O}_X)$ wird in diesem Sinne als geringter Raum über $(\mathrm{Spm}(k), k)$ aufgefaßt. Der entsprechende Morphismus wird wie in 0.1.1 als ***Strukturmorphismus*** bezeichnet.

U heißt dann - wie bei Schemata - ***affine Umgebung*** von x, bzw. ***affin-offene Teilmenge*** von X.

0.1.5 Satz: *Die affin-offenen Teilmengen eines k-Ultraschemas $(X, \mathcal{O}_X)$ bilden eine Basis der Topologie von X.*

Beweis: [EGA I, App. 1.5, bzw. 2.1.5].

0.1.6 Definition: Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ k-Ultraschemata. Ein k-Morphismus

$$(\psi, \theta) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

von geringten Räumen heißt ***k-Morphismus von k-Ultraschemata***.

Sind zusätzlich für alle $x \in X$ affin-offene Umgebungen V von $\psi(x)$ in Y und $U(x)$ in X mit $\psi(U) \subset V$ gegeben, so daß vermöge des durch θ gegebenen Homomorphismus der Ringe von Schnitten

$$\theta_V : \mathcal{O}_Y(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)$$

$\mathcal{O}_X(U)$ zu einer endlich erzeugten $\mathcal{O}_Y(V)$-Algebra wird, dann wird (ψ, θ) als ***lokal von endlichem Typ*** bezeichnet; vgl. [EGA I, 6.2.1].

0.1.7 Folgerung: *Jeder Morphismus von k-Ultraschemata ist ein Morphismus von lokal-geringten Räumen, d. h. der durch $\theta : \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ induzierte Homomorphismus von lokalen Ringen*

$$\theta_x^{\#} : \mathcal{O}_{\psi(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_x$$

ist für alle $x \in X$ lokal; vgl. [EGA I, 0 4.1.12].

Beweis: Sei $\mathfrak{m}_x$ das maximale Ideal des lokalen Ringes $\mathcal{O}_x$, so gilt für alle $x \in X$

$$\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x \cong k \cong \mathcal{O}_{\psi(x)}/\mathfrak{m}_{\psi(x)} ;$$

vgl. [EGA I, 6.5.3 und 3.5.5]. Die Behauptung folgt somit unmittelbar aus

0.1.7.1 Lemma: *Seien R und S lokale k-Algebren mit maximalen Idealen $\mathfrak{m} \subset R$ und $\mathfrak{n} \subset S$; weiter gelte*

$$R/\mathfrak{m} \cong k \cong S/\mathfrak{n} .$$

Dann ist jeder Homomorphismus $\varphi : R \to S$ lokal.

Beweis: Zu zeigen ist $\varphi(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{n}$: Angenommen, es existiert ein $x \in \mathfrak{m}$ mit $\varphi(x) \notin \mathfrak{n}$, was gleichbedeutend ist mit $\varphi(x) = \lambda 1_S + b$ für ein $\lambda \in k$ und ein $b \in \mathfrak{n}$. Man hat also

$$\mathfrak{n} \ni (\varphi(x) - \lambda 1_S) = \varphi(x) - \lambda\varphi(1_R) = \varphi(x) - \varphi(\lambda 1_R) = \varphi(x - \lambda 1_R)\,,$$

und vermöge der kanonischen Projektion

$$R \ni (x - \lambda 1_R) \stackrel{\varkappa}{\longmapsto} -\lambda 1_R$$

folgt, daß $y = (x - \lambda 1_R) \notin \mathfrak{m}$ gilt. Also existiert das Inverse y^{-1}, und somit ist

$$1_R = y^{-1}y \stackrel{\varphi}{\longmapsto} \varphi(y^{-1})\varphi(y) = \varphi(y^{-1})(\varphi(x) - \lambda 1_S) \in \mathfrak{n}$$

im Widerspruch zu $\varphi(1_R) = 1_S$.

0.1.8 Satz: *Die Kategorien der (k-Ultraschemata & k-Morphismen lokal von endlichem Typ) im obigen Sinne und der (lokal-algebraischen k-Schemata & k-Morphismen lokal von endlichem Typ) im Sinne von [EGA I, 6.5.1, sowie 2.3.1, 2.6.2, 6.2.1] sind äquivalent.*

Beweis: Nach [EGA I, 6.5.2] ist ein lokal-algebraisches k-Schema ein Jacobson-Schema [EGA I, 6.4.1], wobei genau für die abgeschlossenen Punkte $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x = k(x)$ eine endliche Körpererweiterung von k ist. Da hier stets k als algebraisch abgeschlossen vorausgesetzt ist, gilt sogar $k(x) = k$. Weiter sind die hier konstruierten k-Ultraschemata insbesondere Ultraschemata im Sinne von [EGA I, App. 1.5]. Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus [EGA I, App. 1.6].

0.1.9 Korollar: *Die Kategorien der (k-Ultraschemata & k-Morphismen) im obigen Sinne und der (lokal-algebraischen k-Schemata & k-Morphismen im Sinne von [EGA I, 6.5.1, sowie 2.3.1, 2.6.2] sind äquivalent.*

Beweis: Die Behauptung ergibt sich sofort aus

0.1.9.1 Lemma: *Sei $(\psi, \theta) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ ein k-Morphismus von lokal-algebraischen k-Schemata, dann ist $f = (\psi, \theta)$ lokal von endlichem Typ [EGA I, 6.2.1].*

Beweis: Nach [EGA I, 2.6.2] existiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "s_1"'] & & Y \arrow[dl, "s_2"] \\ & \mathrm{Spec}(k)\,, & \end{tikzcd}$$

d. h. $s_1 = s_2 \circ f$; da s_1 lokal von endlichem Typ ist, gilt dies wegen [EGA I, 6.2.3(v)] auch für f.

0.1.10 Bemerkung: Die Bezeichnung *„k-Ultraschema“* entspricht genau den in [EGA I, App. 2.2] eingeführten Bezeichnungen *„k-ultra-schéma“*, bzw. *„espace préalgébrique sur k“*. Die Anwendung des „Ultra-Funktors“ auf ein lokal-algebraisches k-Schema kann als ein „Vergessen“ der nicht-abgeschlossenen Punkte interpretiert werden; daß hierbei keine Information verloren geht, garantiert der obige Satz (bzw. Korollar).

Nach Konstruktion besteht also der zugrundeliegende topologische Raum eines k-Ultraschemas $(X, \mathcal{O}_X)$ nur aus *abgeschlossenen Punkten* und diese sind wegen [EGA I, 6.5.3] genau die *k-rationalen Punkte* (das sind die $x \in X$ für die $k \to \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$ bijektiv ist; da k algebraisch abgeschlossen ist, sind das alle $x \in X$). Weiter gilt nach [EGA I, 3.5.5], daß sich die k-rationalen Punkte mit den *k-wertigen* oder *geometrischen Punkten* identifizieren. (Ein k-wertiger Punkt ist ein Morphismus von $(\mathrm{Spec}(k), k)$, bzw. von $(\mathrm{Spm}(k), k)$ nach $(X, \mathcal{O}_X)$.) Es ist daher sinnvoll die zugrundeliegende stetige Abbildung ψ eines Morphismus $(\psi, \theta) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ durch eine Zuordnung $X \ni x \mapsto y \in Y$ zu charakterisieren.

Des weiteren besitzen k-Ultraschemata günstigere Trennungseigenschaften als Schemata im allgemeinen: Die Abgeschlossenheit sämtlicher Punkte ist gleichwertig damit, daß zu je zwei verschiedenen Punkten für jeden der beiden Punkte eine Umgebung existiert, die den anderen Punkt nicht enthält; d. h. der zugrundeliegende topologische Raum eines k-Ultraschemas ist ein T_1-Raum. Dagegen genügt der zugrundeliegende topologische Raum eines Schemas i. a. nur dem T_0-Trennungsaxiom: von je zwei verschiedenen Punkten besitzt mindestens einer der beiden eine Umgebung, die den anderen nicht enthält; vgl. [EGA I, 2.1.4] und [Sch, I 5.4].

0.1.11 Bemerkung: Alle Betrachtungen der vorliegenden Arbeit bewegen sich im Rahmen der Kategorie der Ultraschemata über einem festen, algebraisch abgeschlossenen Grundkörper k (von beliebiger Charakteristik). Vermöge 0.1.9 sind Aussagen über lokal-algebraische k-Schemata auf k-Ultraschemata übertragbar. Werden im folgenden Sätze aus [EGA] zitiert, so wird von dieser kategoriellen Äquivalenz stillschweigend Gebrauch gemacht.

0.1.12 Bemerkung: k-Ultraschemata sind insbesondere *lokal-noethersch* : Per definitionem ist jedes k-Ultraschema lokal isomorph zu einem affinen k-Ultraschema $(\mathrm{Spm}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spm}(A)})$, wobei A als endlich erzeugte und kommutative k-Algebra noethersch ist; vgl. auch [EGA I, 2.7.1, 6.2.2 und 6.5.2].

0.2 Substrukturen und Verklebungen

0.2.1 Definition & Satz: Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein k-Ultraschema und $\mathcal{I}$ eine kohärente[1] Idealgarbe von $\mathcal{O}_X$. Dann ist $Y \overset{def}{=} \mathrm{supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$ abgeschlossen. Setzt man $\mathcal{O}_Y \overset{def}{=} \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$, so wird $(Y, \mathcal{O}_Y)$ zu einem k-Ultraschema. $(Y, \mathcal{O}_Y)$ heißt das durch $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ definierte ***abgeschlossene Unter-Ultraschema*** von $(X, \mathcal{O}_X)$.
Beweis: [EGA I, 4.1.1].

[1]Eine Garbe $\mathcal{F}$ von $\mathcal{O}_X$-Moduln heißt ***kohärent***, falls für alle $x \in X$ eine offene Umgebung $U(x)$ existiert, so daß für geeignete $p, q \in \mathbb{N}$ die Sequenz $\mathcal{O}_X^p|_U \to \mathcal{O}_X^q|_U \to \mathcal{F}|_U \to 0$ exakt ist

0.2.2 Definition: Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein k-Ultraschema und U eine offene Teilmenge von X, dann wird durch $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ ein k-Ultraschema definiert. $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ heißt das durch $U \subset X$ definierte ***offene Unter-Ultraschema*** von $(X, \mathcal{O}_X)$.

0.2.3 Definition: $(Y, \mathcal{O}_Y)$ heißt ***Unter-Ultraschema*** von $(X, \mathcal{O}_X)$, falls gilt:

(i) Y ist lokal-abgeschlossener Teilraum von X und

(ii) $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ist ein abgeschlossenes Unter-Ultraschema von $(U, \mathcal{O}_X|_U)$, wobei U die größte offene Teilmenge von X ist, mit Y ist abgeschlossen relativ U.

0.2.4 Definition: Ein Morphismus von k-Ultraschemata $(\psi, \theta) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ heißt ***Immersion*** (bzw. ***abgeschlossene Immersion***, bzw. ***offene Immersion***), falls (ψ, θ) ein Isomorphismus auf ein Unter-Ultraschema (bzw. abgeschlossenes Unter-Ultraschema, bzw. offenes Unter-Ultraschema) ist.

0.2.5 Satz: *Sei $(\psi, \theta) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ ein Morphismus von k-Ultraschemata.*

(i) *(ψ, θ) ist genau dann eine Immersion (bzw. abgeschlossene Immersion), wenn gilt:*

  (a) *ψ ist ein Homöomorphismus auf einen lokal-abgeschlossenen (bzw. abgeschlossenen) Teilraum von X*

  (b) *Für alle $y \in Y$ ist der Homomorphismus $\theta_y^\# : \mathcal{O}_{X,\psi(y)} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ surjektiv.*

(ii) *(ψ, θ) ist genau dann eine offene Immersion, wenn gilt:*

  (a) *ψ ist ein Homöomorphismus auf einen offenen Teilraum von X*

  (b) *Für alle $y \in Y$ ist der Homomorphismus $\theta_y^\# : \mathcal{O}_{X,\psi(y)} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ bijektiv.*

Beweis: [EGA I, 4.2.2].

0.2.6 Korollar: (i) *Seien $f = (\psi, \theta) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ ein Morphismus von k-Ultraschemata und $\{V_i\}_{i \in I}$ eine Überdeckung von $\psi(Y)$ mit V_i offen in X. f ist genau dann eine Immersion (bzw. offene Immersion), wenn für alle $i \in I$ die Einschränkung $\psi^{-1}(V_i) \to V_i$ von f eine Immersion (bzw. offene Immersion) ist.*

(ii) *Seien $f = (\psi, \theta) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ ein Morphismus von k-Ultraschemata und $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X gegeben. f ist genau dann eine abgeschlossene Immersion, wenn für alle $i \in I$ die Einschränkung $\psi^{-1}(U_i) \to U_i$ von f eine abgeschlossene Immersion ist.*

Beweis: Da die Surjektivität (bzw. Bijektivität) von $\theta_y^\#$ eine lokale Eigenschaft von (ψ, θ) charakterisiert, genügt es nach obigem Satz folgendes zu zeigen:

Im Fall (i): ψ ist ein Homöomorphismus von Y auf einen lokal-abgeschlossenen (bzw. offenen) Teilraum von X.

Im Fall (ii): ψ ist ein Homöomorphismus von Y auf einen abgeschlossenen Teilraum von X.

Gemäß den Voraussetzungen des Korollars bildet ψ für einen Punkt $y \in Y$ jede Umgebung von y topologisch auf eine Umgebung von $\psi(y)$ ab. Im Fall (i) ist $\psi(Y) \cap V_i$ lokal-abgeschlossen (bzw. offen) relativ V_i; folglich ist $\psi(Y)$ lokal-abgeschlossen (bzw.

offen) in der Vereinigung der V_i und damit auch in X. Im Fall (ii) ist $\psi(Y) \cap U_i$ abgeschlossen relativ U_i. Sei W_i das offene Komplement von $\psi(Y) \cap U_i$ in U_i, dann ist $\bigcup_{i \in I} W_i$ offen in X und somit $(\bigcup_{i \in I} W_i)^{\complement_X}$ abgeschlossen in X. Wegen

$$\Big(\bigcup_{i \in I} W_i\Big)^{\complement_X} = \bigcup_{i \in I} W_i^{\complement_{U_i}} = \bigcup_{i \in I} (\psi(Y) \cap U_i) = \psi(Y)$$

ist auch $\psi(Y)$ abgeschlossen in X ($\complement_X$ und $\complement_{U_i}$ bezeichnen die Komplementbildung in X, bzw. in U_i); vgl. den Beweis von [EGA I, 4.2.4].

0.2.7 Konvention: Falls Mißverständnisse auszuschließen sind, wird für ein k-Ultraschema $(X, \mathcal{O}_X)$ kurz X geschrieben. Ebenso schreibt man für einen Morphismus (ψ, θ) von k-Ultraschemata abkürzend f oder φ.

Des weiteren ist im folgenden mit der Sprechweise „Ultraschema“ stets ein k-Ultraschema im Sinne von 0.1.4 gemeint.

0.2.8 Definition & Satz: Komplementär zur Definition eines Ultraschemas (0.1.4) lassen sich „neue“ Ultraschemata aus gegebene Ultraschemata „zusammenkleben“:

Seien $\{(Y_i, \mathcal{O}_{Y_i})\}_{i \in I}$ eine Familie von k-Ultraschemata und für alle $(i,j) \in I^2$ offene Unterultraschema V_{ij} von Y_i (und Y_j), sowie Isomorphismen von Ultraschemata

$$\varphi_{ij} : (V_{ij}, \mathcal{O}_{Y_j}|_{V_{ij}}) \xrightarrow{\cong} (V_{ij}, \mathcal{O}_{Y_i}|_{V_{ij}})$$

gegeben, so daß für alle $i \in I$ $V_{ii} = Y_i$ und $\varphi_{ii} = id_{Y_i}$ gilt. Weiter sei für alle $(i,j,k) \in I^3$ φ'_{ij} die Einschränkung von φ_{ij} auf $V_{ij} \cap V_{ik}$ ebenfalls ein Isomorphismus

$$\varphi'_{ij} : (V_{ij} \cap V_{ik}, \mathcal{O}_{Y_j}|_{V_{ij} \cap V_{ik}}) \xrightarrow{\cong} (V_{ij} \cap V_{ik}, \mathcal{O}_{Y_i}|_{V_{ij} \cap V_{ik}})\,.$$

und es gelte die sogenannte ***Cozyklusbedingung***

$$\varphi'_{ik} = \varphi'_{ij} \circ \varphi'_{jk}\,. \tag{Co}$$

(1) Verklebung der zugrundeliegenden topologischen Räume:
Für alle $(i,j) \in I^2$ identifiziert man $V_{ij} \subset Y_j$ mit $V_{ij} \subset Y_i$ vermöge des φ_{ij} zugrundeliegenden Homöomorphismus. Wegen (Co) wird hierdurch eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf der topologischen Summe $\coprod_{i \in I} Y_i$ definiert. Man erhält nun für alle $i \in I$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \coprod_{i \in I} Y_i \arrow[d, two heads, "\varkappa"] & & Y_i \arrow[ll, hook', "\varepsilon_i"'] \arrow[d, hook, "\tilde{\varepsilon}_i"] \\ \coprod_{i \in I} Y_i/\sim \arrow[rr, equal] & & {:\, Y}\,; \end{tikzcd}$$

hierbei bezeichnen ε_i die kanonische Einbettung in die Summe und $\widetilde{\varepsilon}_i$ die ebenfalls kanonische Einbettung in den Quotienten [Bou(TG), Chap. I §2.5, Prop. 9]. Per definitionem ist die Quotientenabbildung $\varkappa$ surjektiv und identifizierend, weshalb $U \subset X$ genau dann offen ist, wenn $\varkappa^{-1}(U)$ offen ist in $\coprod_{i\in I} Y_i$; vgl. [Sch, I 4.3, Satz 1]. Somit gelten, nach Definition der topologischen Summe, folgende Äquivalenzen:

$$
\begin{aligned}
& Y_i \underset{\text{offen}}{\subset} \coprod_{i\in I} Y_i \quad \text{und} \quad \coprod_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} V_{ij} \underset{\text{offen}}{\subset} \coprod_{i\in I} Y_i \\
\Longleftrightarrow \quad & \underbrace{Y_i \amalg \big(\coprod_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} V_{ij}\big)}_{= \varkappa^{-1}(\widetilde{\varepsilon}(Y_i))} \underset{\text{offen}}{\subset} \coprod_{i\in I} Y_i \\
\Longleftrightarrow \quad & \widetilde{\varepsilon}_i(Y_i) \underset{\text{offen}}{\subset} Y\,.
\end{aligned}
$$

Also ist auch $\widetilde{\varepsilon}_i$ eine offene kanonische Einbettung von topologischen Räumen. Gemäß obiger Konstruktion werden die Durchschnitte

$$V_{ij} \cap V_{ik}, \quad V_{jk} \cap V_{ji} \quad \text{und} \quad V_{ki} \cap V_{kj}$$

durch die Quotientenabbildung mit

$$\underbrace{\widetilde{\varepsilon}_i(Y_i)}_{Y_i'} \cap \underbrace{\widetilde{\varepsilon}_j(Y_j)}_{Y_j'} \cap \underbrace{\widetilde{\varepsilon}_k(Y_k)}_{Y_k'}$$

identifiziert.

(2) Verklebung der Garben: Jetzt kann man von Y_i vermöge $\widetilde{\varepsilon}_i$ die Struktur eines geringten Raumes auf Y_i' übertragen: $\mathcal{O}_{Y_i'}$ wird die direkte Bildgarbe von $\mathcal{O}_{Y_i}$ bzgl. $\widetilde{\varepsilon}_i$ (das ist genau die Struktur bzgl. der $\widetilde{\varepsilon}_i : (Y_i, \mathcal{O}_{Y_i}) \to (Y_i', \mathcal{O}_{Y_i'})$ zu einem kanonischen Isomorphismus wird). Auf Y sind somit lokal für alle $i \in I$ geringte Räume $(Y_i', \mathcal{O}_{Y_i'})$ gegeben, die die Verklebungsbedingungen von [EGA I, 0 3.3.1] erfüllen, d. h. man erhält *global* einen geringten Raum $(Y, \mathcal{O}_Y)$ durch Verklebung der *lokal* gegebenen Garben $\mathcal{O}_{Y_i'}$, wobei $\mathcal{O}_Y|_{Y_i'} = \mathcal{O}_{Y_i'}$. Per definitionem existiert für jedes Ultraschema $(Y_i', \mathcal{O}_{Y_i'})$ eine Überdeckung von affinen Ultraschemata, womit auch $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Ultraschema ist.

Das k-Ultraschema $(Y, \mathcal{O}_Y)$ wird nun als ***Verklebung*** der k-Ultraschemata $(Y_i, \mathcal{O}_{Y_i})$ ***längs der Isomorphismen*** φ_{ij} bezeichnet.

0.3 Produkte und Faserprodukte

0.3.1 Satz: *Seien X und Y Ultraschemata über dem Ultraschema Z. Dann existiert das Faserprodukt $X \times_Z Y$ in der Kategorie der Ultraschemata.*

Beweis: [EGA I, 3.2.1 und App. 2.2].

0.3.2 Konvention: Die hier verwendete Notation von Faserprodukten und Morphismen im Zusammenhang mit Faserprodukten folgt der in [EGA I, 0 1.2 und 0 1.4] dargestellten.

0.3.3 Satz: *Seien X und Y Ultraschemata . Dann gilt:*

(i) *Die zugrundeliegende Menge des Faserproduktes $X \times_{\mathrm{Spm}(k)} Y$ ist gleich dem kartesischen Produkt der zugrundeliegenden Mengen von X und Y.*

(ii) *Die Topologie des zugrundeliegenden topologischen Raumes von $X \times_{\mathrm{Spm}(k)} Y$ ist i. a. echt feiner als die Produkttopologie der zugrundeliegenden topologischen Räume von X und Y.*

Beweis: [EGA I, App. 2.3]; vgl. auch [FAC].

0.3.4 Konvention: Das Faserprodukt $X \times_{\mathrm{Spm}(k)} Y$ zweier Ultraschemata X und Y wird im folgenden $X \times_k Y$ notiert und heißt ***Produkt von X und Y***.

0.3.5 Satz: *Seien X und Y Ultraschemata über dem Ultraschema Z mit $f : X \to Z$, $g : Y \to Z$ und $p_1 : X \times_Z Y \to X$, $p_2 : X \times_Z Y \to Y$ die kanonischen Projektionen des Faserproduktes. Dann ist der Morphismus*

$$\varepsilon = (p_1, p_2)_k : X \times_Z Y \longrightarrow X \times_k Y$$

eine Immersion.
Beweis: [EGA I, 5.1.3].

0.3.6 Korollar: *Die zugrundeliegende Menge von $X \times_Z Y$ identifiziert sich mit*

$$F \stackrel{def}{=} \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\},$$

wobei $X \times Y$ das kartesische Produkt der zugrundeliegenden Mengen von X und Y bezeichnet.
Beweis: Nach obigem Satz ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & X \times_k Y \arrow[ddl, "\pi_1"'] \arrow[ddr, "\pi_2"] & \\
 & X \times_Z Y \arrow[u, hook, "\varepsilon"'] \arrow[dl, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\
X \arrow[dr, "f"] \arrow[ddr] & & Y \arrow[dl, "g"'] \arrow[ddl] \\
 & Z \arrow[d] & \\
 & \mathrm{Spm}(k) &
\end{tikzcd}$$

gegeben.

Aus $(x', y') \in X \times_Z Y$ folgt $f(x) = g(y)$, wobei $\varepsilon(x', y') = (x, y)$:
Die Kommutativität des inneren Vierecks bedeutet $f \circ p_1(x', y') = g \circ p_2(x', y')$; wegen des obigen Satzes hat man

$$f \circ \pi_1 \circ \varepsilon(x', y') = g \circ \pi_2 \circ \varepsilon(x', y') \quad \text{bzw.} \quad f \circ \pi_1(x, y) = g \circ \pi_2(x, y).$$

Auf Grund von 0.3.3 sind π_1 und π_2 für die zugrundeliegenden Mengen genau die Projektionen des kartesischen Produktes, d. h. $\pi_1(x, y) = x$ und $\pi_2(x, y) = y$, weshalb $f(x) = g(y)$ folgt.

Aus $f(x) = g(y)$ folgt $(x, y) \in \text{Bild}(\varepsilon)$:

Angenommen, es gäbe ein $(x, y) \in X \times_k Y \setminus \varepsilon(X \times_Z Y)$ mit $f(x) = g(y)$, was gleichwertig zu $f \circ \pi_1(x, y) = g \circ \pi_2(x, y)$ ist. Also wäre auch $\{(x, y)\} \,\dot\cup\, \varepsilon(X \times_Z Y)$ ein Faserprodukt von X und Y, und wegen der universellen Eigenschaft der Konstruktion hätte man

$$X \times_Z Y \cong \{(x, y)\} \,\dot\cup\, \varepsilon(X \times_Z Y);$$

doch das ist ein Widerspruch.

0.3.7 Bemerkung: Der $X \times_Z Y$ zugrundeliegende topologische Raum ist dann F versehen mit der Spm-Topologie (das ist die klassische Zariski-Topologie), im Unterschied zur Spec-Topologie; vgl. auch 0.1.10.

0.3.8 Definition & Satz: Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Ultraschemata und $Y' \hookrightarrow Y$ ein Unterultraschema (bzw. ein abgeschlossenes, bzw. ein offenes Unterultraschema). Dann ist die kanonische Projektion $p : X \times_Y Y' \to X$ eine Immersion (bzw. abgeschlossene, bzw. offene Immersion), d. h. es existiert ein Unterultraschema (bzw. abgeschlossenes, bzw. offenes Unterultraschema) $X' \hookrightarrow X$ mit

$$p : X \times_Y Y' \xrightarrow{\cong} X' \hookrightarrow X.$$

X' heißt dann ***Urbild von Y' unter f*** und wird $f^{-1}(Y')$ notiert. Der zugrundeliegende topologische Raum von X' ist gleich dem Urbild der f zugrundeliegenden stetigen Abbildung.

Ist $y \in Y$ ein Punkt, so bezeichne $Y' = \text{Spm}(\mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y) \cong \text{Spm}(k)$ das y zugeordnete abgeschlossene Unterultraschema von Y; vgl. [EGA I, 2.5.5]. Das Urbild von Y' unter f wird dann $f^{-1}(y)$ notiert und heißt ***Faser von f in y***.
Beweis: [EGA I, 4.3.1].

0.3.9 Definition & Satz: Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Ultraschemata, dann ist der ***Diagonalmorphismus*** $\Delta_{X/Y} = \Delta_f : X \to X \times_Y X$ eine Immersion.
Beweis: [EGA I, 5.1.2].

0.3.10 Definition & Satz: Es seien Morphismen von Ultraschemata $g : X \to Z$ und $h : Y \to Z$, sowie ein Morphismus über Z $f : X \to Y$ gegeben. Dann ist der ***Graphmorphismus*** $\Gamma_f = (id_X, f)_Z : X \to X \times_Z Y$ eine Immersion.
Beweis: [EGA I, 5.1.4].

0.3.11 Definition: Unter den Voraussetzungen von 0.3.10 sei $X = Z$ und $g = id$. Dann identifiziert sich der Graphmorphismus $\Gamma_f = (id_Z, f)_Z : Z \to Z \times_Z Y$ wegen [EGA I, 0 1.2.7] mit $f : Z \to Y$. Insbesondere gilt $h \circ f = id_Z$. f wird dann als ***Z-Schnitt*** von Y bezeichnet; vgl. [EGA I, 5.1.4 f, sowie 2.6.5].

0.3.12 Definition: Ein Morphismus von Ultraschemata $f : X \to Y$ heißt ***separiert***, falls der Diagonalmorphismus $\Delta_f : X \to X \times_Y X$ eine abgeschlossene Immersion ist. X wird dann als ***separiert über Y*** bezeichnet. Ist $Y = \mathrm{Spm}(k)$, so heißt X ***separiert***.

0.3.13 Bemerkung: Wegen 0.3.9 ist X genau dann separiert über Y, wenn der zugrundeliegende topologische Raum der Diagonale $\Delta_f(X)$ ein abgeschlossener Teilraum von $X \times_Y X$ ist; vgl. auch [EGA I, 5.2.1 und App. 2.2].

0.3.14 Satz: *Jeder Morphismus zwischen affinen Ultraschemata ist separiert; insbesondere ist jedes affine Ultraschema separiert.*
Beweis: [EGA I, 5.2.2].

0.3.15 Satz:

(i) *Sei $f : X \to Y$ ein injektiver Morphismus von Ultraschemata (d. h. die zugrundeliegende stetige Abbildung ist injektiv), dann ist f separiert; insbesondere ist jede Immersion separiert.*

(ii) *Verkettungen separierter Morphismen sind separiert.*

(iii) *Seien $f : X \to X'$ und $g : Y \to Y'$ separierte Morphismen über dem Ultraschema Z, dann ist auch $f \times_Z g : X \times_Z Y \to X' \times_Z Y'$ separiert.*

(iv) *Sei $g \circ f$ als Verkettung von f und g separiert, dann ist auch f separiert.*

(v) *Sei $f : X \to Y$ ein separierter Morphismus, dann ist die Einschränkung von f auf jedes Unterultraschema von X separiert.*

(vi) *Seien X und Y zwei Ultraschemata über dem Ultraschema Z, und sei Y separiert über Z, dann ist $X \times_Z Y$ separiert über X.*

Beweis: [EGA I, 5.3.1, 5.3.2 und 5.3.3].

0.4 Quasikompaktheit und Irreduzibilität

0.4.1 Definition: Ein Morphismus von Ultraschemata $(\psi, \theta) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ heißt ***quasikompakt***, falls für jede quasikompakte offene Teilmenge $U \subset Y$ das Urbild $\psi^{-1}(U)$ quasikompakt ist. $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt dann ***quasikompakt über*** $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\mathcal{O}_Y})$.

X wird als ***quasikompakt*** bezeichnet, falls der Strukturmorphismus $X \to \mathrm{Spm}(k)$ quasikompakt ist (d. h. X ist quasikompakt im herkömmlichen Sinne).

0.4.2 Satz:

(i) *Sei* $f : X \to Y$ *eine Immersion von Ultraschemata, dann ist* f *quasikompakt.*

(ii) *Verkettungen quasikompakter Morphismen sind quasikompakt.*

(iii) *Seien* $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ *quasikompakte Morphismen über dem Ultraschema* Z*, dann ist auch* $f \times_Z g : X \times_Z Y \to X' \times_Z Y'$ *quasikompakt.*

(iv) *Sei* $g \circ f$ *als Verkettung zweier Morphismen quasikompakt, dann ist* f *quasikompakt.*

Beweis: [EGA I, 6.1.5].

0.4.3 Bemerkung: Quasikompakte Morphismen von k-Ultraschemata sind stets ***von endlichem Typ*** im Sinne von [EGA I, 6.3.2], da sie per definitionem lokal von endlichem Typ sind (vgl. 0.1.9.1).

Die quasikompakten k-Ultraschemata entsprechen den *algebraischen* k-Schemata im Sinne von [EGA I, 6.5.1] und werden deshalb auch als ***algebraische Ultraschemata*** bezeichnet. Insbesondere sind quasikompakte k-Ultraschemata *noethersch*; vgl. 0.1.12 und [EGA I, 2.7.2].

0.4.4 Definition: Ein Ultraschema heißt ***irreduzibel***, falls der zugrundeliegende topologische Raum irreduzibel ist.

0.4.5 Satz: *Sei* X *ein Ultraschema, dann gilt:*

(i) *Ist* X *irreduzibel, so gilt dies auch für jedes offene Unterultraschema von* X*.*

(ii) *Sei* $\{U_i\}_{i \in I}$ *eine offene Überdeckung von* X *gegeben mit* $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ *für alle* $(i,j) \in I^2$*. Sind die* U_i *für alle* $i \in I$ *irreduzibel, so gilt dies auch für* X*.*

Beweis: [Bou(AC), II §4.1, Prop. 3].

0.4.6 Satz: *Seien* X *und* Y *irreduzible Ultraschemata, dann ist auch ihr Produkt* $X \times_k Y$ *irreduzibel.*

Beweis: Angenommen X und Y sind irreduzibel und es existieren abgeschlossene Mengen Z_1 und Z_2 mit $Z_1 \subsetneq X \times_k Y$ und $Z_2 \subsetneq X \times_k Y$, so daß $X \times_k Y = Z_1 \cup Z_2$.

Für alle $x \in X$ ist $\{x\} \times_k Y$ abgeschlossen in $X \times_k Y$ und isomorph zu Y, also irreduzibel. Wegen

$$\{x\} \times_k Y \;=\; (\{x\} \times_k Y) \cap (Z_1 \cup Z_2) \;=\; [(\{x\} \times_k Y) \cap Z_1] \cup [(\{x\} \times_k Y) \cap Z_2]$$

gilt entweder $\{x\} \times_k Y \subset Z_1$ oder $\{x\} \times_k Y \subset Z_2$. Definiert man

$$X_1 \overset{def}{=} \{x \in X \mid \{x\} \times_k Y \subset Z_1\},$$

so ist X_1 abgeschlossen in X: Man betrachte hierzu

$$X_y \overset{def}{=} \{x \in X \mid (x,y) \in Z_1\}.$$

Da $X_y \cong X_y \times_k \{y\} = (X \times_k \{y\}) \cap Z_1$ gilt, ist X_y als Durchschnitt abgeschlossener Mengen selbst abgeschlossen. Ebenso ist $X_1 = \bigcap_{y \in Y} X_y$ abgeschlossen. Mit einer analogen Überlegung ergibt sich auch

$$X_2 \overset{def}{=} \{x \in X \mid \{x\} \times_k Y \subset Z_2\}$$

als abgeschlossene Teilmenge von X. Man hat nun $X_1 \cup X_2 = X$, und da X irreduzibel ist, gilt entweder $X_1 = X$ oder $X_2 = X$; d. h. aber, nach obiger Konstruktion, daß entweder $X \times_k Y = Z_1$ oder $X \times_k Y = Z_2$ gilt - im Widerspruch zur Annahme; vgl. [Sha, Chap. I 3., Thm. 3].

0.5 Varietäten

0.5.1 Definition: Ein Punkt x eines Ultraschemas X heißt ***reduziert***, falls der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ reduziert[1] ist. X heißt ***reduziert***, falls X in jedem Punkt reduziert ist; in diesem Fall wird X als ***lokal-algebraische Varietät*** oder kurz als ***Varietät*** bezeichnet. Ist zusätzlich X quasikompakt, so spricht man von einer ***algebraischen Varietät***.

0.5.2 Bemerkung: Die Reduziertheit eines Ultraschemas $(X, \mathcal{O}_X)$ ist eine lokale Eigenschaft: Ist eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von X gegeben, so ist X genau dann reduziert, wenn für alle $i \in I$ $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ reduziert ist.

0.5.3 Satz: *Seien X und Y Varietäten, so ist auch ihr Produkt $X \times_k Y$ eine Varietät.*

Beweis: [EGA I, App. 2.4].

0.5.4 Bemerkung: Sind X und Y reduzierte Ultraschemata über dem Ultraschema Z, so ist das Faserprodukt $X \times_Z Y$ i. a. *nicht* reduziert; vgl. auch hierzu [EGA I, App. 2.4]. Für die späteren Faserbündelkonstruktionen von Varietäten werden auch allgemeine Faserprodukte benötigt, deren Reduziertheit dann aus der Existenz von geeigneten Überdeckungen $\{U_i\}_{i \in I}$, mit U_i reduziert, folgt; vgl. 2.4.1 .

0.5.5 Satz: *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ eine Varietät und $Y \subset X$ ein lokal-abgeschlossener Teilraum von X. Dann existiert genau eine Untervarietät $(X', \mathcal{O}_{X'})$ von $(X, \mathcal{O}_X)$, so daß $X' = Y$ gilt.*

Beweis: [EGA I, 4.6.1].

0.5.6 Satz: *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Ultraschema und $\mathcal{A}_X$ die Garbe der Keime von k-wertigen Abbildungen auf X. $\mathcal{O}_X$ ist genau dann eine Untergarbe von $\mathcal{A}_X$, wenn $(X, \mathcal{O}_X)$ reduziert ist.*

[1]Ein Ring heißt ***reduziert***, falls er - außer der Null - keine nilpotenten Elemente enthält.

Beweis: Sei U eine affin-offene Teilmenge von X und $s \in \mathcal{O}_X(U)$ ein Schnitt, dann wird durch Zusammensetzung

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{\quad s \quad} & \coprod\limits_{a\in U} \mathcal{O}_{X,a} & \xrightarrow{\quad \varkappa \quad} & k \\ x & \longmapsto & s_x & \overset{\varkappa_x}{\longmapsto} & [s_x] \end{array}$$

eine Abbildung $\overline{s} \overset{def}{=} \varkappa \circ s$ gegeben ($\varkappa$ bezeichne den Homomorphismus von $\coprod_{a\in U} \mathcal{O}_{X,a}$ nach k, der auf jedem Summanden durch die kanonische Surjektion $\varkappa_a : \mathcal{O}_{X,a} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{X,a}/\mathfrak{m}_a$ definiert ist). Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine affin-offene Überdeckung von X, so wird durch

$$\begin{array}{rcl} h_{U_i} : \mathcal{O}_X(U_i) & \longrightarrow & \mathcal{A}_X(U_i) \\ s & \longmapsto & \overline{s} \end{array}$$

ein Garbenhomomorphismus $h : \mathcal{O}_X \to \mathcal{A}_X$ definiert. Zu zeigen ist nun die Gleichwertigkeit von

(i) h ist injektiv und (ii) $\mathcal{O}_X$ ist reduziert.

Sei $U_i = \mathrm{Spm}(A_i)$, wobei A_i eine endlich erzeugte kommutative k-Algebra ist. h ist genau dann injektiv, wenn für alle $i \in I$ h_{U_i} injektiv ist. Weiter sind für alle $i \in I$ Isomorphismen

$$\begin{array}{rcl} \psi_i : A_i & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{O}_{\mathrm{Spm}(A_i)}(\mathrm{Spm}(A_i)) \\ f & \longmapsto & (s : \mathfrak{x} \mapsto \frac{f}{1} \in (A_i)_{\mathfrak{x}}) \end{array}$$

gegeben; vgl. [EGA I, 1.3.7], wobei $\mathrm{Spm}(A_i) = D(1)$ und $A_1 \cong A$, vgl. auch [Har, II Prop. 2.2].

Gilt nun $\overline{s} = 0$, so ist dies gleichbedeutend mit $f/1 \in \mathfrak{m}_{\mathfrak{x}} \subset (A_i)_{\mathfrak{x}}$, bzw. mit $f \in \mathfrak{x}$ für alle $\mathfrak{x} \in \mathrm{Spm}(A_i)$. Also gilt $f \in \bigcap_{\mathfrak{x}\in\mathrm{Spm}(A_i)} \mathfrak{x}$. Nach [EGA I, 6.5.2] sind die A_i Jacobson-Ringe, d. h. daß jedes Primideal Durchschnitt von maximalen Idealen ist; vgl. [EGA I, 6.4.1]. Deshalb gelten mit [Kun, I 4.5] die Identitäten

$$\bigcap_{\mathfrak{x}\in\mathrm{Spm}(A_i)} \mathfrak{x} = \bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(A_i)} \mathfrak{p} = \mathrm{Rad}_{A_i}(0), \quad \text{d. h.} \quad f \in \mathrm{Rad}_{A_i}(0).$$

Also liegen genau die nilpotenten Elemente im Kern von h_{U_i}. Damit ist h_{U_i} genau dann injektiv, wenn das Nilradikal von $\mathcal{O}_X(U_i)$ gleich dem Nullideal ist.

0.5.7 Satz: *Sei X eine Varietät und U eine affin-offene Teilmenge von X. Dann ist $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ isomorph zu einer klassischen affinen Varietät.*

Beweis: Gemäß der Definition eines k-Ultraschemas ist $U = \mathrm{Spm}(A)$, wobei A eine endlich erzeugte kommutative k-Algebra ist. Wegen $\mathcal{O}_X$ reduziert ist auch A reduziert und da die Koordinatenringe von affinen Varietäten genau die endlich erzeugten kommutativen und reduzierten k-Algebren sind [Kun, I §3.12 (f)], folgt die Behauptung.

0.5.8 Definition & Satz: Insbesondere gilt nach obigem Satz, daß die reduzierte Strukturgarbe eines affinen k-Ultraschemas $X = \mathrm{Spm}(A)$ und die ***Garbe der regulären Funktionen auf X*** (aufgefaßt als affine Varietät $X \subset \mathbb{A}^n$ mit Koordinatenring A) übereinstimmen: Dabei heißt eine Funktion $r : U \to k$ (mit U offen in X) ***regulär in x* ∈ *U***, falls Elemente $f, g \in A$ existieren, so daß gilt:

(i) $x \in D(g) \subset U$ und

(ii) $r = \frac{f}{g}$ auf $D(g)$, d. h. für alle $y \in D(g)$ gilt $r(y) = \frac{f(y)}{g(y)}$.

f und g werden hierbei als Funktionen von U nach k aufgefaßt: Ist $f = F + \mathcal{I}(X)$ mit $F \in k[\mathbb{A}^n]$ und $y = (y_1, \ldots, y_n) \in U$, so setzt man $f(y) \overset{def}{=} F(y_1, \ldots, y_n)$. Die Definition ist unabhängig von der Repräsentantenwahl; denn gilt $F + \mathcal{I}(X) = F' + \mathcal{I}(X)$, so ist dies äquivalent zu $F - F' \in \mathcal{I}(X)$, d. h. aber, daß die Differenz $F - F'$ auf X verschwindet; vgl. [Kun, I §3.10 und III §2].

Im Beweis von 0.5.6 wurde gezeigt, daß

$$\begin{aligned} h_U : \mathcal{O}_X(U) &\longrightarrow \mathcal{A}_X(U) \\ s &\longmapsto \varkappa \circ s \end{aligned}$$

einen injektiven Garbenhomomorphismus $h : \mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{A}_X$ definiert. Es zeigt sich nun, daß das *Bild von h* genau die *Garbe der regulären Funktionen auf X* ist:

Sei r auf $D(g) \subset U$ gegeben durch

$$r = \frac{f}{g} \quad \text{und} \quad r(y) = \frac{f(y)}{g(y)} = \alpha \in k \quad \text{für} \quad y \in D(g)\,.$$

Weiter sei $s \in \mathcal{O}_X(U)$ auf $D(g) \subset U$ ebenfalls dargestellt durch

$$s = \frac{f}{g} \quad \text{mit} \quad f, g \in A\,.$$

Dann gilt $[s] = \alpha$, wobei $[\,\cdot\,]$ die Restklasse von s in $A_y/\mathfrak{m}_y$ bezeichnet: Ist

$$\frac{f(y)}{g(y)} - \alpha = 0\,,$$

dann ist dies gleichbedeutend mit dem Verschwinden der Funktion $f/g - \alpha$ in y, d. h. es ist

$$\frac{f}{g} - \frac{\alpha}{1} \in \mathfrak{m}_y\,, \quad \text{bzw.} \quad 0 = \left[\frac{f}{g} - \frac{\alpha}{1}\right] = \left[\frac{f}{g}\right] - \left[\frac{\alpha}{1}\right]$$

und wegen $[\frac{\alpha}{1}] = \alpha$ erhält man schließlich $\alpha = [\frac{f}{g}]$.

0.5.9 Definition & Satz: Sei $(\psi, \theta) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Morphismus von Varietäten, dann wird θ durch ψ wie folgt eindeutig festgelegt: Für alle offenen Teilmengen U von X und V von Y mit $\psi(U) \subset V$ wird θ durch k-Algebrenhomomorphismen

$$\begin{aligned} \psi_V^\circ : \mathcal{O}_Y(V) &\longrightarrow \mathcal{O}_X(U) \\ f &\longmapsto f \circ \psi \end{aligned}$$

definiert. ψ_V° heißt dann ***Comorphismus*** von ψ bzgl. V.

Beweis: Es reicht, Morphismen zwischen affinen Varietäten zu betrachten: Nach 0.1.5 bilden die affin offenen Teilmengen von X (bzw. Y) eine Basis der Topologie. Ist V affin-offen in Y, dann existieren affin-offene Teilmengen $U_i \subset X$, so daß $\psi^{-1}(V) = \bigcup_{i\in I} U_i$ gilt, d. h. lokal schreibt sich (ψ, θ) als

$$(\psi, \theta)|_U : (U, \mathcal{O}_X|_U) \longrightarrow (V, \mathcal{O}_Y|_V)\,,$$

wobei U und V affin sind. Wegen 0.5.6 ist durch

$$\begin{aligned} \tau : \mathcal{O}(V) &\longrightarrow \mathcal{O}(U) \\ f &\longmapsto f \circ \psi \end{aligned}$$

ein k-Algebrenhomomorphismus der Funktionenringe gegeben. Nach [EGA I, 1.2.1, bzw. App. 1.3, 1.4] ist jetzt zu zeigen, daß die stetige Abbildung [loc. cit., 1.2.3]

$$\begin{aligned} \mathrm{Spm}(\tau) : \mathrm{Spm}\,\mathcal{O}(U) &\longrightarrow \mathrm{Spm}\,\mathcal{O}(V) \\ i_x &\longmapsto \tau^{-1}(i_x) \end{aligned}$$

mit $\psi|_U : U \to V$ identifiziert werden kann: Bezeichnet i_x das dem (geometrischen) Punkt $x \in X$ entsprechende maximale Ideal von $\mathrm{Spm}\,\mathcal{O}(U)$, dann gilt

$$i_x = \{g \in \mathcal{O}(U) \mid g(x) = 0\} \quad \text{und} \quad \tau^{-1}(i_x) = \{f \in \mathcal{O}(V) \mid f(\psi(x)) = 0\}\,,$$

d. h. $\tau^{-1}(i_x)$ entspricht dem Punkt $\psi(x) \in V$. Also entspricht ψ der Abbildung $\mathrm{Spm}(\tau)$ und mit [EGA I, 4.5.2, 4.5.10] folgt die Eindeutigkeit von τ; folglich ist $\tau = \theta$.

0.5.10 Konvention: Sei $f = (\psi, \theta) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Morphismus von Varietäten, $(Y', \mathcal{O}_{Y'})$ eine Untervarietät von $(Y, \mathcal{O}_Y)$ und bezeichne $\psi^{-1}(Y')$ das Urbild von Y' bzgl. der stetigen Abbildung ψ. Versieht man $\psi^{-1}(Y')$ mit der kanonischen reduzierten Struktur (0.5.5), dann stimmt die so konstruierte Varietät i. a. *nicht* mit dem schematheoretischen Urbild $f^{-1}(Y')$ (0.3.8) überein; vgl. hierzu [Har, II 3.3.1]. Für Y' offen in Y ist auch $\psi^{-1}(Y')$ offen, d. h. die Garbe der regulären Funktionen auf $\psi^{-1}(Y')$ stimmt mit $\mathcal{O}_X|_{\psi^{-1}(Y')}$ überein; in diesem Fall ist auch $f^{-1}(Y')$ reduziert. In jedem Fall gilt jedoch

$$f^{-1}(Y')_{\mathrm{red}} = \psi^{-1}(Y') \;\&\; \text{kanonische reduzierte Struktur}\,.$$

Häufig wird im Zusammenhang mit Morphismen von Varietäten (etwa bei algebraischen Gruppen) per conventionem unter dem *Urbild* einer Untervarietät (bzw. abgeschlossenen Untervarietät) $f^{-1}(Y')_{\mathrm{red}}$ verstanden, auch wenn $f^{-1}(Y')$ notiert wird. Insbesondere ist dann unter einer *Faser* $f^{-1}(y)$ (für $y \in Y$) stets eine abgeschlossene Untervarietät von X zu verstehen.

In den jeweiligen Vorbemerkungen der folgenden Kapitel wird vermerkt werden, welcher der beiden Urbildbegriffe zugrundezulegen ist.

0.5.11 Bemerkung: Die klassischen quasi-projektiven Varietäten sind quasikompakte, separierte Varietäten im Sinne von 0.5.1. Da auch quasi-projektive Varietäten lokal isomorph zu affinen Varietäten sind, unterscheiden sie sich nur im *globalen* von den hier definierten Varietäten: denn diese sind nicht mehr durch eine Einbettung in einen projektiven Raum gebunden. Wegen 0.5.7 kann eine Varietät $(X, \mathcal{O}_X)$ als Verklebung (0.2.8) von klassischen affinen Varietäten $(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$ interpretiert werden, weshalb sich alle *lokalen* Eigenschaften von Varietäten mit den gleichen Begriffen wie bei klassischen affinen Varietäten beschreiben lassen. So etwa der Begriff der Singularität:

0.5.12 Definition: Eine Varietät $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt ***nicht-singulär*** oder ***glatt im Punkt*** $x \in X$, falls der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ regulär[1] ist. Ansonsten wird x als ***Singularität*** von X bezeichnet.

$(X, \mathcal{O}_X)$ heißt ***nicht-singulär*** oder ***glatt***, falls $(X, \mathcal{O}_X)$ in jedem Punkt glatt ist.

0.5.13 Satz: *Seien X und Y glatte Varietäten, so ist auch ihr Produkt $X \times_k Y$ (0.3.4) glatt.*

Beweis: Vermöge 0.1.8 können X und Y als reguläre, lokal-algebraische (insbesondere lokal-noethersche, vgl. [EGA I, 2.7.1, 6.5.2]) k-Schemata aufgefaßt werden (zu „regulär" in diesem Zusammenhang vgl. [EGA IV, 5.8.1]). Nun ist k algebraisch abgeschlossen, d. h. jede algebraische (und damit jede endliche) Körpererweiterung $k' \supset k$ ist mit k identisch. Nach [EGA I, 3.2.2] ist $X \otimes_k k' = X \times_k \operatorname{Spec}(k')$, was für $k' = k$ kanonisch isomorph zu X ist [EGA I, 0 1.2.7.1]. X (bzw. Y) ist also genau dann regulär, wenn X (bzw. Y) geometrisch regulär im Sinne von [EGA IV, 6.7.6] ist. Die Behauptung folgt somit aus [EGA IV, 6.8.5].

0.6 Morphismen mit speziellen Eigenschaften

0.6.1 Definition: Ein Morphismus von Ultraschemata $f : X \to Y$ heißt ***abgeschlossen*** (bzw. ***offen***, ***dominant***, ***injektiv***, ***surjektiv***), falls die zugrundeliegende stetige Abbildung die entsprechende Eigenschaft besitzt.

0.6.2 Definition: Ein Morphismus von Ultraschemata $f : X \to Y$ heißt ***affin***, falls eine Überdeckung $\{V_i\}_{i \in I}$ von Y existiert, mit V_i affin-offen in Y, so daß für alle $i \in I$ das offene Unterultraschema $f^{-1}(V_i)$ affin ist. X heißt dann ***affin über Y***. (Die Sprechweisen „affin" und „affin über $\operatorname{Spm}(k)$" sind gleichwertig; vgl. 0.1.1 .)

Insbesondere ist jeder Morphismus zwischen affinen Ultraschemata affin.

0.6.3 Satz: *Sei $f : X \to Y$ ein affiner Morphismus und V offen in Y, dann ist auch die Restriktion von f auf $f^{-1}(V)$ affin.*

Beweis: [EGA I, 9.1.2].

[1] $\mathcal{O}_{X,x}$ heißt ***regulär***, falls die Krulldimension $\dim(\mathcal{O}_{X,x})$ mit der Dimension des Cotangentialraumes $\dim_k(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)$ übereinstimmt.

0.6.4 Satz: *Ein affiner Morphismus ist separiert (0.3.12) und quasikompakt (0.4.1).*
Beweis: [EGA I, 9.1.3].

0.6.5 Satz:

(i) *Sei* $f : X \to Y$ *eine abgeschlossene Immersion von Ultraschemata, dann ist* f *affin.*

(ii) *Verkettungen affiner Morphismen sind affin.*

(iii) *Seien* $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ *affine Morphismen über dem Ultraschema* Z*, dann ist auch* $f \times_Z g : X \times_Z Y \to X' \times_Z Y'$ *affin.*

(iv) *Sei* $f \circ g$ *als Verkettung zweier Morphismen affin und* g *sei separiert, dann ist* f *affin.*

Beweis: [EGA I, 9.1.16].

0.6.6 Definition: Ein Morphismus von Ultraschemata $f : X \to Y$ heißt ***universell abgeschlossen***, falls gilt: Für jedes Ultraschema Y' und jeden Morphismus $Y' \to Y$ ist die kanonische Projektion $f_{(Y')} : X \times_Y Y' \to Y'$ ein abgeschlossener Morphismus.

f heißt ***eigentlich***, falls f separiert (0.3.12), quasikompakt (0.4.1, vgl. auch 0.4.3) und universell abgeschlosen ist. X wird dann als ***eigentlich über Y*** bezeichnet; vgl. [EGA II, 5.4.1, 5.4.9].

0.6.7 Satz:

(i) *Sei* $f : X \to Y$ *eine abgeschlossene Immersion von Ultraschemata, dann ist* f *eigentlich.*

(ii) *Verkettungen eigentlicher Morphismen sind eigentlich.*

(iii) *Seien* $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ *eigentliche Morphismen über dem Ultraschema* Z*, dann ist auch* $f \times_Z g : X \times_Z Y \to X' \times_Z Y'$ *eigentlich.*

Beweis: [EGA II, 5.4.2].

0.6.8 Satz: *Seien* $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ *zwei Morphismen von Ultraschemata, so daß die Verkettung* $g \circ f$ *eigentlich ist.*

(i) *Ist* g *separiert, so folgt* f *eigentlich.*

(ii) *Ist* g *separiert und quasikompakt (vgl. 0.4.3) und* f *surjektiv, so folgt* g *eigentlich.*

Beweis: [EGA II, 5.4.3].

0.6.9 Definition: Ein Morphismus von Ultraschemata $f : X \to Y$ heißt ***ganz***, falls eine affin-offene Überdeckung $\{\mathrm{Spm}(B_i)\}_{i \in I}$ von Y existiert, so daß gilt:

(i) $f^{-1}(\mathrm{Spm}(B_i))$ ist affin für alle $i \in I$ mit $f^{-1}(\mathrm{Spm}(B_i)) = \mathrm{Spm}(A_i)$ und

(ii) A_i ist als B_i-Algebra ganz [SchSt, §56, 3 f].

f heißt ***endlich***, falls f ganz und quasikompakt ist; vgl. [EGA II, 6.1.1] und 0.4.3.

0.6.10 Satz: *Ein Morphismus $f : X \to Y$ ist genau dann endlich, wenn eine affin-offene Überdeckung $\{\mathrm{Spm}(B_i)\}_{i \in I}$ von Y existiert, so daß gilt:*

(i) $f^{-1}(\mathrm{Spm}(B_i))$ *ist affin für alle* $i \in I$ *mit* $f^{-1}(\mathrm{Spm}(B_i)) = \mathrm{Spm}(A_i)$ *und*

(ii) A_i *ist als* B_i-Modul *endlich erzeugt.*

Beweis: [EGA II, 6.1.2], vgl. auch [Har, II 3., p. 84].

0.6.11 Satz: *Sei $f : X \to Y$ ein endlicher Morphismus. Dann ist für alle $y \in Y$ die Faser $f^{-1}(y)$ diskret und endlich.*

Beweis: [EGA II, 6.1.7].

0.6.12 Satz: *Jeder endliche Morphismus $f : X \to Y$ ist eigentlich.*

Beweis: [EGA II, 5.5.3 und 6.1.11].

0.6.13 Definition: Seien A und B lokale Ringe mit maximalen Idealen $\mathfrak{m}$, bzw. $\mathfrak{n}$, und $\alpha : A \to B$ ein lokaler Ringhomomorphismus gegeben (d. h. $\alpha(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{n}$). α heißt dann ***flach***, falls B flach über A ist (d. h. falls der Funktor $B \otimes_A -$ exakt ist).

Ist α flach und gilt zusätzlich: $B/\big(\alpha(\mathfrak{m})\big) = B/\mathfrak{m}B$ ist ein Körper und die durch α induzierte Inklusion $A/\mathfrak{m} \hookrightarrow B/\mathfrak{m}B$ definiert eine endliche und separable[1] Körpererweiterung, dann heißt α ***étale***.

Sei jetzt $f = (\psi, \theta) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Morphismus von Ultraschemata. f heißt ***flach*** (bzw. ***étale***) ***in $x \in X$***, falls der induzierte Homomorphismus $\theta_x^\# : \mathcal{O}_{\psi(x)} \to \mathcal{O}_x$ flach (bzw. étale) ist. f heißt ***flach*** (bzw. ***étale***), falls f die entsprechende Eigenschaft in jedem Punkt $x \in X$ besitzt; vgl. [Gro(Des), 3., p. 190-10] und [EGA IV, 17.6.1], zu „localement de présentation fini“ vgl. [EGA I, 6.2.1.2].

0.6.14 Bemerkung: k-Ultraschemata besitzen per definitionem nur geometrische (bzw. abgeschlossene) Punkte, d. h. die Restklassenkörper von $\mathcal{O}_x$ und $\mathcal{O}_y$ (wobei $\psi(x) = y$) sind in jedem Fall kanonisch isomorph zum Grundkörper k. $f = (\psi, \theta)$ ist also genau dann étale in $x \in X$, wenn f flach in x ist und wenn das von $\theta_x^\#(\mathfrak{m}_y)$ erzeugte Ideal mit $\mathfrak{m}_x$, dem maximalen Ideal von $\mathcal{O}_x$, übereinstimmt: denn $\mathcal{O}_y/\mathfrak{a}$ ist genau dann ein Körper, wenn $\mathfrak{a}$ maximal ist; wegen $\mathcal{O}_x$ lokal muß also $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}_x$ gelten. Da $\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y \cong k \cong \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$, ist die von $\theta_x^\#$ induzierte Inklusion ein Isomorphismus, und k ist trivialerweise eine endliche und separable Körpererweiterung von k.

[1] Eine Körpererweiterung $k \subset K$ ist genau dann ***separabel***, wenn gilt: $\mathrm{char}(k) = 0$ oder $\mathrm{char}(k) = p > 0$, und für alle über k linear unabhängigen $x_1, \ldots, x_n \in K$ sind auch $x_1^p, \ldots, x_n^p \in K$ linear unabhängig über k.

0.6.15 Satz: *Sei* $f = (\psi, \theta) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ *ein Morphismus von Ultraschemata und* $x \in X$ *gegeben. Bezeichne* $\widehat{\theta}_x : \widehat{\mathcal{O}}_{\psi(x)} \to \widehat{\mathcal{O}}_x$ *den vermöge* $\theta_x^\#$ *definierten Homomorphismus zwischen den Komplettierungen von* $\mathcal{O}_{\psi(x)}$ *und* $\mathcal{O}_x$*. Dann sind äquivalent:*

(i) f *ist étale in* x*.*

(ii) $\widehat{\theta}_x$ *ist bijektiv.*

Beweis: Der Restklassenkörper sowohl von $\mathcal{O}_x$ als auch von $\mathcal{O}_{\psi(x)}$ ist kanonisch isomorph zum Grundkörper k. Die Behauptung folgt jetzt aus [EGA IV, 17.6.3].

0.6.16 Satz: *Sei* $f = (\psi, \theta) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ *in* $x \in X$ *étale, dann gilt:*

$$\dim(\mathcal{O}_{X,x}) = \dim(\mathcal{O}_{Y,\psi(x)}) .$$

Beweis: [EGA IV, 17.6.4].

0.6.17 Definition: Sei $f : X \to Y$ ein étaler und endlicher (0.6.9) Morphismus von Ultraschemata, dann wird das Tupel (X, f, Y) als ***étale Überlagerung*** bezeichnet.

0.6.18 Satz: *Sei* (X, f, Y) *eine étale Überlagerung und* Y *zusammenhängend (bzgl. der* Spm-*Topologie), dann besitzen alle Fasern von* f *die gleiche Mächtigkeit* n*; insbesondere ist dann* f *surjektiv.*

Beweis: Nach 0.6.12 ist f eigentlich, also insbesondere separiert und von endlichem Typ (d. h. quasikompakt). Die Behauptung folgt jetzt mit [EGA IV, 18.2.9].

0.6.19 Bemerkung: Der oben definierte Begriff der étalen Überlagerung legt einen Vergleich mit dem Überlagerungsbegriff in der Topologie nahe:

Sei (X, f, Y) eine étale Überlagerung und sei für alle $y \in Y$ ein offene Umgebung $V(y)$ sowie ein lokaler Schnitt (0.3.11) von f über V gegeben. Dann existieren offene Unterultraschemata U_i von X mit $V \cong U_i$ und $f^{-1}(V) = \coprod_{i=1}^n U_i$; ist Y zusammenhängend, dann hängt n nicht von der Wahl von y (bzw. $V(y)$) ab; vgl. [EGA IV, 18.2.7(i), 18.2.9 und 18.2.10(ii)].

Durch die zusätzliche Forderung der Existenz von lokalen Schnitten erhält man also eine „unbegrenzte und unverzweigte Überlagerung“ im Sinne der Topologie; ist Y zusammenhängend, dann besitzt (X, f, Y) sogar eine endliche Blätterzahl.

Kapitel 1

Algebraische Gruppen, G-Varietäten und Quotienten

Vorbemerkung: Die Ausführungen dieses Kapitels bewegen sich im Rahmen der Kategorie der *lokal-algebraischen Varietäten* (0.5.1) über einem festen, algebraisch abgeschlossenen Körper k (von beliebiger Charakteristik), wie sie in Kapitel 0 definiert wurde (vgl. insbesondere 0.5.11).

Eine *Untervarietät* (bzw. *offene*, bzw. *abgeschlossene Untervarietät*) ist hier ein reduziertes Unter-Ultraschema (bzw. offenes, bzw. abgeschlossenes Unter-Ultraschema) im Sinne von 0.2.1 ff.

Ferner sei daran erinnert, daß der hier verwendete Begriff *„Varietät"* folgende Eigenschaften *nicht* einschließt: Irreduzibilität, Quasikompaktheit, Separiertheit.

Bei der Notation eines Morphismus (ψ, θ) wird hier nur die zugrundeliegende stetige Abbildung $\psi : X \to Y,\ x \mapsto y$ berücksichtigt (zur Schreibweise $X \ni x \mapsto y \in Y$ vgl. 0.1.10). Wegen der Natürlichkeit der konstruierten Morphismen ist jedoch der zugehörige Garbenhomomorphismus $\theta : \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ immer gegeben (vgl. 0.5.9). Unter dem *Urbild* eines Morphismus von Varietäten wird sets das *reduzierte* Urbild im Sinne von 0.5.10 verstanden werden. Ebenso ist bei der Notation einer Varietät $(X, \mathcal{O}_X)$, wie schon in Kapitel 0 vereinbart (0.2.7), nur der zugrundeliegende topologische Raum X berücksichtigt. Eine offene Teilmenge $U \subset X$ ist vermöge der Einschränkung $\mathcal{O}_X|_U$ als offene Untervarietät von X aufzufassen.

1.1 Grundlegende Definitionen

1.1.1 Definition: Eine ***algebraische Gruppe*** G ist eine separierte algebraische Varietät (insbesondere quasikompakt, vgl. 0.5.1), die zusätzlich die Struktur einer Gruppe besitzt, so daß die Abbildungen

$$\begin{array}{rclcrcl} mul : G \times_k G & \longrightarrow & G & \quad\text{und}\quad & inv : G & \longrightarrow & G \\ (g, g') & \longmapsto & gg' & & g & \longmapsto & g^{-1} \end{array}$$

Morphismen von Varietäten sind.

Ein ***Morphismus von algebraischen Gruppen*** ist ein Morphismus der zugrundeliegenden Varietäten, der zusätzlich ein Gruppenhomomorphismus ist.

1.1.2 Definition: Sei G eine algebraische Gruppe und H eine Untergruppe von G. H heißt ***algebraische Untergruppe*** von G, falls H eine Untervarietät ist. Man bezeichnet H als ***offene*** (bzw. ***abgeschlossene***) (algebraische) ***Untergruppe*** von G, falls H als Untervarietät offen (bzw. abgeschlossen) ist.

Ein Morphismus von algebraischen Gruppen $\alpha : H \to G$ heißt ***Immersion*** (bzw. ***offene***, bzw. ***abgeschlossene Immersion***) ***von algebraischen Gruppen***, falls α eine Immersion (bzw. offene, bzw. abgeschlossene Immersion) von Varietäten ist (damit ist α insbesondere ein injektiver Gruppenhomomorphismus).

1.1.3 Definition & Satz: Für jede algebraische Gruppe G existiert genau eine irreduzible Komponente G° von G mit $1_G \in G^\circ$, die als ***Einskomponente*** von G bezeichnet wird. G° ist eine abgeschlossene und normale Untergruppe von G, deren Index in G endlich ist, und jede abgeschlossene Untergruppe $H \subset G$ mit endlichem Index enthält G°; vgl. [Spr, 2.2.1 Prop.].

1.1.4 Satz: *Sei $\alpha : G \to G'$ ein Morphismus algebraischer Gruppen, dann gilt:*

(i) Kern(α) *ist eine abgeschlossene und normale Untergruppe von G.*

(ii) Bild(α) *ist eine abgeschlossene Untergruppe von G.*

(iii) $\alpha(G^\circ) = \alpha(G)^\circ$.

Beweis: [Spr, 2.2.5 Prop.].

1.1.5 Definition: Sei G eine algebraische Gruppe und $g \in G$ fest gewählt, dann wird der durch

$$\begin{aligned} l_g : G &\longrightarrow G \\ g' &\longmapsto gg' \end{aligned}$$

definierte Automorphismus der *Varietät* G als ***Linkstranslation*** bezeichnet.

1.1.6 Satz: *Für eine algebraische Gruppe G gilt:*

(i) *G ist glatt.*

(ii) *Die irreduziblen Komponenten von G stimmen mit den Zusammenhangskomponenten von G (bzgl. der* Spm-*Topologie) überein.*

Beweis: (i) Jede nicht-leere Varietät G enthält einen regulären Punkt $r \in G$ und für $g \in G$ beliebig ist vermöge der Linkstranslation

$$\begin{aligned} l_{(gr^{-1})} : G &\longrightarrow G \\ r &\longmapsto g \end{aligned}$$

auch g regulär.

(ii) folgt jetzt zusammen mit (i) aus [Bor, AG 17.2].

1.1.7 Definition: Eine algebraische Gruppe heißt

(i) ***affin***, falls G als Varietät affin ist;

(ii) ***linear***, falls für ein $n \in \mathbb{N}$ eine abgeschlossene Immersion von algebraischen Gruppen $\varepsilon : G \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$ existiert.

1.1.8 Satz: *Eine algebraische Gruppe ist genau dann affin, wenn sie linear ist.*

Beweis: Es ist $\mathrm{GL}_n = \{(x_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n \times n) \mid \det(x_{ij}) \neq 0\}$, d. h. GL_n ist offen in k^{n^2}. Betrachtet man $k^{n^2} \times_k k$ mit Koordinaten $(x_{11}, \ldots, x_{nn}, y)$, so wird GL_n durch die Gleichung $y\det(x_{ij}) - 1 = 0$ als abgeschlossene Untervarietät des k^{n^2+1} definiert, also ist GL_n affin. Ist nun G isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe von GL_n, dann ist auch G affin.

Für die umgekehrte Richtung vgl. [Bor, II 5.1] oder [Hum, II 8.6].

1.1.9 Definition: Sei Y eine Varietät und G eine algebraische Gruppe. Ist ein Morphismus

$$\begin{aligned} \omega : G \times_k Y &\longrightarrow Y \\ (g\,, y) &\longmapsto gy \end{aligned}$$

gegeben, mit

(i) $g_1(g_2 y) = (g_1 g_2)y$ und

(ii) $1_G y = y$, für alle $y \in Y$ und alle $g_1,\, g_2 \in G$,

so sagt man ***G operiert*** *(von links)* ***auf Y***. Y wird dann als ***G-Varietät*** bezeichnet. Gilt zusätzlich:

(iii) Für gegebenes $g \in G$ mit $gy = y$ für alle $y \in Y$ folgt $g = 1$, so heißt die Operation ***effektiv*** oder ***treu***.

(iv) Sei $y \in Y$, dann heißt die Untergruppe $\mathrm{Stab}^G(y) \overset{def}{=} \{g \in G \mid gy = y\}$ von G ***Stabilisator- oder Isotropiegruppe von G in y***. (Oft wird statt $\mathrm{Stab}^G(y)$ auch G_y notiert.)

(v) Die Operation heißt ***trivial***, falls für alle $y \in Y$ $\mathrm{Stab}^G(y) = G$ gilt.

(vi) Die Operation heißt ***frei***, falls für alle $y \in Y$ $\mathrm{Stab}^G(y) = 1_G$ gilt.

(vii) Die Menge $Gy_0 \overset{def}{=} \{y \in Y \mid \exists\, g \in G \text{ mit } gy = y_0\}$ heißt ***Orbit*** oder ***Transitivitätsbereich von y_0***.

(viii) Die Operation heißt ***transitiv***, falls nur ein Orbit $Gy = Y$ existiert.

(ix) Die Operation heißt ***einfach-transitiv***, falls sie transitiv und frei ist.

(x) Sei $y \in Y$ fest gewählt, dann wird durch

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, hook, "\varepsilon_y"] \arrow[dr, "\varphi_y"'] & & G \times_k Y \arrow[dl, "\omega"] \\ & Y & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} g \arrow[rr, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & & (g,y) \arrow[dl, mapsto] \\ & gy & \end{tikzcd}$$

ein Morphismus φ_y von G nach Y definiert und als ***Orbitmorphismus*** bzgl. $\boldsymbol{y}$ bezeichnet. Das Bild der *Abbildung* φ_y ist offenbar genau der Orbit Gy.

(xi) Der Morphismus

$$\begin{aligned} \omega_S \stackrel{def}{=} (\omega, pr_2)_k : G \times_k Y &\longrightarrow Y \times_k Y \\ (g\,,y) &\longmapsto (gy, y) \end{aligned}$$

heißt ***Scherungsmorphismus*** der Operation ω.

1.1.10 Folgerung: *Sei Y eine G-Varietät, dann ist für alle $g \in G$ die Abbildung*

$$\begin{aligned} \omega_g : Y &\longrightarrow Y \\ y &\longmapsto gy \end{aligned}$$

ein Automorphismus von Y.

Beweis: ω_g faktorisiert als Verkettung von Morphismen

$$Y \xrightarrow{\cong} \{g\} \times_k Y \hookrightarrow G \times_k Y \xrightarrow{\omega} Y$$

und ist deshalb selbst ein Morphismus. Der inverse Morphismus ist offenbar durch $\omega_{g^{-1}}$ gegeben.

1.1.11 Bemerkung: Die obigen Definitionen sowie die folgenden Aussagen über Linksoperationen lassen sich mutatis mutandis auch auf sogenannte *Rechtsoperationen*

$$\begin{aligned} Y \times_k G &\longrightarrow Y \\ (y\,,g) &\longmapsto yg \end{aligned}$$

übertragen.

1.1.12 Bemerkung: Es sei eine Operation $\omega : G \times_k Y \to Y$ gegeben, wobei Y als *Menge* und G als *Gruppe* aufgefaßt werde, dann läßt sich die *Abbildung* ω durch Angabe eines Gruppenhomomorphismus beschreiben:

$$\begin{aligned} \alpha_\omega : G &\longrightarrow \mathcal{A}ut(Y) \\ g &\mapsto (y \mapsto gy) \end{aligned}$$

($\mathcal{A}ut(Y)$ bezeichnet hierbei die Gruppe der bijektiven Abbildungen von Y auf sich). Die Bedingungen (i) und (ii) in 1.1.9 entsprechen dann genau den Homomorphiebedingungen (i') $\alpha(g_1, g_2) = \alpha(g_1)\alpha(g_2)$ für alle $g_1, g_2 \in G$

(ii') $\alpha(1_G) = 1_{\mathcal{A}ut(Y)} = id_Y$.

Weiter gilt, daß ω genau dann effektiv ist, wenn α_ω injektiv ist, d. h. wenn $\mathrm{Kern}(\alpha_\omega) = 1_G$ gilt; denn im Kern von α liegen genau die auf Y trivial operierenden Elemente von G (das sind die $g \in G$, mit $gy = y$), und diese sind wegen der Effektivität der Operation gleich 1_G.

Versucht man die obige mengentheoretische Überlegung auf der Ebene der algebraischen Gruppen und Varietäten durchzuführen, so treten folgende Probleme auf:

(1) Wie läßt sich $\mathcal{A}ut(Y)$ als Gruppe der Isomorphismen von Y auf sich mit der Struktur einer algebraischen Gruppe versehen?

(2) Wie wird α_ω zu einem Morphismus von algebraischen Gruppen?

Tatsächlich ist schon bei relativ „einfachen“ Varietäten wie dem affinen n-dimensionalen Raum die Automorphismengruppe unendlichdimensional, also *keine* algebraische Gruppe im Sinne von 1.1.1; vgl. hierzu [Pop].

Allerdings läßt sich bei effektiven Operationen das Bild von α_ω mit G identifizieren und somit als algebraische Gruppe auffassen. Dies führt zur folgenden Formulierung:

> *Ist eine effektive Operation einer algebraischen Gruppe G auf einer Varietät Y gegeben, so operiert G als (algebraische) Untergruppe von $\mathcal{A}ut(Y)$.*

Jetzt stellt sich die Frage nach der Relevanz der Klammer um „algebraische“: Ob man für beliebige effektive Operationen stets eine Immersion von algebraischen Gruppen

$$\mathrm{Bild}(\alpha_\omega) \hookrightarrow \mathcal{A}ut(Y)$$

(in einer geeignet verallgemeinerten Weise) erhält, ist jedoch ein noch offenes Problem; vgl. [loc. cit.].

1.1.13 Folgerung: *Eine algebraische Gruppe G operiere auf der Varietät Y. Dann gilt: Die Operation ist genau dann*

(i) *transitiv, wenn für alle $y \in Y$ φ_y surjektiv ist;*

(ii) *frei, wenn für alle $y \in Y$ φ_y injektiv ist;*

(iii) *einfach-transitiv, wenn für alle $y \in Y$ φ_y bijektiv ist.*

Beweis: (i) folgt per definitionem.

(ii) Sei $y \in Y$ und $\varphi_y(g_1) = g_1 y = g_2 y = \varphi_y(g_2)$. Das ist gleichbedeutend mit $g_2^{-1} g_1 y = y$. Ist nun $\mathrm{Stab}^G(y) = 1_G$, so folgt $g_1 = g_2$ weshalb φ_y injektiv ist.

Gilt umgekehrt die Implikation $(g_1 y = g_2 y) \Rightarrow (g_1 = g_2)$ für alle $y \in Y$ und alle $g_1, g_2 \in G$, so ist dies äquivalent zu $(g_2^{-1} g_1 y = y) \Rightarrow (g_1 = g_2)$, woraus folgt, daß nur $g = 1_G$ die Gleichung $gy = y$ erfüllt, d. h. $\mathrm{Stab}^G(y) = 1_G$ für alle $y \in Y$.

1.1.14 Folgerung: *Sei Y eine G-Varietät. Dann sind sämtliche Isotropiegruppen von Punkten eines Orbits zueinander konjugiert, und es gilt*

$$\mathrm{Stab}^G(gy) \;=\; g\,\mathrm{Stab}^G(y)g^{-1}$$

für alle $g \in G$ und alle $y \in Y$.

Beweis: Für $g_1 \in G$ ist $g_1(gy) = gy$ genau dann wenn $g^{-1}g_1gy = y$ gilt, d. h. wenn ein $g_2 \in \mathrm{Stab}^G(y)$ existiert mit $g_2 = g^{-1}g_1g$, was äquivalent zu $g_1 = gg_2g^{-1}$ ist; also gilt $(gg_2g^{-1})(gy) = gy$, d. h. $\mathrm{Stab}^G(gy) = \{gg_2g^{-1} \mid g_2 \in \mathrm{Stab}^G(y)\}$.

1.1.15 Satz: *Es sei eine G-Varietät Y gegeben, dann gilt für alle $y \in Y$:*

(i) $\mathrm{Stab}^G(y)$ *ist eine abgeschlossene Untergruppe von G.*

(ii) *Gy ist eine glatte (*nicht notwendigerweise *abgeschlossene) Untervarietät von Y.*

(iii) *Die Orbiten von minimaler Dimension sind abgeschlossene Untervarietäten von Y.*

Beweis: (i) Per definitionem ist $\mathrm{Stab}^G(y)$ gleich dem mengentheoretischen Urbild $\varphi_y^{-1}(y)$. Da y stets abgeschlossen ist, folgt aus der Stetigkeit von φ_y, daß auch $\mathrm{Stab}^G(y)$ abgeschlossen in G ist.

Zu (ii) und (iii) vgl. [Bor, I 1.8]. Im dortigen Beweis wird die Homogenität von Gy ausgenutzt; vgl. hierzu auch 1.3 .

1.2 Kategorielle und geometrische Quotienten

1.2.1 Definition: Sei Y eine G-Varietät, Y' eine G'-Varietät und G eine algebraische Untergruppe von G'. Dann wird ein Morphismus $\varphi : Y \to Y'$ als ***G-äquivariant*** bezeichnet, falls das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
G \times_k Y & \xrightarrow{\;\omega\;} & Y \\
{\scriptstyle \varepsilon \times_k \varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\
G' \times_k Y' & \xrightarrow{\;\omega'\;} & Y'
\end{array}$$

kommutiert, oder äquivalent hierzu, falls $g\varphi(y) = \varphi(gy)$ für alle $y \in Y$ und alle $g \in G$ gilt.

φ heißt ***G-invariant***, falls das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
G \times_k Y & \xrightarrow{\;\omega\;} & Y \\
{\scriptstyle pr_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\
Y & \xrightarrow{\;\varphi\;} & Y'
\end{array}$$

kommutiert, oder äquivalent hierzu, falls $\varphi(y) = \varphi(gy)$ für alle $y \in Y$ und alle $g \in G$ gilt.

1.2.2 Bemerkung: Die oben formulierte Definition der G-Äquivarianz eines Morphismus ist eine Verallgemeinerung der sonst üblichen Definition, die man für $G = G'$ erhält.

1.2.3 Folgerung: *Unter den Voraussetzungen von 1.2.1 sind gleichwertig:*

(i) φ *ist G-invariant.*

(ii) φ *ist G-äquivariant und G' operiert trivial auf Y'.*

Beweis: Die Behauptung folgt unmittelbar aus den obigen Definitionen.

1.2.4 Definition: Sei Y eine G-Varietät und Y' eine Untervarietät von Y. Y' heißt ***G-invariant***, falls $gy' \in Y'$ für alle $y' \in Y'$ und alle $g \in G$ gilt.

1.2.5 Definition: Sei Y eine G-Varietät. Ein Paar (π, X), wobei $\pi : Y \to X$ ein Morphimus von Varietäten ist, heißt ***kategorieller Quotient von Y nach G***, falls gilt:

(i) π ist G-invariant und

(ii) für jedes weitere Paar (π', X') mit G-invariantem Morphismus $\pi' : Y \to X'$ existiert genau ein Morphismus $\varrho : X \to X'$, so daß $\pi' = \varrho \circ \pi$ gilt.

1.2.6 Folgerung: *Ein kategorieller Quotient ist bis auf kanonische Isomorphie eindeutig festgelegt.*

Beweis: Seien (π, X) und (π', X') kategorielle Quotienten von Y nach G, dann erhält man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi'"] & \\ X \arrow[rr, bend left=10, "\exists!\, \varrho"] & & X' \arrow[ll, bend left=10, "\exists!\, \varrho'"] \end{tikzcd},$$

d. h. es gilt $\pi = \varrho' \circ \pi'$ und $\pi' = \varrho \circ \pi$, woraus $\varrho' \circ \varrho = id_X$ und $\varrho \circ \varrho' = id_{X'}$ folgt.

1.2.7 Definition: Sei Y eine G-Varietät und V eine offene Teilmenge von Y, dann wird der Ring aller G-invarianten regulären Funktionen auf V als ***Invariantenring*** von V bezeichnet und $\mathcal{O}_Y(V)^G$ notiert. $\mathcal{O}_Y(V)^G$ ist per definitonem ein Unterring von $\mathcal{O}_Y(V)$, i. a. jedoch kein Ideal.

Ein Paar (π, X), wobei $\pi : Y \to X$ ein Morphismus von Varietäten ist, heißt ***geometrischer Quotient von Y nach G***, falls gilt:

(i) π ist surjektiv und identifizierend[1], etwa surjektiv und offen oder surjektiv und abgeschlossen, vgl. [Sch, I 4.4 Satz 2].

(ii) Für alle offenen Teilmengen U von X ist

$$\pi^\circ : \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(\pi^{-1}(U))$$

ein Isomorphismus auf den Invariantenring $\mathcal{O}_Y(\pi^{-1}(U))^G \hookrightarrow \mathcal{O}_Y(\pi^{-1}(U))$.

(iii) Der Scherungsmorphismus $\omega_S : G \times_k Y \to Y \times_k Y$ ist ein Morphismus *auf* $Y \times_X Y$, d. h. die Fasern von π stimmen mit den Orbiten der G-Operation ω überein. Insbesondere ist π deshalb G-invariant.

Diese Definition eines geometrischen Quotienten stimmt mit der von Mumford in [GIT, 0 §1 Def. 0.6] für $S = \mathrm{Spec}(k)$, mit k algebraisch abgeschlossen, überein; vgl. auch [Bor, II 6.1, 6.3 und 6.16] und [New, p. 70 Remarks].

1.2.8 Satz: *Jeder geometrische Quotient* (π, X) *ist kategoriell.*

Beweis: Sei $\pi' : Y \to X'$ ein weiterer G-invarianter Morphismus von Varietäten; dann setzt man $\varrho(x) \overset{def}{=} \pi'(\pi^{-1}(x))$. Wegen 1.2.7(iii) gilt $\pi^{-1}(x) = Gy$, d. h. ϱ ist als Abbildung wohldefiniert. Sei jetzt U' offen in X', dann ist $\varrho^{-1}(U') = \pi \circ (\pi')^{-1}(U')$. Mit π' stetig und π offen (1.2.7(i)) folgt, daß $\varrho^{-1}(U')$ offen in X ist. Also ist ϱ eine stetige Abbildung.

Es sei nun angenommen, daß eine weitere Abbildung σ existiert, mit $\pi' = \sigma \circ \pi$, d. h. es würde für alle $y \in Y$ $\sigma(\pi(y)) = \pi'(y)$ gelten. Wegen π und π' G-invariant wäre dann $\sigma(\pi(Gy)) = \pi'(Gy)$. Für $x = \pi(Gy)$ und $Gy = \pi^{-1}(x)$ folgt schließlich $\sigma = \varrho$.

Zu zeigen bleibt noch, daß ein Comorphismus $\varrho^\circ : \mathcal{O}_{X'}(U') \to \mathcal{O}_X(\varrho^{-1}(U'))$, $f \mapsto f \circ \varrho$ für U' offen in X' definiert ist. Es gilt $\mathcal{O}_X(\varrho^{-1}(U')) = \mathcal{O}_X(\pi \circ (\pi')^{-1}(U'))$ und nach 1.2.7(ii) hat man

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(\pi \circ (\pi')^{-1}(U')) \arrow[rr, "\pi^\circ", "\cong"'] & & \mathcal{O}_Y((\pi')^{-1}(U'))^G \\
& \mathcal{O}_{X'}(U') \arrow[ul, dashed] \arrow[ur, "(\pi')^\circ"'] &
\end{tikzcd}$$

da π' konstant auf den Orbiten ist. Damit ist ϱ° definiert.

1.2.9 Satz: *Sei G eine (affine) algebraische Gruppe und $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe; vermöge der Multiplikation $H \times_k G \to G$ werde G als H-Varietät aufgefaßt. Dann gilt:*

(i) *Die Menge der Nebenklassen G/H besitzt die Struktur einer glatten quasi-projektiven Varietät.*

(ii) *Die kanonische Projektion $\pi : G \to G/H$ ist ein Morphismus von Varietäten.*

[1] Statt *identifizierend* ist auch die Bezeichnung *submersiv* gebräuchlich; vgl. [Sch, I 4.3].

(iii) $(\pi, G/H)$ *ist ein geometrischer Quotient.*

(iv) *Ist H normal in G, dann ist G/H eine (affine) algebraische Gruppe und π ist ein Morphismus von algebraischen Gruppen.*

Beweis: Für G affin vgl. [Bor, II 6.8], für den allgemeinen Fall vgl. [Ros]; G/H ist nach [Cho] in jedem Fall quasi-projektiv.

1.2.10 Korollar: *Unter den Voraussetzungen von 1.2.9 sei G als zusammenhängend angenommen; dann ist G/H irreduzibel.*
Beweis: $\pi : G \to G/H$ ist insbesondere stetig und surjektiv. Nach Voraussetzung ist G irreduzibel (1.1.3), weshalb G/H als stetiges Bild eines irreduziblen topologischen Raumes selbst irreduzibel ist; vgl. [Bou(AC), II §4.1, Prop. 4].

1.2.11 Satz: *Sei Y eine G-Varietät und für $y \in Y$ der zugehörige Orbitmorphismus $\varphi_y : G \to Y$ gegeben. Dann wird durch das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\varphi_y"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Gy \\ & G/\operatorname{Stab}^G(y) \arrow[ur, "\overline{\varphi_y}"'] & \end{tikzcd}$$

ein bijektiver Morphismus $\overline{\varphi_y}$ definiert.
Beweis: Nach 1.2.9 ist $(\pi, G/H)$ ein geometrischer Quotient von G nach $H \overset{def}{=} \operatorname{Stab}^G(y)$. Schreibt man die Operation von H auf G als Rechtsoperation, so sind die Orbiten genau die Rechtsnebenklassen gH. Für $gh \in gH$ gilt also $\varphi_y(gh) = ghy = gy$, d. h. φ_y ist H-invariant. Aufgrund der universellen Eigenschaft für Quotienten existiert genau ein Morphismus $\overline{\varphi_y} : G/H \to Gy,\ gH \mapsto gy$, der das obige Diagramm kommutativ macht.
Sei jetzt $\overline{\varphi_y}(g_1) = \overline{\varphi_y}(g_2)$, d. h. $g_1y = g_2y$, was gleichwertig zu $g_2^{-1}g_1y = y$ ist. Damit ist aber $g_2^{-1}g_1 \in H$, also gilt $g_1H = g_2H$, womit die Injektivität von $\overline{\varphi_y}$ gezeigt ist. Die Surjektivität gilt per definitionem.

1.2.12 Bemerkung: Der Morphismus $\overline{\varphi_y}$ im obigen Satz ist i. a. *kein* Isomorphismus. Um eine Isomorphie $G/\operatorname{Stab}^G(y) \cong Gy$ erwarten zu können, muß die Operation von G auf Y zusätzlichen geometrisch-topologischen Bedingungen genügen; vgl. 1.2.14, insbesondere (iv).

1.2.13 Definition & Satz: Es sei eine Operation ω der algebraischen Gruppe G auf der Varietät Y gegeben und

$$N \overset{def}{=} \bigcap_{y \in Y} \operatorname{Stab}^G(y)$$

die Untergruppe der auf Y trivial operierenden Elemente von G. Dann gilt:

(i) N ist ein abgeschlossener Normalteiler von G.

(ii) Durch

$$\begin{tikzcd} G \times_k Y \arrow[rr, "\omega"] \arrow[d, "\pi \times_k id"'] & & Y \\ G/N \times_k Y \arrow[urr, "\overline{\omega}"'] & & \end{tikzcd}$$

mit $\overline{\omega}(gN, z) = gz$ wird eine effektive Operation $\overline{\omega}$ definiert und als ***induzierte Operation von G/N auf Y*** bezeichnet.

Beweis: (i) Nach 1.1.12 gilt $N = \mathrm{Kern}(\alpha_\omega)$, d. h. N ist normal in G. Wegen 1.1.15(i) ist $\mathrm{Stab}^G(y)$ stets abgeschlossen, weshalb auch N abgeschlossen in G ist.
(ii) [Bor, II 6.10(1)].

1.2.14 Definition: Sei Y mit einer G-Operation ω versehen. Dann heißt ω

(i) ***abgeschlossen***, falls für alle $y \in Y$ Gy abgeschlossen in Y ist;

(ii) ***separiert***, falls das Bild von $\omega_S : G \times_k Y \to Y \times_k Y$ (aufgefaßt als stetige Abbildung) abgeschlossen ist;

(iii) ***eigentlich***, falls ω_S eigentlich ist;

(iv) ***prinzipal***, falls ω_S eine Immersion ist.

Zu (iv) vgl. [Bor, I 1.8 Cor. f], während in [GIT, 0 §3 Def. 0.8] ω als *„free"* bezeichnet wird, falls ω_S eine *abgeschlossene* Immersion ist, d. h. (ii) und (iv) erfüllt sind.

1.2.15 Folgerung: *Sei (π, X) ein geometrischer Quotient von Y nach G. Ist X separiert, dann sind äquivalent:*

(i) *ω ist prinzipal.*

(ii) *ω ist prinzipal und separiert.*

(ii) *ω ist prinzipal und eigentlich.*

Beweis: Ist (π, X) geometrisch und ω prinzial, dann gilt $\omega_S : G \times_k Y \xrightarrow{\cong} Y \times_X Y$. Wegen X separiert ist die kanonische Immersion $Y \times_X Y \hookrightarrow Y \times_k Y$ abgeschlossen [EGA I, 5.2.3]. Deshalb ist auch ω_S eine abgeschlossene Immersion, insbesondere also separiert und eigentlich.

1.2.16 Folgerung: *Sei (π, X) ein geometrischer Quotient von Y nach G, dann ist ω abgeschlossen.*
Beweis: Nach 1.2.7(iii) gilt $\pi^{-1}(x) = Gy$. Da x abgeschlossen und π stetig ist, folgt, daß auch Gy abgeschlossen ist.

1.2.17 Satz: *Sei (π, X) ein geometrischer Quotient von Y nach G. Weiter seien X und Y quasikompakt (bzw. algebraisch) und separiert, G sei affin und ω eigentlich. Dann ist π ein affiner Morphismus.*

Beweis: [GIT, 0 §4 Prop. 0.7].

1.2.18 Bemerkung: Die ab 1.2.1 begonnene Darstellung der grundlegenden Begriffe der geometrischen Invariantentheorie wird in 1.6 fortgesetzt, wo allgemeinere Quotienten von Varietäten nach reduktiven Gruppen (vgl. 1.5) betrachtet werden.

In 2.5 wird dann - an die oben dargestellten Begriffe anschließend - untersucht, unter welchen Bedingungen ein geometrischer Quotient als Basisvarietät eines G-Prinzipalbündels (2.1.17 bzw. 2.5.8) aufgefaßt werden kann.

1.3 Homogene Varietäten

1.3.1 Definition: Eine algebraische Gruppe operiere transitiv auf der Varietät Z. Dann wird Z als ***homogene Varietät*** bezeichnet.

1.3.2 Folgerung: *Homogene Varietäten sind stets glatt.*

Beweis: Die Behauptung folgt wegen 1.1.10 wie in 1.1.6(i).

1.3.3 Definition & Satz: Ein Quotient einer algebraischen Gruppe G nach einer abgeschlossenen Untergruppe H (1.2.9) ist eine homogene Varietät: G operiert insbesondere transitiv auf sich, und durch

$$\begin{aligned} \nu : G \times_k G/H &\longrightarrow G/H \\ (g_1\,, gH) &\longmapsto g_1 g H \end{aligned}$$

wird eine ebenfalls transitive *mengentheoretische* Operation wohldefiniert: Denn sei $gH = g'H$, d. h. es existiert ein $h \in H$ mit $g' = gh$, dann gilt $g_1 g' H = g_1 g h H = g_1 g H$.

ν ist ein Morphismus von Varietäten und wird als die ***natürliche Operation von G auf G/H*** bezeichnet.

Hierzu betrachte man das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \times_k G \arrow[r, "id \times_k \pi"] \arrow[d, "mul"'] & G \times_k G/H \arrow[d, dotted, "\nu"] & (g_1, g) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (g_1, gH) \arrow[d, dotted, mapsto] \\ G \arrow[r, "\pi"] & G/H & g_1 g \arrow[r, mapsto] & g_1 g H\,, \end{tikzcd}$$

wobei mul, π und $id \times_k \pi$ Morphismen von Varietäten sind. Nach [Bor, 6.6 Cor.] ist $(id \times_k \pi\,, G \times_k G/H)$ ein Quotient von $G \times_k G$ nach $1 \times_k H$, und der Morphismus $\pi \circ mul$ ist $(1 \times_k H)$-invariant. Wegen 1.2.5(ii) und 1.2.8 existiert nun genau ein *Morphismus* $\nu : G \times_k G/H \to G/H$, so daß $\pi \circ mul = \nu \circ (id \times_k \pi)$ gilt.

1.3.4 Satz: *Gegeben sei eine algebraische Gruppe G, sowie eine abgeschlossene Untergruppe H von G. Dann ist bzgl. der natürlichen Operation der trivial operierende abgeschlossene Normalteiler N von G (1.2.13) gegeben durch*

$$N = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1},$$

und N ist der größte in H enthaltene Normalteiler von G.

Beweis: Die Stabilisatorgruppe in $1H = H$ ist gegeben durch die Elemente $g \in G$ mit $gH = H$, also $g \in H$, weshalb $\mathrm{Stab}^G(H) = H$ gilt. Wegen der Transitivität der Operation ist für alle $g \in G$ nach 1.1.14 die Stabilisatorgruppe $\mathrm{Stab}^G(gH) = gHg^{-1}$. Mit 1.2.13 folgt schließlich

$$N = \bigcap_{gH \in G/H} \mathrm{Stab}^G(gH) = \bigcap_{g \in G} \mathrm{Stab}^G(gH) = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}.$$

Ist N' normal in G und $N' \subset H$, dann gilt für alle $g \in G$

$$N' = gNg^{-1} \subset gHg^{-1},$$

d. h. $N' \subset N$.

1.3.5 Definition: Es werden folgende abgeschlossene Untergruppen von GL_n betrachtet:

Die Gruppe der ***oberen Dreiecksmatrizen***

$$B_n \overset{def}{=} \{(a_{ij}) \in \mathrm{GL}_n \mid a_{ij} = 0 \text{ für } i > j \text{ mit } 1 \leq i, j \leq n\},$$

die Gruppe der ***unipotenten oberen Dreiecksmatrizen***

$$U_n \overset{def}{=} \{(a_{ij}) \in B_n \mid a_{ij} = 1 \text{ für } i = j \text{ mit } 1 \leq i, j \leq n\}$$

und die Gruppe der ***Diagonalmatrizen***

$$T_n \overset{def}{=} \{(a_{ij}) \in \mathrm{GL}_n \mid a_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j \text{ mit } 1 \leq i, j \leq n\}.$$

Die obigen Notationen weichen von den Bezeichnungen für die entsprechenden Gruppen in [Bor], [Hum] und [Spr] ab: Dort werden die oberen Dreiecksmatrizen T_n und die Diagonalmatrizen D_n notiert.

1.3.6 Definition: Seien V ein n-dimensionaler k-Vektorraum, sowie Unterräume von V $V_i \subset V$ mit $i \in \{1, \ldots, n\}$ gegeben. Eine Kette von Inklusionen

$$V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = V$$

heißt ***Fahne von V***, falls $\dim(V_i) = i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt.

Ist $V = k^n$, so heißt die Kette

$$k \subset k^2 \subset \cdots \subset k^n$$

Standardfahne des k^n.

Eine geordnete Zerlegung von V in eine direkte Summe von Unterräumen

$$V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n = V$$

heißt ***Spaltung von V***, falls $\dim(V_i) = 1$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt.

Ist $V = k^n$ und $V_i = k$, dann wird die Zerlegung

$$k \oplus k \oplus \cdots \oplus k = k^n$$

als ***Standardspaltung des k^n*** bezeichnet.

1.3.7 Definition & Satz: Bezeichne $\mathbb{F}(k^n)$ die Menge aller Fahnen des k^n und $\mathbb{S}(k^n)$ die Menge aller Spaltungen des k^n. Mengentheoretisch operiert nun GL_n auf $k^n \setminus \{0\}$ transitiv, denn je zwei Vektoren ungleich Null gehen durch eine lineare Koordinatentransformation auseinander hervor. Insbesondere operiert GL_n auf jedem Teilraum $W \setminus \{0\}$ von k^n transitiv, und man erhält somit eine ebenfalls transitive Operation von GL_n auf den Mengen $\mathbb{F}(k^n)$ und $\mathbb{S}(k^n)$. Es folgt nun unmittelbar, daß die Stabilisatorgruppe in der Standardfahne gegeben ist durch B_n. Ebenso ist die Stabilisatorgruppe in der Standardspaltung durch T_n gegeben.

Wegen 1.2.11 hat man jetzt Bijektionen

$$\mathbb{F}(k^n) \longleftrightarrow \mathrm{GL}_n / B_n \quad \text{und} \quad \mathbb{S}(k^n) \longleftrightarrow \mathrm{GL}_n / T_n \,,$$

vermöge derer $\mathbb{F}(k^n)$ und $\mathbb{S}(k^n)$ die Struktur von glatten quasi-projektiven Varietäten erhalten (1.2.9). Nach 1.3.3 werden deshalb $\mathbb{F}(k^n)$ und $\mathbb{S}(k^n)$ zu homogenen Varietäten; insbesondere sind damit die Operationen von GL_n auf $\mathbb{F}(k^n)$, bzw. $\mathbb{S}(k^n)$, genau die natürlichen Operationen.

$\mathbb{F}(k^n)$ heißt ***Varietät der Fahnen des k^n*** und $\mathbb{S}(k^n)$ wird als ***Varietät der Spaltungen des k^n*** bezeichnet.

1.3.8 Definition & Satz: Es wird nun die ***Graßmannsche Varietät*** $\mathbb{G}_k(k^n)$ der k-dimensionalen Unterräume des k^n in Analogie zu 1.3.7 als homogene Varietät definiert: Mengentheoretisch operiert GL_n transitiv auf $k^n \setminus \{0\}$ und somit ebenfalls transitiv auf $\mathbb{G}_k(k^n)$. Die Stabilisatorgruppe dieser Operation in $k^k \subset k^n$ (man interpretiere $k^k \subset k^n$ als „kurze Standardfahne" im Sinne von 1.3.6) ist gegeben durch die abgeschlossene Untergruppe der Blockmatrizen $P_k \subset \mathrm{GL}_n$, wobei $a \in P_k$, falls

$$a = \left(\begin{array}{c|c} a_1 & b \\ \hline 0 & a_2 \end{array}\right)$$

mit $a_1 \in \mathrm{GL}_k$, $a_2 \in \mathrm{GL}_{n-k}$ und $b \in \mathrm{Mat}(k \times (n-k))$. Wegen 1.2.11 hat man, wie in

1.3.7, eine Bijektion

$$\mathbb{G}_k(k^n) \longleftrightarrow \mathrm{GL}_n / P_k \,,$$

vermöge derer $\mathbb{G}_k(k^n)$ die Struktur einer glatten quasi-projektiven Varietät erhält. Nach 1.3.3 wird folglich $\mathbb{G}_k(k^n)$ zu einer homogenen Varietät; insbesondere ist die Operation von GL_n auf $\mathbb{G}_k(k^n)$ genau die natürliche Operation.

1.3.9 Bemerkung: Für den Spezialfall $k = 1$ in der obigen Definition erhält man wegen $\mathbb{G}_1(k^n) = \mathbb{P}(k^n)$ den projektiven Raum als homogene Varietät

$$\mathbb{P}(k^n) \;=\; \mathrm{GL}_n / P_1 \,,$$

wobei P_1 aus allen invertierbaren Matrizen der Form

$$\left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & * & \cdots & * \\ \hline 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{array}\right)$$

mit $\lambda \in k^*$ besteht.

1.3.10 Definition: Seien V ein n-dimensionaler k-Vektorraum, $\boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_k)$ ein Tupel von Indizes mit $0 < m_1 < \cdots < m_k < n$ und $V_{m_i} \subset V$ Untervektorräume von V gegeben. Eine Kette von Inklusionen

$$V_{m_1} \subset V_{m_2} \subset \cdots \subset V_{m_k} \subset V$$

heißt ***m*-Fahne von *V***, falls $\dim(V_{m_i}) = m_i$ gilt.

Ist $V = k^n$ und $V_{m_i} = k^{m_i}$, so heißt die Kette

$$k^{m_1} \subset k^{m_2} \subset \cdots \subset k^{m_k} \subset k^n$$

***m*-Standardfahne des $\boldsymbol{k^n}$**.

1.3.11 Definition & Satz: Bezeichne $\mathbb{F}(\boldsymbol{m}; k^n) = \mathbb{F}(m_1, \ldots, m_k; k^n)$ die Menge aller $\boldsymbol{m}$-Fahnen des k^n. Die mengentheoretische Operation von GL_n als Gruppe von Vektorraumautomorphismen auf $k^n \setminus \{0\}$ ist transitiv. Insbesondere operiert GL_n transitiv auf jedem Teilraum $W \setminus \{0\}$ von k^n, und man erhält somit eine ebenfalls transitive Operation von GL_n auf der Menge $\mathbb{F}(m_1, \ldots, m_k; k^n)$, wobei die Stabilisatorgruppe in der $\boldsymbol{m}$-Standardfahne durch die abgeschlossene Untergruppe $P_{\boldsymbol{m}} \subset \mathrm{GL}_n$ gegeben ist. $P_{\boldsymbol{m}}$ heißt ***Gruppe der Blockmatrizen des Typs m*** und besteht aus allen invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen der Form

$$
\begin{array}{c}
\overbrace{\overbrace{\overbrace{}^{m_1}\;}^{m_2}\;}^{m_k} \\
\begin{pmatrix}
\cdots & *\cdots* & *\cdots* & \cdots\cdots & *\cdots* \\
\vdots\quad\vdots & \vdots\quad\vdots & \vdots\quad\vdots & & \vdots\quad\vdots \\
\cdots & \vdots\quad\vdots & \vdots\quad\vdots & & \vdots\quad\vdots \\
 & \vdots\quad\vdots & \vdots\quad\vdots & & \vdots\quad\vdots \\
 & *\cdots* & \vdots\quad\vdots & & \vdots\quad\vdots \\
 & & \vdots\quad\vdots & & \vdots\quad\vdots \\
 & & *\cdots* & \cdots\cdots & \vdots\quad\vdots \\
 & & & & \vdots\quad\vdots \\
 & & & & *\cdots*
\end{pmatrix}
\end{array},
$$

wo bei jedem der quadratischen Blöcke der Größe m_i die Einträge unterhalb der Stufenlinie gleich Null sind.

Vermöge der in 1.2.11 gegebenen Bijektion

$$\mathbb{F}(\boldsymbol{m};k^n) \longleftrightarrow \mathrm{GL}_n/P_{\boldsymbol{m}}$$

erhält $\mathbb{F}(\boldsymbol{m};k^n)$ die Struktur einer glatten quasi-projektiven Varietät (1.2.9). Nach 1.3.3 wird $\mathbb{F}(\boldsymbol{m};k^n)$ zu einer homogenen Varietät und die GL_n-Operation auf $\mathbb{F}(\boldsymbol{m};k^n)$ ist genau die natürliche Operation.

$\mathbb{F}(\boldsymbol{m};k^n) = \mathbb{F}(m_1,\ldots,m_k;k^n)$ heißt ***Varietät der m-Fahnen des k^n***.

1.3.12 Bemerkung: $\mathbb{F}(\boldsymbol{m};k^n)$ ist für $\boldsymbol{m} = (1,2,\ldots,n-1)$ die gewöhnliche Fahnenvarietät $\mathbb{F}(k^n)$ (1.3.7); für $\boldsymbol{m} = k$ erhält man die Graßmannsche Varietät $\mathbb{G}_k(k^n)$ (1.3.8).

1.3.13 Folgerung: *Die Varietäten $\mathbb{F}(m_1,\ldots,m_k;k^n)$ und $\mathbb{S}(k^n)$ sind irreduzibel.*

Beweis: Der GL_n zugrundeliegende topologische Raum ist als offene Teilmenge des irreduziblen Raums k^{n^2} selbst irreduzibel (vgl. 0.4.5(i)). Die Behauptung folgt somit direkt aus 1.2.10.

1.3.14 Bemerkung: Es läßt sich zeigen, daß $\mathbb{G}_k(k^n)$ und $\mathbb{F}(k^n)$ projektiv sind: Bezeichne W_k einen k-dimensionalen Unterraum des k^n mit $W_k = \mathrm{Span}(w_1,\ldots,w_k)$, dann ist die *Plückereinbettung*

$$
\begin{aligned}
pl:\ \mathbb{G}_k(k^n) &\longrightarrow \mathbb{P}(\textstyle\bigwedge^k k^n) \\
W_k &\longmapsto \langle w_1\wedge\ldots\wedge w_k\rangle
\end{aligned}
$$

eine abgeschlossene Immersion. Weiter läßt sich $\mathbb{F}(k^n)$ in $\mathbb{G}_1(k^n)\times_k\cdots\times_k\mathbb{G}_n(k^n)$ abgeschlossen einbetten, so daß man eine Verkettung von abgeschlossenen Immersionen

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}(\bigwedge^1 k^n) \times_k \cdots \times_k \mathbb{P}(\bigwedge^n k^n) \arrow[r, hook, "se"] & \mathbb{P}((\bigwedge^1 k^n) \otimes \cdots \otimes (\bigwedge^n k^n)) \arrow[r, "\cong"] & \mathbb{P}(k^N) \\
\mathbb{G}_1(k^n) \times_k \cdots \times_k \mathbb{G}_n(k^n) \arrow[u, hook, "pl \times_k \cdots \times_k pl"'] & & \\
\mathbb{F}(k^n) \arrow[u, hook, "\varepsilon"'] \arrow[uurr, hook] & &
\end{tikzcd}$$

mit $N = \prod_{i=1}^{n} \binom{n}{i}$ erhält (*se* bezeichnet hier die *Segreeinbettung*

$$\begin{aligned} se : \mathbb{P}(W_1) \times_k \cdots \times_k \mathbb{P}(W_n) &\longrightarrow \mathbb{P}(W_1 \otimes \cdots \otimes W_n) \\ (<w_1>, \ldots, <w_n>) &\longmapsto <w_1 \otimes \cdots \otimes w_n>, \end{aligned}$$

wobei $0 \neq w_i \in W_i$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$).

Für einen ausführlichen Beweis vgl. [Hum, I 1.8]; die dortigen Definitionen von $\mathbb{G}_k(k^n)$ und $\mathbb{F}(k^n)$ sind zu den hier verwendeten äquivalent, vgl. auch [Bor, III 10.3, bzw. IV 11.1, 11.2].

Allgemein läßt sich zeigen, daß auch $\mathbb{F}(m_1, \ldots, m_k; k^n)$ projektiv ist: Sei

$$V_{m_1} \subset V_{m_2} \subset \cdots \subset V_{m_k} \subset k^n$$

eine Kette von Unterräumen des k^n, so daß

$$V_{m_1} = \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_{m_1}),\ V_{m_2} = \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_{m_2}),\ \cdots\ , V_{m_k} = \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_{m_k})$$

gilt. Das folgende Diagramm definiert jetzt $\mathbb{F}(m_1, \ldots, m_k; k^n)$ als abgeschlossene Untervarietät eines Produktes von projektiven Räumen

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G}_{m_1}(k^n) \times_k \cdots \times_k \mathbb{G}_{m_k}(k^n) \arrow[r, hook, "pl \times_k \cdots \times_k pl"] & \mathbb{P}(\bigwedge^{m_1} k^n) \times_k \cdots \times_k \mathbb{P}(\bigwedge^{m_k} k^n) \\
\mathbb{F}(m_1, \ldots, m_k; k^n) \arrow[u, hook, "\varepsilon"'] \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(V_{m_1}, \ldots, V_{m_k}) \arrow[r, mapsto] & (<v_1 \wedge, \ldots, \wedge v_{m_1}>, \ldots, <v_1 \wedge, \ldots, \wedge v_{m_k}>) \\
V_{m_1} \subset \cdots \subset V_{m_k}, \arrow[u, mapsto] \arrow[ur, mapsto] &
\end{tikzcd}$$

und Nachschalten der Segreeinbettung liefert die Projektivität. Zur Abgeschlossenheit von ε vgl. [Bur, §1]. Ein zweiter Beweis für die Projektivität von $\mathbb{F}(m_1, \ldots, m_k; k^n)$ wird in 1.4.28 gegeben.

Andererseits folgt aus der Theorie der algebraischen Gruppen, daß $\mathbb{S}(k^n)$ *nicht* projektiv sein kann (1.4.26(iv)). Tatsächlich ist $\mathbb{S}(k^n)$ eine affine Varietät (1.5.11).

1.3.15 Satz: *Der Kern der natürlichen Operation ν von GL_n (das ist der trivial operierende Normalteiler von GL_n auf $\mathbb{F}(m_1,\ldots,m_k;k^n)$, bzw. $\mathbb{S}(k^n)$ ist in allen Fällen (insb. für beliebige $0 < m_1 < \cdots < m_k < n$) gegeben durch $Z_n = \{\lambda 1 \mid \lambda \in k^*\}$ (das Zentrum von GL_n). Insbesondere operiert die Automorphismengruppe des $\mathbb{P}(k^n)$ [Har, II 7.1.1] $\mathrm{PGL}_{n-1} = \mathrm{GL}_n / Z_n$ sowohl auf $\mathbb{F}(m_1,\ldots,m_k;k^n)$ als auch auf $\mathbb{S}(k^n)$ effektiv.*

Beweis: (i) Zunächst soll die natürliche Operation ν von GL_n auf $\mathbb{F}(k^n) = \mathrm{GL}_n / B_n$ betrachtet werden: Nach 1.3.4 ist der Kern von ν gegeben durch

$$N = \bigcap_{g \in \mathrm{GL}_n} g\, B_n\, g^{-1},$$

wobei N der größte in B_n enthaltene abgeschlossene Normalteiler von GL_n ist. Z_n ist abgeschlossen und normal in GL_n, sowie $Z_n \subset B_n$. Da das Zentrum mit jeder zu ihm konjugierten Untergruppe übereinstimmt, ist offenbar auch $Z_n \subset N$.

Zu zeigen ist nun $N \subset Z_n$: Die Permutationsmatrix

$$p = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & & \vdots \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

vertauscht, von links angewandt auf eine $(n \times n)$-Matrix, die 1. Zeile mit der n-ten Zeile, die 2. Zeile mit der $(n-1)$-ten usw. Wendet man p von rechts an so erfolgt eine analoge Vertauschung für die Spalten. Wegen $p = p^{-1}$ wird durch

$$\begin{aligned} B_n &\longrightarrow \widetilde{B}_n \\ b &\longmapsto pbp \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von B_n auf die zu B_n konjugierte Gruppe $\widetilde{B}_n$ definiert, und zwar gilt

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} b_{nn} & & & \\ b_{n-1\,n} & b_{n-1\,n-1} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ b_{1n} & b_{1\,n-1} & \cdots & b_{11} \end{pmatrix},$$

d. h. $\widetilde{B}_n$ ist die Gruppe der invertierbaren unteren Dreiecksmatrizen. Da $B_n \cap \widetilde{B}_n = T_n$ ist, muß folglich $N \subset T_n \subset B_n$ gelten. Es genügt also,

$$\bigcap_{g \in \mathrm{GL}_n} g\, T_n\, g^{-1}$$

zu betrachten.

Die Elementarmatrix

$$q(i,j) \;=\; \begin{array}{cc} \begin{matrix} \text{j-te Spalte} \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & 1 & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \text{i-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

von links angewandt auf eine $(n \times n)$-Matrix, liefert eine Addition der j-ten zur i-ten Zeile. Die Inverse von $q(i,j)$ ist gegeben durch

$$q(i,j)^{-1} \;=\; \begin{array}{cc} \begin{matrix} \text{j-te Spalte} \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & -1 & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \text{i-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

Wendet man $q(i,j)^{-1}$ von rechts auf eine $(n \times n)$-Matrix an, so erhält man entsprechend eine Subtraktion der i-ten Spalte von der j-ten Spalte. Durch

$$\begin{aligned} T_n &\longrightarrow \widetilde{T}_n \\ t &\longmapsto q(i,j)\, t\, q(i,j)^{-1} \end{aligned}$$

ist wieder ein Isomorphismus mit

$$\begin{pmatrix} t_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & t_i & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & t_j & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & t_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} t_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & t_i & & t_j - t_i & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & t_j & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & t_n \end{pmatrix}$$

gegeben. Es liegen also genau die Matrizen $(t_i)_{1 \le i \le n}$ im Durchschnitt $T_n \cap \widetilde{T}_n$, für die

$t_i = t_j$ gilt. Durch Induktion folgt schließlich, daß

$$\bigcap_{\{q(k,k+1)\}_{k\in\{1,\ldots,n-1\}}} q(k,k+1)\, T_n\, q(k,k+1)^{-1} \;=\; \{(t_i) \in T_n \mid t_i = t_j \text{ mit } 1 \le i,j \le n\} \;=\; Z_n\,,$$

womit die Behauptung für $\mathbb{F}(k^n)$ und $\mathbb{S}(k^n)$ gleichermaßen gezeigt ist.

(ii) Es soll jetzt die natürliche Operation ν von GL_n auf $\mathbb{G}_k(k^n) = \mathrm{GL}_n/P_k$ (1.3.8) betrachtet werden: Wie im Fall (i) ist

$$Z_n \subset N' \;=\; \bigcap_{g\in\mathrm{GL}_n} g\, P_k\, g^{-1}\,,$$

d. h. es bleibt auch hier zu zeigen, daß ebenso $N' \subset Z_n$ gilt: Wie in (i) folgt, daß

$$G \overset{def}{=} P_k \cap p\, P_k\, p^{-1}$$

aus den Matrizen der Form

$$\left(\begin{array}{c|c} a_1 & 0 \\ \hline 0 & a_2 \end{array}\right) \quad \text{mit} \quad a_1 \in GL_k\,, \quad a_2 \in GL_{n-k}$$

besteht. Für die weiteren Überlegungen sei Œ $k < n-k$ angenommen. Die Permutationsmatrix

$$p(i,j) \;=\; \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& 0 && \cdots && 1 &&& \\ &&&& 1 &&&&&& \\ &&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\ &&&&&& 1 &&&& \\ &&& 1 && \cdots && 0 &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \scriptstyle i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \scriptstyle j\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

vertauscht von links angewandt auf eine $(n \times n)$-Matrix die i-te Zeile mit der j-ten Zeile, von rechts angewandt erfolgt eine entsprechende Vertauschung der i-ten mit der j-ten

Spalte. Ebenso wie p ist auch $p(i,j)$ mit ihrer Inversen identisch. Sei $g \in G$, dann ist

$$p(1,k+1)\, g\, p(1,k+1)^{-1} \;=\; p(1,k+1) \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{array}\right) p(1,k+1) \;=$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 \\ \hline * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{array}\right) p(1,k+1) \;=\; \left(\begin{array}{cccc|cccc} * & 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * & * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * & * & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & * & \cdots & * & * & 0 & \cdots & 0 \\ * & 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \end{array}\right).$$

$$G^1 \stackrel{def}{=} p(1,k+1)\, G\, p(1,k+1)^{-1} \cap G$$

besteht also aus allen invertierbaren Matrizen der Form

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} * & 0 & \cdots & 0 & & & & \\ 0 & * & \cdots & * & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \\ 0 & * & \cdots & * & & & & \\ \hline & & & & * & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & 0 & * & \cdots & * \\ & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & 0 & * & \cdots & * \end{array}\right).$$

Definiert man rekursiv

$$\begin{aligned} G^0 &\stackrel{def}{=} G \quad \text{und} \\ G^\mu &\stackrel{def}{=} p(\mu, k+\mu)\, G^{\mu-1}\, p(\mu, k+\mu)^{-1} \cap G^{\mu-1} \end{aligned}$$

für $\mu \in \{1, \ldots, k\}$, so erhält man $G' = G^k$ als Gruppe aller invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen der Form

$$
\begin{array}{r}
k\left\{\vphantom{\begin{matrix}*\\ \ddots\\ *\end{matrix}}\right. \\
k\left\{\vphantom{\begin{matrix}*\\ \ddots\\ *\end{matrix}}\right. \\
n-2k\left\{\vphantom{\begin{matrix}*\\ \vdots\\ *\end{matrix}}\right.
\end{array}
\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
* & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & \\
& & * & & & & & & \\ \cline{1-6}
& & & * & & & & & \\
& & & & \ddots & & & & \\
& & & & & * & & & \\ \cline{4-9}
& & & & & & * & \cdots & * \\
& & & & & & \vdots & & \vdots \\
& & & & & & * & \cdots & *
\end{array}\right).
$$

Sei jetzt $g' \in G'$, dann ist

$$
p(1,2k+1)\,g'\,p(1,2k+1)^{-1} \; =
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|ccc|ccc}
0 & 0 & \cdots & 0 & & & & * & \cdots & * \\
0 & * & & \vdots & & & & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \ddots & 0 & & & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & * & & & & 0 & \cdots & 0 \\ \hline
& & & & * & & & & & \\
& & & & & \ddots & & & & \\
& & & & & & * & & & \\ \hline
* & 0 & \cdots & 0 & & & & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & & & & * & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & & & & * & \cdots & *
\end{array}\right)
p(1,2k+1) \; =
\left(\begin{array}{cccc|ccc|cccc}
* & & & & & & & 0 & * & \cdots & * \\
& \ddots & & & & & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
& & \ddots & & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
& & & * & & & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline
& & & & * & & & & & & \\
& & & & & \ddots & & & & & \\
& & & & & & * & & & & \\ \hline
0 & 0 & \cdots & 0 & & & & * & 0 & \cdots & 0 \\
* & 0 & \cdots & 0 & & & & 0 & * & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
* & 0 & \cdots & 0 & & & & 0 & * & \cdots & *
\end{array}\right).
$$

$$
G_1 \overset{def}{=} p(1,2k+1)\,G'\,p(1,2k+1)^{-1} \cap G'
$$

besteht jetzt aus allen invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen der Form

$$
\begin{array}{r}
2k\left\{\vphantom{\begin{matrix}*\\ \ddots\\ *\\ *\\ \ddots\\ *\end{matrix}}\right. \\
n-2k\left\{\vphantom{\begin{matrix}*\\ *\\ \vdots\\ *\end{matrix}}\right.
\end{array}
\left(\begin{array}{ccc|ccc|cccc}
* & & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & & \\
& & * & & & & & & & \\ \cline{1-6}
& & & * & & & & & & \\
& & & & \ddots & & & & & \\
& & & & & * & & & & \\ \cline{4-10}
& & & & & & * & 0 & \cdots & 0 \\
& & & & & & 0 & * & \cdots & * \\
& & & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
& & & & & & 0 & * & \cdots & *
\end{array}\right).
$$

Man definiert nun wieder rekursiv

$$\begin{aligned} G_0 &\overset{def}{=} G' \quad \text{und} \\ G_\nu &\overset{def}{=} p(\nu, 2k+\nu)\, G_{\nu-1}\, p(\nu, 2k+\nu)^{-1} \cap G_{\nu-1} \end{aligned}$$

für $\nu \in \{1, \ldots, m\}$ und erhält im Falle $n - 2k = m < 2k$

$$G_m \;=\; T_n\,.$$

Für $n - 2k > 2k$ besteht G_{2k} aus allen invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen der Form

$$\begin{array}{r} 2k\left\{\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right. \\ n{-}4k\left\{\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right. \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|ccc} * &&&&&&& \\ & \ddots &&&&&& \\ && \ddots &&&&& \\ &&& \ddots &&&& \\ &&&& * &&& \\ \hline &&&&& * & \cdots & * \\ &&&&& \vdots && \vdots \\ &&&&& * & \cdots & * \end{array}\right).$$

Durch ω-faches Anwenden des oben beschriebenen Verfahrens läßt sich schließlich erreichen, daß $n - 2^\omega k = m_\omega < 2^\omega k$ gilt, und somit folgt auch hier

$$G_{m_\omega} \;=\; T_n\,.$$

$N' = Z_n$ folgt jetzt wie in (i). Da $P_{\boldsymbol{m}} \subset P_k$ für $k = m_1$, wobei $\boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_j)$, ist die Behauptung für $\mathbb{F}(m_1, \ldots, m_j; k^n)$ ebenfalls gezeigt. Die Effektivität der induzierten Operation $\overline{\nu}$ folgt mit 1.2.13.

1.4 Zusammenhängende und auflösbare Gruppen

1.4.1 Vorbemerkung: Die Matrix-Gruppen B_n, U_n und T_n (1.3.5) nehmen eine fundamentale Stellung unter den zusammenhängenden und auflösbaren algebraischen Gruppen ein, weshalb zunächst einige elementare Eigenschaften dieser Gruppen zusammen gestellt werden.

1.4.2 Folgerung: *Es sind Isomorphismen von Varietäten gegeben:*

(i)

$$U_n \overset{\cong}{\longrightarrow} k^N$$

durch $(a_{ij}) \longmapsto (a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{23}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{n-2\,n-1}, \ldots, a_{n-2\,n}, a_{n-1\,n})$,
wobei $N = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ *und*

(ii)

$$\begin{aligned} \varphi : U_n \times_k T_n &\xrightarrow{\cong} B_n \\ (u\,,t) &\longmapsto ut\,. \end{aligned}$$

Beweis: (i) Die Determinante einer (oberen) Dreiecksmatrix (a_{ij}) ist gegeben durch $\prod_{i=1}^n a_{ii}$, d. h. die Einträge oberhalb der Diagonalen können, unabhängig von einander, beliebige Werte aus k annehmen.

(ii) φ ist als Einschränkung der Multiplikation von GL_n ein Morphismus von Varietäten. Sei nun ψ definiert durch

$$\begin{aligned} \psi : B_n &\longrightarrow U_n \times_k T_n \\ b &\longmapsto (b(pr_T(b))^{-1},\, pr_T(b))\,, \end{aligned}$$

wobei pr_T die kanonische Projektion einer Matrix auf ihre Diagonale bezeichne. pr_T, Multiplikation und Inversion von Matrizen sind Morphismen von Varietäten. Weiter sind Verkettungen und Produkte von Morphismen ebenfalls Morphismen [EGA I, 0 1.2.3]. Folglich ist ψ ein Morphismus von Varietäten.

Seien $b \in B_n$ und $(u,t) \in U_n \times_k T_n$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \varphi \circ \psi(b) \;&=\; \varphi(b(pr_T(b))^{-1},\, pr_T(b)) \;=\; b(pr_T(b))^{-1} pr_T(b) \;=\; b \\ \psi \circ \varphi(u,t) \;&=\; \psi(ut) \;=\; (ut(pr_T(ut))^{-1}, pr_T(ut)) \;=\; (utt^{-1},t) \;=\; (u,t)\,, \end{aligned}$$

d. h. $\varphi \circ \psi = id$ und $\psi \circ \varphi = id$. Also ist φ ein Isomorphismus mit $\varphi^{-1} = \psi$.

1.4.3 Korollar: *Die Einschränkung der kanonischen Projektion* $\pi : B_n \to B_n/T_n$ *(1.2.9)*

$$\begin{aligned} \pi|_{\dots} : U_n &\longrightarrow B_n/T_n \\ u &\longmapsto uT_n \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus von Varietäten.

Beweis: Bezeichnet θ die erste Komponente des Morphismus ψ im Beweis von 1.4.2(ii), dann wird durch

$$\begin{aligned} \overline{\theta} : B_n/T_n &\longrightarrow U_n \\ bT_n &\longmapsto b(pr_T(b))^{-1} \end{aligned}$$

ein zu π inverser Morphismus gegeben. $\overline{\theta}$ ist als *Abbildung* wohldefiniert, denn sei $bT_n = b'T_n$, so existiert ein $t \in T_n$ mit $b' = bt$, d. h.

$$b'(pr_T b')^{-1} \;=\; bt(pr_T(bt))^{-1} \;=\; bt(pr_T(b)t)^{-1} \;=\; btt^{-1}(pr_T(b))^{-1} \;=\; b(pr_T(b))^{-1}\,.$$

In anderen Worten: $\theta : B_n \to U_n$ ist konstant auf den Orbiten der T_n-Operation auf B_n, womit - vermöge der universellen Eigenschaft von Quotienten (1.2.8) - $\overline{\theta}$ in eindeutiger

Weise als *Morphismus* definiert wird.

Sei $b \in B_n$, dann schreibt sich nach 1.4.2(ii) b eindeutig als $b = ut$ mit $u \in U_n$ und $t \in T_n$. Es gilt dann:

$$\pi|_{\ldots} \circ \overline{\theta}(bT_n) = \pi|_{\ldots} \circ \overline{\theta}(uT_n) = \pi(u(pr_T(u))^{-1}) = \pi(u) = uT_n = bT_n \,,$$

d. h. $\pi|_{\ldots} \circ \overline{\theta} = id$ auf B_n/T_n. Sei $u \in U_n$, dann gilt

$$\overline{\theta} \circ \pi(u) = \overline{\theta}(uT_n) = u(pr_T(u))^{-1} = u \,,$$

also ist auch $\overline{\theta} \circ \pi|_{\ldots} = id$ auf U_n und $\overline{\theta} = (\pi|_{\ldots})^{-1}$.

1.4.4 Satz: *$U_n \times_k T_n$ kann so mit der Struktur eines semi-direkten Produktes versehen werden, daß*

$$\varphi : U_n \rtimes_k T_n \longrightarrow B_n$$

(definiert wie in 1.4.2) ein Isomorphismus von algebraischen Gruppen wird.

Beweis: Sei $\alpha : T_n \to \mathcal{A}ut(U_n)$ definiert durch $t \mapsto t(\cdot)t^{-1}$. Man verifiziert unmittelbar, daß für $u \in U_n$ auch $t(\cdot)t^{-1} \in U_n$ ist, wobei $t \in T_n$.

Für (u_1, t_1) und $(u_2, t_2) \in U_n \times_k T_n$ wird durch

$$(u_1, t_1)(u_2, t_2) \overset{def}{=} (u_1 \alpha_{t_1}(u_2), t_1 t_2) = (u_1 t_1 u_2 t_1^{-1}, t_1 t_2)$$

eine Multiplikation gegeben, vermöge derer $U_n \rtimes_k T_n$ zu einem semi-direkten Produkt von Gruppen wird [FiSa, I 1.6.2]. Die Multiplikationsabbildung ist als Zusammensetzung von Morphismen selbst ein Morphismus von Varietäten. Die Inversion ist gegeben durch

$$(u, t)^{-1} = (\alpha_{t^{-1}}(u^{-1}), t^{-1}) = (t^{-1} u^{-1} t, t^{-1})$$

und ebenso wie die Multiplikation ein Morphismus von Varietäten. Damit wird $U_n \rtimes_k T_n$ eine algebraische Gruppe.

Es bleibt noch die Homomorphie von φ nachzuweisen: Mit (u_1, t_1), $(u_2, t_2) \in U_n \times_k T_n$ ist

$$\begin{aligned} \varphi(u_1, t_1)\varphi(u_2, t_2) &= u_1 t_1 u_2 t_2 \,, \qquad \text{und andererseits gilt} \\ \varphi((u_1, t_1)(u_2, t_2)) &= \varphi(u_1(t_1 u_2 t_1^{-1}), t_1 t_2) \\ &= u_1 t_1 u_2 t_1^{-1} t_1 t_2 = u_1 t_1 u_2 t_2 \,. \end{aligned}$$

Insgesamt ist deshalb φ ein Isomorphismus von algebraischen Gruppen.

1.4.5 Definition: Eine algebraische Gruppe G heißt ***zusammenhängend***, falls die G zugrundeliegende Varietät irreduzibel ist.

Da eine algebraische Gruppe stets nicht-singulär ist, sind die Begriffe „irreduzibel“ und „zusammenhängend“ (bzgl. der Spm-Topologie) äquivalent (vgl. 1.1.6(ii)). Eine algebraische Gruppe ist deshalb genau dann zusammenhängend, wenn sie mit ihrer Einskomponente (1.1.3) übereinstimmt.

1.4.6 Satz: *Folgende algebraische Gruppen sind zusammenhängend:*

$$\mathrm{GL}_n,\ \mathrm{SL}_n,\ \mathrm{PGL}_n,\ B_n,\ U_n,\ T_n\,.$$

Beweis: GL_n ist offen in k^{n^2} ($\mathrm{GL}_n = k^{n^2}\setminus\mathcal{V}(\det(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n})$). Wegen der Irreduzibilität von k^{n^2} ist mit 0.4.5(i) auch GL_n irreduzibel, d. h. zusammenhängend. Zum Beweis des Zusammenhangs von SL_n vgl. [Hum, II 7.5]. Daß PGL_n zusammenhängend ist, folgt aus der Stetigkeit von $\pi : \mathrm{GL}_{n+1} \to \mathrm{GL}_{n+1}/Z_{n+1}$ (1.2.10). T_n ist eine offene Untervarietät des k^n und nach 0.4.5(i) zusammenhängend. Die Behauptung für U_n folgt aus 1.4.2(i), und wegen 1.4.2(ii) und 0.4.6 ist auch B_n zusammenhängend.

1.4.7 Bemerkung: Als nächstes soll das Konzept der *auflösbaren Gruppen* kurz vorgestellt werden.

1.4.8 Definition: Sei G eine Gruppe. Für $g, h \in G$ heißt

$$[g,h] \overset{def}{=} ghg^{-1}h^{-1}$$

der ***Kommutator von g und h***. Die von der Menge Kommutatorgruppe

$$\{[g,h]\,|\,g,\,h \in G\}$$

erzeugte Untergruppe $\mathrm{Kom}(G)$ (das ist die Menge aller endlichen Produkte von Kommutatoren) heißt ***Kommutatorgruppe von G***.

1.4.9 Satz: *Sei G eine Gruppe und $N \subset G$ ein Normalteiler von G, dann gilt:*

(i) $\mathrm{Kom}(G)$ *ist Normalteiler von G.*

(ii) *G/N ist genau dann abelsch, wenn* $\mathrm{Kom}(G) \subset N$ *gilt; insbesondere ist $G/\mathrm{Kom}(G)$ abelsch.*

Beweis: [FiSa, I 3.1.3].

1.4.10 Definition: G sei eine Gruppe und

$$\begin{aligned}\mathrm{Kom}^0(G) &\overset{def}{=} G\\ \mathrm{Kom}^k(G) &\overset{def}{=} \mathrm{Kom}(\mathrm{Kom}^{k-1}(G))\end{aligned}$$

für $k \in \mathbb{N}\setminus 0$, dann erhält man eine absteigende Kette

$$G \supset \mathrm{Kom}^1(G) \supset \mathrm{Kom}^2(G) \supset \cdots$$

von Untergruppen von G, die sogenannte ***Kommutatorreihe von G***. Nach 1.4.9 ist stets $\mathrm{Kom}^{k+1}(G)$ normal in $\mathrm{Kom}^k(G)$ und $\mathrm{Kom}^k(G)/\mathrm{Kom}^{k+1}(G)$ ist abelsch.

1.4.11 Definition: Eine absteigende Kette von Untergruppen von G

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_m = 1$$

heißt ***Normalreihe***, falls G_{i+1} normal in G_i ist für alle $i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Ist G_i/G_{i+1} abelsch, so sagt man, die Normalreihe besitzt ***abelsche Faktoren***.

1.4.12 Definition & Satz: Eine Gruppe G heißt ***auflösbar***, falls eine Normalreihe mit abelschen Faktoren existiert, oder - hierzu äquivalent - falls die Kommutatorreihe von G abbricht (d. h. es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{Kom}^n(G) = 1$).

Beweis: Bricht die Kommutatorreihe von G ab, so ist sie per definitionem eine Normalreihe. Für die andere Richtung vgl. [FiSa, I 3.2.3].

1.4.13 Satz: *Sei* $1 \to G' \to G \to G'' \to 1$ *eine exakte Sequenz von Gruppen. Dann sind gleichwertig:*

(i) *G ist auflösbar.*

(ii) *G' und G'' sind auflösbar.*

Insbesondere ist jede Untergruppe einer auflösbaren Gruppe auflösbar.

Beweis: [FiSa, I 3.2.8].

1.4.14 Satz: *Sei G eine affine algebraische Gruppe, dann ist* $\mathrm{Kom}(G)$ *ein abgeschlossener Normalteiler von G. Mit G zusammenhängend ist auch* $\mathrm{Kom}(G)$ *zusammenhängend.*

Beweis: [Hum, VII 17.2].

1.4.15 Korollar: *Für eine affine algebraische Gruppe G ist* $\mathrm{Kom}^k(G)/\,\mathrm{Kom}^{k+1}(G)$ *(mit $k > 0$) eine abelsche algebraische Gruppe. Mit G zusammenhängend ist auch* $\mathrm{Kom}^k(G)$ *zusammenhängend.*

Beweis: 1.4.9 und 1.2.9(iv), die zweite Aussage folgt mit Induktion aus obigem Satz.

1.4.16 Bemerkung: Nach obigem Korollar läßt sich das Konzept der auflösbaren *Gruppen* durch folgende Modifikationen auf *affine algebraische Gruppen* übertragen:

In 1.4.11, 1.4.12 und 1.4.13 ersetze man die Begriffe *„Untergruppe“*, bzw. *„Normalteiler“*, durch *„abgeschlossene Untergruppe“*, bzw. *„abgeschlossener Normalteiler“*; vgl. hierzu [Hum, VII 17.3]. Unter einer *exakten Sequenz von algebraischen Gruppen*

$$1 \longrightarrow G' \xrightarrow{\varepsilon} G \xrightarrow{\pi} G'' \longrightarrow 1$$

versteht man eine exakte Sequenz von Gruppen (d. h. ε ist injektiv, $\mathrm{Bild}(\varepsilon) = \mathrm{Kern}(\pi)$ und π ist surjektiv), für die zusätzlich gilt: ε ist eine abgeschlossene Immersion von Varietäten (0.2.4), und $\pi^{-1}(1)$ (0.5.10) ist als Varietät isomorph zu G'.

1.4.17 Satz: *Die algebraischen Gruppen B_n, U_n und T_n sind auflösbar.*
Beweis: U_n ist auflösbar: Sei $u \in U_n$ mit Koeffizienten aus k wie folgt indiziert:

$$\begin{pmatrix} 1 & u_1 & u_n & \cdots & \cdots & \cdots & u_{\binom{n}{2}} \\ & 1 & u_2 & u_{n+1} & \cdots & \cdots & \vdots \\ & & 1 & u_3 & u_{n+2} & \cdots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & \ddots & u_{2(n-1)} \\ & & & & & \ddots & u_{n-1} \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Setzt man

$$U^{(i)} \overset{def}{=} \{(u_k) \in U_n \mid u_k = 0 \text{ für } k \leq i\},$$

so wird $U^{(i)}$ zu einer abgeschlossenen Untergruppe von U_n. Für $(u_k), (u'_k) \in U^{(i)}$ ist

$$(u_k)(u'_k) =$$

$$\begin{pmatrix} \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ & & & \ddots & 0 & \ddots & & & \vdots \\ & & & & \ddots & u_{i+1} & \ddots & & \vdots \\ & & & & & \ddots & u_{i+2} & \ddots & \vdots \\ & & & & & & \ddots & \ddots & * \\ & & & & & & & \ddots & u_l \\ & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ & & & \ddots & 0 & \ddots & & & \vdots \\ & & & & \ddots & u'_{i+1} & \ddots & & \vdots \\ & & & & & \ddots & u'_{i+2} & \ddots & \vdots \\ & & & & & & \ddots & \ddots & * \\ & & & & & & & \ddots & u'_l \\ & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & \vdots \end{pmatrix}$$

eine Matrix der gleichen Form mit den Einträgen

$$\begin{array}{rc} (i+1)\text{-te Stelle:} & u_{i+1} + u'_{i+1} \\ (i+2)\text{-te Stelle:} & u_{i+2} + u'_{i+2} \\ \vdots & \vdots \\ l\text{-te Stelle:} & u_l + u'_l\,, \end{array}$$

also ist $(u_k)(u'_k) \in U^{(i)}$. Ebenso sieht man, daß für $(u_k) \in U^{(i)}$ auch $(u_k)^{-1}$ aus $U^{(i)}$ ist. Damit ist $U^{(i)} \subset U_n$ eine Untergruppe, die per definitionem abgeschlossen in U_n ist.

Die $U^{(i)}$ bilden eine Kette abgeschlossener Untergruppen von U_n:

$$U_n = U^{(0)} \supset U^{(1)} \supset \cdots \supset U^{\binom{n}{2}} = 1 \tag{\#}$$

Die Projektion auf den $(i+1)$-ten Eintrag von $(u_k) \in U^{(i)}$

$$\begin{aligned} pr_{i+1} : U^{(i)} &\longrightarrow k_a \quad \text{(additive Gruppe von } k\text{)} \\ (u_k) &\longmapsto u_{i+1} \end{aligned}$$

ist offenbar ein Morphismus von Varietäten. Weiter folgt aus der obigen Betrachtung, daß für (u_k), $(u'_k) \in U^{(i)}$

$$pr_{i+1}((u_k)(u'_k)) \;=\; u_{i+1} + u'_{i+1} \;=\; pr_{i+1}((u_k)) + pr_{i+1}((u'_k))$$

gilt, d. h. pr_{i+1} ist ein Morphismus von algebraischen Gruppen. Nach Konstruktion ist $\mathrm{Kern}(pr_{i+1}) = U^{(i+1)}$, folglich ist (#) eine Normalreihe. Es bleibt noch zu zeigen, daß die Faktoren $U^{(i)}/U^{(i+1)}$ abelsch sind: pr_{i+1} induziert einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \overline{pr}_{i+1} : U^{(i)}/U^{(i+1)} &\xrightarrow{\cong} k_a \\ \overline{(u_k)} \; &\longmapsto u_{i+1}\,. \end{aligned}$$

Denn sei $\overline{(u'_k)} = \overline{(u_k)}$, dann existiert ein $(v_k) \in U^{(i+1)}$ mit $(u'_k) = (u_k)(v_k)$. Da $v_{i+1} = 0$ gilt, stimmen die Einträge von (u_k) und (u'_k) an der $(i+1)$-ten Stelle überein. $\overline{pr}_{i+1}$ ist also wohldefiniert (genauer: pr_{i+1} ist konstant auf den $U^{(i+1)}$-Orbiten, weshalb nach 1.2.5(ii) und 1.2.8 $\overline{pr}_{i+1}$ zu einem Morphismus wird). Den inversen Morphismus erhält man wie folgt: Einem $\lambda \in k_a$ wird die Matrix $(u^0_\lambda) \in U^{(i)}$ zugewiesen, wobei in der oben definierten Indizierung

$$(u^0_\lambda) \;\stackrel{def}{=}\; (u_k) \quad \text{mit} \quad u_k \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für} \quad k \neq i+1\,, \\ \lambda & \text{für} \quad k = i+1\,. \end{cases}$$

Dies definiert eine abgeschlossene Immersion $k_a \hookrightarrow U^{(i)}$, und deren Verkettung mit der kanonischen Projektion $\pi : U^{(i)} \to U^{(i)}/U^{(i+1)}$ liefert offenbar $(\overline{pr}_{i+1})^{-1}$. Insgesamt folgt damit die Auflösbarkeit von U_n.

Für T_n folgt die Behauptung sofort: T_n ist abelsch, d. h. $T_n \supset 1$ ist eine Normalreihe mit abelschen Faktoren.

Mit der exakten Sequenz

$$1 \longrightarrow U_n \xrightarrow{\varepsilon} B_n \xrightarrow{pr_T} T_n \longrightarrow 1 \tag{$\star$}$$

und 1.4.13 (vgl. auch 1.4.16) verifiziert man die Behauptung auch für B_n. Insbesondere ist U_n normal in B_n und $T_n \cong B_n/U_n$.

1.4.18 Korollar: *Die im obigen Beweis angegebene exakte Sequenz ($\star$) von zusammenhängenden algebraischen Gruppen spaltet, d. h. es existiert ein Morphismus $\sigma : T_n \to B_n$ mit $pr_T \circ \sigma = id_{T_n}$.*

Beweis: Wegen 1.4.4 ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & U_n \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr] & B_n \arrow[r, "pr_T"] & T_n \arrow[r] \arrow[dl, "\varepsilon'"] & 1 \\ & & U_n \rtimes_k T_n \arrow[u, "\varphi", "\cong"'] & & \end{tikzcd}$$

kommutativ, d. h. $\sigma = \varphi \circ \varepsilon'$, wobei ε' die kanonische Immersion bezeichnet.

1.4.19 Satz: *Sei G eine affine zusammenhängende und auflösbare algebraische Gruppe. Dann ist - für n geeignet gewählt - G isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe von B_n.*

Beweis: [Spr, 6.7]; vgl. auch [Hum, VII 17.6] und [Bor, III 10.5].

1.4.20 Definition: Sei G eine algebraische Gruppe. Eine abgeschlossene Untergruppe $T \subset G$ heißt ***Torus von G***, falls für ein $n \in \mathbb{N}$ $T \cong T_n$ (1.3.5) gilt. T heißt ***maximaler Torus von G***, falls $T \cong T_n$ und für alle Tori $T' \subset G$, mit $T' \cong T_m$, $m \leq n$ gilt.

1.4.21 Definition: Sei A ein Ring mit Eins; dann heißt ein Element $a \in A$

(i) ***nilpotent***, falls ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $a^k = 0$ gilt und

(ii) ***unipotent***, falls $a - 1$ nilpotent ist.

Da unipotente Elemente stets Einheiten sind, läßt sich der Begriff des unipotenten Elementes auf Gruppen übertragen, die als Einheitengruppen von Ringen auftauchen; vgl. [SchSt, I §15.5].

Ein Element g einer affinen algebraischen Gruppe G heißt ***unipotent***, falls für jeden Isomorphismus ε von G auf eine abgeschlossene Untergruppe einer GL_n das Bild $\varepsilon(g)$ unipotent im obigen Sinne ist. Die Menge aller unipotenten Elemente von G wird G_U notiert; vgl. hierzu [Spr, 2.4.9, p. 49].

1.4.22 Satz: *Sei $\varphi : G \to G'$ ein Morphismus von affinen algebraischen Gruppen, dann gilt $\varphi(G_U) = \varphi(G)_U$.*

Beweis: [Hum, VI 15.3 Thm. (C)].

1.4.23 Korollar: *Es seien G eine affine algebraische Gruppe und eine abgeschlossene Immersion $\varepsilon : G \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$ gegeben. Ist $\varepsilon(g)$ unipotent, dann ist für jede abgeschlossene Immersion $\varepsilon' : G \hookrightarrow \mathrm{GL}_m$ $\varepsilon'(g)$ unipotent; d. h. $g \in G$ ist genau dann unipotent, wenn eine abgeschlossene Immersion $\varepsilon : G \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$ existiert, so daß $\varepsilon(g)$ unipotent ist.*

Beweis: Nach obigem Satz sind mit $\varepsilon(g)$ auch $\varepsilon^{-1}(\varepsilon(g)) = g$ und $\varepsilon'(g)$ unipotent.

1.4.24 Definition & Satz: Sei G eine affine, zusammenhängende und auflösbare algebraische Gruppe. Dann ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & G_U \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_U"] & G \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & T \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_T"] & 1 \\ 1 \arrow[r] & U_n \arrow[r] & B_n \arrow[r] & T_n \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

von spaltenden exakten Sequenzen gegeben, wobei die Senkrechten Pfeile abgeschlossene Immersionen bezeichnen.
Weiter gilt:

(i) Der abgeschlossene Normalteiler G_U von G ist zusammenhängend und besteht genau aus den unipotenten Elementen von G (und ist wegen 1.4.23 unabhängig von ε definiert). G_U wird als ***unipotenter Normalteiler von G*** bezeichnet.

(ii) T ist ein maximaler Torus von G.

(iii) Jeder maximale Torus $T' \subset G$ ist zu T konjugiert und es gilt $G \cong G_U \rtimes_k T'$.

Beweis: Die untere Sequenz ist exakt (vgl. den Beweis von 1.4.17, bzw. 1.4.4) und spaltet nach 1.4.18. Wegen 1.4.19 existiert eine abgeschlossene Immersion $\varepsilon : G \hookrightarrow B_n$, wodurch die obere Sequenz aus der unteren induziert wird und somit ebenfalls exakt ist. Nach [Hum, VII 19.1] spaltet auch die obere Sequenz.

(i) G_U wird nach obigem Diagramm durch $\varepsilon(G) \cap U_n$ definiert und enthält damit genau die unipotenten Elemente von G. Wegen [loc. cit.] ist G_U auch zusammenhängend.

(ii) T ist als abgeschlossene Untergruppe von T_n ein Torus. Da $T \cong G/G_U$ gilt, ist T nach [Spr, 6.10, p. 146] maximal.

(iii) Hierzu vgl. [Hum, VII 19.3, Thm. (b)] oder [Bor, III 10.6(4)].

1.4.25 Definition: Sei G eine affine algebraische Gruppe. Eine abgeschlossene Untergruppe $B \subset G$ heißt ***Boreluntergruppe von G***, falls gilt:

(i) B ist zusammenhängend und auflösbar, sowie

(ii) für *keine* zusammenhängende und auflösbare Untergruppe $B' \subset G$ gilt $B' \supset B$, d. h. B ist maximal mit der Eigenschaft (i).

Nach 1.4.24(iii) gilt $B \cong B_U \rtimes_k T$ für jeden maximalen Torus $T \subset B$. B_U wird hierbei als ***maximale zusammenhängende unipotente Untergruppe von G*** bezeichnet; vgl. [Bor, IV 11.3(2)].

Eine abgeschlossene Untergruppe $P \subset G$ heißt ***parabolisch***, falls die homogene Varietät G/P projektiv ist; vgl. [Bor, IV 11.2].

1.4.26 Satz: *Für eine affine zusammenhängende algebraische Gruppe G gilt:*

(i) *Sämtliche Boreluntergruppen $B \subset G$ (bzw. maximale zusammenhängende unipotente Untergruppen $B_U \subset G$) sind zueinander konjugiert.*

(ii) *Sämtliche maximale Tori $T \subset G$ sind zueinander konjugiert, und jeder maximale Torus in G ist maximaler Torus einer Boreluntergruppe von G.*

(iii) *Die homogenen Varietäten G/B (wobei B Boreluntergruppe von G) sind projektiv.*

(iv) *Eine abgeschlossene Untergruppe $H \subset G$ ist genau dann parabolisch, wenn sie eine Boreluntergruppe von G enthält.*

Beweis: [Hum, VIII 21.3 Thm., Cor. A, Cor. B].

1.4.27 Korollar: *B_n ist eine Boreluntergruppe, U_n eine maximale zusammenhängende unipotente Untergruppe und T_n ein maximaler Torus von GL_n.*

$\mathbb{F}(k^n)$ ist als homogene und projektive Varietät maximal, d. h. für jede abgeschlossene Untergruppe $G \subset \mathrm{GL}_n$ mit $G \subsetneq B_n$ (oder $G \subsetneq gB_ng^{-1} = B$) ist GL_n / G nicht *projektiv; insbesondere ist $\mathbb{S}(k^n)$* nicht *projektiv.*

Beweis: Wegen 1.4.6 und 1.4.17 ist B_n eine zusammenhängende und auflösbare Untergruppe von GL_n. Nach 1.4.19, vgl. auch [Hum, VII 21.2 Thm. f], ist jede abgeschlossene, zusammenhängende und auflösbare Untergruppe von GL_n isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe von B_n, d. h. B_n ist maximal.

T_n ist maximaler Torus von B_n (das folgt sofort aus 1.3.5) und wegen 1.4.26(ii) auch maximaler Torus von GL_n. Die Behauptung für U_n erhält man wegen 1.4.4.

Die letzte Behauptung folgt unmittelbar aus 1.4.26(iv).

1.4.28 Korollar: *Die Varietät der $\boldsymbol{m}$-Fahnen des k^n (1.3.11) $\mathbb{F}(m_1, \ldots, m_k; k^n)$ ist projektiv.*

Beweis: Die Gruppe der Blockmatrizen des Typs $\boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_k)$ enthält B_n, ist also wegen 1.4.26(iv) parabolisch, d. h. $\mathbb{F}(\boldsymbol{m}; k^n) = \mathrm{GL}_n / P_{\boldsymbol{m}}$ ist projektiv.

1.4.29 Folgerung: *Sei G eine affine algebraische Gruppe. Dann sind äquivalent:*

(i) *H ist eine Boreluntergruppe (bzw. eine maximale zusammenhängende unipotente Untergruppe, bzw. ein maximaler Torus) von G.*

(ii) *H ist eine Boreluntergruppe (bzw. eine maximale zusammenhängende unipotente Untergruppe, bzw. ein maximaler Torus) von G° (1.1.3).*

Beweis: Es sie angenommen, daß G *nicht* zusammenhängend ist (sonst ist die Behauptung trivial).

Per definitionem ist eine Boreluntergruppe $B \subset G$ zusammenhängend, d. h. $B = B^\circ$. Da $B^\circ \subset G^\circ$ gilt, folgt $B \subset G^\circ$.

Sei nun B' eine auflösbare und abgeschlossene Untergruppe von G mit $B \subsetneq B'$ und B eine Boreluntergruppe von G°, dann gilt $B' \cap (G \smallsetminus G^\circ) \neq \emptyset$, d. h. B' ist nicht zusammenhängend. Also ist B auch Boreluntergruppe von G.

Wegen $B \cong B_U \rtimes_k T$ für jede Boreluntergruppe von G (bzw. G°) ist die Behauptung auch für maximale zusammenhängende unipotente Untergruppen und maximale Tori richtig (vgl. auch 1.4.26).

1.4.30 Satz: (i) *Sei* $\alpha : G \to G'$ *ein surjektiver Morphismus von affinen algebraischen Gruppen und bezeichne* $B = B_U \cdot T$ *das Bild der Multiplikation*

$$\begin{aligned} B_U \rtimes_k T &\longrightarrow B \\ (u\,,t) &\longmapsto ut\,, \end{aligned}$$

wobei B *Boreluntergruppe und* $T \subset B$ *maximaler Torus von* G*, sowie* $B_U \cap T = 1$ *vorausgesetzt sei (vgl. hierzu auch [Hum, II 8.4]). Dann ist* $\alpha(B) = \alpha(B_U) \cdot \alpha(T)$ *eine Boreluntergruppe von* G'*, und jede Boreluntergruppe von* G' *wird vermöge* α *durch eine Boreluntergruppe von* G *gegeben; weiter gilt:* $\alpha(T)$ *ist maximaler Torus von* G' *(bzw.* $\alpha(B)$*) und* $\alpha(B_U) = \alpha(B)_U$ *ist maximale zusammenhängende unipotente Untergruppe von* G' *(bzw. unipotenter Normalteiler von* $\alpha(B)$*).*

(ii) *Sei* H *eine zusammenhängende Untergruppe der affinen Gruppe* G*, und* $B_\circ$ *sei eine Boreluntergruppe von* H*. Dann existiert eine Boreluntergruppe* $B \subset G$*, so daß* $B_\circ = (H \cap B)^\circ$ *gilt. Ist* H *normal in* G*, dann sind die Boreluntergruppen von* H *genau die Gruppen* $(H \cap B)^\circ$*, für die* B *eine Boreluntergruppe von* G *ist.*

Die entsprechenden Behauptungen sind auch für maximale Tori und maximale zusammenhängende unipotente Untergruppen richtig.

Beweis: [Bor, IV 11.14].

1.5 Reduktive und halb-einfache Gruppen

1.5.1 Vorbemerkung: Problematisch für die Konstruktion von Quotienten (π, X) einer G-Varietät Y ist, daß die Invariantenringe $\mathcal{O}_Y(V)^G$ (1.2.7) im allgemeinen *keine* endlich erzeugten k-Algebren sind. Man muß deshalb bestimmte Forderungen an die algebraische Gruppe G stellen. Gruppen, die sich diesbezüglich „gutmütig“ verhalten, sind die sogenannten reduktiven Gruppen, die hier vorgestellt werden sollen. Des weiteren werden die alternativen Definitionen der geometrisch-reduktiven, sowie der linear-reduktiven Gruppe dem Begriff der reduktiven Gruppe gegenübergestellt.

1.5.2 Definition: Sei G eine affine algebraische Gruppe und bezeichne $\mathcal{B}$ die Menge aller Boreluntergruppen von G. Dann heißt

$$\mathcal{R}G \overset{def}{=} \Big(\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B\Big)^\circ$$

das ***Radikal von G***. Per definitionem ist $\mathcal{R}G$ eine abgeschlossene, zusammenhängende und auflösbare (vgl. 1.4.13) Untergruppe von G. Der unipotente Normalteiler (1.4.24) von $\mathcal{R}G$ wird $\mathcal{R}_U G$ notiert und heißt ***unipotentes Radikal von G***.

1.5.3 Folgerung: *Sei* G *eine affine algebraische Gruppe, dann ist* $\mathcal{R}G$ *(bzw.* $\mathcal{R}_U G$*) maximaler abgeschlossener zusammenhängender und auflösbarer (bzw. maximaler abgeschlossener zusammenhängender unipotenter) Normalteiler von* G*, und es gilt*

$$\mathcal{R}G = \Big(\bigcap_{g \in G} gBg^{-1}\Big)^\circ \quad \text{für ein} \quad B \in \mathcal{B}\,.$$

Beweis: Wegen 1.4.26(i) ist $\mathcal{R}G = (\bigcap_{g\in G} gBg^{-1})^\circ$ für jede Boreluntergruppe $B \subset G$, und nach 1.3.4 ist $N = \bigcap_{g\in G} gBg^{-1}$ ein abgeschlossener Normalteiler von G. Da für alle $g \in G$ $gN^\circ g^{-1} = (gNg^{-1})^\circ = N^\circ$ gilt (1.1.4(iii)), ist $\mathcal{R}G = N^\circ$ normal und wegen 1.1.3 abgeschlossen in G. Wiederum nach 1.3.4 ist N der größte in B enthaltene Normalteiler von G. B ist aber maximal unter den abgeschlossenen zusammenhängenden und auflösbaren Untergruppen von G, weshalb man $\mathcal{R}G = N^\circ$ als maximalen abgeschlossenen zusammenhängenden und auflösbaren Normalteiler von G erhält.

Wegen 1.4.24 gilt die entsprechende Behauptung auch für $\mathcal{R}_UG$: Nach 1.4.24(i) ist $\mathcal{R}_UG$ zusammenhängend und unipotent. Da nach 1.4.24(iii) $\mathcal{R}G \cong \mathcal{R}_UG \rtimes_k T$ gilt (für einen maximalen Torus $T \subset \mathcal{R}G$), ist $\mathcal{R}_UG$ ebenfalls abgeschlossen in G. Schreibt man $\mathcal{R}G$ als $\mathcal{R}_UG \cdot T$ (vgl. 1.4.30), so gilt für alle $g \in G$

$$\mathcal{R}_UG \cdot T \;=\; g(\mathcal{R}_UG \cdot T)g^{-1} \;=\; (g\mathcal{R}_UGg^{-1}) \cdot (gTg^{-1})\,,$$

d. h. auch $\mathcal{R}_UG$ und und T sind in G normal. Die Maximaleigenschaft von $\mathcal{R}_UG$ folgt per definitionem.

1.5.4 Satz: *Seien G und G' zusammenhängende affine Gruppen und $\alpha : G \to G'$ ein surjektiver Morphismus, dann gilt: $\alpha(\mathcal{R}G) = \mathcal{R}G'$ und $\alpha(\mathcal{R}_UG) = \mathcal{R}_UG'$.*

Beweis: [Bor, IV 14.11].

1.5.5 Definition: Eine affine algebraische Gruppe G heißt ***reduktiv*** (bzw. ***halb-einfach***), falls $\mathcal{R}_UG = 1_G$ (bzw. $\mathcal{R}G = 1_G$) gilt.

1.5.6 Satz: *Sei G affin, zusammenhängend und reduktiv, dann ist $\mathcal{R}G$ ein Torus und stimmt mit der Einskomponente des Zentrums $Z(G)$ überein. Weiter gilt: $\mathcal{R}G \cap \mathrm{Kom}(G)$ (vgl. 1.4.8) ist endlich.*

Beweis: [Spr, 6.15].

1.5.7 Folgerung: *Seien G und G' affine algebraische Gruppen. Sind G und G' reduktiv (bzw. halb-einfach), dann ist auch das direkte Produkt $G \times_k G'$ reduktiv (bzw. halb-einfach).*

Beweis: Beide Faktoren $G \times_k 1$ und $1 \times_k G'$ sind normal (und abgeschlossen) im Produkt $G \times_k G'$, d. h. wegen 1.4.30(ii) sind die Boreluntergruppen von $G \times_k G'$ genau die Produkte von Boreluntergruppen $B \subset G$ und $B' \subset G'$. Somit gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(G \times_k G') \;&=\; \Big(\bigcap_{i,j}(B_i \times_k B'_j)\Big)^\circ \;=\; \Big(\bigcap_i B_i \times_k \bigcap_j B'_j\Big)^\circ \\ &=\; \Big(\bigcap_i B_i\Big)^\circ \times_k \Big(\bigcap_j B'_j\Big)^\circ \;=\; \mathcal{R}G \times_k \mathcal{R}G'\,,\end{aligned}$$

woraus die Behauptungen unmittelbar folgen.

1.5.8 Folgerung: *Sei G eine affine und zusammenhängende algebraische Gruppe und N ein abgeschlossener Normalteiler von G. Ist G reduktiv (bzw. halb-einfach), dann ist auch G/N reduktiv (bzw. halb-einfach).*

Beweis: Da die kanonische Projektion $\pi : G \to G/N$ (1.2.9) insbesondere ein surjektiver Morphismus ist, folgen die Behauptungen sofort aus 1.5.4.

1.5.9 Satz: *Die algebraischen Gruppen SL_n und PGL_n sind halb-einfach und die allgemeine lineare Gruppe GL_n ist reduktiv.*

Beweis: Wegen 1.4.27 und 1.3.15 Beweis (i) erhält man $\mathcal{R}\,\mathrm{GL}_n = Z_n \cong k^*$; folglich gilt $\mathcal{R}_U\,\mathrm{GL}_n = 1$.

Da $\mathrm{PGL}_n = \mathrm{GL}_{n+1}/Z_{n+1}$ ist, folgt mit 1.2.9 und 1.5.4 $\mathcal{R}\,\mathrm{PGL}_n = 1$.

SL_n ist ein abgeschlossener Normalteiler von GL_n, d. h. $(SB_n)^\circ \overset{def}{=} (\mathrm{SL}_n \cap B_n)^\circ$ ist nach 1.4.30(ii) eine Boreluntergruppe von SL_n. SB_n ist nun gegeben durch Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} t_1 & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & t_n \end{pmatrix}, \qquad \text{mit} \quad \prod_{i=1}^{n} t_i = 1\,.$$

Nach 1.5.3 gilt:

$$\mathcal{R}\,\mathrm{SL}_n = \Big(\bigcap_{g \in \mathrm{SL}_n} g\,(SB_n)^\circ\, g^{-1} \Big)^\circ \subset \Big(\bigcap_{g \in \mathrm{SL}_n} g\,SB_n\, g^{-1} \Big)^\circ .$$

Wie im Beweis von 1.3.15 (die Elementarmatrizen p und $q(i,j)$ sind aus SL_n) folgt jetzt, daß

$$\bigcap_{g \in \mathrm{SL}_n} g\,SB_n\,g^{-1} \;=\; \{(t_i) \in T_n \mid t_i = t_j \text{ mit } 1 \le i,j \le n,\ \textstyle\prod_{i=1}^{n} t_i = 1\} \;=\; E_n$$

gilt, wobei E_n die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln bezeichnet. Da E_n diskret ist, gilt $E_n^\circ = 1$, woraus $\mathcal{R}\,\mathrm{SL}_n = 1$ folgt.

1.5.10 Satz: *Sei G eine affine reduktive Gruppe und $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe. Dann sind äquivalent:*

(i) *Die Quotientenvarietät G/H (1.2.9) ist affin.*

(ii) *H ist reduktiv.*

Beweis: [New, p. 50 Rem.].

1.5.11 Korollar: *Die Varietät der Spaltungen $\mathbb{S}(k^n)$ (1.3.7) ist affin.*

Beweis: Per definitionem gilt $\mathbb{S}(k^n) = \mathrm{GL}_n/T_n$. GL_n ist nach 1.5.9 reduktiv und, da T_n ein Torus ist, folgt die Behauptung aus obigem Satz.

1.5.12 Definition: Sei G eine algebraische Gruppe und W ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum, dann heißt ein Morphismus von algebraischen Gruppen $\varrho : G \to \mathrm{GL}(W)$ ***rationale Darstellung von G***, und die vermöge ϱ definierte Operation von G auf W wird als ***lineare Operation*** bezeichnet.

1.5.13 Definition: Sei G eine algebraische Gruppe und A eine k-Algebra. Eine ***rationale Operation von G auf A*** ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} A \times G &\longrightarrow A \\ (f, g) &\longmapsto f^g \end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(i) $f^{(g_1 g_2)} = (f^{g_1})^{g_2}$ und $f^1 = f$ für alle $f \in A$ und alle $g_1,\, g_2 \in G$.

(ii) Die Abbildung $f \mapsto f^g$ ist ein k-Algebrenautomorphismus von A für alle $g \in G$.

(iii) Für alle $f \in A$ existiert ein endlich-dimensionaler G-invarianter Untervektorraum $W(f) \subset A$, sowie eine Darstellung $\varrho : G \to \mathrm{GL}(W)$, vermöge derer G auf W operiert.

1.5.14 Satz: *Sei Y eine G-Varietät und $V \subset Y$ sowohl offen als auch G-invariant. Definiert man für $f \in \mathcal{O}_Y(V)$ f^g durch*

$$f^g(y) \stackrel{def}{=} f(gy) \quad \textit{für alle} \quad y \in V\,,$$

dann wird hierdurch eine rationale Operation von G auf $\mathcal{O}_Y(V)$ gegeben.

Beweis: (i) und (ii) folgen sofort aus den elementaren Eigenschaften der G-Operation auf Y (1.1.9). Zum Beweis von (iii) vgl. [New, p. 45, Lem. 3.1].

1.5.15 Definition: Eine affine algebraische Gruppe G heißt ***geometrisch reduktiv***, falls gilt:

Für jeden k-Vektorraum W und jede lineare Operation von G auf W existiert für jedes G-invariante $w \in W \smallsetminus \{0\}$ ein homogenes $f \in \mathbf{S}(W^\vee)^G \hookrightarrow \mathbf{S}(W^\vee)$ mit $\mathrm{grad}(f) > 0$, so daß $f(w) \neq 0$ gilt ($\mathbf{S}(W^\vee)$ bezeichnet hierbei die symmetrische Algebra des Dualraums von W; da $\mathbf{S}(\_)$ ein (covarianter) Funktor ist, erhält man für jedes $g \in \mathrm{GL}(W^\vee)$ einen k-Algebrenautomorphismus $\mathbf{S}(g)$ von $\mathbf{S}(W^\vee)$).

1.5.16 Definition: Sei $\varrho : G \to \mathrm{GL}(W)$ eine rationale Darstellung einer affinen algebraischen Gruppe G. Dann heißt ϱ

(i) ***irreduzibel***, falls 0 und $W\,(\neq 0)$ die einzigen G-invarianten Untervektorräume von W sind,

(ii) ***vollständig reduzibel***, falls G-invariante Untervektorräume $W_i \subset W$ existieren mit $\bigoplus_{i=1}^m W_i = W$, so daß die Einschränkungen von ϱ auf die W_i irreduzibel sind.

Eine affine algebraische Gruppe G heißt ***linear reduktiv***, falls jede rationale Darstellung von G vollständig reduzibel ist.

1.5.17 Satz: *Sei G eine affine algebraische Gruppe und für den Grundkörper gelte* $\mathrm{char}(k) = 0$. *Dann sind gleichwertig:*

(i) *G ist reduktiv (1.5.5).*

(ii) *G ist linear reduktiv.*

Beweis: Vgl. [GIT, 1 §1 1.5 ff (Nagata)].

1.5.18 Satz: *Sei G eine affine algebraische Gruppe und* $\mathrm{char}(k)$ *beliebig. Dann sind äquivalent:*

(i) *G ist reduktiv (1.5.5).*

(ii) *G ist geometrisch reduktiv.*

(iii) *Für alle endlich erzeugten k-Algebren, auf denen G rational operiert (1.5.13) ist der Invariantenring A^G eine endlich erzeugte k-Algebra.*

Beweis: [GIT, App. Thm. A.1.0], vgl. auch [New, Thm. 3.4, p. 49]
Nagata: $(ii) \Rightarrow (iii)$; [New, p. 50] Mumford's Conjecture: $(i) \Rightarrow (ii)$.

1.6 Quotienten nach reduktiven Gruppen

1.6.1 Vorbemerkung: Im folgenden Abschnitt soll die in 1.2 begonnene Darstellung der grundlegenden Begriffe der geometrischen Invariantentheorie fortgesetzt werden. Als Hauptreferenz hierfür dient das Buch [New] von P. E. Newstead, wobei jedoch auf folgende Unterschiede der Definitionen hingewiesen werden soll: Der hier verwendete Begriff des geometrischen Quotienten (π, X) (1.2.7) ist äquivalent zu den Definitionen von Mumford und Borel (vgl. [GIT, 0 §1 Def. 0.6] und [Bor, II 6.1, 6.3 und 6.16]), während Newstead zusätzlich π affin fordert; vgl. [New, p. 70, Def., Remarks]. Ebenso ist bei Newsteads *„good quotient"* [New, loc. cit.] der Projektionsmorphismus π als affin vorausgesetzt.

In Übereinstimmung mit [New] ist hier unter einer *„Varietät"* stets eine *separierte algebraische Varietät* zu verstehen (vgl. 0.3.12 und 0.5.1).

Einige der hier verwendeten Begriffe werden formal erst in Kapitel 2 eingeführt; da es sich hierbei jedoch um elementare Definitionen handelt, die anhand der entsprechenden Referenzen leicht nachgelesen werden können, dürfte dieser Vorgriff unproblematisch sein.

1.6.2 Definition: Es sei eine G-Varietät Y gegeben. Ein Paar (π, X), wobei $\pi : Y \to X$ ein Morphismus sei, heißt ***guter Quotient von Y nach G***, falls gilt:

(i) π ist G-invariant.

(ii) π ist surjektiv und affin.

(iii) Für alle G-invarianten abgeschlossenen Untervarietäten Z und Z' von Y mit $Z \cap Z' = \emptyset$ sind $\pi(Z)$ und $\pi(Z')$ abgeschlossen in X und $\pi(Z) \cap \pi(Z') = \emptyset$.

(iv) Für alle offenen Teilmengen $U \subset X$ ist $\pi^\circ : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_Y(\pi^{-1}(U))^G$ ein Isomorphismus.

1.6.3 Definition: Ein geometrischer Quotient (π, X) von Y nach G (1.2.7) heißt ***affin-geometrisch***, falls π ein affiner Morphismus ist.

1.6.4 Satz: *Die Konzepte* „guter Quotient" *und* „affin-geometrischer Quotient" *sind lokal:*

(i) *Sei (π, X) ein guter (bzw. affin-geometrischer) Quotient von Y nach G und U sei offen in X, dann ist $(\pi|_{\dots}, U)$ ein guter (bzw. affin-geometrischer) Quotient von $\pi^{-1}(U)$ nach G.*

(ii) *Sei $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X, so daß für alle $i \in I$ $(\pi|_{\dots}, U_i)$ ein guter (bzw. affin-geometrischer) Quotient von $\pi^{-1}(U_i)$ nach G ist. Dann ist auch (π, X) ein guter (bzw. affin-geometrischer) Quotient von Y nach G.*

Beweis: [New, p. 70, Prop. 3.10].

1.6.5 Satz: *Sei (π, X) ein guter Quotient von Y nach G, dann gilt:*

(i) *(π, X) ist ein kategorieller Quotient (1.2.5).*

(ii) *Für $y, y' \in Y$ ist $\pi(y) = \pi(y')$ genau dann, wenn $\overline{Gy} \cap \overline{Gy'} \neq \emptyset$ gilt.*

(iii) *Operiert G abgeschlossen auf Y (1.2.14(i)), so ist (π, X) ein affin-geometrischer Quotient.*

(iv) *Bezeichne Y' die Menge aller Punkte $y \in Y$, so daß y auf einem Orbit von maximaler Dimension liegt, dann existiert eine offene Untervarietät $X' \subset X$ mit $\pi^{-1}(X') = Y'$ und $(\pi|_{Y'}, X')$ ist ein affin-geometrischer Quotient von Y' nach G.*

Beweis: [New, p. 71, Prop. 3.11].

1.6.6 Satz: *Sei Y eine affine G-Varietät und G reduktiv (1.5.5 und 1.5.18). Dann existiert eine affine Varietät X, so daß (π, X) ein guter Quotient von Y nach G ist.*

Falls eine offene Untervarietät $U \subset X$ existiert, so daß die Operation von G auf $V = \pi^{-1}(U)$ abgeschlossen ist, dann ist $(\pi|_V, U)$ ein affin-geometrischer Quotient von V nach G.

Beweis: [New, p. 61, Thm. 3.5], [GIT, 1 §2 Thm. 1.1],
sowie [New, p. 66, Cor. 3.5.3], [GIT, 1 §2 Amp. 1.3].

1.6.7 Definition: Sei Y eine G-Varietät und L ein Geradenbündel[1] über Y. Eine ***Linearisierung der Operation von G bzgl. L*** ist eine Operation von G auf L, so daß gilt:

(i) Die Projektion $p : L \to Y$ des Geradenbündels L ist G äquivariant (1.2.1).

(ii) Die in den Fasern von L induzierte Abbildung

$$\begin{aligned} L_y &\longrightarrow L_{gy} \\ l &\longmapsto gl \end{aligned}$$

ist für alle $y \in Y$ und alle $g \in G$ ein Vektorraumhomomorphismus.

Eine ***L-lineare Operation von G auf Y*** ist eine Operation von G auf Y zusammen mit einer Linearisierung bzgl. L.

1.6.8 Bemerkung: Bezeichnet $L^{\otimes r} \overset{def}{=} L \otimes \cdots \otimes L$ die r-fache Tensorpotenz[2] von L über Y, dann operiert G auch auf $L^{\otimes r}$:

$$\begin{aligned} G \times_k L^{\otimes r} &\longrightarrow L^{\otimes r} \\ (g, l') &\longmapsto \otimes^r g(l') \,. \end{aligned}$$

Jedes Element $l' \in L^{\otimes r}$ ist Element genau einer Faser $L_y^{\otimes r}$ von $L^{\otimes r}$. Nimmt man l' als zerlegbar an, so gilt $l' = l_1 \otimes \cdots \otimes l_r \in L_y^{\otimes r}$, und damit ist vermöge der Ausrechnungsformel

$$\otimes^r g(l') \;=\; \otimes^r g(l_1 \otimes \cdots \otimes l_r) \;=\; gl_1 \otimes \cdots \otimes gl_r \in L_{gy}^{\otimes r}$$

definiert. Aufgrund der Funktoreigenschaft von $\otimes^r$ ist die Abbildung

$$\otimes^r g : L_y^{\otimes r} \longrightarrow L_{gy}^{\otimes r}$$

ebenfalls linear, und die G-Äquivarianz der Projektion $p' : L^{\otimes r} \to Y$ folgt per definitionem.

Sei nun $H^0(Y, L^{\otimes r})$ der Raum der Schnitte[3] von $L^{\otimes r}$. Definiert man

$$\begin{aligned} G \times_k H^0(Y, L^{\otimes r}) &\longrightarrow H^0(Y, L^{\otimes r}) \\ (g\,, s) &\longmapsto gs \end{aligned}$$

durch

$$(g\,, s : y \mapsto s(y)) \longmapsto (gs : gy \mapsto gs(y))$$

für alle $y \in Y$, so gilt $p'(gs(y)) = g\,p'(s(y)) = gy$, d. h. $gs \in H^0(Y, L^{\otimes r})$. Also operiert G auch auf $H^0(Y, L^{\otimes r})$.

[1] vgl. hierzu 2.1.20 im nächsten Kapitel mit Y als Basis
[2] vgl. 2.4.8 und 2.4.9 im nächsten Kapitel
[3] vgl. 2.3.10 im nächsten Kapitel

1.6.9 Definition: Sei G eine reduktive Gruppe, L ein Geradenbündel über Y und G operiere L-linear auf Y. Ein Punkt $y \in Y$ heißt

(i) ***semi-stabil (bzgl. L)***, falls für ein $r > 0$ ein $s \in H^0(Y, L^{\otimes r})$ existiert, so daß gilt:

(1) $s(y) \neq 0$,

(2) $Y_s \overset{def}{=} \{y' \in Y \mid s(y') \neq 0\}$ ist affin,

(3) s ist G-invariant, d. h. $gs = s$ für alle $g \in G$.

Die Menge aller semi-stabilen Punkte von Y wird $Y^{SS}(L)$ notiert.

(ii) ***stabil (bzgl. L)***, falls y semi-stabil ist und zusätzlich gilt:

(4) die eingeschränkte Operation $G \times_k Y_s \to Y_s$ ist abgeschlossen.

Die Menge aller stabilen Punkte von Y wird $Y^S(L)$ notiert.

(iii) ***eigentlich-stabil (bzgl. L)***, falls y stabil ist und zusätzlich gilt:

(5) $\dim(Gy) = \dim(G)$.

Die Menge der eigentlich stabilen Punkte von Y wird $Y^S_{(0)}(L)$ notiert.

Hierzu vgl. [GIT, 1 §4 Def. 1.7, 1.8] und [New, p, 82 Def. , sowie p. 73 Def. , p. 74 Remark, p. 75 Remark (b)].

1.6.10 Folgerung: *In den Bezeichnungen von 1.6.9 gilt:*

$$Y^S_{(0)}(L) \underset{offen}{\overset{(iii)}{\hookrightarrow}} Y^S(L) \underset{offen}{\overset{(ii)}{\hookrightarrow}} Y^{SS}(L) \underset{offen}{\overset{(i)}{\hookrightarrow}} Y .$$

Beweis: (i) Sei V offen in Y, $L^{\otimes r}$ über V trivial und $y \in V$ semi-stabil, dann ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} L_V^{\otimes r} \arrow[rr, "\cong"] & & V \times_k k \\ & V \arrow[ul, "s_V"] \arrow[ur, "(id,\sigma_V)_k"'] & \end{tikzcd}$$

gegeben. Aus $s(y) \neq 0$ folgt $\sigma_V(y) \neq 0$ und $\sigma_V \in \mathcal{O}_Y(V)$; da $\mathcal{V}(\sigma_V)$ abgeschlossen in V ist, folgt $y \in W(y) \overset{def}{=} V \setminus \mathcal{V}(\sigma_V)$, und $W(y)$ ist offen in Y. Aus einer für $L^{\otimes r}$ trivialisierenden Überdeckung $\{V_i\}_{i \in I}$ von Y erhält man jetzt eine offene Überdeckung $\{W_i(y)\}_{i \in I, y \in Y^{SS}(L)}$.

Zum Beweis von (ii) und (iii) vgl. [GIT, 1 §4 Def. 1.7 f] ($Y^S(L)$ besitzt eine Zerlegung

$$Y^S(L) = Y^S_{(0)} \,\dot\cup\, \cdots \,\dot\cup\, Y^S_{(m)},$$

wobei $Y^S_{(i)} \overset{def}{=} \{y \in Y^S(L) \mid \dim(\mathrm{Stab}^G(y)) = i\}$ offen in Y ist).

1.6.11 Satz: *Es sei ein Geradenbündel L über Y gegeben. Dann sind gleichwertig:*

(i) *Für alle $y \in Y$ existiert ein $s \in H^0(Y, L^{\otimes r})$, für ein $r > 0$, so daß gilt: $s(y) \neq 0$, und Y_s ist affin (vgl. 1.6.9).*

(ii) *Es existieren eine Immersion $\psi : Y \to \mathbb{P}_n$ und ein $r > 0$, so daß $\psi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1) \cong L^{\otimes r}$ (über Y) gilt (vgl. 2.4.1, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1)$ bezeichnet das Hyperebenenbündel des $\mathbb{P}_n$, vgl. [OSS, I 1.1]).*

Beweis: [New, p. 83, Lem. 3.20], bzw. [EGA II, 4.5.2, 4.5.3 und 4.5.10(ii)(e')]: setze $q : Y \to \mathrm{Spm}(k) = X$, $\mathcal{E} = k^{n+1}$, $\mathbb{P}(\mathcal{E}^\vee) = \mathbb{P}_n$; vgl. auch [EGA II, 4.4.2]; dort, wie auch bei [New], sind die Rollen von X und Y vertauscht (relativ zur vorliegenden Arbeit).

1.6.12 Definition: Ein Geradenbündel L über Y, das den Bedingungen des obigen Satzes genügt, heißt ***ampel***.

1.6.13 Folgerung: *Existiert auf einer Varietät Y ein amples Geradenbündel, dann ist Y insbesondere quasi-projektiv. Operiert eine reduktive Gruppe G L-linear auf Y, dann sind die offenen Untervarietäten $Y^{SS}(L)$, $Y^S(L)$ und $Y^S_{(0)}$ quasi-projektiv.*
Beweis: Die Behauptungen folgen sofort aus den Definitionen „semi-stabil“ und „ampel“.

1.6.14 Bemerkung (Standardfall): Sei $Y \subset \mathbb{P}_n$ eine quasi-projektive Varietät, $\mathcal{O}_Y(1)$ bezeichne die Einschränkung des Hyperebenenbündels $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1)$ auf Y und eine reduktive Gruppe G operiere $\mathcal{O}_Y(1)$-linear auf Y, dann notiert man

$$Y^{SS} \overset{def}{=} Y^{SS}(\mathcal{O}_Y(1)),$$
$$Y^S \overset{def}{=} Y^S(\mathcal{O}_Y(1)),$$
$$Y^S_{(0)} \overset{def}{=} Y^S_{(0)}(\mathcal{O}_Y(1)).$$

Wird nun die $\mathcal{O}_Y(1)$-lineare Operation von G auf Y durch eine $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1)$-lineare Operation von G auf $\mathbb{P}_n$ gegeben, so erhält man die folgende Charakterisierung von Y^{SS} und $Y^S_{(0)}$:

Sei $\widehat{Y}$ der affine Kegel über Y, dann operiert G äquivariant (1.2.1) auf den Varietäten des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\widehat{Y} \arrow[r, hook] & k^{n+1} \\
\widehat{Y} \setminus \{0\} \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & k^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[u, hook] \arrow[d, two heads] \\
Y \arrow[r, hook] & \mathbb{P}_n
\end{tikzcd}$$

(insbesondere operiert dann G linear auf k^{n+1} im Sinne von 1.5.12), und es gilt:

$y \in Y^{SS} \;\Leftrightarrow\;$ für ein (und damit für alle) $\widehat{y}$ über y gilt:
$0 \notin \overline{G\widehat{y}}$ (Zariski-Abschluß des Orbits).

$y \in Y^S_{(0)} \;\Leftrightarrow\;$ für ein (und damit für alle) $\widehat{y}$ über y gilt:
$G\widehat{y}$ ist abgeschlossen in k^{n+1} und $\dim(G\widehat{y}) = \dim(G)$.

Hierzu vgl. [GIT, 2 §1 Prop. 2.2, bzw. App. Chap. 1 B] und [New, p. 82 Ex., p. 83 Prop. 3.19, sowie pp. 73, 74 Def.].

1.6.15 Satz: *Sei Y eine (separierte algebraische) Varietät und L ein Geradenbündel über Y. Operiert eine reduktive Gruppe G L-linear auf Y, dann gilt:*

(i) *Es existiert ein guter Quotient (π, X) von $Y^{SS}(L)$ nach G, X ist quasi-projektiv und π ist offen.*

(ii) *Es existiert eine offene Untervarietät $X' \subset X$, so daß $Y^S_{(0)} = \pi^{-1}(X')$ gilt, und $(\pi|_{Y^S_{(0)}}, X')$ ist ein affin-geometrischer Quotient von $Y^S_{(0)}$ nach G. (Ebenso existiert ein affin-geometrischer Quotient von $Y^S(L)$ nach G.)*

Seien $y,\, y' \in Y^{SS}(L)$:

(iii) $\pi(y) = \pi(y')$ *genau dann, wenn* $\overline{Gy} \cap \overline{Gy'} \cap Y^{SS}(L) \neq \emptyset$ *ist.*

(iv) *y ist genau dann eigentlich-stabil, wenn Gy abgeschlossen in $Y^{SS}(L)$ ist und* $\dim(Gy) = \dim(G)$ *gilt.*

(v) *Ist Y projektiv und $L = \mathcal{O}_Y(1)$, dann ist auch X projektiv (als guter Quotient von Y^{SS} nach G).*

Beweis: [New, p. 84, Thm. 3.21] und [GIT, 1 §4 Thm. 1.10, Amp. 1.11];
zu (v) vgl. [New, p. 74, Thm. 3.14, p. 82 Ex., p. 83 Prop. 3.19].

Kapitel 2

Faserbündel von Varietäten

Vorbemerkung: Unter einer Varietät X ist, (falls keine anders lautende Vereinbarung gertroffen wird) wie in Kapitel 1, eine *lokal-algebraische* Varietät im Sinne von 0.5.1 zu verstehen; ebenso gelten die übrigen Vereinbarungen wie bei Kapitel 1 (vgl. die dortige Vorbemerkung).

2.1 Grundlegende Definitionen

2.1.1 Definition: Sei X eine Varietät, U eine offene Untervarietät von X und G eine algebraische Gruppe (1.1.1). Sind Morphismen g und g' von U nach G gegeben, dann wird durch

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "(g{,}g')_k"] \arrow[dr, "gg'"'] & G \times_k G \arrow[d, "mul"] \\ & G \end{tikzcd}$$

ebenfalls ein Morphismus gg' von U nach G definiert (mul bezeichnet die Multiplikation von G). Setzt man

$$\underline{G}(U) \overset{def}{=} \mathcal{M}or(U, G)\,,$$

dann wird $\underline{G}(U)$ zu einer Gruppe: Für $g,\, g' \in G$ und alle $x \in U$ gilt $(gg')(x) = g(x)\, g'(x)\,$, womit die Gruppenstruktur von G auf $\underline{G}(U)$ vererbt wird.

Für jede Inklusion offener Teilmengen $V \subset U \subset X$ ist durch

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, mapsto] & \underline{G}(U) \arrow[d, "\varrho^U_V"] \\ V \arrow[u, hook] \arrow[r, mapsto] & \underline{G}(V) \end{tikzcd}$$

eine Prägarbe von Gruppen $\underline{G}$ auf X gegeben: Für $g \in G$ ist $\varrho_V^U(g) = g|_V$, die natürliche Beschränkung von g auf V per definitionem homomorph; ϱ_U^U ist gerade die Eins von $\underline{G}(U)$ und für offene Teilmengen $W \subset V \subset U$ gilt $\varrho_W^U = \varrho_W^V \circ \varrho_V^U$ aufgrund der Contravarianz der obigen Definition.

2.1.2 Folgerung: *Für jede (lokal-algebraische) Varietät X und jede algebraische Gruppe G ist $\underline{G}$ eine Garbe von Gruppen auf X.*

Beweis: Sei U offen in X und $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von U gegeben.

(i) Seien $g,\, g' \in \underline{G}(U)$ mit $g|_{U_i} = g'|_{U_i}$ für alle $i \in I$, dann sind g und g', als stetige Abbildungen von U nach G aufgefaßt, gleich. Da Morphismen von Varietäten stetige Abbildungen mit einer zusätzlichen *lokalen* Eigenschaft sind (vgl. 0.5.9), folgt, daß g und g' auch als Morphismen übereinstimmen.

(ii) Es seien jetzt $g_i \in \underline{G}(U_i)$ gegeben mit $g_i|_{U_{ij}} = g_j|_{U_{ij}}$ für alle $(i,j) \in I^2$. Dann existiert eine stetige Abbildung $g : U \to G$, so daß für die g_i (aufgefaßt als stetige Abbildungen) $g_i = g|_{U_i}$ gilt. Damit besitzt g lokal die Eigenschaft eines Morphismus und ist somit selbst ein Morphismus.

2.1.3 Definition: Sei X eine lokal-algebraische Varietät, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X, G eine algebraische Gruppe und $\underline{G}$ die oben definierte Garbe von Gruppen auf X. Ein ***1-Cozyklus*** (oder kurz ***Cozyklus***) ***bzgl.*** $\mathcal{U}$ ist eine Familie von Morphismen $\{g_{ij}\}_{(i,j)\in I^2}$, mit $g_{i,j} \in \underline{G}(U_i \cap U_j)$, für die die ***Cozyklusbedingung***

$$g_{ij}(x)\, g_{jk}(x) \;=\; g_{ik}(x) \tag{Co}$$

über $U_i \cap U_j \cap U_k$ für alle $(i,j,k) \in I^3$ gilt. Setzt man in (Co) $i = j = k$, so erhält man

$$g_{ii}(x) \;=\; 1_G$$

und für $i = k$ entsprechend

$$g_{ij}(x) \;=\; g_{ji}(x)^{-1}\,.$$

Die Menge aller ***1-Cozyklen mit Koeffizienten in $\underline{G}$ bzgl.*** $\mathcal{U}$ wird $Z^1(\mathcal{U}, \underline{G})$ notiert.

2.1.4 Bemerkung: Im allgemeinen ist $Z^1(\mathcal{U}, \underline{G})$ *keine* Gruppe bzgl. komponentenweiser Multiplikation von Cozyklen. GL_n wird jedoch im Fall $n = 1$ gerade zu $\mathcal{O}_X^*$, der Garbe der k^*-wertigen regulären Funktionen auf X. Die oben definierten Cozyklen stimmen dann mit den (multiplikativ geschriebenen) 1-Čech-Cozyklen von $\mathcal{O}_X^*$ bzgl. $\mathcal{U}$ überein. Deshalb wird $Z^1(\mathcal{U}, \underline{\mathrm{GL}_1}) = Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*)$ sogar zu einer abelschen Gruppe.

2.1.5 Definition: Seien X, Y und F lokal-algebraische Varietäten und $\pi : Y \to X$ ein Morphismus gegeben mit $\pi^{-1}(x) \cong F$ für alle $x \in X$. Dann heißt das Tupel $(Y, \pi, X; F)$

Faserung mit typischer Faser F.

Existiert ein Isomorphismus h, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "h", "\cong"'] \arrow[dr, "\pi"'] & & X \times_k F \arrow[dl, "pr_1"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

kommutativ macht, so wird die Faserung als ***trivial*** bezeichnet.

2.1.6 Definition: Sei $(Y, \pi, X; F)$ eine Faserung. Ist für eine offene Untervarietät U von X ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "h", "\cong"'] \arrow[dr, "\pi|_{\dots}"'] & & U \times_k F \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

gegeben, dann heißt das Paar (h, U) ***Karte*** oder ***lokale Trivialisierung*** der Faserung.

Eine Menge von Karten $\mathcal{A} = \{(h_i, U_i) \mid i \in I\}$ wird als ***Atlas*** der Faserung bezeichnet, falls durch $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X gegeben ist. $\mathcal{U}$ heißt dann ***für Y trivialisierend***. Besitzt eine Faserung einen Atlas $\mathcal{A}$, dann wird sie als ***lokal-trivial*** bezeichnet.

2.1.7 Definition: Sei $\mathcal{A} = \{(h_i, U_i) \mid i \in I\}$ ein Atlas einer Faserung $(Y, \pi, X; F)$, sowie eine effektive Linksoperation einer algebraischen Gruppe G (1.1.9 (iii)) auf der typischen Faser F gegeben. Existiert für alle $(i, j) \in I^2$ ein $g_{ij} \in \underline{G}(U_i \cap U_j)$, so daß

$$h_i \circ h_j^{-1}(x, f) \;=\; (x, g_{ij}(x)\, f) \tag{$\star$}$$

für alle $x \in U_i \cap U_j$ und alle $f \in F$ gilt, dann wird $\mathcal{A}$ als ***G-Atlas*** bezeichnet. Die Morphismen $g_{ij} : U_{ij} \to G$ heißen ***Übergangsmorphismen*** von $\mathcal{A}$.

2.1.8 Folgerung: *Die Übergangsmorphismen g_{ij} eines G-Atlanten $\{(h_i, U_i) \mid i \in I\}$ sind für alle $(i, j) \in I^2$ durch h_i und h_j auf $U_i \cap U_j$ eindeutig festgelegt und definieren einen Cozyklus $\{g_{ij}\}_{(i,j) \in I^2} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{G})$.*

Beweis: Angenommen, Gleichung $(\star)$ gelte ebenfalls für $g'_{ij} \in \underline{G}(U_{ij})$, dann gilt für alle $x \in U_{ij}$ und alle $f \in F$: $(x, g'_{ij}(x)f) = (x, g_{ij}(x)f)$, bzw. $g'_{ij}(x)f = g_{ij}(x)f$, was äquivalent zu $f = (g'_{ij}(x))^{-1} g_{ij}(x) f$ ist. Da G effektiv auf F operiert, folgt $(g'_{ij}(x))^{-1} g_{ij}(x) = 1_G$

und somit $g'_{ij}(x) = g_{ij}(x)$.
Über U_{jk} schreibt sich $(\star)$ als

$$h_j \circ h_k^{-1}(x,f) \;=\; (x, g_{jk}(x)\, f) \tag{1}$$

und über U_{ik} als

$$h_i \circ h_k^{-1}(x,f) \;=\; (x, g_{ik}(x)\, f)\,, \tag{2}$$

für alle $f \in F$. Es folgt nun mit $(\star)$ und (1):

$$\begin{aligned}(x, g_{ij}(x)\, g_{jk}(x)\, f) \;&=\; (h_i \circ h_j^{-1}) \circ (h_j \circ h_k^{-1})\,(x,f)\\ &=\; h_i \circ (h_j^{-1} \circ h_j) \circ h_k^{-1}\,(x,f) \;=\; h_i \circ h_k^{-1}\,(x,f) \;\overset{(2)}{=}\; (x, g_{ik}(x)\, f)\,.\end{aligned}$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Übergangsmorphismen erhält man schließlich die Cozyklusbedingung.

2.1.9 Definition: Es seien $(Y,\pi,X;F)$ eine Faserung, sowie ein zugehöriger G-Atlas $\mathcal{A} = \{(h_i,U_i)\,|\,i \in I\}$ gegeben. Eine Karte (h_0,U_0) der Faserung heißt ***G-verträglich mit*** $\mathcal{A}$, falls für alle $i \in I$ ein $g_{0i} \in \underline{G}(U_0 \cap U_i)$ existiert, so daß

$$h_0 \circ h_i^{-1}(x,f) \;=\; (x, g_{0i}(x) f)$$

für alle $x \in U_{0i}$ und alle $f \in F$ gilt. Die Vereinigung aller mit $\mathcal{A}$ G-verträglichen Karten wird $\overline{\mathcal{A}}$ notiert.

$\mathcal{A}$ heißt ***maximaler G-Atlas*** oder ***G-Struktur***, falls $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}$ gilt. (Man erhält sofort $\overline{\mathcal{A}} = \overline{\overline{\mathcal{A}}}$, denn mit $(h,U) \in \overline{\overline{\mathcal{A}}}$ ist (h,U) insbesondere mit allen Karten aus $\mathcal{A}$ G-verträglich, d.h. $(h,U) \in \overline{\mathcal{A}}$.)

Eine Faserung $(Y,\pi,X;F)$ zusammen mit einer G-Struktur wird als ***Faserbündel mit typischer Faser F und Strukturgruppe G*** bezeichnet und $(Y,\pi,X;F,G)$ notiert.

2.1.10 Bemerkung: Ist zusammen mit einer Faserung ein G-Atlas $\mathcal{A}$ gegeben, so erhält man durch Hinzunahme aller mit $\mathcal{A}$ verträglichen Karten einen maximalen G-Atlas $\overline{\mathcal{A}}$, und $\overline{\mathcal{A}}$ ist der größte G-Atlas, der $\mathcal{A}$ enthält. Somit ist durch Vorgabe eines beliebigen G-Atlanten einer Faserung in eindeutiger Weise eine G-Struktur festgelegt.

Umgekehrt erweist es sich oft als günstig bei der Konstruktion von Faserbündeln oder Faserbündelmorphismen (vgl. etwa 2.1.13 - 2.1.16, sowie 2.2), aus den maximalen G-Atlanten konkrete, meist möglichst kleine, Atlanten auszuwählen. Ist im folgenden von trivialisierenden Überdeckungen $\mathcal{U}$ die Rede, so wird stillschweigend eine solche Auswahl vorausgesetzt.

2.1.11 Bemerkung: In Analogie zu topologischen Bündeln werden bei einem Faserbündel $(Y,\pi,X;F,G)$ die Varietäten X als ***Basis*** und Y als ***Totalvarietät*** bezeichnet, während der Morphismus π ***Projektion*** heißt. Ebenso wird mit U offen in X und $x \in X$

für die offene (bzw. abgeschlossene) Untervarietät $\pi^{-1}(U)$ (bzw. $\pi^{-1}(x)$) die Notation Y_U (bzw. Y_x) verwendet (vgl. hierzu 0.3.8 und 0.5.10).

Im folgenden soll - falls Mehrdeutigkeiten ausgeschlossen sind - für ein Faserbündel $(Y, \pi, X; F, G)$ kurz Y geschrieben werden.

2.1.12 Bemerkung: Bei einem trivialen Faserbündel Y mit $h : Y \overset{\cong}{\to} X \times_k F$ ist jede Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ von X für Y trivialisierend mit $h_i = h|_{U_i}$ für alle $i \in I$. Insbesondere operieren die Werte der zugehörigen Übergangsmorphismen g_{ij} als Identität auf der typischen Faser F, weshalb Œ die Strukturgruppe G als 1 angenommen werden kann. Umgekehrt setzen sich bei einem Faserbündel mit Strukturgruppe 1 die lokalen Trivialisierungen zu einer globalen Trivialisierung zusammen.

2.1.13 Satz (Konstruktionstheorem): *Gegeben sei eine effektive Linksoperation ω der algebraischen Gruppe G auf der Varietät F, eine Varietät X mit offener Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$, sowie ein Cozyklus $\{g_{ij}\}_{(i,j) \in I^2} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{G})$. Dann wird hierdurch in eindeutiger Weise ein Faserbündel $(Y, \pi, X; F, G)$ definiert.*

Beweis: (1) $U_{ij} \times_k F$ ist offene Untervarietät von $U_i \times_k F$:
U_{ij} ist eine offene Teilmenge von U_i, und F ist als topologischer Raum selbst offen. Versieht man das kartesische Produkt $U_i \times F$ mit der Produkttopologie, so ist $U_{ij} \times F$ offen in $U_i \times F$. Nach 0.3.3 (ii) ist die Topologie von $U_i \times_k F$ i. a. echt feiner als die Produkttopologie auf $U_i \times F$; insbesondere sind die beiden Topologien vergleichbar, und $U_{ij} \times F$ ist auch in $U_i \times_k F$ offen.

(2) Konstruktion der Totalvarietät Y:
In der Terminologie von 0.2.8 setzt man

$$\begin{aligned} Y_i &\overset{def}{=} U_i \times_k F \quad \text{für alle } i \in I \text{, sowie} \\ V_{ij} &\overset{def}{=} U_{ij} \times_k F \quad \text{und} \\ \varphi_{ij} &\overset{def}{=} id \times_\omega g_{ij} \quad \text{für alle } (i,j) \in I^2 , \end{aligned}$$

wobei $id \times_\omega g_{ij} \overset{def}{=} (pr_1, \omega \circ (g_{ij} \times_k F))_k$. Die φ_{ij} erfüllen, wie die g_{ij}, die Cozyklusbedingung und definieren Isomorphismen

$$U_j \times_k F \supset U_{ij} \times_k F \xrightarrow[\cong]{\varphi_{ij}} U_{ij} \times_k F \subset U_i \times_k F .$$

Y wird nun als Verklebung der Varietäten Y_i längs der Isomorphismen φ_{ij} definiert (vgl. 0.2.8).

(3) Konstruktion der lokalen Trivialisierungen und der Projektion π:
Wiederum in der Terminologie von 0.2.8 setzt man

$$\begin{aligned} W_i &\overset{def}{=} \widetilde{\varepsilon}_i(U_i \times_k F) \quad \text{und} \\ h_i &\overset{def}{=} \widetilde{\varepsilon}_i^{\,-1} \quad \text{für alle } i \in I , \end{aligned}$$

wobei $\widetilde{\varepsilon}_i$ die kanonische offene Immersion ist. Das kommutative Diagramm von 0.2.8 schreibt sich somit

$$
\begin{tikzcd}
\coprod\limits_{i\in I}(U_i \times_k F) \arrow[d, two heads, "\varkappa"] & & U_i \times_k F \arrow[ll, hook', "\varepsilon_i"'] \arrow[dll, "\widetilde{\varepsilon_i}"'] \arrow[d, equal] \\
Y \supset W_i \arrow[rr, "h_i", "\cong"'] \arrow[dr, "\pi_i"'] & & U_i \times_k F \arrow[dl, "pr_1"] \\
& U_i\,. &
\end{tikzcd}
\tag{D.1}
$$

Für alle $i \in I$ ist $\pi_i \overset{def}{=} pr_1 \circ h_i$ als Verkettung von Morphismen selbst ein Morphismus. Die zweifachen Durchschnitte W_{ij} sind für alle $(i, j) \in I^2$ durch die Verklebungsisomorphismen φ_{ij} charakterisiert:

$$
\begin{tikzcd}
& U_{ij} \times_k F \arrow[d, "\varphi_{ij}", "\cong"'] \\
W_{ij} \arrow[ur, "h_j|_{W_{ij}}"] \arrow[r, "h_i|_{W_{ij}}"'] & U_{ij} \times_k F\,.
\end{tikzcd}
\tag{D.2}
$$

Es folgt nun unmittelbar die Gültigkeit der Bedingung $(\star)$ in 2.1.7 . Nach Konstruktion ist $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von Y, und da die g_{ij} (bzw. φ_{ij}) die Cozyklusbedingung erfüllen, wird durch die π_i ein globaler Morphismus $\pi : Y \to X$ wohldefiniert.

2.1.14 Definition: Es seien $(Y, \pi, X; F, G)$ ein Faserbündel mit zugehörigem Cozyklus $\{g_{ij}\}_{(i,j)\in I^2} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{G})$ und eine G-Varietät F' gegeben. Nach 1.2.13 existiert dann eine abgeschlossene normale Untergruppe N von G, so daß $G' \overset{def}{=} G/N$ effektiv auf F' operiert. Für alle $(i, j) \in I^2$ hat man nun Diagramme

$$
\begin{tikzcd}
U_{ij} \arrow[r, "g_{ij}"] \arrow[dr, "g'_{ij}"'] & G \arrow[d, two heads, "\varkappa"] \\
& G/N\,,
\end{tikzcd}
$$

wodurch ein Cozyklus $\{g'_{ij}\}_{(i,j)\in I^2} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{G'})$ definiert wird. Das nach 2.1.13 hierdurch definierte Faserbündel $(Y', \pi', X; F', G')$ heißt zu Y ***assoziiertes Faserbündel***. Operiert G effektiv auf G', dann gilt $g'_{ij} = g_{ij}$ und Y' heißt zu Y ***stark assoziiert***.

2.1.15 Bemerkung: Die Kostruktion von Faserbündeln aus Cozyklen ist *kanonisch*, d. h. die lokalen Isomorhismen

$$h_i : \pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\cong} U_i \times_k F$$

werden vermöge der kanonischen Morphismen $\varkappa$ und ε_i definiert (vgl. Diagramm (1) von 2.1.13).

Andererseits wird durch jedes Faserbündel ein Cozyklus gegeben, wobei die Übergangsmorphismen $\widetilde{g}_{ij}$ jedoch durch Verklebung *beliebiger* lokaler Isomorphismen $\widetilde{h}_i$ definiert sind. Als Konsequenz hieraus ist das zu einem Faserbündel Y assoziierte Faserbündel Y' mit *gleicher* typischer Faser F i. a. *nur isomorph* zu Y.

2.1.16 Satz: *Sei $(Y, \pi, X; F, G)$ ein Faserbündel; dann übertragen sich folgende Eigenschaften von Basis und typischer Faser: Sind X und F*

(i) *irreduzibel,*

(ii) *quasikompakt,*

(iii) *glatt,*

so gilt dies jeweils auch für die Totalvarietät Y.

Beweis: (i) Gemäß 0.4.5(i) ist jede offene Teilmenge U von X irreduzibel, und wegen 0.4.6 gilt dies somit auch für $U \times_k F$. Ist $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine für Y trivialisierende Überdeckung von X, so erhält man durch $\{V_i\}_{i \in I} = \{h_i^{-1}(U_i \times_k F)\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von Y mit V_i irreduzibel für alle $i \in I$. Wegen X irreduzibel gilt $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ für alle $(i, j) \in I^2$, und nach Konstruktion ist auch $V_i \cap V_j \neq \emptyset$. Aus 0.4.5(ii) folgt jetzt unmittelbar die Behauptung.

(ii) Bezeichnen f und g die Strukturmorphismen von X bzw. F, so sind f und g quasikompakte Morphismen über $\mathrm{Spm}(k)$ im Sinne von [EGA I, 6.1.1], bzw. 0.4.1. Ist U eine offene Untervarietät von X, so ist U ebenfalls quasikompakt: man erhält

$$U \overset{i}{\hookrightarrow} X \xrightarrow{f} \mathrm{Spm}(k)\,;$$

da X lokal-noethersch (0.1.12), ist die kanonische Immersion i wegen [EGA I, 6.1.5(i)] quasikompakt, und wegen [EGA I, 6.1.5(ii)] gilt dies auch für die Komposition $i \circ f = f|_U$. Nach [EGA I, 6.1.5(iv)] ist nun

$$f|_U \times_k g \,:\, U \times_k F \longrightarrow \mathrm{Spm}(k) \times_k \mathrm{Spm}(k) \cong \mathrm{Spm}(k)$$

(vgl. auch [EGA I, 0 1.2.7.1]) ebenfalls quasikompakt. Ist $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine für Y trivialisierende Überdeckung von X, so kann man wegen der Quasikompaktheit von X die Indexmenge I endlich wählen. Da $Y = \bigcup_{i=1}^n h_i^{-1}(U_i \times_k F)$ und $U_i \times_k F$ quasikompakt für alle $i \in I$, ist schließlich auch Y quasikompakt.

(iii) Mit X glatt ist auch jede offene Untervarietät U von X glatt, und wegen 0.5.13 gilt dies auch für $U \times_k F$. Ist wieder $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ für Y trivialisierend, so erhält man wegen der Glattheit von $V_i \overset{def}{=} h_i^{-1}(U_i \times_k F)$ für alle $i \in I$, daß auch $Y = \bigcup_{i \in I} V_i$ glatt ist.

2.1.17 Definition: Ein Faserbündel $(Y,\pi,X;F,G)$ mit $F = G$ heißt ***G-Prinzipalbündel***, falls die Operation von G auf sich genau die Multiplikation von G ist. Insbesondere operiert dann G einfach-transitiv.

2.1.18 Folgerung: *Sei $(Y,\pi,X;G)$ ein Prinzipalbündel. Dann läßt sich die Totalvarietät Y so mit der Struktur einer G-Varietät versehen, daß die Orbiten der Operation genau die Fasern des Prinzipalbündels Y sind.*

Beweis: Wie folgt wird eine Rechtsoperation von G auf Y definiert:

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U_j)\times_k G \arrow[r, "\omega_j"] \arrow[d, "h_j\times_k id"'] & \pi^{-1}(U_j) \\
U_j\times_k G\times_k G \arrow[r, "\eta_j"'] & U_j\times_k G \arrow[u, "h_j^{-1}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(y,a) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & ya \\
(x,g,a) \arrow[r, mapsto] & (x,ga)\,, \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

wobei $\eta_j = (pr_1\,,\, mul\circ(pr_2\times_k pr_2))_k$. Die Definition von ω_j ist für alle $y\in\pi^{-1}(U_{ij})$ unabhängig von der Auswahl der trivialisierenden Isomorphismen:

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U_{ij})\times_k G \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[ddr] & & \pi^{-1}(U_{ij}) \\
& U_{ij}\times_k G \arrow[ur] \arrow[d, "h_i\circ h_j^{-1}"] & \\
& U_{ij}\times_k G \arrow[uur] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(y,a) \arrow[rr, mapsto] \arrow[dr, mapsto] \arrow[ddr, mapsto] & & ya \\
& (x,ga) \arrow[ur, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \\
& (x,g_{ij}(x)ga) \arrow[uur, mapsto] &
\end{tikzcd}$$

Sämtliche Dreiecke im obigen Diagramm kommutieren. Folglich setzen sich die lokal für $\pi^{-1}(U_j)$ definierten Rechtsoperationen ω_j von G zu einer globalen Operation von G auf Y zusammen.

Seien $x\in X$ und $y\in\pi^{-1}(x)$ gegeben, dann existiert ein $i\in I$, so daß $x\in U_i$ und $h_i(y) = (x,g)$ ist. Es gilt also

$$yG \overset{def}{=} h_i^{-1}(x,gG) = h_i^{-1}(x,G) = \pi^{-1}(x)\,.$$

2.1.19 Folgerung: *Es sei auf der Totalvarietät Y eines Prinzipalbündels $(Y,\pi,X;G)$ eine Rechtsoperation von G wie in 2.1.18 definiert, dann ist für alle $y\in Y$ der zugehörige Orbitmorphismus*

$$\omega_y : G \longrightarrow yG$$

ein Isomorphismus von Varietäten.

Beweis: Nach 2.1.18 Folgerung ist der Orbitmorphismus ω_{y_0} mit $y_0 \in \pi^{-1}(U_j)$ gegeben durch $\omega_j|_{\{y_0\}\times_k G}$. Sei $h_j(y_0) = (x, g_0)$, dann definiert das folgende Diagramm $\omega_{y_0}^{-1}$:

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U_j) \times_k G & \pi^{-1}(U_j) \arrow[l, "\omega_{y_0}^{-1}"'] \arrow[d, "h_j"] \\
U_j \times_k G \times_k G \arrow[u, "h_j^{-1}\times_k id"] & U_j \times_k G \arrow[l, "\eta_{j,g_0}^{-1}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(y_0, g_0^{-1}g) & y \arrow[l, mapsto] \arrow[d, mapsto] \\
(x, g_0, g_0^{-1}g) \arrow[u, mapsto] & (x, g) \arrow[l, mapsto]
\end{tikzcd},$$

wobei $\eta_{j,g_0}^{-1} \overset{def}{=} (\eta_j|_{U_j\times_k\{g_0\}\times_k G})^{-1}$ (vgl. 2.1.18). Die Definition von $\omega_{y_0}^{-1}$ ist unabhängig von der gewählten Trivialisierung: Seien $y_0, y \in \pi^{-1}(U_{ij})$ und $h_i(y_0) = (x, g_0')$, dann gilt

$$h_i \circ h_j^{-1}(x, g_0) = (x, g_{ij}(x)g_0), \quad \text{woraus} \quad g_0' = g_{ij}(x)g_0 \quad \text{folgt.}$$

Also ist $\omega_{y_0}^{-1}$ bzgl. h_i durch $\eta_{i,g_0'}^{-1} = \eta_{i,g_{ij}(x)g_0}^{-1}$ gegeben. Zu zeigen ist nun, daß

$$(h_i^{-1} \times_k id) \circ \eta_{i,g_{ij}(x)g_0}^{-1} \circ h_i(y) = \underbrace{(h_j^{-1} \times_k id) \circ \eta_{j,g_0} \circ h_j(y)}_{(y_0, g_0^{-1}g)\text{, vgl. obiges Diagramm}} \quad \text{gilt:}$$

$$\begin{aligned}
&(h_i^{-1} \times_k id) \circ \eta_{i,g_{ij}(x)g_0}^{-1} \circ h_i(y) = \\
&\quad = (h_i^{-1} \times_k id) \circ \eta_{i,g_{ij}(x)g_0}^{-1}(x, g_{ij}(x)g) = (h_i^{-1} \times_k id)\,(x, g_{ij}(x)g_0, (g_{ij}(x)g_0)^{-1}g_{ij}(x)g) \\
&\quad = (h_i^{-1} \times_k id)\,(x, g_{ij}(x)g_0, g_0^{-1}g_{ij}(x)^{-1}g_{ij}(x)g) = (h_i^{-1} \times_k id)\,(x, g_{ij}(x)g_0, g_0^{-1}g) \\
&\quad = (y_0, g_0^{-1}g)\,.
\end{aligned}$$

Jetzt bleiben noch die Identitäten

$$\omega_{y_0}^{-1} \circ \omega_{y_0} = id_{\{y_0\}\times_k G} \quad \text{und} \quad \omega_{y_0} \circ \omega_{y_0}^{-1} = id_{Y_x}$$

nachzuprüfen; es genügt, dies lokal zu verifizieren: Seien $y_0, y \in Y_U \subset \pi^{-1}(U_j)$ und $h_j(y_0) = (x, g_0)$, dann ist

$$\omega_{y_0}^{-1} \circ \omega_{y_0} = (h_j^{-1} \times_k id) \circ \eta_{j,g_0}^{-1} \circ h_j \circ h_j^{-1} \circ \eta_{j,g_0} \circ (h_j \times_k id) = id_{\{y_0\}\times_k G}\,;$$

ebenso sieht man sofort, daß auch

$$\omega_{y_0} \circ \omega_{y_0}^{-1} = h_j^{-1} \circ \eta_{j,g_0} \circ (h_j \times_k id) \circ (h_j^{-1} \times_k id) \circ \eta_{j,g_0}^{-1} \circ h_j = id_{Y_U}$$

gilt, womit die Behauptung folgt.

2.1.20 Definition: Es sei $(Y, \pi, X; F, G)$ ein Faserbündel, so daß gilt:

(i) Die typische Faser $F = k^n$ und

(ii) die Einschränkung der trivialisierenden Isomorphismen $h_i|_{Y_x}$ ist für alle $i \in I$ und alle $x \in U_i$ *linear* über k.

Dann heißt Y ***Vektorraumbündel vom Rang n***. Somit besitzen die Fasern Y_x die Struktur von n-dimensionalen k-Vektorräumen. Da G als Gruppe von Vektorraumautomorphismen auf k^n operiert, entsprechen für alle $x \in U_{ij}$ die $g_{ij}(x)$ linearen Koordinatentransformationen der lokalen Fasern Y_x.

Wird die Strukturgruppe eines Rang-n-Vektorraumbündels nicht ausdrücklich erwähnt, so ist $G = \mathrm{GL}_n$. Ein Vektorraumbündel vom Rang 1 heißt auch ***Geradenbündel***.

2.1.21 Satz: *Es seien eine Varietät X mit offener Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$, sowie ein Cozyklus $\{g_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{\mathrm{GL}_n})$ gegeben. Dann wird hierdurch in eindeutiger Weise ein Rang-n-Vektorraumbündel über X definiert.*

Beweis: Die Konstruktion eines Faserbündels $(Y, \pi, X; k^n, \mathrm{GL}_n)$ erfolgt aus den obigen Daten wie im Beweis von 2.1.13 .

Zu zeigen bleibt: Jede Faser Y_x läßt sich so mit der Struktur eines k-Vektorraums versehen, daß die eingeschränkten Trivialisierungen $h|_{Y_x}$ k-linear werden.

In den Bezeichnungen von 2.1.13 ist $h_i \overset{def}{=} \widetilde{\varepsilon_i}^{-1}$, und die Einschränkung von $\widetilde{\varepsilon_i}$ auf $\{x\} \times_k k^n$ liefert einen Isomorphismus $\{x\} \times_k k^n \cong Y_x$, der gegeben ist durch das Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\coprod\limits_{i \in I} (U_i \times_k k^n) \arrow[d, two heads, "\varkappa"'] & \{x\} \times_k k^n \subset U_i \times_k k^n \arrow[l, "\varepsilon_i|\ldots"'] \arrow[dl, "\widetilde{\varepsilon_i}|\ldots"'] & & (x, v) \arrow[d, mapsto] & (x, v) \arrow[l, mapsto] \arrow[dl, mapsto] \\
Y \supset Y_x & & & {[x, v]} \;. &
\end{tikzcd}$$

Auf Y_x definiert man nun eine Skalarmultiplikation durch

$$\alpha[x, v] \overset{def}{=} [x, \alpha v] \quad \text{mit} \quad \alpha \in k\,,$$

sowie eine Addition durch

$$[x, v_1] + [x, v_2] \overset{def}{=} [x, v_1 + v_2]\,.$$

Die Skalarmultiplikation ist wohldefiniert, denn sei $[x, v] = [x, v']$, dann existiert ein $g_{ij} : U_{ij} \to \mathrm{GL}_n$, wobei $x \in U_{ij}$, mit $v' = g_{ij}(x)v$, d. h.

$$\alpha[x, v'] = [x, \alpha v'] = [x, \alpha g_{ij}(x)v] = [x, g_{ij}(x)(\alpha v)] = [x, \alpha v] = \alpha[x, v]\,.$$

Ebenso folgt die Wohldefiniertheit der Addition: Seien $[x, v_1] = [x, v_1']$ und $[x, v_2] = [x, v_2']$, dann existiert ein $g_{ij} : U_{ij} \to \mathrm{GL}_n$ und ein $g_{kl} : U_{kl} \to \mathrm{GL}_n$, wobei $x \in U_{ijkl}$, mit $v_1' = g_{ij}(x)v_1$ und $v_2' = g_{kl}(x)v_2$, d. h.

$$\begin{aligned}
[x, v_1'] + [x, v_2'] &= [x, v_1' + v_2'] = [x, g_{ij}(x)v_1 + g_{kl}(x)v_2] \\
&= [x, g_{ij}(x)v_1] + [x, g_{kl}(x)v_2] = [x, v_1] + [x, v_2]\,.
\end{aligned}$$

Per definitionem erhält man jetzt die k-Linearität von $\widetilde{\varepsilon_i}|_{\ldots}$:

$$\begin{aligned}\widetilde{\varepsilon_i}|_{\ldots}(x,\alpha v) &= [x,\alpha v] = \alpha[x,v] = \alpha\,\widetilde{\varepsilon_i}|_{\ldots}(x,v)\\ \widetilde{\varepsilon_i}|_{\ldots}(x,v_1+v_2) &= [x,v_1+v_2] = [x,v_1]+[x,v_2] = \widetilde{\varepsilon_i}|_{\ldots}(x,v_1)+\widetilde{\varepsilon_i}|_{\ldots}(x,v_2)\end{aligned}$$

2.2 Morphismen von Faserbündeln

2.2.1 Definition: Seien $(Y,\pi,X;F)$ und $(Y',\pi',X;F')$ zwei Faserungen über X. Ein Morphismus (bzw. Isomorphismus) $\varphi : Y \to Y'$ heißt ***Morphismus*** (bzw. ***Isomorphismus***) ***von Faserungen***, falls das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

kommutiert, d. h. falls $\varphi(Y_x) \subset Y'_x$ für alle $x \in X$ gilt. Ist φ ein Isomorphismus, dann ist insbesondere $\varphi|_{Y_x} : Y_x \to Y'_x$ ein Isomorphismus. Die Einschränkung $\varphi|_{Y_x}$ wird auch φ_x notiert.

Ein ***Morphismus*** (bzw. ***Isomorphismus***) ***von Faserbündeln*** ist ein Morphismus (bzw. Isomorphismus) der zugrundeliegenden Faserungen.

Seien $(Y,\pi,X;G)$ und $(Y',\pi',X;G')$ Prinzipalbündel über X und G eine algebraische Untergruppe (1.1.2) von G'. Ein Morphismus $\varphi : Y \to Y'$ heißt ***Morphismus von Prinzipalbündeln***, falls φ G-äquivariant ist (vgl. 1.2.1). Hierbei sei Y (bzw. Y') als Rechts-G-Varietät (bzw. Rechts-G'-Varietät) aufgefaßt. φ ist dann wegen 2.1.18 fasertreu, d. h. insbesondere ein Morphismus von Faserbündeln.

Seien $(Y,\pi,X;k^n)$ und $(Y',\pi',X;k^m)$ Vektorraumbündel über X. Ein Morphismus $\varphi : Y \to Y'$ heißt ***Morphismus von Vektorraumbündeln***, falls gilt:

(i) φ ist ein Morphismus von Faserbündeln, und

(ii) für alle $x \in X$ ist die Einschränkung $\varphi_x : Y_x \to Y'_x$ ein Vektorraumhomomorphismus (kurz: φ ist faserweise k-linear).

Eine Sequenz von Vektorraumbündel über X

$$\cdots \longrightarrow Y^{\mu-1} \xrightarrow{\varphi^{\mu-1}} Y^{\mu} \xrightarrow{\varphi^{\mu}} Y^{\mu+1} \longrightarrow \cdots$$

heißt ***exakt***, wenn für alle $x \in X$ die Sequenz von Vektorräumen

$$\cdots \longrightarrow Y^{\mu-1}_x \xrightarrow{\varphi^{\mu-1}_x} Y^{\mu}_x \xrightarrow{\varphi^{\mu}_x} Y^{\mu+1}_x \longrightarrow \cdots$$

exakt ist.

2.2.2 Bemerkung: Seien Y und Y' Faserbündel über X und $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ für Y und $\mathcal{W} = \{W_k\}_{k \in K}$ für Y' trivialisierende offene Überdeckungen von X gegeben, dann läßt sich aus $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ eine für Y und Y' gleichermaßen trivialisierende offene Überdeckung $\mathcal{U}$ konstruieren, indem man

$$\mathcal{U} \stackrel{def}{=} \{V_j \cap W_k\}_{(j,k) \in J \times K}$$

setzt. Da V_j und W_k offen sind, ist für alle $(j,k) \in J \times K$

$$U_i \stackrel{def}{=} V_j \cap W_k$$

offen, und es gilt

$$\bigcup_{(j,k) \in J \times K} (V_j \cap W_k) = \underbrace{\Big(\bigcup_{j \in J} V_j\Big)}_{X} \cap \underbrace{\Big(\bigcup_{k \in K} W_k\Big)}_{X} = X\,.$$

$\mathcal{U}$ wird auch als ***gemeinsame Verfeinerung*** der Überdeckungen $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ bezeichnet; d. h. für alle $i \in I$ existiert ein Paar $(j,k) \in J \times K$, so daß $U_i \subset V_j$ und $U_i \subset W_k$ gilt.

Durch Einschränkung der trivialisierenden Isomorphismen $h_j : Y_{V_j} \to V_j \times_k F$ bzw. $h'_k : Y'_{W_k} \to W_k \times_k F'$ auf Y_{U_i} bzw. Y'_{U_i} wird schließlich eine Einschränkung der Übergangsmorphismen $g_{\alpha\beta}$ bzw. $g'_{\alpha\beta}$ auf $U_\alpha \cap U_\beta$ gegeben.

Allgemein können sogar endlich viele Faserbündel über der gleichen Basis so aufgefaßt werden, als seien sie bzgl. einer einzigen Überdeckung gegeben (vgl. hierzu auch 2.1.10).

2.2.3 Folgerung (Lokale Eigenschaften von Faserbündelmorphismen): Seien Y und Y' Faserbündel über X und $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine offene und für Y und Y' gleichermaßen trivialisierende Überdeckung von X, sowie ein Faserbündelmorphismus $\varphi : Y \to Y'$ gegeben. Dann hat man für alle $i \in I$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Y_{U_i} \arrow[rr, "\varphi_{U_i}"] \arrow[dr] \arrow[dd, "h_i"', "\cong"] & & Y'_{U_i} \arrow[dl] \arrow[dd, "h'_i", "\cong"'] \\
& U_i & \\
U_i \times_k F \arrow[rr, "\varphi_i"] \arrow[ur, "pr_1"] & & U_i \times_k F' \arrow[ul, "pr_1"']
\end{tikzcd},$$

d. h. durch die Kartenisomorphismen h_i und h'_i werden lokal Morphismen φ_i mit

$$\varphi_i(x,f) = (x,f')$$

induziert. Setzt man $\psi_i \stackrel{def}{=} pr_2 \circ \varphi_i$, so schreibt sich φ_i als

$$\varphi_i(x,f) = (x, \psi_i(x,f))\,.$$

Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
U_i \times_k F \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "pr_2"] & U_i \times_k F' \arrow[d, "pr_2"] \\
F \arrow[r, dotted] & F'
\end{tikzcd}$$

definiert für alle $x \in U_i$ einen Morphismus

$$\psi_i(x, \cdot) : F \to F' ,$$

denn es ist $pr_2 \circ \varphi_i = \psi_i(x, \cdot) \circ pr_2$, und jede abgeschlossene Immersion $\varepsilon_{(x)} : F \to U_i \times_k F$ liefert einen F-Schnitt (0.3.11, bzw. [EGA I, 2.6.5]; vgl. auch 2.3.5 und 2.3.6), also ist $\psi_i(x, \cdot) = pr_2 \circ \varphi_i \circ \varepsilon_{(x)}$ als Verkettung von Morphismen ein Morphismus.

Über den zweifachen Durchschnitten $U_{ij} = U_i \cap U_j$ erhält man das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
U_{ij} \times_k F \arrow[rrr, "\varphi_j|_{U_{ij} \times_k F}"] \arrow[dd, "id \times_\omega g_{ij}"', "\cong"] & & & U_{ij} \times_k F' \arrow[dd, "id \times_{\omega'} g'_{ij}", "\cong"'] \\
& Y_{U_{ij}} \arrow[ul, "h_j"', "\cong"] \arrow[dl, "h_i", "\cong"'] \arrow[r, "\varphi_{U_{ij}}"] & Y'_{U_{ij}} \arrow[ur, "h'_j", "\cong"'] \arrow[dr, "h'_i"', "\cong"] & \\
U_{ij} \times_k F \arrow[rrr, "\varphi_i|_{U_{ij} \times_k F}"] & & & U_{ij} \times_k F'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(x, f) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (x, \psi_j(x, f)) \arrow[d, mapsto] \\
(x, g_{ij}(x) f) \arrow[r, mapsto] & (x, g'_{ij}(x)\, \psi_j(x, f)) ,
\end{tikzcd}$$

wobei $id \times_\omega g_{ij} \stackrel{def}{=} (pr_1, \omega \circ (g_{ij} \times_k id_F))_k$ mit $g_{ij} : U_{ij} \to G$ und $\omega : G \times_k F \to F$ ($id \times_{\omega'} g_{ij}$ ist in analoger Weise definiert). Somit gilt die Gleichung

$$\psi_i(x, g_{ij}(x) f) \;=\; g'_{ij}(x)\, \psi_j(x, f) \tag{1}$$

für alle $(x, f) \in U_{ij} \times_k F$.

2.2.4 Bemerkung: Bei der konkreten Konstruktion von Faserbündel-Morphismen sind meist Faserbündel $(Y, \pi, X; F, G)$ und $(Y', \pi', X; F', G')$ mit Cozyklen $\{g_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{G})$ und $\{g'_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{G'})$, sowie für alle $i \in I$ Morphismen von Varietäten $\theta_i : F \to F'$ gegeben. (Oft sind die θ_i sowohl von x als auch von i unabhängig, d. h. es gilt $\theta_i = \theta$ für alle i.) Existiert dann für alle $(i, j) \in I^2$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
U_{ij} \times_k F \arrow[r, "id \times_k \theta_j"] \arrow[d, "id \times_\omega g_{ij}"', "\cong"] & U_{ij} \times_k F' \arrow[d, "id \times_{\omega'} g'_{ij}", "\cong"'] \\
U_{ij} \times_k F \arrow[r, "id \times_k \theta_i"] & U_{ij} \times_k F' ,
\end{tikzcd} \tag{D.1}$$

so wird durch die θ_i ein Morphismus von Faserbündeln definiert. Denn für alle $i \in I$ ist durch

$$
\begin{tikzcd}
Y_{U_i} \arrow[r, "\varphi_{U_i}"] \arrow[d, "h_i"', "\cong"] & Y'_{U_i} \arrow[d, "h'_i", "\cong"'] \\
U_i \times_k F \arrow[r, "id \times_k \theta_i"] & U_i \times_k F'
\end{tikzcd}
\tag{D.2}
$$

φ lokal gegeben ($\{Y_{U_i}\}_{i\in I}$ und $\{Y'_{U_i}\}_{i\in I}$ sind offene Überdeckungen von Y bzw. Y'); die Wohldefiniertheit von φ als globaler Morphismus folgt aus der Kommutativität von (D.1).

2.2.5 Definition: Zwei Cozyklen $\{g_{ij}\}$, $\{g'_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{G})$ heißen ***cohomolog***, falls für alle $i \in I$ $\gamma_i \in \underline{G}(U_i)$ existieren, so daß für alle $(i,j) \in I^2$ und $x \in U_{ij}$

$$g'_{ij}(x) \;=\; \gamma_i(x)\, g_{ij}(x)\, \gamma_j(x)^{-1}$$

gilt. Zwei Rang-n-Vektorraumbündel Y und Y' über X heißen ***äquivalent***, falls ihre Cozyklen $\{g_{ij}\}$ und $\{g'_{ij}\}$ aus $Z^1(\mathcal{U}, \underline{\mathrm{GL}_n})$ cohomolog sind.

2.2.6 Bemerkung: Die obigen Definitionen werden durch folgende Überlegungen motiviert: Sei $\varphi : Y \to Y'$ ein Morphismus von Vektorraumbündeln über X. Spezialisiert man in 2.2.3 $F = k^n$ und $F' = k^m$, so erhält man für φ_i über $U_i \subset X$

$$\varphi_i(x,f) \;=\; (x, \psi_i(x)f)\,,$$

wobei $\psi_i(x) \in \mathrm{Hom}_k(k^n, k^m)$. Über U_{ij} schreibt sich Gleichung (1) von 2.2.3 als Verknüpfung von Matrizen

$$\psi_i(x)\, g_{ij}(x) \;=\; g'_{ij}(x)\, \psi_j(x) \quad \text{für} \quad x \in U_{ij}\,. \tag{2}$$

Ist φ ein Isomorphismus, so folgt $m = n$, und aus (2) erhält man

$$g'_{ij}(x) \;=\; \psi_i(x)\, g_{ij}(x)\, \psi_j(x)^{-1} \quad \text{für} \quad x \in U_{ij}\,. \tag{3}$$

Insbesondere definieren die $\psi_i : U_i \to \mathrm{GL}_n$ eine Bijektion von Cozyklen $\{g_{ij}\} \leftrightarrow \{g'_{ij}\}$.

2.2.7 Bemerkung: Eine weitere wichtige Motivation für 2.2.5 erwächst aus der Betrachtung von Prinzipalbündelmorphismen: Seien Y ein G-Prinzipalbündel und Y' ein G'-Prinzipalbündel über X gegeben, wobei G eine abgeschlossene Untergruppe von G' sei. Dann erhält man für einen Morphismus von Prinzipalbündeln $\varphi : Y \to Y'$ nach 2.2.3 und 2.1.18 für alle $i \in I$ ($\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ sei trivialisierende Überdeckung von X) ein kommutatives Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
Y_{U_i} \arrow[r, "\varphi_{U_i}"] \arrow[d, "h_i"', "\cong"] & Y'_{U_i} \arrow[d, "h'_i", "\cong"'] \\
U_i \times_k G \arrow[r, "\varphi_i"] & U_i \times_k G'\,,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
ya \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \varphi(ya) \arrow[d, mapsto] \\
(x, ga) \arrow[r, mapsto] & (x, \psi_i(x, ga))\,,
\end{tikzcd}
$$

wobei $ya \in yG = Y_x$. Für $a = 1$ ist $h'_i(\varphi(y)) = (x, \psi_i(x, g))$, und wiederum nach 2.1.18 erhält man $h'_i(\varphi(y)a) = (x, \psi_i(x, g)a)$, d. h. $\psi_i(x, ga) = \psi_i(x, g)a$ für alle $a \in G$. Also ist $\psi_i : U_i \times_k G \to G'$ ebenfalls G-äquivariant. Setzt man

$$\psi_i(x)\, a \stackrel{def}{=} \psi_i(x, 1)\, a \;=\; \psi_i(x, a) \quad \text{für alle} \quad (x, a) \in U_i \times_k G\,,$$

so erhält man über den zweifachen Durchschnitten U_{ij} aus Gleichung (1) von 2.2.3

$$g'_{ij}(x)\, \psi_j(x)\, a \;=\; \psi_i(x)\, g_{ij}(x)\, a \quad \text{für alle} \quad (x, a) \in U_{ij} \times_k G\,, \tag{2'}$$

woraus schließlich

$$g_{ij}(x) \;=\; \psi_i(x)^{-1}\, g'_{ij}(x)\, \psi_j(x) \quad \text{für alle} \quad x \in U_{ij} \tag{3'}$$

folgt. Damit sind die Cozyklen $\{g_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{G})$ von Y und $\{g'_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{G'})$ von Y' cohomolog.

2.2.8 Satz: *Seien Y und Y' Rang-n-Vektorraumbündel über X. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:*

(i) *Y und Y' sind isomorph über X.*

(ii) *Y und Y' sind äquivalent.*

Beweis: In 2.2.6 wurde gezeigt, daß (ii) aus (i) folgt; zu zeigen bleibt noch die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i): Seien $\{g_{ij}\}$ und $\{g'_{ij}\}$ die Cozyklen von Y, bzw. Y', und es gelte für alle $x \in U_{ij}$

$$g'_{ij}(x) \;=\; \gamma_i(x)\, g_{ij}(x)\, \gamma_j(x)^{-1} \quad \text{mit} \quad \gamma_k \in \underline{\mathrm{GL}_n}(U_k)\,.$$

Man definiert nun für alle $i \in I$

$$\begin{aligned} \varphi_i : U_i \times_k k^n &\longrightarrow U_i \times_k k^n \\ (\,x\,,\,z\,) &\longmapsto (x, \gamma_i(x) z) \end{aligned}$$

und setzt

$$\varphi_{U_i} \stackrel{def}{=} (h'_i)^{-1} \circ \varphi_i \circ h_i\,, \qquad \varphi_{U_i} : Y_{U_i} \longrightarrow Y'_{U_i}\,.$$

φ_{U_i} ist wohldefiniert, d. h. es gilt für alle $(i, j) \in I^2$

$$(h'_j)^{-1} \circ \varphi_j \circ h_j \;=\; (h'_i)^{-1} \circ \varphi_i \circ h_i \quad \text{auf} \quad Y_{U_{ij}}\,,$$

was gleichwertig zu

$$h'_i \circ (h'_j)^{-1} \;=\; \varphi_i \circ h_i \circ h_j^{-1} \circ \varphi_j^{-1} \quad \text{auf} \quad U_{ij} \times_k k^n \quad \text{ist:}$$

Sei also $(x,z) \in U_{ij} \times_k k^n$, dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi_i \circ h_i \circ h_j^{-1} \circ \varphi_j^{-1}(x,z) &= \varphi_i \circ h_i \circ h_j^{-1}(x, \gamma_j(x)^{-1} z) \\ &= \varphi_i(x, g_{ij}(x)\, \gamma_j(x)^{-1} z) \\ &= (x, \gamma_i(x)\, g_{ij}(x)\, \gamma_j(x)^{-1} z) \\ &= (x, g'_{ij}(x)\, z) \;=\; h'_i \circ (h'_j)^{-1}(x,z)\,. \end{aligned}$$

Damit setzen sich die lokal gegebenen Isomorphismen φ_{U_i} zu einem globalen Isomorphismus φ von Vektorraumbündeln über X zusammen.

2.2.9 Korollar: *Es sei* $\varphi : Y \to Y'$ *ein Morphismus von Vektorraumbündeln über* X *gegeben. Dann sind gleichwertig:*

(i) φ *ist ein Isomorphismus von Vektorraumbündeln.*

(ii) *Für alle* $x \in X$ *ist* $\varphi_x : Y_x \to Y'_x$ *ein Vektorraumisomorphismus.*

Beweis: Die Folgerung (i) $\Rightarrow$ (ii) ergibt sich direkt aus 2.2.1. Zum Beweis von (ii) $\Rightarrow$ (i): Nach 2.2.6 schreibt sich φ lokal als

$$\varphi_i(x,z) \;=\; (x, \psi_i(x)\, z) \quad \text{für alle} \quad x \in U_i\,,$$

wobei $\psi_i(x) \in \mathrm{Hom}(k^n, k^m)$. Gemäß Voraussetzung ist $n = m$ und $\psi_i(x) \in \mathrm{GL}_n$ für alle $x \in U_i$. Sind nun $\{g_{ij}\}$ und $\{g'_{ij}\}$ die Cozyklen von Y bzw. Y', so gilt wiederum nach 2.2.6 für alle $(i.j) \in I^2$

$$g'_{ij}(x) \;=\; \psi_i(x)\, g_{ij}(x)\, \psi_j(x)^{-1} \quad \text{mit} \quad x \in U_{ij}\,,$$

woraus nach 2.2.8 schließlich (i) folgt.

2.2.10 Bemerkung: Die Menge der Isomorphieklassen von Rang-n-Vektorraumbündeln über X kann als „Cohomologiemenge" $H^1(\mathcal{U}, \underline{\mathrm{GL}_n})$ definiert werden. $H^1(\mathcal{U}, \underline{\mathrm{GL}_n})$ ist i. a. *keine* Gruppe (vgl. 2.1.4), besitzt aber ein sogenanntes „ausgezeichnetes Element", das der Isomorphieklasse des trivialen Rang-n-Bündels entspricht. Durch Übergang zum direkten Limes von Überdeckungen kann man $H^1(X, \underline{\mathrm{GL}_n})$ bilden (vgl. [Hir, 3.1] oder [For, 12.5]). Andererseits läßt sich zeigen, daß für jede trivialisierende Überdeckung $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ von X (das ist gleichbedeutend mit $H^1(V_j, \underline{\mathrm{GL}_n}) = 1$ für alle $j \in J$) eine Bijektion

$$H^1(\mathcal{V}, \underline{\mathrm{GL}_n}) \longleftrightarrow H^1(X, \underline{\mathrm{GL}_n})$$

gegeben ist ([For, 12.8]; der dort angegebene Beweis läßt sich wörtlich auf Garben nichtabelscher Gruppen übertragen), woraus eine überdeckungsfreie Definition der Isomorphieklassen von Vektorraumbündeln resultiert.

Im Falle von *Geradenbündeln* (mit $\mathcal{O}_X^* = \underline{\mathrm{GL}_1}$) sind $H^1(\mathcal{V}, \mathcal{O}_X^*)$ bzw. $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ wegen der Kommutativität von $k^* = \mathrm{GL}_1$ sogar Cohomologie*gruppen* (vgl. hierzu 2.1.4, sowie 2.4.13).

2.2.11 Bemerkung: Ist für eine Varietät F die Automorphismengruppe eine algebraische Gruppe im Sinne von 1.1.1 und läßt sich Gleichung (1) in 2.2.3 in ähnlicher Weise wie in 2.2.6 (2) auflösen (Beispielsweise für $F = \mathbb{P}_n$ gilt $\mathcal{A}ut(\mathbb{P}_n) = \mathrm{PGL}_n = \mathrm{GL}_{n+1}/Z_{n+1}$, vgl. [Har, II 7.1.1]), so kann man - analog zu den obigen Betrachtungen - die Menge aller Isomorphieklassen von F-Faserbündeln über X als $H^1(X, \underline{\mathcal{A}ut(F)})$ definieren, da sich 2.2.8 wörtlich überträgt:

> *Zwei F-Faserbündel sind genau dann isomorph über X, wenn ihre Cozyklen cohomolog sind.*

2.3 Unterbündel und Schnitte

2.3.1 Definition: Sei $(Y, \pi, X; F)$ eine Faserung (2.1.5) und Y' eine Untervarietät (bzw. offene, bzw. abgeschlossene Untervarietät) von Y. Existiert eine Untervarietät (bzw. offene, bzw. abgeschlossene Untervarietät) F' von F, so daß $(Y', \pi|_{Y'}, X; F')$ eine Faserung mit typischer Faser F' ist, so wird Y' als ***Unterfaserung*** (bzw. ***offene***, bzw. ***abgeschlossene Unterfaserung***) von Y bezeichnet.

Sei $(Y, \pi, X; F, G)$ ein Faserbündel (2.1.9) und Y' eine Unterfaserung (bzw. offene, bzw. abgeschlossene Unterfaserung) von Y. Besitzt $(Y', \pi|_{Y'}, X; F')$ die Struktur eines Faserbündels (mit typischer Faser F' und Strukturgruppe G', vgl. 2.1.9), so heißt Y' ***Unterbündel*** (bzw. ***offenes***, bzw. ***abgeschlossenes Unterbündel***) von Y.

Sei Y ein Rang-n-Vektorraumbündel über X (2.1.20) und Y' eine Unterfaserung von Y. Besitzt Y' die Struktur eines Rang-k-Vektorraumbündels (mit $k \leq n$) und ist die Inklusion $Y' \hookrightarrow Y$ ein Morphismus von Vektorraumbündeln (2.2.1), dann heißt Y' ***Unterverktorraumbündel*** von Y.

2.3.2 Satz: *Es seien $(Y, \pi, X; F, G)$ ein Faserbündel und F' eine G-invariante (1.2.4) Untervarietät (bzw. offene, bzw. abgeschlossene Untervarietät) von F gegeben. Nach 1.2.13 existiert dann ein abgeschlossener Normalteiler N von G, so daß $G' \overset{def}{=} G/N$ effektiv auf F' operiert. Seien $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X und*

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U_i) \arrow[rr, "h_i", "\cong"'] \arrow[dr, "\pi|_{\dots}"'] & & U_i \times_k F \arrow[dl, "pr_1"] \\
& U_i &
\end{tikzcd}$$

die zugehörigen lokalen Trivialisierungen von Y. Setzt man

$$\begin{aligned}
(h_i')^{-1} &\overset{def}{=} h_i^{-1}|_{U_i \times_k F'} \\
Y' &\overset{def}{=} \bigcup_{i \in I} h_i^{-1}(U_i \times_k F') \\
\pi' &\overset{def}{=} \pi|_{Y'},
\end{aligned}$$

so wird $(Y', \pi', X; F', G')$ zu einem Faserbündel, d. h. Y' ist dann ein Unterbündel (bzw. offenes, bzw. abgeschlossenes Unterbündel) von Y'. Ist $\{g_{ij}\}_{(i,j)\in I^2}$ der Cozyklus von Y, so definiert der kanonische Morphismus von algebraischen Gruppen $\varkappa : G \to G/N$ vermöge der Diagramme

$$\begin{tikzcd} U_{ij} \arrow[r, "g_{ij}"] \arrow[dr, "g'_{ij}"'] & G \arrow[d, two heads, "\varkappa"] \\ & G/N \end{tikzcd}$$

den Cozyklus $\{g'_{ij}\}_{(i,j)\in I^2}$ von Y'.

Zum Beweis des Satzes wird folgendes Lemma benötigt:

2.3.2.1 Lemma: *Seien Z_1 und Z_2 Varietäten und W eine Untervarietät (bzw. offene, bzw. abgeschlossene Untervarietät) von Z_2, dann ist auch $Z_1 \times_k W$ eine Untervarietät (bzw. offene, bzw. abgeschlossene Untervarietät) von $Z_1 \times_k Z_2$.*

Beweis: (i) Ist W eine offene Untervarietät von Z_2, so folgt die Behauptung wie im Beweis (1) von 2.1.13.

(ii) Sei $z \in Z_1$ ein Punkt und bezeichnen $\varepsilon_z : \{z\} \hookrightarrow Z_1$ und $\varepsilon : W \hookrightarrow Z_2$ die kanonischen abgeschlossenen Immersionen. Dann folgt wegen [EGA I, 4.3.6(iii)], daß auch

$$\varepsilon_z \times_k \varepsilon : \{z\} \times_k W \longrightarrow Z_1 \times_k Z_2$$

eine abgeschlossene Immersion ist.

(iii) Da die kanonische abgeschlossene Immersion $\varepsilon_z : \{z\} \hookrightarrow Z_1$ insbesondere eine Immersion ist, folgt ebenfalls wegen [EGA I, 4.3.6 (iii)] die Behauptung wie im Fall (ii).

2.3.2.2 Beweis (von 2.3.2 Satz): Zu zeigen ist: (i) Y' ist eine Untervarietät (bzw. offene, bzw. abgeschlossene Untervarietät) von Y, und (ii) $(Y', \pi', X; F')$ ist ein Faserbündel mit Strukturgruppe G'.

(i) Sei zunächst F' eine Untervarietät (bzw. offene Untervarietät) von F, dann ist nach 2.3.2.1 für alle $i \in I$ $U_i \times_k F'$ eine Untervarietät (bzw. offene Untervarietät) von $U_i \times_k F$, und somit wird auch $h_i^{-1}(U_i \times_k F') = (\pi')^{-1}(U_i)$ zu einer Untervarietät (bzw. offenen Untervarietät) von $\pi^{-1}(U_i)$. Bezeichnet für alle $i \in I$ $\varepsilon_i : (\pi')^{-1}(U_i) \hookrightarrow \pi^{-1}(U_i)$ die kanonische (offene) Immersion, dann wird hierdurch ein Morphismus von Varietäten $\varepsilon : Y' \to Y$ über X gegeben. $\{\pi^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ ist eine Überdeckung von $\varepsilon(Y')$, wobei die $\pi^{-1}(U_i)$ offene Untervarietäten von Y sind. Nach 0.2.6(i) folgt nun, daß auch ε eine Immersion (bzw. offene) Immersion ist.

Sei jetzt F' eine abgeschlossene Untervarietät von F, dann ist wiederum nach obigem Lemma für alle $i \in I$ $U_i \times_k F'$ eine abgeschlossene Untervarietät von $U_i \times_k F$, und somit wird auch $h_i^{-1}(U_i \times_k F') = (\pi')^{-1}(U_i)$ zu einer abgeschlossenen Untervarietät von $\pi^{-1}(U_i)$. Bezeichnet wieder für alle $i \in I$ $\varepsilon_i : (\pi')^{-1}(U_i) \hookrightarrow \pi^{-1}(U_i)$ die kanonische abgeschlossene Immersion, die einen Morphismus von Varietäten $\varepsilon : Y' \to Y$ über X definiert. $\{\pi^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ ist offene Überdeckung von Y, und durch Anwendung von 0.2.6(ii) erhält man schließlich ε als abgeschlossene Immersion.

(ii) Nach Konstruktion ist jetzt $(Y', \pi', X; F')$ eine lokal-triviale Faserung. Über den zweifachen Durchschnitten U_{ij} gilt für $f' \in F' \subset F$

$$h_i \circ h_j^{-1}(x, f') = (x, g_{ij}(x)\, f') = h'_i \circ (h'_j)^{-1}(x, f').$$

$g_{ij}(x)$ ist jedoch nicht notwendigerweise durch h'_i und h'_j eindeutig festgelegt (vgl. 2.1.7, 2.1.8). Wird allerdings anstatt $g_{ij}(x)$ die entsprechende Nebenklasse $g'_{ij}(x) \overset{def}{=} \varkappa(g_{ij}(x))$ gesetzt, so ist diese, da G' effektiv auf F' operiert, eindeutig durch h'_i und h'_j festgelegt, womit ein Cozyklus $\{g'_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{G'})$ definiert wird.

2.3.3 Definition: Sei $\varphi : (Y', \pi', X; F', G') \to (Y, \pi, X; F, G)$ ein Morphismus von Faserbündeln. Ist $\varphi : Y' \to Y$ eine Immersion (bzw. offene, bzw. abgeschlossene Immersion) von Varietäten über X, so heißt φ ***Immersion*** (bzw. ***offene***, bzw. ***abgeschlossene Immersion***) ***von Faserbündeln***.

2.3.4 Korollar: *Sei $\varphi : (Y', \pi', X; F', G') \to (Y, \pi, X; F, G)$ ein Morphismus von Faserbündeln und $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ eine für Y' und Y gleichermaßen trivialisierende Überdeckung von X. Induziert φ für alle $i \in I$ eine Immersion (bzw. offene, bzw. abgeschlossene Immersion) $\theta_i : F' \to F$, wobei $\theta_i = \psi_i(x, \cdot)$ für alle $x \in U_i$ (vgl. 2.2.3), dann ist φ eine Immersion (bzw. offene, bzw. abgeschlossene Immersion) von Faserbündeln.*

Beweis: Für alle $i \in I$ ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y'_{U_i} \arrow[r, "\varphi_{U_i}"] \arrow[d, "h'_i"', "\cong"] & Y_{U_i} \arrow[d, "\cong"', "h_i"] \\ U_i \times_k F' \arrow[r, "id \times_k \theta_i"] & U_i \times_k F \end{tikzcd}$$

gegeben. Nach [EGA I, 4.3.6 (iii)] ist $id \times_k \theta_i$ und somit auch φ_{U_i} eine Immersion (bzw. offene, bzw. abgeschlossene Immersion). Die Behauptung folgt jetzt wie im Beweis von 2.3.2 .

2.3.5 Definition: Seien $(Y, \pi, X; F, G)$ ein Faserbündel und ein Morphismus $\sigma : X \to Y$ mit $\pi \circ \sigma = id_X$ gegeben, dann wird σ als ***globaler Schnitt*** von Y bezeichnet.

Ist U eine offene Untervarietät von X und $\sigma : U \to Y$ ein Morphismus mit $\pi \circ \sigma = id_U$, so heißt σ ***lokaler Schnitt*** über U.

2.3.6 Folgerung: *Sei Y ein Faserbündel über X, sowie eine trivialisierender Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ von X gegeben. Dann existieren für alle $i \in I$ lokale Schnitte σ_i über U_i. Existiert ein triviales Unterbündel $Y' \hookrightarrow Y$, dann besitzt Y einen globalen Schnitt.*

Beweis: Für alle $i \in I$ hat man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y_{U_i} \arrow[rr, "h_i", "\cong"'] \arrow[dr, "\pi|_{\dots}"'] & & U_i \times_k F \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U_i\,, & \end{tikzcd}$$

also induziert jede Immersion $U_i \hookrightarrow U_i \times_k F$ vermöge h_i^{-1} einen lokalen Schnitt über U_i. Für ein triviales Unterbündel $Y' \hookrightarrow Y$ betrachtet man das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[rr, "h'", "\cong"'] \arrow[dr, "\pi'"'] & & X \times_k F' \arrow[dl, "pr_1"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

und schließt wie zuvor. Da jeder (globale) Schnitt von Y' auch ein (globaler) Schnitt von Y ist, folgt die Behauptung.

2.3.7 Folgerung: *Sei Y ein Faserbündel über X und $\sigma : X \to Y$ ein globaler Schnitt. Dann ist σ eine Immersion. Insbesondere definiert das Bild von σ ein Unterbündel von Y, dessen typische Faser gleich* $\mathrm{Spm}(k)$ *ist.*

Beweis: Nach 0.3.10 und 0.3.11 ist σ eine Immersion. Setzt man in 2.3.6 $(Y', \pi', X; F', G')$ $= (X \times_k \mathrm{Spm}(k), pr_1, X; \mathrm{Spm}(k), 1)$, so wird durch

$$\begin{tikzcd} X \times_k \mathrm{Spm}(k) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "pr_1"', "\cong"] & & Y \arrow[dl, "\pi"'] \\ & X \arrow[ur, bend right, "\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

eine Immersion φ von Faserbündeln definiert.

2.3.8 Bemerkung: Nimmt man im obigen Beweis φ statt σ als gegeben an, dann wird vermöge des Isomorphismus pr_1 ein globaler Schnitt definiert. Allgemein gilt also:

> *Ein Faserbündel besitzt genau dann einen globalen Schnitt, wenn es ein triviales* $\mathrm{Spm}(k)$*-Unterbündel besitzt.*

2.3.9 Definition & Satz: Sei Y ein Rang-n-Vektorraumbündel über X, dann existiert stets ein globaler Schnitt $\sigma_0 : X \to Y$, wobei $\sigma_0(x) = 0_x \in Y_x$ für alle $x \in X$. σ_0 wird als ***Nullschnitt*** von Y bezeichnet; das Bild von σ_0 ist eine abgeschlossene Untervarietät von Y und heißt ***Nullschnittvarietät***.

Beweis: Sei $0 \in k^n$ der Nullvektor der typischen Faser, aufgefaßt als abgeschlossene Untervarietät des k^n, dann operiert die Strukturgruppe GL_n offenbar trivial auf 0. Nach 2.3.2 operiert dann $\mathrm{GL}_n \,/\, \mathrm{GL}_n = 1$ effektiv auf 0, d. h. es wird ein abgeschlossenes, triviales $\mathrm{Spm}(k)$-Unterbündel von Y gegeben, das nach 2.3.8 σ_0 definiert.

2.3.10 Folgerung: *Sei Y ein Rang-n-Vektorraumbündel über X und U eine offene Untervarietät von X. Bezeichnet $\mathcal{Y}_X(U)$ die Menge aller lokalen Schnitte von Y über U, dann ist $\mathcal{Y}_X(U)$ ein $\mathcal{O}_X(U)$-Modul und damit insbesondere ein k-Vektorraum.*

Beweis: Seien σ und $\sigma' \in \mathcal{Y}_X(U)$, sowie $\xi \in \mathcal{O}_X(U)$ gegeben, dann setzt man für alle $x \in U$:

$$\begin{aligned} (\sigma + \sigma')(x) &\overset{def}{=} \sigma(x) + \sigma'(x) \in Y_x\,, \\ (\xi\,\sigma)(x) &\overset{def}{=} \xi(x)\,\sigma(x) \in Y_x\,. \end{aligned}$$

Da die Fasern Y_x k-Vektorräume sind, werden Addition und skalare Multiplikation zu Morphismen. Somit sind auch $\sigma + \sigma'$ und $\xi\,\sigma$ Morphismen von U nach Y. Sofort aus der Definition folgt $\pi \circ (\sigma + \sigma') = id_U$ und $\pi \circ (\xi\,\sigma) = id_U$. Das Nullelement von $\mathcal{Y}_X(U)$ ist gegeben durch $\sigma_0|_U$, wobei der Nullschnitt nach 2.3.9 stets global existiert. Die Modulaxiome werden schließlich durch die Gültigkeit der Vektorraumaxiome auf den Fasern von Y auf $\mathcal{Y}_X(U)$ vererbt.

2.3.11 Definition & Satz: Sei Y ein Rang-n-Vektorraumbündel über X, U eine offene Untervarietät von X und σ ein Schnitt über U. Weiter sei $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine für Y trivialisierende Überdeckung von X und $J \overset{def}{=} \{i \in I \,|\, U_i \cap U \neq \emptyset\}$. Dann wird für alle $i \in J$ durch

$$\begin{tikzcd} Y_{(U_i \cap U)} \arrow[rr, "h_i", "\cong"'] & & (U_i \cap U) \times_k k^n & & y \arrow[rr, mapsto] & & (x, f) \\ & U_i \cap U \arrow[ul, "\sigma|_{(U_i \cap U)}"] \arrow[ur, "(id\,,\,s_i)_k"'] & & & & x \arrow[ul, mapsto] \arrow[ur, mapsto] & \end{tikzcd}$$

ein Morphismus $s_i : U_i \cap U \to k^n$ definiert. s_i kann als n-Tupel von regulären Funktionen aus $\mathcal{O}_X(U_i \cap U)$ aufgefaßt werden und heißt ***Darstellung des Schnittes σ bzgl. der Karte h_i***. $\{s_i\}_{i \in J}$ wird als ***Familie der Darstellung von σ bzgl. $\mathcal{U}$*** bezeichnet.

Ist $\{g_{ij}\}_{(i,j) \in I^2} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{\mathrm{GL}_n})$ der Cozyklus von Y, so gilt nach Konstruktion

$$s_i(x) = g_{ij}(x)\, s_j(x) \quad \text{für alle } x \in U_i \cap U \text{ mit } (i,j) \in J^2\,. \qquad (\#)$$

Ist umgekehrt eine Familie von Morphismen $\{t_i\}_{i \in J}$ gegeben mit $t_i : U_i \cap U \to k^n$, wobei die t_i der Bedingung (#) genügen, so setzt man

$$\tau(x) \overset{def}{=} h_i^{-1}(x, t_i(x)) \quad \text{für alle } x \in U_i \cap U \text{ und } i \in J\,.$$

Über den Durchschnitten $U_{ij} \cap U$ gilt nun

$$\begin{aligned}\tau(x) &= h_i^{-1}(x, t_i(x)) = h_i^{-1}(x, g_{ij}\, t_j(x)) \\ &= h_i^{-1} \circ h_i \circ h_j^{-1}(x, t_j(x)) = h_j^{-1}(x, t_j(x)),\end{aligned}$$

weshalb τ als Schnitt über U wohldefiniert ist.

2.3.12 Definition & Satz: Sei Y ein Rang-n-Vektorraumbündel über X. Für jede Inklusion offener Teilmengen $V \subset U$ von X ist die durch

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, mapsto] & \mathcal{Y}_X(U) \arrow[d, "\varrho_V^U"] \\ V \arrow[u, hook] \arrow[r, mapsto] & \mathcal{Y}_X(V) \end{tikzcd}$$

gegebene Prägarbe $\mathcal{Y}_X$ eine lokal-freie Garbe vom Rang n über $\mathcal{O}_X$ und wird als die zu Y ***assoziierte Garbe*** bezeichnet (ebenso gebräuchlich ist die Bezeichnung ***Schnittgarbe*** von Y).

Beweis: Nach 2.3.10 ist, für U offen in X, $\mathcal{Y}_X(U)$ ein $\mathcal{O}_X(U)$-Modul. Ist $V \subset U$ eine Inklusion offener Teilmengen von X, so bekommt man aufgrund der faserweisen Definition von $\xi\,\sigma$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{Y}_X(U) \arrow[r] \arrow[d, "r_V^U \times \varrho_V^U"'] & \mathcal{Y}_X(U) \arrow[d, "\varrho_V^U"] \\ \mathcal{O}_X(V) \times \mathcal{Y}_X(V) \arrow[r] & \mathcal{Y}_X(V), \end{tikzcd}$$

d. h. $\mathcal{Y}_X$ ist eine Garbe von $\mathcal{O}_X$-Moduln.

Ist nun $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine für Y trivialisierende Überdeckung von X, so erhält man für alle $i \in I$ und alle V offen in U_i vermöge

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_X(V) &\longrightarrow \mathcal{O}_X(V)^n \\ \sigma &\longmapsto h_i|_V \circ \sigma \end{aligned}$$

nach dem Diagramm von 2.3.11 einen Isomorphismus, der jedem Schnitt seine Darstellung bzgl. der Karte h_i zuweist. Also wird für alle $i \in I$ $\mathcal{Y}_X|_{U_i}$ zu einem freien Rang-n-$\mathcal{O}_X$-Modul, womit die Behauptung folgt.

2.3.13 Bemerkung: Zwischen den Fasern Y_x eines Rang-n-Vektorraumbündels Y und den Halmen $\mathcal{Y}_x$ der assoziierten Garbe $\mathcal{Y}_X$ besteht folgender Zusammenhang: wegen 2.3.12 erhält man für alle $x \in X$ Isomorphismen von $\mathcal{O}_x$-Moduln

$$\mathcal{O}_x^n \xrightarrow{\cong} \mathcal{Y}_x\,.$$

Bezeichnet $\mathfrak{m}_x$ das maximale Ideal des lokalen Rings $\mathcal{O}_x$, so folgt wegen $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x \cong k$

$$Y_x \cong k^n \cong \mathcal{O}_x^n/\mathfrak{m}_x\mathcal{O}_x^n \quad \text{und somit}$$

$$Y_x \cong \mathcal{Y}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{Y}_x .$$

2.3.14 Satz: *Isomorphieklassen von Rang-n-Vektorraumbündeln über X und Isomorphieklassen lokal-freier Garben vom Rang n über $\mathcal{O}_X$ entsprechen sich ein-eindeutig.*

Beweis: (i) Sei $\mathcal{F}$ eine lokal-freie Garbe vom Rang n über $\mathcal{O}_X$, dann existiert eine offene Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ von X, so daß für alle offenen Untervarietäten $V_j \subset U_j$ mit den Restriktionen verträgliche Isomorphismen

$$\begin{aligned} \psi_{V_j} : \mathcal{F}(V_j) &\xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_X(V_j)^n \quad \text{vermöge} \\ \gamma &\longmapsto (\varphi : V_j \ni x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \in k^n) \end{aligned}$$

gegeben sind. Über den zweifachen Durchschnitten V_{ij} gilt nun

$$\psi_{V_i} \circ \psi_{V_j}^{-1}|_{V_{ij}} : \mathcal{O}_X(V_{ij})^n \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_X(V_{ij})^n \quad \text{mit}$$

$$\begin{aligned} &(\varphi : V_{ij} \ni x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \in k^n) \longmapsto \\ &\qquad (\psi_{V_i} \circ \psi_{V_j}^{-1}(\varphi) : V_{ij} \ni x \mapsto g_{ij}(x)(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \in k^n) , \end{aligned}$$

wobei die Modulisomorphismen $\theta_{V_{ij}} \stackrel{def}{=} \psi_{V_i} \circ \psi_{V_j}^{-1}$ für alle $x \in V_{ij}$ Vektorraumisomorphismen $g_{ij}(x)$ induzieren. Faßt man $\mathcal{F}$ als Verklebung der freien Garben $(\mathcal{O}_X|_{U_i})^n$ auf, dann ist die Verklebungsbedingung („condition de recollement“, vgl. [EGA I, 0 3.3.1]) nichts anderes als die Cozyklusbedingung für die $\theta_{V_{ij}}$. Aufgrund der Restriktionsverträglichkeit definieren $\theta_{V_{ij}}$ und $\theta_{U_{ij}}$ für $x \in V_{ij} \subset U_{ij}$ denselben Vektorraumisomorphismus $g_{ij}(x)$. Also wird durch die $\theta_{U_{ij}}$ in eindeutiger Weise ein Cozyklus $\{g_{ij}\}_{(i,j)\in I^2} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{\mathrm{GL}_n})$ gegeben, welcher nach 2.1.21 ein Vektorraumbündel definiert.

(ii) Umgekehrt ist - gemäß der in 2.3.10 bis 2.3.12 ausgeführten Konstruktion - die zu einem Vektorraumbündel Y assoziierte Garbe $\mathcal{Y}_X$ eindeutig durch Y bestimmt, und das durch den Cozyklus von $\mathcal{Y}_X$ festgelegte Vektorraumbündel Y' ist zu Y isomorph (vgl. 2.1.15).

2.4 Konstruktion von Faserbündeln aus bereits gegebenen Faserbündeln

2.4.1 Definition & Satz: Es seien $(Y, \pi, X; F, G)$ ein Faserbündel mit zugehörigem Cozyklus $\{g_{ij}\}_{(i,j)\in I^2} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{G})$ und $\varphi : Z \to X$ ein Morphismus von Varietäten gegeben. Setzt man

$$\varphi^* Y \stackrel{def}{=} Z \times_X Y$$

mit der kanonischen Projektion $p_1 : Z \times_X Y \to Z$, dann wird $(\varphi^* Y, p_1, Z; F, G)$ ein Faserbündel über Z mit Cozyklus $\{g_{ij} \circ \varphi\}_{(i,j) \in I^2} \in Z^1(\varphi^{-1}(\mathcal{U}), \varphi^{-1}\underline{G})$, wobei $\varphi^{-1}\underline{G}$ die Urbildgarbe von $\underline{G}$ bzgl. φ bezeichnet ($\varphi^{-1}(\mathcal{U}) \overset{def}{=} \{\varphi^{-1}(U)\}_{i \in I}$). $\varphi^* Y$ heißt ***durch φ aus Y induziertes Faserbündel*** oder auch ***Liftung von Y nach φ***.

Beweis: Ist $\mathcal{U}$ eine für Y trivialisierende Überdeckung von X, dann wird $\varphi^{-1}(\mathcal{U})$ zu einer offenen Überdeckung von Z. A priori sind Urbilder von Varietäten nicht notwendigerweise Varietäten, da Faserprodukte von Varietäten i. a. *nicht* reduziert sind (vgl. 0.5.4 und 0.3.8). $\varphi^{-1}(U_i)$ ist jedoch für alle $i \in I$ ein offenes Unter-Ultraschema von Z, d. h. die lokalen Ringe von $\varphi^{-1}(U_i)$ stimmen mit den Halmen der eingeschränkten Strukturgarbe $\mathcal{O}_Z|_{\varphi^{-1}(U_i)}$ überein; also ist $\varphi^{-1}(U_i)$ eine offene Untervarietät von Z. Man definiert nun für alle $i \in I$

$$\begin{tikzcd} p_1^{-1}(\varphi^{-1}(U_i)) \arrow[rr, "h_i^*"] \arrow[dr, "p_1|_{\dots}"'] & & \varphi^{-1}(U_i) \times_k F \arrow[dl, "pr_1"] \\ & \varphi^{-1}(U_i) & \end{tikzcd}$$

durch $(h_i^*)^{-1}(z, f) \overset{def}{=} (z, h_i^{-1}(\varphi(z), f))$ zunächst als stetige Abbildung. $(h_i^*)^{-1}$ faktorisiert sich wie folgt:

$$\begin{array}{ccccc} \varphi^{-1}(U_i) \times_k F & \xrightarrow{\Gamma_{\varphi|_{\dots}} \times_k id_F} & \varphi^{-1}(U_i) \times_k U_i \times_k F & \xrightarrow{(id_{\varphi^{-1}(U_i)} \times_k h_i^{-1})|_W} & p_1^{-1}(\varphi^{-1}(U_i)) \\ (z, f) & \longmapsto & (z, \varphi(z), f) & \longmapsto & (z, y)\,, \end{array}$$

wobei wegen 0.3.5 $p_1^{-1}(\varphi^{-1}(U_i)) \hookrightarrow \varphi^{-1}(U_i) \times_k \pi^{-1}(U_i)$ gilt. Nach 0.3.10 ist Γ_φ eine Immersion, d. h. ein Isomorphismus auf eine Untervarietät W von $\varphi^{-1}(U_i) \times_k U_i \times_k F$. Mit

$$(id_{\varphi^{-1}(U_i)} \times_k h_i^{-1}) : \varphi^{-1}(U_i) \times_k U_i \times_k F \xrightarrow{\cong} \varphi^{-1}(U_i) \times_k \pi^{-1}(U_i)$$

ist ein Isomorphismus gegeben, dessen Einschränkung auf W nach Konstruktion einen Isomorphismus auf $p_1^{-1}(\varphi^{-1}(U_i))$ liefert (wegen 0.3.6 sind die Punkte von $Z \times_X Y$ genau die $(z, y) \in Z \times_k Y$ mit $\varphi(z) = \pi(y)$). Insgesamt wird also auch

$$(h_i^*)^{-1} \overset{def}{=} (id_{\varphi^{-1}(U_i)} \times_k h_i^{-1})|_W \circ (\Gamma_{\varphi|_{\dots}} \times_k id_F)$$

zu einem Isomorphismus. Aus der Reduziertheit von $\varphi^{-1}(U_i)$ und F folgt wegen 0.5.3, daß $\varphi^{-1}(U_i) \times_k F$ und somit auch $p_1^{-1}(\varphi^{-1}(U_i))$ reduziert ist. Da $\{p_1^{-1}(\varphi^{-1}(U_i))\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $\varphi^* Y = Z \times_X Y$ ist, erhält man schließlich die Reduziertheit von $\varphi^* Y$ (vgl. 0.5.2).

Über den zweifachen Durchschnitten $\varphi^{-1}(U_{ij}) = \varphi^{-1}(U_i) \cap \varphi^{-1}(U_j)$ sind für alle

$(i,j) \in I^2$ kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd}
\varphi^{-1}(U_{ij}) \times_k U_{ij} \times_k F \arrow[rr, "id_{\varphi^{-1}(U_{ij})} \times_k (h_i \circ h_j^{-1})", "\cong"'] & & \varphi^{-1}(U_{ij}) \times_k U_{ij} \times_k F \arrow[d, "(pr_1, pr_3)_k"] \\
\varphi^{-1}(U_{ij}) \times_k F \arrow[u, "\Gamma_{\varphi|\ldots} \times_k id_F"] \arrow[rr, "\cong", "h_i^* \circ (h_j^*)^{-1}"'] & & \varphi^{-1}(U_{ij}) \times_k F
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(z, \varphi(z), f) \arrow[rr, mapsto] & & (z, \varphi(z), g_{ij}(\varphi(z))f) \arrow[d, mapsto] \\
(z, f) \arrow[u, mapsto] \arrow[rr, mapsto] & & (z, g_{ij}(\varphi(z))f)
\end{tikzcd}$$

gegeben, womit der Cozyklus von φ^*Y als $\{g_{ij} \circ \varphi\}_{(i,j)\in I^2} \in Z^1(\varphi^{-1}(\mathcal{U})\varphi^{-1}\underline{G})$ definiert wird.

2.4.2 Folgerung: *Seien Y und Y' Faserbündel über X und $\varphi : Z \to X$ ein Morphismus von Varietäten. Sind Y und Y' assoziiert (bzw. stark assoziiert, bzw. isomorph), so gilt dies jeweils auch für φ^*Y und φ^*Y'.*

Beweis: Seien $\{g_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{G})$ und $\{g'_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{G'})$ die Cozyklen von Y und Y', und Y sei zu Y' assoziiert, so existiert nach 2.1.14 ein abgeschlossener Normalteiler $N \subset G$, so daß $G' = G/N$ (1.2.9) und $g'_{ij} = [g_{ij}]$ gilt. Nach 2.4.1 ist dann φ^*Y durch $\{g_{ij} \circ \varphi\}$ und φ^*Y' durch $\{[g_{ij}] \circ \varphi\}$ gegeben. Für alle $(i,j) \in I^2$ besteht somit ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
U_{ij} \arrow[dr, "g_{ij}"] \arrow[ddr, "{[g_{ij}]}"'] & & \varphi^{-1}(U_{ij}) \arrow[ll, "\varphi|_{\varphi^{-1}(U_{ij})}"'] \arrow[dl, "g_{ij} \circ \varphi"'] \arrow[ddl, "{[g_{ij}] \circ \varphi}"] \\
& G \arrow[d, "\varkappa"] & \\
& G/N\,, &
\end{tikzcd}$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt (im stark assoziierten Fall setze man $\varkappa = id_G$).

Ist ein Isomorphismus $\theta : Y \to Y'$ über X gegeben, dann folgt die Isomorphie von $id \times_X \theta : Z \times_X Y \to Z \times_X Y'$ aus [EGA I, 5.1.7(ii)].

2.4.3 Definition: Seien $(Y, \pi, X; F, G)$ und $(Y', \pi', X; F', G')$ Faserbündel über X mit Cozyklen $\{g_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{G})$ und $\{g'_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{G'})$ (die trivialisierenden Überdeckungen von Y und Y' können Œ als gleich angenommen werden, vgl. 2.2.2). Da G auf F und

G' auf F' effektiv operieren, ist auch die Operation von $G \times_k G'$ auf $F \times_k F'$ effektiv. Definiert man für alle $(i,j) \in I^2$ Morphismen

$$(g_{ij}, g'_{ij})_k : U_{ij} \longrightarrow G \times_k G' ,$$

so bilden diese offenbar einen Cozyklus $\{(g_{ij}, g'_{ij})_k\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{G \times_k G'})$, der nach 2.1.13 (bzw. 2.1.21) ein Faserbündel $Y \times Y'$ über X mit typischer Faser $F \times_k F'$ und Strukturgruppe $G \times_k G'$ definiert. $Y \times Y'$ wird als ***Produkt von Y und Y'*** bezeichnet.

Alternativ zu dieser lokalen Definition erhält man $Y \times Y'$ als globales Faserprodukt $Y \times_X Y'$

$$\begin{tikzcd}
Y \times_X Y' \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr] & Y' \arrow[d, "\pi'"] \\
Y \arrow[r, "\pi"] & X
\end{tikzcd}$$

mit Projektion $\pi \circ p_1 = \pi' \circ p_2$.

Im Falle von Vektorraumbündeln Y, Y' wird das Produkt von Y und Y' als ***direkte Summe von Y und Y'*** bezeichnet und $Y \oplus Y'$ notiert. $Y \oplus Y'$ ist dann ebenfalls ein Vektorraumbündel über X.

2.4.4 Folgerung: *Es sei für ein Produkt von Faserbündeln $Y \times Y'$ ein globaler Schnitt σ gegeben (das ist z. B. bei Vektorraumbündeln Y, Y' der Fall). Dann ist jeder der Faktoren ein abgeschlossenes Unterbündel von $Y \times Y'$.*

Beweis: Seien $\{(g_{ij}, g'_{ij})_k\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{G \times_k G'})$ der Cozyklus und $F \times_k F'$ die typische Faser von $Y \times Y'$; weiter bezeichne (f, f') den durch σ definierten Punkt von $F \times_k F'$ (vgl. 2.3.7 und 2.3.8), dann ist $\{f\} \times_k F'$ eine abgeschlossene Untervarietät von $F \times_k F'$ (vgl. [EGA I, 4.3.6(iii)]). Nach Voraussetzung ist nun $\{f\} \times_k F'$ invariant unter der Operation von $G \times_k G'$, und $G \times_k 1$ ist der auf $\{f\} \times_k F'$ trivial operierende Normalteiler von $G \times_k G'$, d. h. $(G \times_k G')/(G \times_k 1) \cong 1 \times_k G' \cong G'$ operiert effektiv auf $\{f\} \times_k F'$; also wird nach 2.3.2 Y' zu einem abgeschlossenen Unterbündel von $Y \times Y'$ mit Cozyklus $\{g'_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{G'})$. Die Behauptung für Y ergibt sich analog.

2.4.5 Folgerung: *Es seien Faserbündel Z und Z' über X gegeben, mit abgeschlossenen Unterbündeln $Y \hookrightarrow Z$ und $Y' \hookrightarrow Z'$. Dann ist $Y \times Y'$ ein abgeschlossenes Unterbündel von $Z \times Z'$.*

Beweis: Nach Voraussetzung sind die typischen Fasern E und E' von Y und Y' abgeschlossene Untervarietäten der typischen Fasern F und F' von Z und Z'. Wegen [EGA I, 4.3.6(iii)] erhält man

$$\varepsilon \times_k \varepsilon' : E \times_k E' \hookrightarrow F \times_k F'$$

als abgeschlossene Immersion. Gemäß Konstruktion von $Y \times Y'$ ist $E \times_k E'$ invariant unter der Operation der Strukturgruppe von $Z \times Z'$, und die Strukturgruppe $H \times_k H'$ von $Y \times Y'$ operiert effektiv auf $E \times_k E'$, d. h. $Y \times Y'$ ist nach 2.3.2 ein abgeschlossenes Unterbündel von $Z \times Z'$.

2.4.6 Satz: *Es seien $(Y, \pi, X; F, G)$ und $(Y', \pi', X; F', G')$ Faserbündel über X und ein Morphismus von Varietäten $\varphi : Z \to X$ gegeben. Dann gilt*

$$\varphi^*(Y \times Y') \cong \varphi^* Y \times \varphi^* Y' .$$

Zum Beweis wird ein Lemma benötigt:

2.4.6.1 Lemma: *Seien $f : X \to Y$, $g_1 : Y \to Z_1$ und $g_2 : Y \to Z_2$ Morphismen von S-Objekten einer Kategorie [EGA I, 0 1.1.11], dann gilt*

$$(g_1, g_2)_S \circ f \; = \; (g_1 \circ f \, , \, g_2 \circ f)_S \, .$$

Beweis: Nach [EGA I, 0 1.2.3] existiert genau ein Morphismus $h : Y \to Z_1 \times_S Z_2$ mit $h = (g_1, g_2)_S$, so daß

$$g_1 \; = \; p_1 \circ h \quad \text{und} \quad g_2 \; = \; p_2 \circ h \tag{1}$$

gilt; ebenso existiert genau ein Morphismus $h' : X \to Z_1 \times_S Z_2$ mit $h' = (g_1 \circ f, g_2 \circ f)_S$, so daß

$$g_1 \circ f \; = \; p_1 \circ h' \quad \text{und} \quad g_2 \circ f \; = \; p_2 \circ h' \tag{2}$$

gilt. Da die Gleichungen (2) durch Vorschaltung von f aus den Gleichungen (1) hervorgehen, folgt $h' = h \circ f$.

2.4.6.2 Beweis (von 2.4.6 Satz): Seien $\{g_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{G})$ und $\{g'_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{G'})$ die Cozyklen von Y bzw. Y'. Nach 2.4.1 und 2.4.3 ist der Cozyklus von $\varphi^*(Y \times Y')$ gegeben durch $\{(g_{ij}, g'_{ij})_k \circ \varphi\}$, während der Cozyklus von $\varphi^* Y \times \varphi^* Y'$ durch $\{(g_{ij} \circ \varphi, g'_{ij} \circ \varphi)_k\}$ gegeben ist. Die Behauptung folgt jetzt aus obigem Lemma (vgl. auch 2.1.15).

2.4.7 Bemerkung: Mit dem gleichen Beweis folgt die Behauptung von 2.4.6 für Vektorraumbündel.

2.4.8 Definition: Seien Y ein Rang-m-Vektorraumbündel und Y' ein Rang-n-Vektorraumbündel über X mit Cozyklen $\{g_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{\mathrm{GL}_m})$, bzw. $\{g'_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{\mathrm{GL}_n})$. Dann operiert $\mathrm{GL}_m \otimes_k \mathrm{GL}_n$ auf $k^m \otimes_k k^n$ durch

$$(g \otimes g')(v \otimes w) \overset{def}{=} (gv) \otimes (g'w) \, ,$$

(Auswertungsformel für das Tensorprodukt, vgl. [SchSt, X 80.4 ff]), wobei $g \otimes g'$ und $v \otimes w$ zerlegbare Elemente aus $\mathrm{GL}_m \otimes_k \mathrm{GL}_n$, bzw. aus $k^m \otimes_k k^n$ bezeichnen.

Ist $(g \otimes g')\,(v \otimes w) = v \otimes w$ für alle $v \otimes w$, so folgt $g = 1_{\mathrm{GL}_m}$ und $g' = 1_{\mathrm{GL}_n}$ und damit $g \otimes g' = 1_{\mathrm{GL}_m \otimes_k \mathrm{GL}_n}$, d. h. die Operation ist effektiv. Man definiert nun für alle $(i, j) \in I^2$ Morphismen

$$g_{ij} \otimes g'_{ij} : U_{ij} \to \mathrm{GL}_m \otimes_k \mathrm{GL}_n \, ,$$

wobei

$$(g_{ij} \otimes g'_{ij})(x) \overset{def}{=} g_{ij}(x) \otimes g'_{ij}(x) \quad \text{für alle } x \in U_{ij} \,.$$

Nach [SchSt, §80, Bsp. 14] hat man kanonische Isomorphismen von k-Algebren

$$\mathrm{End}(k^m) \otimes_k \mathrm{End}(k^n) \;\cong\; \mathrm{End}(k^m \otimes_k k^n) \;\cong\; \mathrm{End}(k^{mn}) \,,$$

insbesondere also Isomorphismmen der Einheitengruppen

$$\mathrm{GL}_m \otimes_k \mathrm{GL}_n \;\cong\; \mathrm{GL}(k^m \otimes_k k^n) \;\cong\; \mathrm{GL}_{mn} \,,$$

weshalb die $g_{ij} \otimes g'_{ij}$ einen Cozyklus $\{g_{ij} \otimes g'_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{\mathrm{GL}_{mn}})$ bilden, der wiederum nach 2.1.21 ein Rang-mn-Vektorraumbündel $Y \otimes Y'$ über X mit typischer Faser $k^m \otimes_k k^n$ definiert. $Y \otimes Y'$ wird als ***Tensorprodukt*** von Y und Y' bezeichnet.

2.4.9 Bemerkung: Das Produkt von Faserbündeln sowie das Tensorprodukt von Vektorraumbündeln lassen sich induktiv auf endliche Familien von Bündeln übertragen.

2.4.10 Definition & Satz: Sei Y ein Rang-n-Vektorraumbündel über X mit Cozyklus $\{g_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{\mathrm{GL}_n})$ gegeben. Weiter seien $N = \{1, \ldots, n\}$ und $K = \{1, \ldots, k\}$ total geordnete Indexmengen der Mächtigkeit n, bzw. k, mit $k \leq n$ und bezeichne $\mathrm{Abb}_>(K, N)$ die Menge aller streng monoton steigenden Abbildungen von K nach N; da jedes $\mu \in \mathrm{Abb}_>(K, N)$ in eindeutiger Weise durch sein Bild charakterisiert ist, wird $\mathrm{Abb}_>(K, N)$ durch die Menge aller k-elementigen Teilmengen von N in natürlicher Weise parametrisiert, d. h. mit einer totalen Ordnung versehen.

Sei jetzt $a = (a_{lm})_{(l,m) \in N^2}$ eine $(n \times n)$-Matrix mit Einträgen aus k, dann wird für jedes Paar $(\lambda, \mu) \in \mathrm{Abb}_>(K, N)^2$ ein ***Minor der Ordnung k*** gegeben durch

$$d_{\lambda\mu} \overset{def}{=} \det(a_{\lambda(l)\,\mu(m)})_{(l,m) \in K^2} \,.$$

Das ***k-fache äußere Produkt von a*** definiert man als

$$\wedge^k a \;=\; \wedge^k (a_{lm}) \overset{def}{=} (d_{\lambda\mu}) \,,$$

wobei $(\lambda, \mu) \in \mathrm{Abb}_>(K, N)^2$; vgl. [SchSt, X §83, Bsp. 6]. Insbesondere ist $\wedge^k g \in \mathrm{GL}\binom{n}{k}$ für $g \in \mathrm{GL}_n$, da äußere Produkte von Isomorphismen wegen [SchSt, X 83.6 Satz] ebenfalls Isomorphismen sind. Aus der obigen Definition und der Funktoreigenschaft von $\wedge^k$ [SchSt, X 83.5 Satz] folgt, daß

$$\begin{aligned} \wedge^k : \mathrm{GL}_n &\longrightarrow \mathrm{GL}\tbinom{n}{k} \\ g &\longmapsto \wedge^k g \end{aligned}$$

zu einem Morphismus von algebraischen Gruppen wird. Für alle $(i, j) \in I^2$ hat man nun Diagramme

$$\begin{tikzcd} U_{ij} \arrow[r, "g_{ij}"] \arrow[dr, "\wedge^k g_{ij}"'] & \mathrm{GL}_n \arrow[d, "\wedge^k"] \\ & \mathrm{GL}\tbinom{n}{k} \,, \end{tikzcd}$$

womit ein Cozyklus $\{\wedge^k g_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{\mathrm{GL}}_{\binom{n}{k}})$ gegeben wird, der nach 2.1.21 ein Rang-$\binom{n}{k}$-Vektorraumbündel $\bigwedge^k Y$ über X mit typischer Faser $\bigwedge^k k^n$ definiert (die Operation auf $\bigwedge^k k^n$ ist effektiv, da $\mathrm{GL}_{\binom{n}{k}} \cong \mathcal{A}ut(\bigwedge^k k^n)$). $\bigwedge^k Y$ wird als ***k-faches äußeres Produkt*** von Y bezeichnet. Für $k = n$ ist $\bigwedge^n Y$ ist ein Geradenbündel und heißt ***Determinantenbündel*** von Y.

2.4.11 Definition: Sei Y ein Rang-n-Vektorraumbündel über X mit zugehörigem Cozyklus $\{g_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{\mathrm{GL}_n})$. Setzt man für alle $(i, j) \in I^2$

$$g_{ij}^\vee(x) \stackrel{def}{=} (g_{ij}(x)^{-1})^t \quad \text{mit } x \in U_{ij} \,,$$

(das ist die Transponierte der Inversen der Matrix $g_{ij}(x)$), so wird das durch den Cozyklus $\{g_{ij}^\vee\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{\mathrm{GL}_n})$ definierte Vektorraumbündel $Y^\vee$ (vgl. 2.1.21) als zu Y ***duales Vektorraumbündel*** bezeichnet. Für $x \in X$ ist dann die Faser $Y_x^\vee = \mathrm{Hom}_k(Y_x, k)$, wobei Y_x die entsprechende Faser von Y bezeichnet.

2.4.12 Folgerung: *Seien Y und Y' zueinander isomorphe Vektorraumbündel über X, dann sind auch die Bündel $Y^\vee$ und $(Y')^\vee$ zueinander isomorph.*

Beweis: Sei $\{g_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{\mathrm{GL}_n})$ der Cozyklus von Y, dann ist nach 2.2.8 durch $\{\gamma_i\, g_{ij}\, \gamma_j^{-1}\}$ der Cozyklus von Y' gegeben (mit $\gamma_k : U_k \to \mathrm{GL}_n$ und $\gamma_k^{-1} = inv \circ \gamma_k$). Es gilt nun für alle $(i, j) \in I^2$

$$\begin{aligned}(\gamma_i\, g_{ij}\, \gamma_j^{-1})^\vee &= (\gamma_j\, g_{ij}^{-1}\, \gamma_i^{-1})^t \\ &= (\gamma_i^{-1})^t (g_{ij}^{-1})^t (\gamma_j)^t = (\gamma_i^t)^{-1} (g_{ij}^{-1})^t \gamma_j^t \,,\end{aligned}$$

d. h. die Cozyklen von $Y^\vee$ und $(Y')^\vee$ sind cohomolog (2.2.5), womit die Behauptung aus 2.2.8 folgt.

2.4.13 Definition & Satz: Es soll die Menge der Isomorphieklassen von Geradenbündeln über X betrachtet werden; das ist nach 2.2.8 (bzw. 2.2.10) genau die Cohomologiemenge $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*)$, deren ausgezeichnetes Element [1] die Klasse des trivialen Geradenbündels bezeichnet. Wie folgt wird eine Multiplikation auf $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*)$ gegeben:

Seien $[g_{ij}]_{(i,j)\in I^2}$ und $[g'_{ij}]_{(i,j)\in I^2}$ zwei Klassen aus $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*)$, wobei $\{g_{ij}\}$ und $\{g'_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*)$, dann setzt man

$$[g_{ij}][g'_{ij}] \stackrel{def}{=} [g_{ij}\, g'_{ij}] \,.$$

Sind $\alpha_i\, g_{ij}\, \alpha_j^{-1}$ und $\beta_i\, g'_{ij}\, \beta_j^{-1}$ Repräsentanten von $[g_{ij}]$ bzw. $[g'_{ij}]$ mit $\alpha_i, \beta_i \in \mathcal{O}_X^*(U_i)$ (vgl. 2.2.5), so ist

$$\begin{aligned}[\alpha_i\, g_{ij}\, \alpha_j^{-1}][\beta_i\, g'_{ij}\, \beta_j^{-1}] &= [\alpha_i\, g_{ij}\, \alpha_j^{-1}\, \beta_i\, g'_{ij}\, \beta_j^{-1}] \\ &= [(\alpha_i\, \beta_i) g_{ij}\, g'_{ij} (\beta_j\, \alpha_j)^{-1}] = [g_{ij}\, g'_{ij}] \,,\end{aligned}$$

d. h. die Multiplikation ist wohldefiniert. Ebenso ist die inverse Klasse durch

$$[g_{ij}]^{-1} \stackrel{def}{=} [g_{ij}^{-1}]$$

gegeben, womit $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*)$ zu einer abelschen Gruppe wird. Beim Übergang zum direkten Limes erhält man

$$H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \;=\; \varinjlim_{\vec{\mathcal{U}}} H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*)\,,$$

vgl. 2.2.10. Wegen 2.4.8 schreibt sich die Multiplikation in $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*)$ auch als

$$[L][L'] \;=\; [L \otimes L']\,,$$

mit Geradenbündeln L und L' (sind $\{g_{ij}\}$ und $\{g'_{ij}\}$ die zugehörigen Cozyklen, so ist für $x \in U_{ij}$ das Kroneckerprodukt von Matrizen $g_{ij}(x) \otimes g'_{ij}(x)$, vgl. [SchSt, X §80, Bem. 2 ff], gerade die Multiplikation $g_{ij}(x)g'_{ij}(x)$). Die inverse Klasse ist dann gemäß 2.4.11 gegeben durch

$$[L]^{-1} \;=\; [L^\vee]\,.$$

In dieser Schreibweise wird die Gruppe der Isomorphieklassen von Geradenbündeln über X als ***Picardgruppe von X*** bezeichnet und $\mathrm{Pic}(X)$ notiert.

Sei $\varphi : Z \to X$ ein Morphismus von Varietäten. Bezeichnet φ^*L die Liftung eines Geradenbündels L über X, dann wird durch φ ein Homomorphismus

$$\begin{aligned} \varphi^* : \mathrm{Pic}(X) &\longrightarrow \mathrm{Pic}(Z) \\ [L] &\longmapsto [\varphi^*L] \end{aligned}$$

induziert (wegen 2.4.2 ist φ^* wohldefiniert). Pic wird somit zu einem *contravarianten Funktor* von der Kategorie der Varietäten in die Kategorie der abelschen Gruppen.

2.5 Geometrische Quotienten, Prinzipalfaserungen und Prinzipalbündel

2.5.1 Definition: Seien X und Y separierte algebraische (0.5.1) Varietäten, eine Rechtsoperation $\omega : Y \times_k G \to Y$ einer affinen algebraischen Gruppe G auf Y, sowie ein G-invarianter Morphismus (1.2.1) $\pi : Y \to X$ gegeben. Definiert der Scherungsmorphismus ω_S (1.1.9(xi)) einen Isomorphismus

$$\omega_S : Y \times_k G \xrightarrow{\cong} Y \times_X Y \overset{\varepsilon}{\hookrightarrow} Y \times_k Y\,, \tag{fp}$$

dann wird insbesondere für alle $y \in Y$ ein Isomorphismus

$$\{y\} \times_k G \xrightarrow{\cong} \{y\} \times_k yG$$

gegeben, d. h. die Fasern von π stimmen mit den Orbiten der Operation ω überein und sind isomorph zu G (zur Immersion ε vgl. 0.3.5).

Die hierdurch definierte Faserung $(Y, \pi, X; G)$ (2.1.5) wird als ***formal-prinzipal*** oder als ***formale Prinzipalfaserung*** bezeichnet.

Seien $(Y, \pi, X; G)$ und $(Y', \pi', X; G')$ formale Prinzipalfaserungen, wobei G eine algebraische Untergruppe von G' sei. Ein Morphismus $\varphi : Y \to Y'$ heißt ***Morphismus von Prinzipalfaserungen***, falls φ G-äquivariant (1.2.1) ist. Da φ Orbiten in Orbiten überführt, ist φ insbesondere ein Morphismus der zugrundeliegenden Faserungen (2.2.1).

2.5.2 Definition: Eine formale Prinzipalfaserung $(Y,\pi,X;G)$ heißt

(i) ***lokal-isotrivial*** oder ***Serre-Prinzipalfaserung***, falls für alle $x \in X$ eine offene Umgebung $U(x)$, sowie eine surjektive étale Überlagerung (0.6.17) $\psi : U' \to U$ existiert, so daß $\psi^* Y = U' \times_U Y$ über U' trivial wird (d. h. $U' \times_U Y \cong U' \times_k G$ über U');

(ii) ***Mumford-Prinzipalfaserung***, falls gilt: π ist flach (0.6.13) und (π, X) ist ein geometrischer Quotient von Y nach G (vgl. 1.2.7).

2.5.3 Bemerkung: Ist $(Y,\pi,X;G)$ formal-prinzipal, dann resultiert aus

$$\omega_S^{-1} : Y \times_X Y \xrightarrow{\cong} Y \times_k G$$

ein sogenannter *Translationsmorphismus*

$$\tau \overset{def}{=} pr_2 \circ \omega_S^{-1} : Y \times_X Y \longrightarrow G\,,$$

mit der Eigenschaft

$$y\,\tau(y,y') = y' \quad \text{für alle } (y,y') \in Y \times_X Y\,,$$

vgl. hierzu [Hus, Chap. 4, 2.1]. Folglich ist $(Y,\pi,X;G)$ ein *système fibré* im Sinne von [Ser(EF), 2.1, p. 1-08], das der Bedingung (FP) [loc. cit. p. 1-10] genügt. Fordert man umgekehrt die Existenz eines Translationsmorphismus τ, so erweist sich

$$(p_1,\tau)_k : Y \times_X Y \longrightarrow Y \times_k G$$

als invers zu ω_S, d. h. ω_S ist ein Isomorphismus auf $Y \times_X Y$.

Nach [Gro(Des), pp. 190-10 und 190-27 unten] stimmt die hier verwendete Definition von „lokal-isotrivial" mit der von Serre verwendeten überein [Ser(EF), 2.2, p. 1-08, sowie 1.2 (NR), p. 1-03], vgl. auch 0.6.15; und wegen [loc. cit. 2.2 und 2.4, Prop. 2] ist der Begriff „Serre-Prinzipalfaserung" zu Serres *éspace fibré principal* mit affiner Gruppe G äquivalent.

Die Bedingung (ii) in [GIT, 0 §4 Def. 0.10] entspricht mit $S = \mathrm{Spm}(k)$ genau der Bezeichnung „formal-prinzipal" (2.5.1). Nach [EGA I, 6.3.4(v)] ist π von endlichem Typ über $\mathrm{Spm}(k)$, d. h. die hier definierte „Mumford-Prinzipalfaserung" ist ein Spezialfall des in [GIT, loc. cit.] definierten *principal fibre bundle.*

Andererseits ist eine „Mumford-Prinzipalfaserung" $(Y,\pi,X;G)$ ein Spezialfall von Grothendiecks *fibré principal homogène* [Gro(Des), 6. pp. 190-26,27]: Die Bedingung „formal-prinzipal" entspricht bei Grothendieck der Bedingung *formellement principal homogène sous G*; im Fall einer affinen algebraischen Gruppe G betrachtet Grothendieck statt G das Gruppen-Schema $X \times_k G$, d. h. man erhält folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Y \times_X (X \times_k G) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[d, "kan"', "\cong"] & & Y \times_X Y \\
Y \times_k G\,, \arrow[urr, "\cong"'] & &
\end{tikzcd}$$

wobei der kanonische Isomorphismus nach [EGA I, 0 1.3.2.1] gegeben ist. $X \times_k G$ ist vermöge der ersten Projektion treu-flach über X; ebenso ist Y vermöge π treu-flach über X. Gemäß 2.5.1 sind X und Y quasikompakt (über $\mathrm{Spm}(k)$), d. h. π ist nach [EGA I, 6.1.5(v)] ein quasikompakter Morphismus.

2.5.4 Satz: *Seien X und Y separierte algebraische (0.5.1) Varietäten, sowie eine Rechtsoperation einer affinen algebraischen Gruppe G auf Y gegeben. Ist (π, X) ein geometrischer Quotient von Y nach G (1.2.7) und operiert G prinzipal (1.2.14(iv)) auf Y, dann ist $(Y, \pi, X; G)$ eine Mumford-Prinzipalfaserung.*

Beweis: Nach 1.2.15 ist die Operation von G *free* im Sinne von [GIT, 0 §3 Def. 0.3(iv)]. Die Behauptung folgt jetzt aus [loc. cit. §4 Prop. 0.9].

2.5.5 Satz: *Sei G eine affine algebraische Gruppe, H eine abgeschlossene Untergruppe von G und bezeichne $(\pi, G/H)$ den zugehörigen geometrischen Quotienten (1.2.9). Dann ist $(G, \pi, G/H; H)$ sowohl eine Serre- als auch eine Mumford-Prinzipalfaserung.*

Beweis: Nach 1.2.7(iii) ist der Scherungsmorphismus ω_S ein Morphismus auf $G \times_{G/H} G$, und

$$\begin{array}{ccccc} G \times_{G/H} G & \xrightarrow{inv \times_{G/H} id} & G \times_{G/H} G & \xrightarrow{(inv \circ p_1, mul)_k} & G \times_k H \\ (g, gh) & \longmapsto & (g^{-1}, gh) & \longmapsto & (g, g^{-1}gh) \end{array}$$

definiert einen zu ω_S inversen Morphismus. Damit wird ω_S zu einem Isomorphismus auf $G \times_{G/H} G$; also operiert H prinzipal auf G. Mit 2.5.4 folgt nun, daß $(G, \pi, G/H; H)$ eine Mumford-Prinzipalfaserung ist.

Nach [Ser(EF), 2.5, Prop. 3] ist $(G, \pi, G/H; H)$ insbesondere lokal-isotrivial.

2.5.6 Satz: *Jede Mumford-Prinzipalfaserung ist lokal-isotrivial.*

Beweis: Es gilt nach [Gro(Des), Prop. 6.1, p. 190-28] (in der Terminologie der obigen Definitionen): „Ist H eine abgeschlossene Untergruppe von GL_n, so daß der (geometrische) Quotient GL_n / H existiert (was nach 1.2.9 stets der Fall ist) und ist die Mumford-Prinzipalfaserung $(\mathrm{GL}_n, \pi, \mathrm{GL}_n / H; H)$ lokal-isotrivial, dann ist *jede* Mumford-Prinzipalfaserung mit H als typischer Faser lokal-isotrivial." Die Behauptung folgt jetzt direkt aus 2.5.5 .

2.5.7 Satz: *Sei $(Y, \pi, X; G)$ eine Mumford-Prinzipalfaserung, dann ist π ein affiner Morphismus.*

Beweis: Da G gemäß 2.5.1 eine affine Gruppe ist, entspricht ihr in der Grothendieckschen Terminologie das Gruppen-Schema $X \times_k G$, wobei G als affines Schema aufzufassen ist; vgl. hierzu 2.5.3, bzw. [Gro(Des)]. Die Projektion $p_1 : X \times_k G \to X$ ist nun ein affiner Morphismus: Für jedes affin-offene Unterschema U von X ist das schematheoretische Urbild von U bzgl. p_1 durch die offene Immersion $p_2 : U \times_X (X \times_k G) \to X \times_k G$ definiert [EGA I, 4.3.1]. Nach [EGA I, 0 1.3.2.1] ist jedoch $U \times_X (X \times_k G) \cong U \times_k G$, d. h. $p_1^{-1}(U) = U \times_k G$ und ist somit affin; ist $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine affin-offene Überdeckung von X, dann wird folglich $\{p_1^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ zu einer affin-offene Überdeckung von $X \times_k G$. Das Gruppen-Schema $X \times_k G$ ist also vermöge p_1 affin über X. Die Behauptung folgt jetzt mit [Gro(Des), p. 190-27 unten].

2.5.8 Satz: *Seien X und Y separierte algebraische Varietäten, G eine affine algebraische Gruppe und $(Y, \pi, X; G)$ eine Faserung (2.1.5) gegeben. Dann sind äquivalent:*

(i) $(Y, \pi, X; G)$ *ist formal-prinzipal (2.5.1) und lokal-trivial (2.1.6).*

(ii) $(Y, \pi, X; G)$ *ist ein G-Prinzipalbündel (2.1.17).*

Zum Beweis wird ein Lemma benötigt:

2.5.8.1 Lemma: *Die formale Prinzipalfaserung $(Y, \pi, X; G)$ besitze den Automorphismus φ. Gilt $Y = X \times_k G$ und $\pi = pr_1$ (d. h. Y ist trivial), dann ist in kanonischer Weise ein Morphismus $g : X \to G$ gegeben, so daß*

$$\varphi(x, a) \;=\; (x, g(x)a) \quad \textit{für alle } (x, a) \in X \times_k G \textit{ gilt.}$$

Beweis: Da $pr_1 \circ \varphi = pr_1$ gilt, besitzt φ die Form

$$\varphi(x, a) \;=\; (x, \psi(x, a)) \quad \text{für alle } (x, a) \in X \times_k G\,,$$

wobei $\psi : X \times_k G \to G$ ein Morphismus ist. Die Rechtsoperation von G auf $X \times_k G$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} X \times_k G \times_k G &\longrightarrow X \times_k G \\ (x, a, a') &\longmapsto (x, a\,a') \end{aligned}$$

und φ ist G-äquivariant (vgl. 2.5.1), d. h. es gilt

$$\begin{aligned} \varphi(x, a) \;&=\; \varphi(x, 1a) \;=\; (\varphi(x, 1))a \\ &=\; (x, \psi(x, 1))a \;=\; (x, \psi(x, 1)a) \quad \text{für alle } (x, a) \in X \times_k G\,. \end{aligned}$$

Die Einschränkung von ψ auf $X \times_k \{1\}$ definiert nun vermöge der kanonischen Isomorphie $X \times_k \{1\} \cong X$ den gesuchten Morphismus $g : X \to G$.

2.5.8.2 Beweis (von 2.5.8 Satz): In 2.5.8 sei (i) erfüllt und $\mathcal{A} = \{(h_i, U_i)\}_{i\in I}$ ein Atlas von Y (2.1.6). Für alle $(i, j) \in I^2$ ist $h_i \circ h_j^{-1}$ ein Automorphismus der formalen Prinzipalfaserung $U_{ij} \times_k G$. Also existiert nach obigem Lemma ein Morphismus $g_{ij} : U_{ij} \to G$, so daß für alle $(x, a) \in X \times_k G$

$$h_i \circ h_j^{-1}(x, a) \;=\; (x, g_{ij}(x)a)$$

gilt. Da die Linksmultiplikation von G auf sich insbesondere effektiv ist, wird $\mathcal{A}$ zu einem G-Atlas (2.1.7). Durch Auswahl eines Atlanten $\mathcal{A}$ ist also nach 2.1.10 in eindeutiger Weise eine G-Struktur festgelegt, womit $(Y, \pi, X; G)$ nach 2.1.9 (bzw. 2.1.17) zu einem

G-Prinzipalbündel wird.

Sei jetzt umgekehrt $(Y, \pi, X; G)$ ein G-Prinzipalbündel, dann folgt die lokale Trivialität per definitionem (2.1.9, 2.1.17). Bezeichne ω die in 2.1.18 definierte Rechtsoperation auf Y und ω_S den zugehörigen Scherungsmorphismus (1.1.9(xi)), dann faktorisiert sich ω_S nach 2.1.18

$$Y \times_k G \xrightarrow{\omega_S} Y \times_X Y \overset{\varepsilon}{\hookrightarrow} Y \times_k Y\,,$$

wobei ε die kanonische abgeschlossene Immersion bezeichnet; vgl. [EGA I, 5.2.3]. Ist $\{U_j\}_{j \in J}$ eine für Y trivialisierende Überdeckung von X, dann ist ω_S lokal gegeben durch das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_j) \times_k G \arrow[r, "\omega_{S_j}"] \arrow[d, "h_j \times_k id"'] & \pi^{-1}(U_j) \times_k \pi^{-1}(U_j) \\ (U_j \times_k G) \times_k G \arrow[r, "\eta_{S_j}"'] & (U_j \times_k G) \times_k (U_j \times_k G) \arrow[u, "h_j^{-1} \times_k h_j^{-1}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (y,a) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (y, ya) \\ (x,g,a) \arrow[r, mapsto] & (x,g,x,ga)\,. \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

Man zeigt nun, daß sich die ω_{S_j} zu einem globalen Morphismus ω_S zusammensetzen, analog zum entsprechenden Beweis für die ω_j und ω in 2.1.18 . ω_S^{-1} wird jetzt lokal durch das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_j) \times_k \pi^{-1}(U_j) \arrow[r, "\omega_{S_j}^{-1}"] \arrow[d, "h_j \times_k h_j"'] & \pi^{-1}(U_j) \times_k G \\ (U_j \times_k G) \times_k (U_j \times_k G) \arrow[r, "\eta_{S_j}^{-1}"'] & (U_j \times_k G) \times_k G \arrow[u, "h_j^{-1} \times_k id"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (y,ya) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (y, a) \\ (x,g,x,ga) \arrow[r, mapsto] & (x,g,g^{-1}ga) \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

gegeben. Damit wird, analog wie im Beweis für $\omega_{y_0}^{-1}$ in 2.1.19, ω_S^{-1} global definiert, d. h. ω_S ist ein Isomorphismus auf $Y \times_X Y$.

Bemerkung: Die Pfeile η_{S_j} und $\eta_{S_j}^{-1}$ sind tatsächlich Morphismen mit

$$\begin{aligned} \eta_{S_j} &= (pr_1 \times_k pr_2 \times_k pr_1\,,\ mul \circ (pr_2 \times_k pr_3))_k\,, \\ \eta_{S_j}^{-1} &= (pr_1 \times_k pr_2\,,\ mul \circ (inv \times_k id_G) \circ (pr_2 \times_k pr_4))_k\,. \end{aligned}$$

2.5.9 Definition: Eine affine algebraische Gruppe G heißt ***speziell***, falls jede Serre-Prinzipalfaserung $(Y, \pi, X; G)$ mit G als typischer Faser lokal-trivial ist; vgl. hierzu [Ser(EF), 4.1, p. 1-21].

2.5.10 Folgerung: *Eine affine algebraische Gruppe G ist genau dann speziell, wenn jede Serre-Prinzipalfaserung mit G als typischer Faser ein G-Prinzipalbündel (2.1.17) ist.*

Beweis: Da jede Serre-Prinzipalfaserung insbesondere formal-prinzipal ist, folgt die Behauptung sofort aus 2.5.8.

2.5.11 Satz: *Jede spezielle Gruppe ist zusammenhängend (1.4.5).*
Beweis: [Ser(EF), 4.1, Thm. 1, p. 1-21].

2.5.12 Bemerkung: Per definitionem (2.5.1 und 2.5.2) besitzen die hier betrachteten Prinzipalfaserungen affine (bzw. lineare, vgl. 1.1.8) algebraische Gruppen als typische Faser, während Serre bei seiner Definition *éspace fibré principal* [Ser(EF), 2.2, p. 1-08] beliebige algebraische Gruppen als typische Faser zuläßt. Ebenso setzt Serre bei seiner Definition *groupe spécial* nicht G affin voraus. Aus Serres *Théorèm 1* [loc. cit. p. 1-21] folgt jedoch G affin aus G *spécial*.

2.5.13 Satz: *Sei G eine spezielle algebraische Gruppe und H eine abgeschlossene Untergruppe von G. Dann sind gleichwertig:*

(i) *H ist speziell.*

(ii) *Die Serre-Prinzipalfaserung $(G, \pi, G/H; H)$ (2.5.5) ist ist lokal-trivial.*

Beweis: [Ser(EF), 4.1, Lem. 1, p. 1-21].

2.5.14 Satz: *Sei G eine affine algebraische Gruppe und $N \subset G$ ein abgeschlossener Normalteiler. Sind N und G/N (1.2.9) speziell, dann ist auch G speziell.*
Beweis: [Ser(EF), 4.4, Lem. 6, p. 1-25].

2.5.15 Korollar: *Direkte Produkte spezieller algebraischer Gruppen sind speziell.*
Beweis: Der Kern der kanonischen Projektion $G_1 \times_k G_2 \to G_1$ ist gleich $1 \times_k G_2$, d. h. $1 \times_k G_2$ ist normal in $G_1 \times_k G_2$. Da $(G_1 \times_k G_2)/(1 \times_k G_2)$ kanonisch isomorph zu G_1 ist, folgt die Behauptung aus 2.5.14. Mit Induktion gilt die Aussage für beliebige endliche Produkte von speziellen Gruppen.

2.5.16 Satz: *Jede affine zusammenhängende (1.4.5) und auflösbare (1.4.12) algebraische Gruppe ist speziell.*
Beweis: [Ser(EF), 4.4, Prop. 14, p. 1-25].

2.5.17 Beispiel: Die Gruppen B_n, U_n und T_n (1.3.5) sind wegen 1.4.6 und 1.4.17 nach obigem Satz speziell. Ebenso sind die Gruppen $\mathrm{GL}_n, \mathrm{SL}_n$, sowie die symplektische Gruppe Sp_n speziell; vgl. [Ser(EF), 4.3, p. 1-24, 4.4, p. 1-25 und 4.4, p. 1-26]. Die einzigen halbeinfachen (1.5.5) speziellen Gruppen sind direkte Produkte von Gruppen des Typs SL_n und Sp_n. Insbesondere sind die Gruppen PGL_n für $n \geq 1$ ($\mathrm{PGL}_n \stackrel{def}{=} \mathrm{GL}_{n+1}/\{k^*1\}$), SO_n für $n \geq 3$ und $\mathrm{Spin}(n)$ für $n \geq 7$ *nicht* speziell; vgl. [loc. cit. p. 1-26].

2.5.18 Satz: *Die Gruppen P_k (1.3.8) sind speziell.*

Zum Beweis werden zunächst zwei Lemmata bereitgestellt:

2.5.18.1 Lemma: (i) *Bezeichne N die Menge aller Matrizen der Form*

$$\left(\begin{array}{c|c} 1_k & b \\ \hline 0 & a_2 \end{array}\right),$$

mit $b \in \mathrm{Mat}(k \times (n-k))$ und $a_2 \in \mathrm{GL}_{n-k}$, dann ist N ein abgeschlossener Normalteiler von P_k.

(ii) *Bezeichne N_1 die Menge aller Matrizen der Form*

$$\left(\begin{array}{c|c} 1_k & b \\ \hline 0 & 1_{n-k} \end{array}\right),$$

mit $b \in \mathrm{Mat}(k \times (n-k))$, dann ist N_1 ein abgeschlossener Normalteiler von N.

Beweis: (i) Die Abgeschlossenheit von N folgt direkt aus der Form der Matrizen, und die Zusammensetzung der Homomorphismen

$$\begin{array}{ccccc} P_k & \longrightarrow & \mathrm{GL}_k \times_k \mathrm{GL}_{n-k} & \longrightarrow & (\mathrm{GL}_k \times_k \mathrm{GL}_{n-k})/(1 \times_k \mathrm{GL}_{n-k}) \\ \left(\begin{array}{c|c} a_1 & b \\ \hline 0 & a_2 \end{array}\right) & \longmapsto & \left(\begin{array}{c|c} a_1 & 0 \\ \hline 0 & a_2 \end{array}\right) & \longmapsto & \left[\begin{array}{c|c} a_1 & 0 \\ \hline 0 & a_2 \end{array}\right] \end{array}$$

besitzt offenbar genau N als Kern.

(ii) Analog zum Beweis von (i) erhält man N_1 als Kern des Homomorphismus

$$\begin{array}{ccc} N & \longrightarrow & 1 \times_k \mathrm{GL}_{n-k} \\ \left(\begin{array}{c|c} 1_k & b \\ \hline 0 & a_2 \end{array}\right) & \longmapsto & \left(\begin{array}{c|c} 1_k & 0 \\ \hline 0 & a_2 \end{array}\right). \end{array}$$

2.5.18.2 Lemma: *In den Bezeichnungen von 2.5.18.1 gilt:*

(i) $P_k/N \cong \mathrm{GL}_k$,

(ii) $N/N_1 \cong \mathrm{GL}_{n-k}$.

Beweis: Man betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd} P_k \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\varkappa"'] & & \mathrm{GL}_k \\ & P_k/N \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \left(\begin{array}{c|c} a_1 & b \\ \hline 0 & a_2 \end{array}\right) \arrow[rr, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & & (\, a_1 \,) \\ & \left[\begin{array}{c|c} a_1 & b \\ \hline 0 & a_2 \end{array}\right] \arrow[ur, mapsto] & \end{tikzcd},$$

wobei $\varkappa$ den kanonischen Morphismus (1.2.9) bezeichnet. φ ist als Projektion auf den Block a_1 ein Morphismus von Varietäten, während die Homomorphie von φ unmittelbar aus der Multiplikationsformel für Blockmatrizen aus P_k folgt. Es gilt nun

$$\left(\begin{array}{c|c} a_1 & b \\ \hline 0 & a_2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & b' \\ \hline 0 & a_2' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} a_1 & b'' \\ \hline 0 & a_2{}'' \end{array}\right), \tag{\#}$$

d. h. φ ist konstant auf den Orbiten der Operation von N auf P_k. Aufgrund der universellen Eigenschaft für Quotienten (1.2.5(ii), 1.2.8) folgt jetzt, daß genau ein Morphismus $\alpha' : P_k/N \to \mathrm{GL}_k$ existiert, der das obige Diagramm kommutativ macht. Wegen (#) ist α wohldefiniert, d. h. als Abbildung aufgefaßt ist $\alpha' = \alpha$. Schließlich verifiziert man, daß der inverse Morphismus α^{-1} durch $\varkappa \circ \varepsilon$ gegeben ist, wobei ε die abgeschlossene Immersion

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_k & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n \\ (\,a_1\,) & \longmapsto & \left(\begin{array}{c|c} a_1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

bezeichnet.

Die Behauptung (ii) folgt analog zum Beweis von (i) aus dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} N \arrow[rr, "\varphi'"] \arrow[dr, "\varkappa'"'] & & \mathrm{GL}_{n-k} \\ & N/N_1 \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \left(\begin{array}{c|c} 1 & b \\ \hline 0 & a_2 \end{array}\right) \arrow[rr, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & & (\,a_2\,) \\ & \left[\begin{array}{c|c} 1 & b \\ \hline 0 & a_2 \end{array}\right] \arrow[ur, mapsto] & \end{tikzcd}$$

mit $\beta^{-1} = \varkappa' \circ \varepsilon'$, wobei

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon' : \mathrm{GL}_{n-k} & \longrightarrow & N \\ (\,a_2\,) & \longmapsto & \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & a_2 \end{array}\right). \end{array}$$

2.5.18.3 Beweis (von 2.5.18 Satz): Aus 2.5.18.2(ii) folgt, daß N/N_1 speziell ist (vgl. 2.5.17), und N_1 ist eine abgeschlossene und zusammenhängende Untergruppe von U_n, also wie diese auflösbar (vgl. 1.4.13 und 1.4.17). Deshalb ist nach 2.5.16 N_1 speziell. (Durch Nachrechnen erhält man sogar, daß N_1 zur additiven Gruppe des $k^{k(n-k)}$ isomorph ist.) Wegen 2.5.14 folgt jetzt, daß auch N speziell ist.

Nach 2.5.18.2(i) ist P_k/N speziell (vgl. 2.5.17), womit die Behauptung aus 2.5.14 folgt.

2.5.19 Satz: *Die Gruppen $P_{\boldsymbol{m}}$ mit $\boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_k)$ (1.3.11) sind speziell.*

Beweis: Sei N die Menge aller $(n \times n)$-Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & b_2 & b_3 & \cdots\cdots & b_k & b_{k+1} \\ & \boxed{1} & & \cdots\cdots & & \\ & & \boxed{1} & \cdots\cdots & & \\ & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & \boxed{1} & \\ & & & & & a_{k+1} \end{pmatrix},$$

mit $b_i \in \mathrm{Mat}(m_{i-1} \times (m_i - m_{i-1}))$ und $a_{k+1} \in \mathrm{GL}_{n-m_k}$. Weiter bezeichne N_1 die Menge der Matrizen aus N mit $a_{k+1} = 1$. In Analogie zu 2.5.18.1 zeigt man, daß N ein abgeschlossener Normalteiler von $P_{\boldsymbol{m}}$ und N_1 ein abgeschlossener Normalteiler von N ist und folgert, ähnlich wie in 2.5.18.2, daß $P_{\boldsymbol{m}}/N \cong P_{\boldsymbol{m}'}$ (mit $\boldsymbol{m}' = (m_1, \ldots, m_{k-1})$) und $N/N_1 \cong \mathrm{GL}_{n-m_k}$ gilt. Die Behauptung folgt jetzt durch Induktion nach k (der Länge von $\boldsymbol{m}$) wie in 2.5.18.3.

2.5.20 Satz: *Sei X eine glatte separierte und quasikompakte Varietät (oder alternativ hierzu: X sei eine glatte separierte algebraische Varietät) und $(Y, \pi, X; \mathrm{PGL}_n)$ eine Serre-Prinzipalfaserung. Dann sind gleichwertig:*

(i) *Y ist lokal-trivial (d. h. ein PGL_n-Prinzipalbündel, vgl. 2.5.8).*

(ii) *Es existiert ein GL_{n+1}-Prinzipalbündel Y', sowie ein Morphismus von Prinzipalbündeln $\varphi : Y' \to Y$, der faserweise durch die kanonischen Projektion*

$$\varkappa : \mathrm{GL}_{n+1} \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}_n$$

gegeben ist.

Beweis: [Ser(EF), 5.5, Prop. 18, p. 1-30].

2.5.21 Satz: *Seien G eine affine algebraische Gruppe, sowie abgeschlossene Untergruppen (1.1.2) $G_1 \subset G_2 \subset G$ gegeben und G_2 sei speziell (2.5.9). Dann existiert genau ein Morphismus π, der das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rd, "\pi_1"] \arrow[dd, "\pi_2"'] & \\ & G/G_1 \arrow[ld, "\pi"] \\ G/G_2 & \end{tikzcd}$$

kommutativ macht. Weiter gilt: $(G/G_1, \pi, G/G_2)$ ist ein Faserbündel mit typischer Faser G_2/G_1 und G_2/N als Strukturgruppe (N bezeichnet hier den trivial operierenden Normalteiler der natürlichen Operation von G_2 auf G_2/G_1; vgl. 1.3.4).

Zum Beweis des Satzes wird ein Lemma benötigt:

2.5.21.1 Lemma: *Sei Y ein G-Prinzipalbündel über X mit Cozyklus $\{g_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{G})$. Weiter sei für alle $i \in I$ durch*

$$\begin{aligned} s_i : U_i &\longrightarrow U_i \times_k G \\ x &\longmapsto (x\,,\, g_i) \end{aligned}$$

ein lokaler Schnitt $\sigma_i \stackrel{def}{=} h_i^{-1} \circ s_i$ gegeben ($\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$). Dann gilt über den zweifachen Durchschnitten U_{ij}

$$\sigma_j(x) \;=\; \sigma_i(x)\, g_i^{-1}\, g_{ij}(x)\, g_j\,.$$

Beweis: Über U_{ij} gilt

$$\begin{aligned} \sigma_i(x) \;&=\; h_i^{-1}(x, g_i) \;=\; y_i \quad \text{und} \\ \sigma_j(x) \;&=\; h_j^{-1}(x, g_j) \;=\; y_j \quad \text{mit } \; y_i,\, y_j \in Y_x\,. \end{aligned}$$

Nach 1.1.13(iii) und 2.1.19 operiert G von rechts einfach-transitiv auf Y_x, d. h. es existiert genau ein $g'(x) \in G$, so daß $y_j = y_i\, g'(x)$ gilt. Für alle $x \in U_{ij}$ erhält man also

$$\sigma_j(x) \;=\; \sigma_i(x)\, g'(x)\,. \tag{$\star$}$$

Per definitionem (2.1.18) ist die rechte Seite von ($\star$) gleich $h_i^{-1}(x, g_i\, g'(x))$, und durch Anwendung von h_i erhält man

$$h_i \circ \sigma_j(x) \;=\; h_i \circ h_j^{-1}(x, g_j) \;=\; (x, g_{ij}(x)\, g_j) \;=\; h_i \circ h_i^{-1}(x, g_i\, g'(x))\,,$$

woraus $g'(x) = g_i^{-1}\, g_{ij}(x)\, g_j$ folgt. Einsetzen in ($\star$) liefert schließlich die Behauptung.

2.5.21.2 Beweis (von 2.5.21 Satz): Nach 1.2.9 sind $(\pi_1, G/G_1)$ und $(\pi_2, G/G_2)$ geometrische Quotienten, und $(G, \pi_2, G/G_2)$ ist nach 2.5.5 und 2.5.10 ein G_2-Prinzipalbündel. Da π_2 offenbar konstant auf den Fasern von π_1 ist, existiert aufgrund der universellen Eigenschaft für Quotienten 1.2.5(ii) genau ein Morphismus π mit $\pi_2 = \pi \circ \pi_1$.

Sei $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ eine für G trivialisierende Überdeckung von G/G_2. Dann existiert nach 2.3.6 für alle $i \in I$ ein lokaler Schnitt $\sigma_i : U_i \to G$, vermöge dessen ein Morphismus h_i durch

$$\begin{aligned} h_i : \pi^{-1}(U_i) &\longrightarrow U_i \times_k G_2/G_1 \\ gG_1 &\mapsto (gG_2\,, \sigma_i(gG_2)^{-1} gG_1) \end{aligned}$$

gegeben wird. gG_1 (bzw. gG_2) bezeichnet hierbei die Klasse eines Elementes $g \in G$ modulo G_1 (bzw. modulo G_2). $\sigma_i(gG_2)^{-1}gG_1$ ist definiert durch die natürliche Operation von G auf G/G_1 (vgl. 1.3.3). Sei $\sigma_i(gG_2) = gg_2$ mit $g_2 \in G_2$, dann ist

$$\sigma_i(gG_2)^{-1}gG_1 \;=\; g_2^{-1}g^{-1}gG_1 \;=\; g_2^{-1}G_1 \in G_2/G_1\,,$$

d. h. h_i ist wohldefiniert. Weiter wird vermöge σ_i durch

$$\begin{aligned} h'_i : U_i \times_k G_2/G_1 &\longrightarrow \pi^{-1}(U_i) \\ (gG_2\,, g_2G_1) &\mapsto \sigma_i(gG_2)g_2G_1 \end{aligned}$$

ein Morphismus definiert. ($\sigma_i(gG_2)g_2G_1$ ist ebenfalls durch die natürliche Operation von G auf G/G_1 gegeben). Es soll nun gezeigt werden, daß h_i und h'_i zueinander inverse Isomorphismen sind:

Sei $gG_1 \in \pi^{-1}(U_i)$, $(gG_2, g_2G_1) \in U_i \times_k G_2/G_1$ und $\sigma_i(gG_2) = gg'_2$ mit $g'_2 \in G_2$, dann ist

$$\begin{aligned} h'_i \circ h_i(gG_1) &= h'_i(gG_2\,, \sigma_i(gG_2)^{-1}gG_1) \\ &= \sigma_i(gG_2)\sigma_i(gG_2)^{-1}gG_1 \;=\; gG_1\,, \end{aligned}$$

d. h. $h'_i \circ h_i = id$ auf $\pi^{-1}(U_i)$ und

$$\begin{aligned} h_i \circ h'_i(gG_2\,, g_2G_1) &= h_i(\sigma_i(gG_2)g_2G_1) \;=\; h_i(g\,g'_2\,g_2G_1) \\ &= (gG_2\,, (g'_2)^{-1}g^{-1}g\,g'_2\,g_2G_1) \;=\; (gG_2\,, g_2G_1)\,, \end{aligned}$$

d. h. $h_i \circ h'_i = id$ auf $U_i \times_k G_2/G_1$, woraus schließlich $h'_i = h_i^{-1}$ folgt. Damit ist $(G/G_1, \pi, G/G_2)$ eine lokal-triviale Faserung mit typischer Faser G_2/G_1.

Sei jetzt für alle $i \in I$ σ_i wie im obigen Lemma mit $g_i \overset{def}{=} 1_{G_2}$ definiert. Dann gilt über den zweifachen Durchschnitten U_{ij}

$$\sigma_j(gG_2) \;=\; \sigma_i(gG_2)\,g^2_{ij}(gG_2)\,,$$

wobei $\{g^2_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{G_2})$ den Cozyklus von $(G, \pi_2, G/G_2)$ bezeichnet. Also erhält man mit $\sigma_i(gG_2) = gg'_2$

$$\begin{aligned} h_i \circ h_j^{-1}(gG_2\,, g_2G_1) &= h_i(\sigma_j(gG_2)g_2G_1) \;=\; h_i(\sigma_i(gG_2)\,g^2_{ij}(gG_2)g_2G_1) \\ &= h_i(g\,\underbrace{g'_2g^2_{ij}(gG_2)g_2}_{\in G_2}G_1) \;=\; (gG_2\,, (g'_2)^{-1}g^{-1}g\,g'_2\,g^2_{ij}(gG_2)\,g_2G_1) \\ &= (gG_2\,, g^2_{ij}(gG_2)\,g_2G_1)\,. \end{aligned}$$

Bezeichnet N den trivial operierenden Normalteiler von G_2, dann operiert nach 1.2.13 G_2/N effektiv auf G_2/G_1, d. h. durch

$$\begin{tikzcd} U_{ij} \arrow[r, "g^2_{ij}"] \arrow[dr, "g^2_{ij}N"'] & G_2 \arrow[d, two heads, "\varkappa"] \\ & G_2/N \end{tikzcd}$$

wird $\{g^2_{ij}N\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{G_2/N})$ als Cozyklus von $(G/G_1, \pi, G/G_2)$ gegeben, womit die Behauptung folgt.

2.5.22 Bemerkung: Aus dem obigen Beweis folgt unmittelbar, daß das Faserbündel

$$(G/G_1\,,\pi\,,G/G_2\,;\;G_2/G_1\,,G_2/N)$$

zu dem G_2-Prinzipalbündel $(G,\pi_2,G/G_2)$ assoziiert ist.

2.6 Spezielle zu einem Vektorraumbündel assoziierte Faserbündel

2.6.1 Definition: Sei Y ein Rang-n-Vektorraumbündel über X mit zugehörigem Cozyklus $\{g_{ij}\}_{(i,j)\in I^2} \in Z^1(\mathcal{U},\underline{\mathrm{GL}_n})$. Da die Strukturgruppe GL_n durch Multiplikation auf sich frei, also insbesondere effektiv operiert, wird nach 2.1.13 und 2.1.14 ein zu Y stark assoziiertes GL_n-Prinzipalbündel $\mathbf{P}(Y)$ definiert. $\mathbf{P}(Y)$ heißt ***zu Y assoziiertes Prinzipalbündel***.

2.6.2 Bemerkung: Für $x \in X$ kann man die Faser $\mathbf{P}(Y)_x \cong \mathrm{GL}_n$ als die Menge aller Vektorraumisomorphismen der typischen Faser k^n auf die entsprechende Faser Y_x von Y interpretieren:

Sei $\psi_{B_0} : k^n \to Y_x$ der Isomorphismus, der Y_x mit den Koordinaten bzgl. der kanonischen Basis $B_0 = \{e_1,\ldots,e_n\}$ des k^n versieht. Dann erhält man für alle Basen B des k^n ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} k^n \arrow[rr, "\psi_{B_0}^{-1}\circ\psi_B"] \arrow[dr, "\psi_B"'] & & k^n \arrow[dl, "\psi_{B_0}"] \\ & Y_x & \end{tikzcd}$$

und somit eine Bijektion

$$\begin{aligned} \mathcal{I}so(k^n,Y_x) &\longrightarrow \mathrm{GL}_n \\ \psi_B &\longmapsto \psi_{B_0}^{-1}\circ\psi_B\,. \end{aligned}$$

2.6.3 Definition & Satz: Sei Y ein Rang-n-Vektorraumbündel über X mit Cozyklus $\{g_{ij}\}_{(i,j)\in I^2} \in Z^1(\mathcal{U},\underline{\mathrm{GL}_n})$. Dann operiert die Strukturgruppe GL_n in natürlicher Weise (1.3.3) auf der Varietät der $\boldsymbol{m}$-Fahnen $\mathbb{F}(m_1,\ldots,m_j;k^n)$ (1.3.11), bzw. auf der Varietät der Spaltungen $\mathbb{S}(k^n)$ (1.3.7). Nach 1.3.15 ist der Kern dieser Operation in allen Fällen gleich dem Zentrum Z_n von GL_n, und die induzierte Operation (1.2.13) von PGL_{n-1} auf $\mathbb{F}(\boldsymbol{m};k^n)$, bzw. auf $\mathbb{S}(k^n)$, ist effektiv. Vermöge 2.1.14 werden hiermit zu Y assoziierte Faserbündel $\mathbb{F}(\boldsymbol{m};Y)$ und $\mathbb{S}(Y)$ mit $\mathbb{F}(\boldsymbol{m};k^n)$, bzw. $\mathbb{S}(k^n)$, als typischer Faser, PGL_{n-1} als Strukturgruppe und Cozyklus $\{<g_{ij}>\}_{(i,j)\in I^2} \in Z^1(\mathcal{U},\underline{\mathrm{PGL}_{n-1}})$ definiert. $\mathbb{F}(\boldsymbol{m};Y)$ wird als das ***zu Y assoziierte m-Fahnenbündel*** bezeichnet und $\mathbb{S}(Y)$ heißt ***zu Y assoziiertes Spaltungsbündel***.

Folgende Spezialfälle von $\mathbb{F}(m_1,\ldots,m_j;Y)$ erhalten besondere Bezeichnungen:

$$\mathbb{P}(Y) \stackrel{def}{=} \mathbb{F}(1;Y) \text{ heißt } \textbf{\textit{zu Y assoziiertes projektives Bündel}};$$
$$\mathbb{G}_k(Y) \stackrel{def}{=} \mathbb{F}(k;Y) \text{ heißt } \textbf{\textit{zu Y assoziiertes Graßmannsches Bündel}};$$
$$\mathbb{F}(Y) \stackrel{def}{=} \mathbb{F}(1,\dots,n-1;Y) \text{ heißt } \textbf{\textit{zu Y assoziiertes Fahnenbündel}};$$

vgl. hierzu auch 1.3.9 und 1.3.12 . Insbesondere sind für beliebige $\boldsymbol{m} = (m_1,\dots,m_j)$, mit $0 < m_1 < \cdots < m_j < n$, sämtliche Faserbündel $\mathbb{F}(\boldsymbol{m};Y)$, sowie $\mathbb{S}(Y)$ sogar *stark* zueinander assoziiert (2.1.14).

2.6.4 Definition & Satz: Sei Y ein Rang-n-Vektorraumbündel über X mit Cozyklus $\{g_{ij}\}_{(i,j)\in I^2} \in Z^1(\mathcal{U},\underline{\mathrm{GL}_n})$. Dann wird durch das Diagramm

$$\begin{tikzcd} U_{ij} \arrow[r, "g_{ij}"] \arrow[dr, "g'_{ij}"'] & \mathrm{GL}_n \arrow[d, two heads, "\varkappa"] \\ & \mathrm{PGL}_{n-1} \end{tikzcd}$$

ein Cozyklus $\{< g_{ij} >\}_{(i,j)\in I^2} \in Z^1(\mathcal{U},\underline{\mathrm{PGL}_{n-1}})$ definiert. Da PGL_{n-1} durch Multiplikation auf sich insbesondere effektiv operiert, wird vermöge 2.1.14 hierdurch ein PGL_{n-1}-Prinzipalbündel $\mathbf{P}\mathbb{P}(Y)$ über X gegeben. $\mathbf{P}\mathbb{P}(Y)$ heißt ***zu Y assoziiertes projektives Prinzipalbündel*** (zur Bezeichnung *projektiv* vgl. 2.8.8 !).

Nach Konstruktion ist $\mathbf{P}\mathbb{P}(Y)$ zu $\mathbb{F}(m_1,\dots,m_j;Y)$ und $\mathbb{S}(Y)$ stark assoziiert; vgl. 2.6.3 .

2.6.5 Folgerung: *Sei X eine irreduzible (bzw. quasikompakte, bzw. glatte) Varietät, dann ist jedes Rang-n-Vektorraumbündel Y über X irreduzibel (bzw. quasikompakt, bzw. glatt) und jedes der oben definierten assoziierten Faserbündel $\mathbf{P}(Y)$, $\mathbf{P}\mathbb{P}(Y)$, $\mathbb{F}(\boldsymbol{m};Y)$ und $\mathbb{S}(Y)$ ist irreduzibel (bzw. quasikompakt, bzw. glatt).*

Beweis: (i) Die typische Faser k^n eines Vektorraumbündels ist gleichermaßen irreduzibel, quasikompakt und glatt.

(ii) GL_n (bzw. PGL_{n-1}) als typische Faser von $\mathbf{P}(Y)$ (bzw. $\mathbf{P}\mathbb{P}(Y)$) ist wegen 1.1.6 glatt, als affine Varietät aufgefaßt quasikompakt und nach 1.4.6 irreduzibel.

(iii) Die typische Faser $\mathbb{F}(\boldsymbol{m};k^n)$ (bzw. $\mathbb{S}(k^n)$) ist als homogene Varietät glatt (1.3.2) und als projektive (bzw. quasi-projektive) Varietät quasikompakt. Die Irreduzibilität folgt aus 1.4.6 und 1.2.10 .

Die jeweiligen Behauptungen für die Totalvarietäten ergeben sich nun unmittelbar aus 2.1.16 .

2.6.6 Bemerkung: In 2.3.14 wurde gezeigt, daß Rang-n-Vektorraumbündel über einer Varietät X und lokal-freie Garben vom Rang n über $\mathcal{O}_X$ einander entsprechen, d. h. man kann von einer lokal-freien Garbe ausgehend assoziierte Faserbündel wie in 2.6.1, 2.6.3 und 2.6.4 konstruieren.

In [EGA I] werden zu einer beliebigen kohärenten Garbe $\mathcal{E}$ über $\mathcal{O}_X$ Vektorraum*faserungen* $\mathbf{V}(\mathcal{E})$ [EGA I, 9.4.9], Graßmannsche *Faserungen* $\mathbf{Grass}_k(\mathcal{E})$ (bzw. projektive

Faserungen $\mathbf{P}(\mathcal{E})$) [EGA I, 9.7.5] und Fahnen*faserungen* $\mathbf{Drap}_{\boldsymbol{m}}(\mathcal{E})$ [EGA I, 9.9.4] konstruiert, die für $\mathcal{E}$ lokal-frei zu Vektorraumbündeln (bzw. Faserbündeln) werden. Des weiteren wird in [EGA I, 9.6.4] für $\mathcal{E}$ lokal-frei ein Gruppen-Schema $\mathbf{GL}(\mathcal{E})$ über X definiert. Mit Ausnahme von $\mathbf{GL}(\mathcal{E})$ sind diese Konstruktionen *dual* zu den hier dargestellten; vgl. [EGA I, 9.6.2, 9.6.5]: Die Garbe der Schnitte von $\mathbf{V}(\mathcal{E})$ ist gegeben durch $\mathcal{E}^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$; vgl. hierzu [EGA I, 9.4.10] bzgl. $\mathbf{V}(\mathcal{E})$, sowie [EGA II, 4.2.6 f] bzgl. $\mathbf{P}(\mathcal{E})$.

Geht man umgekehrt von einem Rang-n-Vektorraumbündel Y über X aus und bezeichnet mit $\mathcal{Y}_X$ die zu Y assoziierte lokal-freie Garbe der Schnitte von Y (2.3.10, 2.3.12), dann identifizieren sich Y und $\mathbf{V}(\mathcal{Y}_X^\vee)$ mit $\mathcal{Y}_X^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{Y}_X^\vee, \mathcal{O}_X)$ vermöge 0.1.9, da $(\mathcal{Y}_X^\vee)^\vee$ kanonisch isomorph zu $\mathcal{Y}_X^\vee$ ist. Ebenso hat man Entsprechungen $\mathbb{P}(Y) = \mathbf{P}(\mathcal{Y}_X^\vee)$, $\mathbb{G}_k(Y) = \mathbf{Grass}(\mathcal{Y}_X^\vee)$, $\mathbb{F}(\boldsymbol{m}; Y) = \mathbf{Drap}_{\boldsymbol{m}}(\mathcal{Y}_X^\vee)$, während $\mathbf{P}(Y) = \mathbf{GL}(\mathcal{Y}_X)$ ist; vgl. auch [EGA I, 9.6.1, 9.6.2 und 9.6.5] mit 2.6.2: $\mathbf{GL}(\mathcal{E})$ operiert schematheoretisch auf $\mathbf{V}(\mathcal{E})$.

Die in [EGA I] und [EGA II] ausgeführten Konstruktionen von Faserungen sind wesentlich allgemeiner und vom garben- bzw. schematheoretischen Standpunkt befriedigender als die hier dargestellten: erstens ist die Kategorie der Schemata erheblich umfassender als die der k-Ultraschemata (bzw. der Varietäten) und zweitens sind - mit Ausnahme von $\mathbf{GL}(\mathcal{E})$ - die Konstruktionen sogar für kohärente Garben möglich. Dennoch erweist sich das hier gewählte, vielleicht etwas „antik“ anmutende Konzept der Faserbündel von Varietäten für die Anwendung in der Schnitttheorie von Prinzipalbündeln als geeigneter. Entscheidend hierfür ist das ursprünglich topologische Konzept der Betonung von Strukturgruppe und Cozyklus eines Faserbündels; vgl. [Hir, Kap. I, §3 und §4].

2.6.7 Satz: *Seien P ein G-Prinzipalbündel über X mit G affin, sowie $G_1 \subset G_2 \subset G$ abgeschlossene Untergruppen von G gegeben. Weiter seien zu P assoziierte Faserbündel $(P/G_1, \pi_1, X; G/G_1, G/N_1)$ und $(P/G_2, \pi_2, X; G/G_2, G/N_2)$ nach 2.1.14 definiert. (Die Strukturgruppe G von P operiert in natürlicher Weise (1.3.3) auf den typischen Fasern G/G_1 bzw. G/G_2; bezeichnen N_1 bzw. N_2 die trivial operierenden Normalteiler von G, so ist die induzierte Operation wegen 1.2.13 effektiv.)*

Dann gilt:

(i) *Es ist ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd} P/G_1 \arrow[dd, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\varrho"] & \\ & P/G_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\ X & \end{tikzcd}$$

gegeben, d. h. ϱ ist ein Morphismus von Faserbündeln über X.

(ii) *Ist zusätzlich G_2 speziell (2.5.9), dann wird $(P/G_1, \varrho, P/G_2)$ zu einem Faserbündel mit typischer Faser G_2/G_1 und Strukturgruppe G_2/N, wobei N der trivial operierende Normalteiler der natürlichen Operation von G_2 auf G_2/G_1 ist.*

Beweis: (i) Bezeichne $\{g_{lm}\} \in Z^1(\mathcal{V}, \underline{G})$ den Cozyklus von P und $\pi : G/G_1 \to G/G_2$ die kanonische Projektion (vgl. 2.5.21), dann werden lokal Morphismen

$$id \times_k \pi : V_l \times_k G/G_1 \longrightarrow V_l \times_k G/G_2$$

über offenen Untervarietäten $V_l \subset X$ gegeben, wobei $\mathcal{V} = \{V_l\}_{l \in L}$ eine offene Überdeckung von X ist. Für alle $(l, m) \in L^2$ erhält man nun ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
V_{lm} \times_k G/G_1 \arrow[r, "id \times_k \pi"] \arrow[d, "id \times_\omega g_{lm} N_1"] & V_{lm} \times_k G/G_2 \arrow[d, "id \times_{\omega'} g_{lm} N_2"] \\
V_{lm} \times_k G/G_1 \arrow[r, "id \times_k \pi"'] & V_{lm} \times_k G/G_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(x, gG_1) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (x, gG_2) \arrow[d, mapsto] \\
(x, g_{lm}(x) N_1 g G_1) \arrow[r, mapsto] & (x, g_{lm}(x) N_2 g G_2)\,,
\end{tikzcd}$$

denn nach 1.2.13 gilt $g_{lm}(x) N_1 g G_1 = g_{lm}(x) g G_1$ bzw. $g_{lm}(x) N_2 g G_2 = g_{lm}(x) g G_2$, d. h. der untere waagerechte Pfeil ist als $id \times_k \pi$ wohldefiniert. Zur Definition der senkrechten Pfeile vgl. 2.2.3. Nach 2.2.4 wird hierdurch ein Morphismus $\varrho : P/G_1 \to P/G_2$ von Faserbündeln über X gegeben.

(ii) Mit G_2 speziell erhält man wegen 2.5.21 über $V_l \subset X$ das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\pi_1^{-1}(V_l) \supset \varrho^{-1}(W_{li}) \arrow[rr, "h_l^1|_{\dots}", "\cong"'] \arrow[dd, "\varrho|_{\dots}"'] \arrow[dr] & & V_l \times_k \pi^{-1}(U_i) \subset (V_l \times_k G/G_1) \arrow[dl, "id \times_k h_i"'] \arrow[dd, "(id \times_k \pi)|_{\dots}"] \\
& V_l \times_k U_i \times_k G_2/G_1 \arrow[dl] \arrow[dr, "pr_{1,2}"] & \\
\pi_2^{-1}(V_l) \supset (h_l^2)^{-1}(V_l \times_k U_i) \arrow[rr, "\cong", "h_l^2|_{\dots}"'] & & V_l \times_k U_i \subset (V_l \times_k G/G_2)
\end{tikzcd}$$

mit $W_{li} \overset{def}{=} (h_l^2)^{-1}(V_l \times_k U_i)$, wobei für alle $l \in L$ (h_l^1, V_l) und (h_l^2, V_l) Karten von P/G_1 bzw. P/G_2, sowie für alle $i \in I$ (h_i, U_i) Karten von $(G/G_1, \pi, G/G_2)$ bezeichnen (vgl. den Beweis von 2.5.21). Ferner sind wegen 2.3.2.1 sämtliche Inklusionen „$\subset$“ offen. Es folgt nun, daß auch das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\varrho^{-1}(W_{li}) \arrow[r, "h_l^1|_{\dots}", "\cong"'] \arrow[dd] & V_l \times_k \pi^{-1}(U_i) \arrow[r, "id \times_k h_i", "\cong"'] & V_l \times_k U_i \times_k G_2/G_1 \arrow[d, "(h_l^2|_{\dots})^{-1} \times_k id", "\cong"'] \\
& & W_{li} \times_k G_2/G_1 \arrow[dll, "pr_1"] \\
W_{li} & &
\end{tikzcd}$$

kommutiert, d. h. für alle $(l, i) \in L \times I$ wird durch

$$((h_l^2|_{\dots})^{-1} \times_k id_{G_2/G_1} \circ id_{V_l} \times_k h_i \circ h_l^1|_{\dots}\,,\, W_{li})$$

eine lokale Trivialisierung gegeben. $V_l \times_k G/G_2$ wird von $\{V_l \times_k U_i\}_{i\in I}$ überdeckt, und $\{\pi_2^{-1}(V_l)\}_{l\in L}$ ist eine offene Überdeckung von P/G_2. Damit ist $\mathcal{W} \overset{def}{=} \{W_{li}\}_{(l,i)\in L\times I}$ nach Konstruktion eine offene und für P/G_1 trivialisierende Überdeckung von P/G_2.

Über den zweifachen Durchschnitten $W_{li,mj} = W_{li} \cap W_{mj}$ erhält man jetzt das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
W_{li,mj} \times_k G_2/G_1 \arrow[r, "h_m^2|_{\dots}\times_k id", "\cong"'] \arrow[d] & V_{lm} \times_k U_{ij} \times_k G_2/G_1 \arrow[r, "id\times_k h_j^{-1}", "\cong"'] & V_{lm} \times_k \pi^{-1}(U_{ij}) \arrow[d, "\cong"', "h_l^1|_{\dots}\circ(h_m^1|_{\dots})^{-1}"] \\
W_{li,mj} \times_k G_2/G_1 & V_{lm} \times_k U_{ij} \times_k G_2/G_1 \arrow[l, "\cong"', "(h_l^2|_{\dots})^{-1}\times_k id"] & V_{lm} \times_k \pi^{-1}(U_{ij}) \arrow[l, "\cong"', "id\times_k h_i"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(y_2, g_2G_1) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (x, gG_2, g_2G_1) \arrow[r, mapsto] & (x, g'G_1) \arrow[d, mapsto] \\
(y_2', g''G_1) & (x, g_{lm}(x)g'G_2, g''G_1) \arrow[l, mapsto] & (x, g_{lm}(x)g'G_1)\,, \arrow[l, mapsto]
\end{tikzcd}$$

wobei

$$g' = \sigma_j(gG_2)g_2\,, \tag{1}$$

$$g'' = \sigma_i(g_{lm}(x)g'G_2)^{-1}g_{lm}(x)g'\,. \tag{2}$$

Sind zusätzlich

$$\sigma_i(gG_2) = g\,g_2' \quad \text{und} \tag{3}$$

$$\sigma_j(gG_2) = \sigma_i(gG_2)\,g_{ij}^2(gG_2) \tag{4}$$

gegeben (man vergleiche hierzu wieder 2.5.21.2), so gilt:

$$\begin{aligned}
(h_l^2|_{\dots})^{-1}(x, g_{lm}(x)g'G_2) &= (h_l^2|_{\dots})^{-1}(x, g_{lm}(x)g\,\underbrace{g_2'g_{ij}^2(gG_2)g_2}_{\in G_2}G_2) \\
&= (h_l^2|_{\dots})^{-1}(x, g_{lm}(x)gG_2) = y_2' = y_2\,,
\end{aligned}$$

d. h. durch das obige Diagramm wird ein Isomorphismus über $W_{li,mj}$ gegeben:

$$\begin{aligned}
W_{li,mj} \times_k G_2/G_1 &\xrightarrow{\cong} W_{li,mj} \times_k G_2/G_1 \\
(y_2\,,\ g_2G_1) &\longmapsto (y_2\,,\ g''G_1)\,.
\end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (1) bis (4) erhält man nun Morphismen

$$\begin{aligned}
g_{li,mj}^2 &= (\sigma_i(g_{lm}(x)g\,\underbrace{g_2'g_{ij}^2(gG_2)g_2}_{\in G_2}G_2))^{-1}g_{lm}(x)\,\sigma_j(gG_2) \\
&= (\sigma_i(g_{lm}(x)gG_2))^{-1}g_{lm}(x)\,\sigma_j(gG_2) \\
&= (g_{lm}(x)g\,g_2')^{-1}g_{lm}(x)g\,g_2'g_{ij}^2(gG_2) \\
&= g_{ij}^2(gG_2)\,,
\end{aligned}$$

d. h. $g^2_{li,mj}$ nimmt Werte in G_2 an. Andererseits gilt über den dreifachen Durchschnitten $W_{li,mj,nk}$:

$$g^2_{li,nk}(y_2)\, g^2_{nk,mj}(y_2) \;=\; g^2_{ik}(gG_2)\, g^2_{kj}(gG_2) \;=\; g^2_{ij}(gG_2)\,,$$

also definieren die $g^2_{li,mj}$ einen Cozyklus $\{g^2_{li,mj}\} \in Z^1(\mathcal{W}, \underline{G_2})$. Bezeichnet N den Kern der natürlichen Operation (1.3.3) von G_2 auf G_2/G_1, dann operiert G_2/N effektiv auf G_2/G_1 (1.2.13).

Somit ist $(P/G_1, \varrho, P/G_2)$ ein Faserbündel mit typischer Faser G_2/G_1 und Cozyklus $\{g^2_{li,mj}N\} \in Z^1(\mathcal{W}, \underline{G_2/N})$.

2.6.8 Korollar: *Unter den Voraussetzungen von 2.6.7 sei zusätzlich* $G_1 = 1$ *angenommen, dann gilt:*

(i) *Es ist ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\varrho"] & \\ X & P/G_2 \arrow[l, "\pi_2"] \end{tikzcd}$$

gegeben.

(ii) *Mit* G_2 *speziell wird* $(P, \varrho, P/G_2)$ *zu einem* G_2*-Prinzipalbündel.*

Beweis: (i) Per definitionem ist $P/1 = P$, d. h. die Behauptung folgt sofort aus 2.6.7(i).

(ii) Nach 2.6.7(ii) ist $(P, \varrho, P/G_2)$ ein Faserbündel mit typischer Faser G_2, und da die Multiplikation von G_2 effektiv ist, gilt $N = 1$.

2.6.9 Korollar: *Sei* Y *ein Rang-n-Vektorraumbündel über* X *und* $P = \mathbf{P}(Y)$ *das assoziierte Prinzipalbündel (2.6.1), dann erhält man kommutative Diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{P}(Y) \arrow[d] \arrow[dr, "\varrho_P"] & \\ X\,, & \mathbf{P}\mathbb{P}(Y) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

wobei $\mathbf{P}(Y)$ *ein* k^**-Prinzipalbündel über dem assoziierten projektiven Prinzipalbündel*

$\mathbf{P}\mathbb{P}(Y)$ (2.6.4) ist und

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{P}(Y) \arrow[dr, "\varrho_S"] \arrow[ddr, "\varrho_F"'] \arrow[ddd] & \\
& \mathbb{S}(Y) \arrow[d, "\varrho_A"] \arrow[ddl] \\
& \mathbb{F}(Y) \arrow[dl] \\
X\,, &
\end{tikzcd}$$

wobei $(\mathbf{P}(Y), \varrho_S, \mathbb{S}(Y))$ ein T_n-Prinzipalbündel, $(\mathbf{P}(Y), \varrho_F, \mathbb{F}(Y))$ ein B_n-Prinzipalbündel und $(\mathbb{S}(Y), \varrho_A, \mathbb{F}(Y))$ ein Faserbündel mit typischer Faser B_n/T_n und Strukturgruppe B_n/Z_n ist.

Beweis: Die Gruppen Z_n, T_n und B_n sind nach 2.5.17 speziell. Die Behauptungen folgen somit aus 2.6.8 und 2.6.7 . (Den Kern der natürlichen Operation von B_n auf B_n/T_n erhält man aus dem Beweis von 1.3.15: Es reicht dort Elementarmatrizen $q(i,j)$ mit $i < j$ zu betrachten; diese sind aus B_n, womit $N = Z_n$ folgt.)

2.6.10 Korollar: *Es seien Y ein Rang-n-Vektorraumbündel über X, sowie die assoziierten Bündel $\mathbf{P}(Y)$ und $\mathbb{S}(Y)$ gegeben. Weiter bezeichne für $0 \leq k \leq n$*

$$\boldsymbol{T}_k \overset{def}{=} \underbrace{k^* \times_k \cdots \times_k k^*}_{k\text{-mal}} \times_k \underbrace{1 \times_k \cdots \times_k 1}_{(n-k)\text{-mal}}$$

abgeschlossene k-dimensionale Tori von $T_n \subset \mathrm{GL}_n$, dann sind nach 2.1.14 zu Y (bzw. $\mathbf{P}(Y)$) assoziierte Faserbündel

$$(\mathbb{T}_k(Y), \pi_k, X; \mathrm{GL}_n/\boldsymbol{T}_k, \mathrm{GL}_n/N_k)$$

definiert (N_k ist der Kern der natürlichen Operation von GL_n auf $\mathrm{GL}_n/\boldsymbol{T}_k$). Insbesondere ist $\mathbb{T}_0(Y) = \mathbf{P}(Y)$ und $\mathbb{T}_n(Y) = \mathbb{S}(Y)$. Das in 2.6.9 gegebene T_n-Prinzipalbündel $(\mathbf{P}(Y), \varrho_S, \mathbb{S}(Y))$ faktorisiert dann über $\mathbb{T}_k(Y)$ für $0 \leq k \leq n$, d. h. das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{P}(Y) \arrow[dr, "\tau_1"] \arrow[dddd, "\pi_0"'] & & & & \\
& \mathbb{T}_1(Y) \arrow[dr, "\tau_2"] \arrow[dddl, "\pi_1"] & & & \\
& & \ddots \arrow[dr, "\tau_{n-1}"] & & \\
& & & \mathbb{T}_{n-1}(Y) \arrow[dr, "\tau_n"] \arrow[dlll, "\pi_{n-1}"] & \\
X & & & & \mathbb{S}(Y) \arrow[llll, "\pi_n"]
\end{tikzcd} \tag{D.1}$$

ist kommutativ mit $\tau_n \circ \cdots \circ \tau_1 = \varrho_S$, und für $1 \leq k \leq n$ ist $(\mathbb{T}_{k-1}(Y), \tau_k, \mathbb{T}_k(Y))$ ein k^*-Prinzipalbündel.

Beweis: Nach 2.6.7(i) sind für $1 \le k \le n$ kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbb{T}_{k-1}(Y) \arrow[dr, "\tau_k"] \arrow[dd, "\pi_{k-1}"'] & \\ & \mathbb{T}_k(Y) \arrow[dl, "\pi_k"] \\ X\,, & \end{tikzcd} \tag{D.2}$$

gegeben. Gemäß der Konstruktion der $\mathbb{T}_k(Y)$ erhält man jetzt Diagramm (1) durch Zusammensetzen der Diagramme (2).

Wegen 2.5.17 ist $\boldsymbol{T}_k$ speziell für beliebiges k. Damit ist $(\mathbb{T}_{k-1}(Y), \tau_k, \mathbb{T}_k(Y))$ nach 2.6.7(ii) ein Faserbündel mit typischer Faser

$$\boldsymbol{T}_k/\boldsymbol{T}_{k-1} \cong 1 \times_k \cdots \times_k 1 \times_k k^* \times_k 1 \times_k \cdots \times_k 1\,,$$

wobei k^* an der k-ten Stelle steht. Der Kern der natürlichen Linksoperation von $\boldsymbol{T}_k$ auf $\boldsymbol{T}_k/\boldsymbol{T}_{k-1}$ ist offenbar ebenfalls $\boldsymbol{T}_{k-1}$, d. h. typische Faser und Strukturgruppe können mit k^* identifiziert werden. Die natürliche Operation ist dann genau die Multiplikation in k^*.

2.6.11 Bemerkung: Mit dem gleichen Beweis wie oben zeigt man, daß $(\mathbb{T}_{k-l}, \tau, \mathbb{T}_k)$ ein Prinzipalbündel mit Strukturgruppe

$$T_l \cong 1 \times_k \cdots \times_k 1 \times_k \underbrace{k^*}_{(k-l+1)\text{-te Stelle}} \times_k \cdots \times_k \underbrace{k^*}_{k\text{-te Stelle}} \times_k 1 \times_k \cdots \times_k 1$$

ist, wobei wegen Diagramm (D.1) $\tau = \tau_k \circ \cdots \circ \tau_{k-l+1}$ gilt.

2.6.12 Korollar: *Es sei ein Rang-n-Vektorraumbündel Y über X gegeben. Dann konstituieren die assoziierten Faserbündel $\mathbb{F}(Y)$ und $\mathbb{F}(\boldsymbol{m};Y)$ (für $\boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_k, n)$ beliebig) ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}(Y) \arrow[dr, "\varrho"] \arrow[dd, "\pi_1"'] & \\ & \mathbb{F}(\boldsymbol{m};Y) \arrow[dl, "\pi_2"] \\ X\,, & \end{tikzcd}$$

und $(\mathbb{F}(Y), \varrho, \mathbb{F}(\boldsymbol{m};Y))$ wird zu einem Faserbündel mit typischer Faser $P_{\boldsymbol{m}}/B_n$.

Beweis: Es ist $\mathbb{F}(Y) = \mathbf{P}(Y)/B_n$ und $\mathbb{F}(\boldsymbol{m};Y) = \mathbf{P}(Y)/P_{\boldsymbol{m}}$ in den Bezeichnungen von 2.6.7, womit die Behauptungen wegen 2.5.19 folgen.

2.7 Reduktion und Erweiterung der Strukturgruppe

2.7.1 Vorbemerkung: Für einige Fragestellungen bei Faserbündeln, insbesondere bei Vektorraumbündeln, ist es wichtig zu wissen, ob die Übergangsmorphismen eines gegebenen Faserbündels Y mit Strukturgruppe G evtl. Werte ausschließlich in einer Untergruppe $H \subset G$ annehmen. Ist eine solche Untergruppe H bekannt und besitzt - in einer noch zu präzisierenden Weise - „günstigere“ Eigenschaften als G, so hat dies Konsequenzen für die Geometrie von Y.

2.7.2 Definition: Es seien ein Faserbündel $(Y, \pi, X; F, G)$ mit zugehörigem Cozyklus $\{g_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{G})$ und H eine algebraische Untergruppe (1.1.2) von G gegeben. Y besitzt eine ***Reduktion der Strukturgruppe von G auf H***, falls ein zu $\{g_{ij}\}$ cohomologer (2.2.5) Cozyklus $\{g'_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{H})$ existiert; d. h. in anderen Worten: Es existieren für alle $i \in I$ $\gamma_i \in \underline{G}(U_i)$, so daß für alle $(i,j) \in I^2$ und $x \in U_{ij}$

$$g'_{ij}(x) \;=\; \gamma_i(x)\, g_{ij}(x)\, \gamma_j(x)^{-1}$$

gilt und $g'_{ij}(x) \in H$ ist. $\{g'_{ij}\}$ wird als ***reduzierter Cozyklus von Y*** bezeichnet.

Sei $\varepsilon : G \to G'$ eine Immersion von algebraischen Gruppen (1.1.2) gegeben, so sagt man, Y besitzt eine ***Erweiterung der Strukturgruppe von G nach G'***. In diesem Sinne kann jedes Faserbündel mit affiner (bzw. linearer) Strukturgruppe (1.1.7) als Faserbündel mit GL_N als Strukturgruppe aufgefaßt werden. Insbesondere besitzt ein triviales Faserbündel eine Erweiterung der Strukturgruppe nach jeder beliebigen algebraischen Gruppe.

2.7.3 Folgerung: *Sei Y ein Faserbündel mit Cozyklus $\{g_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{G})$ und Reduktion der Strukturgruppe von G auf H, sowie $\{g'_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{H})$ der reduzierte Cozyklus. Weiter bezeichne Y' das durch $\{g'_{ij}\}$ nach 2.1.13 definierte Faserbündel mit gleicher typischer Faser wie Y. Dann sind Y' und Y isomorph. Ist Y' ein Vektorraumbündel, dann ist Y' (definiert nach 2.1.21) als* Vektorraumbündel *isomorph zu Y.*

Beweis: Nach Voraussetzung sind für alle $i \in I$ lokal Isomorphismen

$$\begin{aligned} U_i \times_k F &\xrightarrow{\cong} U_i \times_k F \\ (x\,,f) &\longmapsto (x, \gamma_i(x) f) \end{aligned}$$

gegeben, so daß über den zweifachen Durchschnitten die Diagramme

$$\begin{tikzcd} U_{ij} \times_k F \arrow[r] \arrow[d, "id\times_\omega g_{ij}"'] & U_{ij} \times_k F \arrow[d, "id\times_\omega \gamma_i\, g_{ij}\, (\gamma_j \circ inv)"] \\ U_{ij} \times_k F \arrow[r] & U_{ij} \times_k F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (x\,,f) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (x, \gamma_j(x) f) \arrow[d, mapsto] \\ (x, g_{ij}(x) f) \arrow[r, mapsto] & (x, \gamma_i(x) g_{ij}(x) f) \end{tikzcd}$$

kommutieren (zur Definition von $id \times_\omega g_{ij}$ vgl. 2.2.3). Folglich setzen sich die lokalen Isomorphismen zu einem globalen Isomorphismus von Y nach Y' zusammen. Sind Y und Y' Vektorraumbündel, so ist nach Voraussetzung Y zu Y' äquivalent 2.2.5, und die Behauptung folgt aus 2.2.8.

2.7.4 Folgerung: *Ein Faserbündel $(Y, \pi, X; F, G)$ ist genau dann trivial, wenn es eine Reduktion der Strukturgruppe von G auf 1 besitzt.*

Beweis: Die Behauptung ergibt sich sofort aus 2.7.3 und 2.1.12.

2.7.5 Folgerung: *Seien Y ein G-Prinzipalbündel und Y' ein G'-Prinzipalbündel über X gegeben, wobei G eine algebraische Untergruppe von G' sei. Existiert ein Morphismus von Prinzipalbündeln $\varphi : Y \to Y'$ (2.2.1), dann besitzt Y' eine Reduktion der Strukturgruppe von G' nach G.*

Beweis: Die Behauptung folgt direkt aus 2.2.7.

2.7.6 Satz: *Ein G-Prinzipalbündel Y über X ist genau dann trivial, wenn es einen globalen Schnitt besitzt.*

Beweis: Sei $\sigma : X \to Y$ ein globaler Schnitt von Y. Nach dem Beweis von 2.3.7 definiert σ vermöge

$$\begin{tikzcd} X \times_k 1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "pr_1", "\cong"'] & & Y \\ & X \arrow[ur, "\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

einen Morphismus φ von Faserbündeln, der trivialerweise 1-äquivariant ist. Nach 2.7.5 besitzt deshalb Y eine Reduktion der Strukturgruppe von G auf 1, d. h. Y ist trivial (2.7.4).

Die Umkehrung folgt sofort aus 2.3.6.

2.7.7 Bemerkung: Die Reduktion der Strukturgruppe eines Faserbündels ist also - salopp gesprochen - ein Maß dafür, wie „weit“ es vom trivialen Bündel „entfernt“ ist.

Bei Vektorraumbündeln lassen sich mit diesem Konzept Fragen nach der Existenz von Unterbündeln oder Zerlegungen in Bündel kleineren Ranges eines gegebenen Vektorraumbündels behandeln.

2.7.8 Satz: *Sei Y ein Rang-n-Vektorraumbündel mit Reduktion der Strukturgruppe nach der abgeschlossenen Untergruppe der Blockmatrizen P_k (vgl. 1.3.8), dann besitzt Y ein Rang-k-Unterbündel Y_k.*

Beweis: Der k-dimensionale Untervektorraum

$$k^k \overset{def}{=} \{v \in k^n \mid v = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0),\ x_i \in k\}$$

ist invariant unter der Linksoperation von P_k, und der auf k^k trivial operierende Normalteiler $N \subset P_k$ ist gegeben durch die Matrizen der Form

$$\begin{array}{r} k\left\{\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\end{array}}\right. \\ n-k\left\{\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\end{array}}\right. \end{array} \left(\begin{array}{c|c} 1 & b \\ \hline 0 & a_2 \end{array}\right),$$

mit $a_2 \in \mathrm{GL}_{n-k}$ und $b \in \mathrm{Mat}(k \times (n-k))$ (vgl. 1.3.8). Sei $\{g'_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{P_k})$ der reduzierte Cozyklus von Y und Y' durch $\{g'_{ij}\}$ definiert (2.1.21), dann besitzt Y' nach 2.3.2 ein abgeschlossenes Unterbündel Y'_k mit k^k als typischer Faser und dem Cozyklus $\{[g'_{ij}]\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{P_k/N})$. Nach obiger Konstruktion operiert P_k/N linear und effektiv auf k^k, d. h. Y'_k ist ein Rang-k-Vektorraumbündel. Die Behauptung folgt jetzt direkt aus 2.7.3.

2.7.9 Bemerkung: Die Strukturgruppe P_k/N des Untervektorraumbündels Y'_k im obigen Beweis ist isomorph zu GL_k; vgl. 2.5.18.2(i).

2.7.10 Definition & Satz: In den Bezeichnungen von 2.7.8 wird eine Operation von P_k auf dem Quotientenvektorraum k^n/k^k durch

$$\begin{aligned} P_k \times_k k^n/k^k &\longrightarrow k^n/k^k \\ (a\,,[v]) &\longmapsto [av] \end{aligned}$$

gegeben. Sei $[v] = [v']$, dann existiert ein $w \in k^k$ mit $v' = v + w$, d. h. für $a \in P_k$ ist

$$[av'] \;=\; [a(v+w)] \;=\; [av + aw] \;=\; [av]\,,$$

da $aw \in k^k$ (vgl. den Beweis von 2.7.8). Die Operation ist also wohldefiniert.

Der auf k^n/k^k trivial operierende Normalteiler $M \subset P_k$ ist gegeben durch die Matrizen der Form

$$\begin{array}{r} k\left\{\vphantom{a_1}\right. \\ n-k\left\{\vphantom{0}\right. \end{array} \left(\begin{array}{c|c} a_1 & b \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right),$$

mit $a_1 \in \mathrm{GL}_k$ und $b \in \mathrm{Mat}(k \times (n-k))$, vgl. 1.3.8. Jedes $v \in k^n$ schreibt sich als $v = v_k + v_{n-k}$ mit $v_k \in k^k$ und $v_{n-k} \in k^{n-k}$, wobei

$$k^{n-k} \stackrel{def}{=} \{v \in k^n \mid v = (0, \ldots, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n),\, x_i \in k\}\,.$$

Ist $a \in M$, so gilt

$$a[v] \;=\; a[v_k + v_{n-k}] \;=\; a[v_{n-k}] \;=\; [av_{n-k}] \;=\; [w + v_{n-k}] \;=\; [v_{n-k}] \;=\; [v]\,,$$

wobei $w \in k^k$. Andererseits sieht man sofort, daß für $a \in P_k$ mit $a_2 \neq 1$ ein $u \in k^{n-k}$ existiert, so daß $au \neq u$ gilt. Insgesamt operiert also nach 1.2.13 P_k/M effektiv und nach Konstruktion linear auf k^n/k^k, d. h. nach 2.1.21 wird durch den Cozyklus $\{[g'_{ij}]\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{P_k/M})$ ein Rang-$(n-k)$-Vektorraumbündel Y'/Y'_k gegeben und als ***Quotientenvektorraumbündel*** bezeichnet. Ausgehend von Y wird vermöge 2.7.3 durch das Rang-k-Unterbündel Y_k (vgl. 2.7.8) ein ***Rang-(n-k)-Quotientenvektorraumbündel*** $\boldsymbol{Y/Y_k}$ definiert.

2.7.11 Bemerkung: In Analogie zu 2.7.9 sieht man, daß die Strukturgruppe P_k/M des Quotientenvektorraumbündels Y'/Y'_k (bzw. Y/Y_k) isomorph zu GL_{n-k} ist.

2.7.12 Satz: *Sei Y ein Rang-n-Vektorraumbündel über X mit Reduktion der Strukturgruppe nach P_k. Dann ist eine exakte Sequenz von Vektorraumbündeln*

$$0 \longrightarrow Y_k \longrightarrow Y \longrightarrow Y/Y_k \longrightarrow 0$$

gegeben, wobei $\mathrm{Rang}(Y_k) = k$ *und* $\mathrm{Rang}(Y/Y_k) = n-k$ *gilt.*

Beweis: (In den Bezeichnungen von 2.7.8 und 2.7.10) Sei wieder $\{g'_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{P_k})$ der reduzierte Cozyklus von Y. Es ist nun für alle $(i,j) \in I^2$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
U_{ij} \times_k k^n & \xrightarrow{id \times_k q} & U_{ij} \times_k k^n/k^k & \qquad & (x\,,v) & \longmapsto & (x\,,[v]) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle id \times_{\omega'} g'_{ij}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle id \times_{\hat{\omega}} [g'_{ij}]} & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
U_{ij} \times_k k^n & \xrightarrow{id \times_k q} & U_{ij} \times_k k^n/k^k & & (x, g'_{ij}(x)v) & \longmapsto & (x, [g'_{ij}(x)][v])
\end{array}$$

gegeben, wobei $[v]$ die Klasse von v modulo k^k und $[g'_{ij}(x)]$ die Klasse von $g'_{ij}(x)$ modulo M bezeichnet. Es gilt

$$[g'_{ij}(x)][v] \;=\; g'_{ij}(x)[v] \;=\; [g'_{ij}(x)v]\,,$$

denn die Operation von P_k/M auf k^n/k^k wird durch die Operation von P_k auf k^n/k^k induziert (vgl. 1.2.13 und 2.7.10). Die kanonische Projektion q definiert somit nach 2.2.4 einen Morphismus von Faserbündeln $\varrho : Y' \longrightarrow Y'/Y'_k$ (vgl. 2.7.10); da q k-linear ist, gilt dies auch für ϱ_x, bei beliebigem $x \in X$, d. h. ϱ ist ein Morphismus von Vektorraumbündeln. Jetzt ist leicht zu sehen, daß die Sequenz von Vektorraumbündeln

$$0 \longrightarrow Y'_k \xrightarrow{\varepsilon} Y' \xrightarrow{\varrho} Y'/Y'_k \longrightarrow 0 \qquad (\star)$$

exakt ist (ε bezeichnet die kanonische abgeschlossene Immersion des Unterbündels Y'_k), denn für alle $i \in I$ und $x \in U_i$ ist die Sequenz von Vektorräumen

$$\{x\} \times_k 0 \longrightarrow \{x\} \times_k k^k \xrightarrow{id \times_k e} \{x\} \times_k k^n \xrightarrow{id \times_k q} \{x\} \times_k k^n/k^k \longrightarrow \{x\} \times_k 0$$

exakt, womit die obige Bündelsequenz $(\star)$ faserweise exakt ist (2.2.1). Die für Y' gezeigte Behauptung ist jetzt nach 2.7.3 auf Y übertragbar.

2.7.13 Korollar: *Sei Y ein Rang-n-Vektorraumbündel über X mit Reduktion der Strukturgruppe auf $P_{\boldsymbol{m}}$ (1.3.11). Dann existiert eine Kette von Unterbündeln*

$$Y_{m_1} \hookrightarrow Y_{m_2} \hookrightarrow \;\ldots\; \hookrightarrow Y_{m_n} = Y\,,$$

wobei $\mathrm{Rang}(Y_{m_k}) = m_k$ *ist. Insbesondere sind dann exakte Sequenzen*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & Y_{m_1} & \longrightarrow & Y_{m_2} & \longrightarrow & Y_{m_2}/Y_{m_1} & \longrightarrow & 0 \\
0 & \longrightarrow & Y_{m_2} & \longrightarrow & Y_{m_3} & \longrightarrow & Y_{m_3}/Y_{m_2} & \longrightarrow & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \longrightarrow & Y_{m_{n-1}} & \longrightarrow & Y_n & \longrightarrow & Y_{m_n}/Y_{m_{n-1}} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

gegeben.
Beweis: Vermöge der Inklusionen

$$P_{m_1} \hookrightarrow P_{m_2} \hookrightarrow \ \dots \ \hookrightarrow P_{m_n}$$

erhält man die Kette von Unterbündeln induktiv aus 2.7.8. Die exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow Y_{m_{k-1}} \longrightarrow Y_{m_k} \longrightarrow Y_{m_k}/Y_{m_{k-1}} \longrightarrow 0$$

sind dann entsprechend nach 2.7.12 gegeben.

2.7.14 Satz: *Sei* Y *ein Rang-n-Vektorraumbündel über* X *mit Reduktion der Strukturgruppe auf* $\mathrm{GL}_l \times_k \mathrm{GL}_m$ *, dann existieren ein Rang-l-Vektorraumbündel* Y_l *und ein Rang-m-Vektorraumbündel* Y_m *über* X*, so daß*

$$Y \;\cong\; Y_l \oplus Y_m$$

gilt.
Beweis: Sei Y' zu dem reduzierten Cozyklus $\{(g_{ij}^l, g_{ij}^m)_k\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{\mathrm{GL}_l \times_k \mathrm{GL}_m})$ assoziiert (2.1.14, 2.1.21), dann schreibt sich nach 2.4.3 Y' als direkte Summe von Vektorraumbündeln $Y_l \oplus Y_m$. Die Behauptung für Y folgt jetzt aus 2.7.3 .

2.7.15 Korollar: *Sei* Y *ein Rang-n-Vektorraumbündel über* X *mit Reduktion der Strukturgruppe auf* T_n *(1.3.5). Dann existieren Geradenbündel* $L_1, \dots, L_n$ *über* X*, so daß*

$$Y \;\cong\; L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$$

gilt.
Beweis: Da $T_n = k^* \times_k \cdots \times_k k^* = \mathrm{GL}_1 \times_k \cdots \times_k \mathrm{GL}_1$ gilt, folgt die Behauptung mit Induktion aus 2.7.14 .

2.7.16 Bemerkung: Die Umkehrung von 2.7.14 (bzw. 2.7.15) folgt sofort aus 2.4.3 (bzw. 2.4.9).

2.7.17 Satz (über die Reduktion der Strukturgruppe des induzierten Bündels): *Es sei ein Prinzipalbündel* $(P, \pi, X; G)$ *sowie eine spezielle und abgeschlossene Untergruppe* $H \subset G$ *gegeben. Weiter sei ein zu* P *assoziiertes Faserbündel* $(P/H, \varphi, X; G/H, G/N)$

nach 2.1.14 definiert. (Die Strukturgruppe G von P operiert in natürlicher Weise (1.3.3) auf der typischen Faser G/H; bezeichnet N den Kern der natürlichen Operation, so ist die induzierte Operation effektiv.)

Dann besitzt das durch φ induzierte G-Prinzipalbündel φ^*P eine Reduktion der Strukturgruppe von G auf H.

Beweis: Nach 2.4.1 gilt $\varphi^*P = P/H \times_X P$, d. h. bei dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} P/H \times_X P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & P \arrow[d, "\pi"] \arrow[dl, "\varrho"'] \\ P/H \arrow[r, "\varphi"] & X \end{tikzcd}$$

sind die äußeren Pfeile kommutativ, wobei p_1 und p_2 die kanonischen Projektionen des Faserproduktes bezeichnen (vgl. 0.3.2). Mit 2.6.8 ist ein Morphismus ϱ von Faserbündeln über X gegeben, so daß $(P, \varrho, P/H)$ zu einem H-Prinzipalbündel wird. (Insbesondere ist damit das rechte untere Dreieck des Diagramms kommutativ.) Nach [EGA I, 0 1.2.11] besitzt nun $P/H \times_X P$ über P den Graphmorphismus $\Gamma_\varrho = (\varrho, id_P)_X$ als Schnitt. Wendet man hierauf die universelle Eigenschaft des Faserproduktes an, so erhält man das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} P/H \times_X P \arrow[d, "p_1"'] & P \arrow[l, "\Gamma_\varrho"'] \arrow[d, "\pi"] \arrow[dl, "\varrho"'] \\ P/H \arrow[r, "\varphi"] & X . \end{tikzcd}$$

Insbesondere ist damit Γ_ϱ ein Morphismus von Faserbündeln über P/H.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß Γ_ϱ H-äquivariant (1.2.1) ist. Dabei ist P als H-Prinzipalbündel und $P/H \times_X P$ als G-Prinzipalbündel über P/H aufzufassen. Für alle $y \in P$ schreibt sich Γ_ϱ als $\Gamma_\varrho(y) = (\varrho(y), y)$ (vgl. hierzu 0.3.6 und 0.3.7). Nach 2.1.18 sind die Fasern von ϱ genau die Orbiten der H-Rechtsoperation auf P, d. h. $\varrho(yh) = \varrho(y)$ mit $h \in H$ (ϱ ist H-invariant, vgl. 1.2.1), während id_P H-äquivariant ist. Es gilt also

$$\Gamma_\varrho(yh) \;=\; (\varrho(y), yh) \tag{\#}$$

für alle $y \in P$ und alle $h \in H$.

φ^*P ist nach 2.1.18 eine G-Varietät, deren Struktur durch die G-Rechtsoperation auf P wie folgt induziert wird: Für $(z, y) \in P/H \times_X P$ und $a \in G$ gilt (in den Bezeichnungen von 2.4.1):

$$\begin{aligned} (z,y)a \;&=\; (id_{\varphi^{-1}(U_i)} \times_k h_i^{-1})|_W \circ (\Gamma_{\varphi|\ldots} \times_k id_G)(z, ga) \\ &=\; (id_{\varphi^{-1}(U_i)} \times_k h_i^{-1})|_W(z, \varphi(z), ga) \\ &=\; (z, ya) \qquad \text{für alle } i. \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man also aus (#)

$$\Gamma_\varrho(yh) \;=\; (\varrho(y), y)h$$

für alle $y \in P$ und alle $h \in H$, d. h. Γ_ϱ ist H-äquivariant. Die Behauptung folgt jetzt direkt aus 2.7.5.

2.7.18 Bemerkung: Im obigen Beweis ist der reduzierte Cozyklus von φ^*P wegen 2.7.5, bzw. 2.2.7, genau der Cozyklus des Prinzipalbündels $(P, \varrho, P/H; H)$.

2.7.19 Korollar: *Seien Y ein Rang-n-Vektorraumbündel über X mit assoziiertem Prinzipalbündel $\mathbf{P}(Y)$ (2.6.1), sowie eine spezielle (2.5.9) und abgeschlossene Untergruppe $H \subset \mathrm{GL}_n$ gegeben. Weiter sei ein zu $\mathbf{P}(Y)$ (und damit zu Y) assoziiertes Faserbündel $(\mathbf{P}(Y)/H, \varphi, X; \mathrm{GL}_n/H, \mathrm{GL}_n/N)$ definiert (vgl. 2.7.17). Dann gilt:*

(i) *Das durch φ induzierte Rang-n-Vektorraumbündel φ^*Y über $\mathbf{P}(Y)/H$ besitzt eine Reduktion der Strukturgruppe von GL_n auf H.*

(ii) *Bezeichnet Y' das zu $(\mathbf{P}(Y), \varrho, \mathbf{P}(Y)/H; H)$ (vgl. Beweis von 2.7.17) gemäß 2.1.21 definierte assoziierte Rang-n-Vektorraumbündel über $\mathbf{P}(Y)/H$, so ist $\varphi^*Y \cong Y'$.*

Beweis: (i) Nach 2.6.1 ist das assoziierte Prinzipalbündel $\mathbf{P}(Y)$ zu Y stark assoziiert (2.1.14), und aus 2.7.17 folgt, daß $\varphi^*\mathbf{P}(Y)$ eine Reduktion der Strukturgruppe von GL_n auf H besitzt. Wegen 2.4.2 sind $\varphi^*\mathbf{P}(Y)$ und φ^*Y ebenfalls stark assoziiert, womit die Behauptung folgt.

(ii) Der reduzierte Cozyklus von φ^*Y (bzw. von $\varphi^*\mathbf{P}(Y)$) stimmt nach 2.7.18 mit dem Cozyklus von $(\mathbf{P}(Y), \varrho, \mathbf{P}(Y)/H; H)$ überein. Die Behauptung folgt somit aus 2.7.3.

2.7.20 Definition: Es seien ein Rang-n-Vektorraumbündel über X, sowie das assoziierte Prinzipalbündel $\mathbf{P}(Y)$ gegeben. Da $\mathbb{P}(k^n) = \mathrm{GL}_n/P_1$ (vgl. 1.3.9), kann das zu Y assoziierte Faserbündel $(\mathbf{P}(Y)/P_1, \varphi, X; \mathrm{GL}_n/P_1, \mathrm{GL}_n/N)$ (vgl. 2.7.17) mit $\mathbb{P}(Y)$ (2.6.3) identifiziert werden.

Nach 2.5.18 und 2.7.19 besitzt φ^*Y eine Reduktion der Strukturgruppe von GL_n auf P_1, und wegen 2.7.8 ist damit ein Rang-1-Unterbündel $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(Y)}(-1) \hookrightarrow \varphi^*Y$ gegeben, das als ***tautologisches*** oder ***universelles Geradenbündel*** über $\mathbb{P}(Y)$ bezeichnet wird. Das zu $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(Y)}(-1)$ duale Geradenbündel $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(Y)}(1) \overset{def}{=} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(Y)}(-1)^\vee$ heißt ***kanonisches Geradenbündel*** oder ***Hyperebenenbündel*** über $\mathbb{P}(Y)$.

Im Spezialfall $Y = k^n$ und $X = \mathrm{Spm}(k)$ erhält man die üblichen Geradenbündel $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{n-1}}(-1)$ und $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{n-1}}(1)$. Andererseits erhält man für $x \in X$ über $\mathbb{P}(Y)_x = \mathbb{P}(Y_x) \cong \mathbb{P}_{n-1}$ die Geradenbündel $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(Y_x)}(-1)$ und $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(Y_x)}(1)$, d. h. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(Y)}(-1)$ (bzw. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(Y)}(1)$) kann als *relatives tautologisches Geradenbündel* (bzw. als *relatives Hyperebenenbündel*) aufgefaßt werden.

2.7.21 Beispiel: Nachfolgend sollen einige der wichtigsten Spezialfälle von 2.7.19 erwähnt werden:

(i) Setzt man $H = 1$, so ist $\mathbf{P}(Y)/H = \mathbf{P}(Y)$, d. h. wegen 2.7.4 ist φ^*Y ein triviales Rang-n-Vektorraumbündel über $\mathbf{P}(Y)$, genauer: $\varphi^*Y \cong Y' = \mathbf{P}(Y) \times_k k^n$.

(ii) Mit $H = P_{\boldsymbol{m}}$ (1.3.11) ist $\mathbf{P}(Y)/H = \mathbb{F}(\boldsymbol{m}; Y)$ (2.6.3), und nach 2.7.13 existiert eine Kette von Unterbündeln

$$Y_{m_0} = 0 \hookrightarrow Y_{m_1} \hookrightarrow Y_{m_2} \hookrightarrow \ \ldots \ \hookrightarrow Y_{m_n} = \varphi^*Y$$

mit $\mathrm{Rang}(m_k) = m_k$, wobei $\boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_n)$, und für alle m_k existiert eine exakte Sequenz von Vektorraumbündeln

$$0 \longrightarrow Y_{m_{k-1}} \longrightarrow Y_{m_k} \longrightarrow Y_{m_k}/Y_{m_{k-1}} \longrightarrow 0$$

über $\mathbb{F}(\boldsymbol{m}; Y)$. Im Fall $H = B_n$ (1.3.5) gilt dann stets $\mathrm{Rang}(Y_{m_k}/Y_{m_{k-1}}) = 1$.

(iii) Ist $H = T_n$ (1.3.5), so erhält man $\mathbf{P}(Y)/H = \mathbb{S}(Y)$ (2.6.3), und mit 2.7.15 gilt

$$\varphi^*Y \ \cong \ Y' \ = \ L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$$

über $\mathbb{S}(Y)$, mit $\mathrm{Rang}(L_j) = 1$ für $1 \leq j \leq n$, wobei das zu Y' assoziierte Prinzipalbündel durch $(\mathbf{P}(Y), \varrho, \mathbb{S}(Y); T_n)$ gegeben ist. Per definitionem (2.4.3) bezeichnet der j-te Faktor bei $T_n = k^* \times_k \cdots \times_k k^*$ die Strukturgruppe des Geradenbündels L_j.

(iv) In der Situation von (iii) erhält man eine Faktorisierung von $(\mathbf{P}(Y), \varrho, \mathbb{S}(Y); T_n)$ (vgl. 2.6.10)

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{P}(Y) \arrow[dd, "\varrho"'] \arrow[dr, "\tau_j \circ \cdots \circ \tau_1"] & & \\
& \mathbb{T}_j(Y) \arrow[dl, "\tau_n \circ \cdots \circ \tau_{j+1}"] & (\tau_n \circ \cdots \circ \tau_{j+1})^*(L_1 \oplus \cdots \oplus L_n) \arrow[l] \\
\mathbb{S}(Y) & L_1 \oplus \cdots \oplus L_n \,, \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

wobei $(\mathbb{T}_j(Y), \tau_n \circ \cdots \circ \tau_{j+1}, \mathbb{S}(Y), T_{n-j})$ mit

$$T_{n-j} \ = \ \underbrace{1 \times_k \cdots \times_k 1}_{j\text{-mal}} \times_k \underbrace{k^* \times_k \cdots \times_k k^*}_{(n-j)\text{-mal}}$$

das assoziierte Prinzipalbündel von $L_{j+1} \oplus \cdots \oplus L_n$ ist. Nach 2.4.6 gilt

$$\begin{aligned}
&(\tau_n \circ \cdots \circ \tau_{j+1})^*(L_1 \oplus \cdots \oplus L_n) \ \cong \\
&\qquad (\tau_n \circ \cdots \circ \tau_{j+1})^*(L_1 \oplus \cdots \oplus L_j) \oplus \underbrace{(\tau_n \circ \cdots \circ \tau_{j+1})^*(L_{j+1} \oplus \cdots \oplus L_n)}_{(\tau_n \circ \cdots \circ \tau_{j+1})^* L_{j+1} \oplus \cdots \oplus (\tau_n \circ \cdots \circ \tau_{j+1})^* L_n} .
\end{aligned}$$

Anwendung von (i) liefert jetzt, daß die Geradenbündel $(\tau_n \circ \cdots \circ \tau_{j+1})^* L_i$ für $j+1 \leq i \leq n$ trivial sind.

2.7.22 Korollar: *Seien $\mathbb{P}(Y)$ das assoziierte projektive Bündel (2.6.3) eines Rang-n-Vektorraumbündels Y über X, $\mathbf{P}\mathbb{P}(Y)$ das zu $\mathbb{P}(Y)$ assoziierte PGL_{n-1}-Prinzipalbündel (2.6.4), sowie eine spezielle und abgeschlossene Untergruppe $H \subset \mathrm{PGL}_{n-1}$ gegeben. Weiter sei ein zu $\mathbf{P}\mathbb{P}(Y)$ assoziiertes Faserbündel $(\mathbf{P}\mathbb{P}(Y)/H, \varphi, X; \mathrm{PGL}_{n-1}/H, \mathrm{PGL}_{n-1}/N)$ definiert (vgl. 2.7.17). Dann gilt:*

(i) *Das durch φ induzierte projektive Bündel $\varphi^*\mathbb{P}(Y)$ über $\mathbf{P}\mathbb{P}(Y)/H$ besitzt eine Reduktion der Strukturgruppe von PGL_{n-1} auf H.*

(ii) *Bezeichnet $\mathbb{P}(Y)'$ das zu $(\mathbf{P}\mathbb{P}(Y), \varrho, \mathbf{P}\mathbb{P}(Y)/H; H)$ (vgl. Beweis von 2.7.17) gemäß 2.1.14 definierte assoziierte projektive Bündel über $\mathbf{P}\mathbb{P}(Y)/H$, dann gilt entsprechend zu 2.7.19: $\varphi^*\mathbb{P}(Y) \cong \mathbb{P}(Y)'$.*

Beweis: Nach 2.6.4 sind $\mathbf{P}\mathbb{P}(Y)$ und $\mathbb{P}(Y)$ stark assoziiert (2.1.14), weshalb (i) und (ii) mit dem gleichen Beweis wie bei 2.7.19 folgen.

2.7.23 Beispiel: Für $H = 1$ im obigen Korollar wird wegen 2.7.4 $\varphi^*\mathbb{P}(Y)$ trivial über $\mathbf{P}\mathbb{P}(Y)$, genauer $\varphi^*\mathbb{P}(Y) \cong \mathbb{P}(Y)' = \mathbf{P}\mathbb{P}(Y) \times_k \mathbb{P}(k^n)$.

2.8 Affine und projektive Faserbündel

2.8.1 Definition: Ein Faserbündel $(Y, \pi, X; F, G)$ heißt ***affin*** (bzw. ***quasikompakt***, bzw. ***separiert***), falls π ein affiner (bzw. quasikompakter, bzw. separierter) Morphismus ist; vgl. 0.6.2, 0.4.1, 0.4.3 und 0.3.12.

2.8.2 Folgerung: *Ein affines Faserbündel ist gleichermaßen separiert und quasikompakt.*
Beweis: 0.6.4.

2.8.3 Satz: *Sei $(Y, \pi, X; F, G)$ ein Faserbündel, dann sind äquivalent:*

(i) *π ist affin.*

(ii) *F ist affin.*

Beweis: Wegen [EGA I, 9.1.10.1] erhält man unmittelbar, daß mit affinem π auch die typische Faser F affin ist.

Für die Umkehrung betrachte man eine offene und für Y trivialisierende Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ von X. Dann ist wegen 0.1.5 für alle $i \in I$ $U_i = \bigcup_{j \in J} V_{ij}$ mit V_{ij} affin-offen, d. h. $\mathcal{V} = \{V_{ij}\}_{(i,j) \in I \times J}$ ist eine affin-offene und für Y trivialisierende Überdeckung von X. Nach Voraussetzung ist $\pi^{-1}(V_{ij}) \cong V_{ij} \times_k F$, wobei $V_{ij} \times_k F$ als Produkt affiner Varietäten affin ist.

2.8.4 Korollar: *Vektorraumbündel und Prinzipalbündel mit affiner Strukturgruppe sind affin.*
Beweis: Die Behauptung folgt sofort aus 2.8.3.

2.8.5 Korollar: *Sei Y ein Rang-n-Vektorraumbündel über X, dann ist das zu Y assoziierte Spaltungsbündel $\mathbb{S}(Y)$ (2.6.3) affin.*

Beweis: Nach 1.5.11 ist die typische Faser $\mathbb{S}(k^n)$ von $\mathbb{S}(Y)$ affin, womit die Behauptung aus 2.8.3 folgt.

2.8.6 Satz: *Seien Y ein Rang-n-Vektorraumbündel über X, sowie das assoziierte Spaltungsbündel $\mathbb{S}(Y)$ und das assoziierte Fahnenbündel $\mathbb{F}(Y)$ gegeben (2.6.3). Dann ist $\mathbb{S}(Y)$ affin über $\mathbb{F}(Y)$.*

Beweis: Nach 2.6.9 ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}(Y) \arrow[dr, "\varrho_A"] \arrow[dd, "\pi"'] & \\ & \mathbb{F}(Y) \arrow[dl, "\pi'"] \\ X & \end{tikzcd}$$

gegeben, wobei $(\mathbb{S}(Y), \varrho_A, \mathbb{F}(Y))$ ein Faserbündel mit typischer Faser B_n/T_n ist. Wegen 1.4.2(i) und 1.4.3 ist $B_n/T_n \cong k^N$, insbesondere also affin. Die Behauptung folgt jetzt mit 2.8.3.

2.8.7 Definition: Ein Faserbündel $(Y, \pi, X; F, G)$ heißt ***projektiv***, falls ein Rang-N-Vektorraumbündel Z über X mit assoziiertem projektivem Bündel $\mathbb{P}(Z)$ (2.6.3) existiert und eine abgeschlossene Immersion von Faserbündeln (2.3.3) $\varepsilon : Y \hookrightarrow \mathbb{P}(Z)$ gegeben ist. π wird dann als ***projektiver Morphismus*** bezeichnet.

Y ist insbesondere *projektiv über X* im Sinne von [EGA II, 5.5.2] (man beachte die Vertauschung der Rollen von X und Y): Bezeichnet $\mathcal{Z}_X$ die Garbe der Schnitte von Z (2.3.12), dann ist in der Notation von [EGA II] $\mathbb{P}(Z) = \mathbf{P}(\mathcal{Z}_X^\vee)$; vgl. 2.6.6.

2.8.8 Bemerkung: Es sei hier ausdrücklich darauf hingewiesen, daß das zu einem Vektorraumbündel Y assoziierte projektive Prinzipalbündel $\mathbf{P}\mathbb{P}(Y)$ (2.6.4) ***kein*** *projektives Faserbündel im Sinne von* 2.8.7 ist. Nach 2.8.4 ist $\mathbf{P}\mathbb{P}(Y)$ als Prinzipalbündel mit *affiner* Strukturgruppe *affin*.

2.8.9 Satz: *Ein projektives Faserbündel ist gleichermaßen separiert und quasikompakt.*

Beweis: Nach [EGA II, 5.5.3] sind projektive Morphismen eigentlich, womit per definitonem (0.6.6) die Behauptung folgt.

2.8.10 Satz: *Sei Y ein Rang-n-Vektorraumbündel über X, dann ist das zu Y assoziierte Graßmannsche Bündel $\mathbb{G}_k(Y)$ (2.6.3) projektiv.*

Beweis: Im wesentlichen soll hier eine verallgemeinerte Plückereinbettung

$$\boldsymbol{pl} : \mathbb{G}_k(Y) \hookrightarrow \mathbb{P}(\textstyle\bigwedge^k Y)$$

von Faserbündeln angegeben werden.

(1) Konstruktion von $\mathbb{P}(\bigwedge^k Y)$: Sei $\{g_{ij}\}_{(i,j)\in I^2} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{\mathrm{GL}_n})$ der Cozyklus von Y und $\{<g_{ij}>\}_{(i,j)\in I^2} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{\mathrm{PGL}_{n-1}})$ der Cozyklus von $\mathbb{G}_k(Y)$ (die Klammer „$<\cdot>$“ bezeichne die Klasse von $g \in \mathrm{GL}_n$ modulo Z_n). Die Strukturgruppen von Y und $\mathbb{G}_k(Y)$ konstituieren in natürlicher Weise ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{GL}_n \arrow[r, "\wedge^k"] \arrow[d, two heads, "\varkappa"'] & \mathrm{GL}_{\binom{n}{k}} \arrow[d, two heads, "\varkappa"] \\
\mathrm{PGL}_{n-1} \arrow[r, "<\wedge^k>"] & \mathrm{PGL}_{\binom{n}{k}-1}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
g \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \wedge^k g \arrow[d, mapsto] \\
<g> \arrow[r, mapsto] & <\wedge^k g>
\end{tikzcd}\ .$$

Zur Definition von $\wedge^k$ vgl. 2.4.10; die Wohldefiniertheit bleibt nachzuweisen: Sei hierzu $<g>=<g'>$ angenommen, dann existiert ein $\alpha \in k^*$, so daß $g' = \alpha g$ gilt, womit

$$<\wedge^k g'> = <\wedge^k(\alpha g)> = <\alpha^k \wedge^k g> = <\wedge^k g>$$

vermöge der Ausrechnungsformel für $\wedge^k g$ [SchSt, X 83.5(3)] folgt. Für alle $(i,j) \in I^2$ hat man deshalb Diagramme

$$\begin{tikzcd}
U_{ij} \arrow[r, "<g_{ij}>"] \arrow[dr, "<\wedge^k g_{ij}>"'] & \mathrm{PGL}_{n-1} \arrow[d, "<\wedge^k>"] \\
& \mathrm{PGL}_{\binom{n}{k}-1}
\end{tikzcd},$$

die einen Cozyklus $\{<\wedge^k g_{ij}>\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{\mathrm{PGL}_{\binom{n}{k}-1}})$ definieren. Nach 2.4.10 und 2.6.3 wird hiermit ein Faserbündel $\mathbb{P}(\bigwedge^k Y)$ mit typischer Faser $\mathbb{P}(\bigwedge^k k^n)$ gegeben.

(2) Konstruktion von ***pl***: Die klassische Plückereinbettung

$$\begin{array}{rl}
pl:\ \mathbb{G}_k(k^n) & \longrightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^k k^n) \\
W_k & \longmapsto <w_1 \wedge \ldots \wedge w_k>,
\end{array}$$

wobei $W_k = \mathrm{Span}(w_1, \ldots, w_k)$, ist eine abgeschlossene Immersion der typischen Fasern von $\mathbb{G}_k(Y)$ und $\mathbb{P}(\bigwedge^k Y)$. Gemäß (1) besitzt $\mathbb{P}(\bigwedge^k Y)$ eine Reduktion der Strukturgruppe (2.7.1, 2.7.2) von $\mathrm{PGL}_{\binom{n}{k}-1}$ nach der abgeschlossenen Untergruppe Bild($<\wedge^k>$) (1.1.4(ii)), und $pl(\mathbb{G}_k(k^n))$ ist invariant unter der Operation von Bild($<\wedge^k>$), denn $pl(\mathbb{G}_k(k^n))$ ist genau durch die Klassen von zerlegbaren Elementen aus $\bigwedge^k k^n$ gegeben (1.3.14). Ist nun $<g> \in \mathrm{PGL}_{n-1}$ und $<w_1 \wedge \ldots \wedge w_k> \in \mathbb{P}(\bigwedge^k k^n)$, dann liefert die Ausrechnungsformel für $\wedge^k g$

$$<\wedge^k g>\,(<w_1 \wedge \ldots \wedge w_k>) = <g(w_1) \wedge \ldots \wedge g(w_k)>,$$

also ebenfalls eine Klasse eines zerlegbaren Elementes. Somit hat man für alle $(i,j) \in I^2$

ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
U_{ij} \times_k \mathbb{G}(k^n) \arrow[r, "id \times_k pl"] \arrow[d, "id \times_\omega <g_{ij}>"'] & U_{ij} \times_k \mathbb{P}(\bigwedge^k k^n) \arrow[d, "id \times_{\omega'} <\wedge^k g_{ij}>"] \\
U_{ij} \times_k \mathbb{G}(k^n) \arrow[r, "id \times_k pl"] & U_{ij} \times_k \mathbb{P}(\bigwedge^k k^n)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(x, \mathrm{Span}(w_1, \ldots, w_k)) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (x, < w_1 \wedge \ldots \wedge w_k >) \arrow[d, mapsto] \\
(x, \mathrm{Span}(g_{ij}(x)w_1, \ldots, g_{ij}(x)w_k)) \arrow[r, mapsto] & (x, < g_{ij}(x)w_1 \wedge \ldots \wedge g_{ij}(x)w_k >) .
\end{tikzcd}$$

Nach 2.2.4 wird deshalb durch pl ein globaler Morphismus von Faserbündeln $\boldsymbol{pl}$ gegeben, der wegen 2.3.4 eine abgeschlossene Immersion von Faserbündeln ist.

2.8.11 Satz: *Seien $Y_1, \ldots, Y_m$ Vektorraumbündel über X mit Rängen $n_1, \ldots, n_m$ und assoziierte projektive Bündel $\mathbb{P}(Y_1), \ldots, \mathbb{P}(Y_m)$ gegeben, dann ist auch das Produktbündel $\mathbb{P}(Y_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(Y_m)$ ein projektives Bündel über X.*

Beweis: Analog zum Beweis von 2.8.10 wird hier eine verallgemeinerte Segreeinbettung

$$\boldsymbol{se} : \mathbb{P}(Y_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(Y_m) \hookrightarrow \mathbb{P}(Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_m)$$

angegeben.

(1) Konstruktion von $\mathbb{P}(Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_m)$: Sei $\{g_{ij}^l\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{\mathrm{GL}}_{n_l})$ der Cozyklus von Y_l und $\{< g_{ij}^l >\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{\mathrm{PGL}}_{n_l - 1})$ der Cozyklus von $\mathbb{P}(Y_l)$ mit $l \in \{1, \ldots, m\}$. Die Strukturgruppen von $Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_m$ und $\mathbb{P}(Y_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(Y_m)$ konstituieren in natürlicher Weise ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{GL}_{n_1} \times_k \cdots \times_k \mathrm{GL}_{n_m} \arrow[r, "\otimes_{1\ldots m}"] \arrow[d, two heads] & \mathrm{GL}_{n_1 \ldots n_m} \arrow[d, two heads] \\
\mathrm{PGL}_{n_1 - 1} \times_k \cdots \times_k \mathrm{PGL}_{n_m - 1} \arrow[r, "<\otimes_{1\ldots m}>"] & \mathrm{PGL}_{n_1 \cdots n_m - 1}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(g_1, \ldots, g_m) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & g_1 \otimes \cdots \otimes g_m \arrow[d, mapsto] \\
(< g_1 >, \ldots, < g_m >) \arrow[r, mapsto] & < g_1 \otimes \cdots \otimes g_m > .
\end{tikzcd}$$

Zur Definition von $\otimes_{1\ldots m}$ vgl. 2.4.8 und 2.4.9 ($g_1 \otimes \cdots \otimes g_m$ ist das Kronecker-Produkt der Matrizen $g_1, \ldots, g_m$ [SchSt, X §80 Bem. 2, ff]). Die Wohldefiniertheit von $< \otimes_{1\ldots m} >$

bleibt nachzuweisen: Sei $(<g_1>,\dots,<g_m>) = (<g'_1>,\dots,<g'_m>)$, dann existiert ein $(\alpha_1,\dots,\alpha_m)\in(k^*)^m$, so daß $(g'_1,\dots,g'_m) = (\alpha_1 g_1,\dots,\alpha_m g_m)$ gilt, d. h.

$$\begin{aligned} <g'_1\otimes\cdots\otimes g'_m> &= <\alpha_1 g_1\otimes\cdots\otimes\alpha_m g_m> \\ &= <\alpha_1\cdots\alpha_m\, g_1\otimes\cdots\otimes g_m> = <g_1\otimes\cdots\otimes g_m>, \end{aligned}$$

vermöge der Ausrechnungsformel für $g_1\otimes\cdots\otimes g_m$ [SchSt, X 80.4 f]. Für alle $(i,j)\in I^2$ hat man deshalb Diagramme

$$\begin{tikzcd} U_{ij} \arrow[rr, "(<g^1_{ij}>,\dots,<g^m_{ij}>)_k"] \arrow[drr, "<g^1_{ij}\otimes\cdots\otimes g^m_{ij}>"'] & & \mathrm{PGL}_{n_1-1}\times_k\cdots\times_k\mathrm{PGL}_{n_m-1} \arrow[d, "<\otimes_{1\dots m}>"] \\ & & \mathrm{PGL}_{n_1\cdots n_m-1}, \end{tikzcd}$$

die einen Cozyklus $\{<g^1_{ij}\otimes\cdots\otimes g^m_{ij}>\}\in Z^1(\mathcal{U},\underline{\mathrm{PGL}}_{n_1\cdots n_m-1})$ definieren. Nach 2.4.8, 2.4.9 und 2.6.3 wird hiermit ein Faserbündel $\mathbb{P}(Y_1\otimes\cdots\otimes Y_m)$ mit typischer Faser $\mathbb{P}(k^{n_1}\otimes\cdots\otimes k^{n_m})$ gegeben.

(2) Konstruktion von $\boldsymbol{se}$: Die klassische Segreeinbettung

$$\begin{aligned} se:\mathbb{P}(k^{n_1})\times_k\cdots\times_k\mathbb{P}(k^{n_m}) &\longrightarrow \mathbb{P}(k^{n_1}\otimes\cdots\otimes k^{n_m}) \\ (<v_1>,\dots,<v_m>) &\longmapsto\ <v_1\otimes\cdots\otimes v_m> \end{aligned}$$

ist eine abgeschlossene Immersion der typischen Fasern von $\mathbb{P}(Y_1)\times\cdots\times\mathbb{P}(Y_m)$ und $\mathbb{P}(Y_1\otimes\cdots\otimes Y_m)$. Nach den Ausführungen (1) besitzt $\mathbb{P}(Y_1\otimes\cdots\otimes Y_m)$ eine Reduktion der Strukturgruppe (2.7.1, 2.7.2) von $\mathrm{PGL}_{n_1\cdots n_m-1}$ nach der abgeschlossenen Untergruppe Bild$(<\otimes_{1\dots m}>)$ (1.1.4(ii)) und Bild(se) ist invariant unter der Operation von Bild$(<\otimes_{1\dots m}>)$, denn Bild(se) ist genau durch die Klassen von zerlegbaren Elementen aus $k^{n_1}\otimes\cdots\otimes k^{n_m}$ gegeben (1.3.14). Ist $(<g_1>,\dots,<g_m>)\in\mathrm{PGL}_{n_1-1}\times_k\dots\cdots\times_k\mathrm{PGL}_{n_m-1}$ und $<v_1\otimes\cdots\otimes v_m>\in\mathbb{P}(k^{n_1}\otimes\cdots\otimes k^{n_m})$, dann liefert die Ausrechnungsformel für $g_1\otimes\cdots\otimes g_m$

$$<g_1\otimes\cdots\otimes g_m>(<v_1\otimes\cdots\otimes v_m>) \;=\; <g_1(v_1)\otimes\cdots\otimes g_m(v_m)>,$$

also ebenfalls eine Klasse eines zerlegbaren Elementes. Somit hat man für alle $(i,j)\in I^2$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
U_{ij} \times_k \mathbb{P}(k^{n_1}) \times_k \cdots \times_k \mathbb{P}(k^{n_m}) \arrow[r, "id\times_k se"] \arrow[d, "id\times_\omega <g^1_{ij}>\times_k\cdots\times_k<g^m_{ij}>"'] & U_{ij} \times_k \mathbb{P}(k^{n_1} \otimes \cdots \otimes k^{n_m}) \arrow[d, "id\times_{\omega'} <g^1_{ij}\otimes\cdots\otimes g^m_{ij}>"] \\
U_{ij} \times_k \mathbb{P}(k^{n_1}) \times_k \cdots \times_k \mathbb{P}(k^{n_m}) \arrow[r, "id\times_k se"] & U_{ij} \times_k \mathbb{P}(k^{n_1} \otimes \cdots \otimes k^{n_m}) \\
(x, <v_1>, \ldots, <v_m>) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (x, <v_1 \otimes \cdots \otimes v_m>) \arrow[d, mapsto] \\
(x, <g^1_{ij}(x)v_1>, \ldots, <g^m_{ij}(x)v_m>) \arrow[r, mapsto] & (x, <g^1_{ij}(x)v_1 \otimes \cdots \otimes g^m_{ij}(x)v_m>)\,.
\end{tikzcd}$$

Nach 2.2.4 wird deshalb durch *se* ein globaler Morphismus von Faserbündeln $\boldsymbol{se}$ gegeben, der nach 2.3.4 eine abgeschlossene Immersion von Faserbündeln ist.

2.8.12 Korollar: *Produkte von projektiven Faserbündeln (2.8.7) sind projektiv.*

Beweis: Seien $Y_1, \ldots, Y_m$ projektive Bündel über X gegeben, d. h. es existieren Vektorraumbündel $Z_1, \ldots, Z_m$ mit assoziierten projektiven Bündeln $\mathbb{P}(Z_1), \ldots, \mathbb{P}(Z_m)$ und abgeschlossene Immersionen $Y_1 \overset{\varepsilon_1}{\hookrightarrow} \mathbb{P}(Z_1), \ldots, Y_m \overset{\varepsilon_m}{\hookrightarrow} \mathbb{P}(Z_m)$ über X. $Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_m$ wird vermöge $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ mit einem abgeschlossenen Unterbündel von $\mathbb{P}(Z_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(Z_m)$ identifiziert (vgl. 2.4.5 und 2.4.9). Die Verkettung abgeschlossener Immersionen

$$Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_m \hookrightarrow \mathbb{P}(Z_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(Z_m) \xrightarrow{\boldsymbol{se}} \mathbb{P}(Z_1 \otimes \cdots \otimes Z_m)$$

liefert schließlich eine abgeschlossene Immersion [EGA I, 4.3.6(i)], die per definitionem ein Morphismus über X ist.

2.8.13 Satz: *Sei Y ein Rang-n-Vektorraumbündel über X, dann ist das zu Y assoziierte $\boldsymbol{m}$-Fahnenbündel $\mathbb{F}(\boldsymbol{m}; Y)$ (2.6.3) für beliebiges $\boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_k)$ projektiv.*

Beweis: Es wird hier eine abgeschlossene Immersion von Graßmannbündeln

$$\boldsymbol{pl} \times \cdots \times \boldsymbol{pl} \, : \, \mathbb{G}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{G}_{m_k} \hookrightarrow \mathbb{P}(\textstyle\bigwedge^{m_1} Y) \times \cdots \times \mathbb{P}(\textstyle\bigwedge^{m_k} Y)$$

gegeben und $\mathbb{F}(\boldsymbol{m}; Y)$ mit einem abgeschlossenen Unterbündel des Produktes von Graßmannbündeln identifiziert.

(1) Konstruktion von $\mathbb{P}(\bigwedge^{m_1} Y) \times \cdots \times \mathbb{P}(\bigwedge^{m_k} Y)$: Seien $\{g_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{\mathrm{GL}_n})$ und $\{< g_{ij} >\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{\mathrm{PGL}_{n-1}})$ die Cozyklen von Y bzw. $\mathbb{F}(\boldsymbol{m}; Y)$ (die spitze Klammer bezeichnet wieder die Klasse von $g \in \mathrm{GL}_n$ modulo Z_n). Die Strukturgruppen von Y und $\mathbb{F}(\boldsymbol{m}; Y)$ konstituieren in natürlicher Weise ein kommutatives Diagramm (vgl. (1) im Beweis von 2.8.10)

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{GL}_n & \xrightarrow{(\wedge^{m_1},\dots,\wedge^{m_k})_k} & \mathrm{GL}_{\binom{n}{m_1}} \times_k \cdots \times_k \mathrm{GL}_{\binom{n}{m_k}} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{PGL}_{n-1} & \xrightarrow{(<\wedge^{m_1}>,\dots,<\wedge^{m_k}>)_k} & \mathrm{PGL}_{\binom{n}{m_1}-1} \times_k \cdots \times_k \mathrm{PGL}_{\binom{n}{m_k}-1}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
g & \longmapsto & (\wedge^{m_1} g, \dots, \wedge^{m_k} g) \\
\downarrow & & \downarrow \\
<g> & \longmapsto & (<\wedge^{m_1} g>, \dots, <\wedge^{m_k} g>) .
\end{array}$$

Zur Definition von $\wedge^{m_\nu}$ vgl. 2.4.10 . $(<\wedge^{m_1}>, \dots, <\wedge^{m_k}>)_k$ ist wohldefiniert: Sei $<g>$ $=<g'>$, dann existiert ein $\alpha \in k^*$, so daß $g' = \alpha g$ gilt, d. h.

$$\begin{aligned}
(<\wedge^{m_1} g'>, \dots, <\wedge^{m_k} g'>) &= (<\wedge^{m_1} \alpha g>, \dots, <\wedge^{m_k} \alpha g>) \\
&= (<\alpha^{m_1} \wedge^{m_1} g>, \dots, <\alpha^{m_k} \wedge^{m_k} g>) = (<\wedge^{m_1} g>, \dots, <\wedge^{m_k} g>)
\end{aligned}$$

mit der Ausrechnungsformel für die $\wedge^{m_\nu} g$; vgl. [SchSt, X 83.5(3)]. Für alle $(i,j) \in I^2$ hat man deshalb Diagramme

$$\begin{array}{ccc}
U_{ij} & \xrightarrow{<g_{ij}>} & \mathrm{PGL}_{n-1} \\
& \searrow^{(<\wedge^{m_1} g_{ij}>,\dots,<\wedge^{m_k} g_{ij}>)_k} & \downarrow (<\wedge^{m_1}>,\dots,<\wedge^{m_k}>)_k \\
& & \mathrm{PGL}_{\binom{n}{m_1}-1} \times_k \cdots \times_k \mathrm{PGL}_{\binom{n}{m_k}-1} ,
\end{array}$$

wodurch ein Cozyklus $\{(<\wedge^{m_1} g_{ij}>, \dots, <\wedge^{m_k} g_{ij}>)_k\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{G})$ definiert wird (mit $G = \mathrm{PGL}_{\binom{n}{m_1}-1} \times_k \cdots \times_k \mathrm{PGL}_{\binom{n}{m_k}-1}$). Nach 2.4.3, 2.4.9, 2.4.10 und 2.6.3 wird hiermit ein Faserbündel $\mathbb{P}(\bigwedge^{m_1} Y) \times \cdots \times \mathbb{P}(\bigwedge^{m_k} Y)$ mit typischer Faser $\mathbb{P}(\bigwedge^{m_1} k^n) \times_k \cdots \cdots \times_k \mathbb{P}(\bigwedge^{m_k} k^n)$ gegeben.

(2) Konstruktion von $\boldsymbol{pl} \times \cdots \times \boldsymbol{pl}$: In Verallgemeinerung von (2) im Beweis von 2.8.10 betrachte man das Produkt von klassischen Plückereinbettungen

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{G}_{m_1}(k^n) \times_k \cdots \times_k \mathbb{G}_{m_k}(k^n) & \xrightarrow{pl \times_k \cdots \times_k pl} & \mathbb{P}(\bigwedge^{m_1} k^n) \times_k \cdots \times_k \mathbb{P}(\bigwedge^{m_k} k^n) \\
(W_{m_1}, \dots, W_{m_k}) & \longmapsto & (<w_1^1 \wedge \ldots \wedge w_{m_1}^1>, \dots, <w_1^k \wedge \ldots \wedge w_{m_k}^k>) ,
\end{array}$$

wobei $W_{m_\nu} = \mathrm{Span}(w_1^\nu, \dots, w_{m_\nu}^\nu)$. Dies ist eine abgeschlossene Immersion der typischen Fasern von $\mathbb{G}_{m_1}(Y) \times \cdots \times \mathbb{G}_{m_k}(Y)$ und $\mathbb{P}(\bigwedge^{m_1} Y) \times \cdots \times \mathbb{P}(\bigwedge^{m_k} Y)$. Aus den Überlegungen in (1) folgt, daß $\mathbb{P}(\bigwedge^{m_1} Y) \times \cdots \times \mathbb{P}(\bigwedge^{m_k} Y)$ eine Reduktion der Strukturgruppe (2.7.1, 2.7.2) von $\mathrm{PGL}_{\binom{n}{m_1}-1} \times_k \cdots \times_k \mathrm{PGL}_{\binom{n}{m_k}-1}$ nach der abgeschlossenen Untergruppe $\mathrm{Bild}(<\wedge^{m_1}>, \dots, <\wedge^{m_k}>)_k$ (1.1.4(ii)) besitzt. $\mathrm{Bild}(pl \times_k \cdots \times_k pl)$ ist invariant unter der Operation von $\mathrm{Bild}(<\wedge^{m_1}>, \dots, <\wedge^{m_k}>)_k$, denn $\mathrm{Bild}(pl \times_k \cdots \times_k pl)$ ist genau durch die Klassen von zerlegbaren Elementen aus $\bigwedge^{m_1} k^n \times_k \cdots \times_k \bigwedge^{m_k} k^n$ gegeben. Für $<g> \in \mathrm{PGL}_{n-1}$ und ein beliebiges Element aus $\mathbb{P}(\bigwedge^{m_1} k^n) \times_k \cdots \times_k \mathbb{P}(\bigwedge^{m_k} k^n)$ liefert die Ausrechnungsformel

$$\begin{aligned}(<\wedge^{m_1} g>, \ldots, <\wedge^{m_k} g>)_k\,(<w_1^1 \wedge \ldots \wedge w_{m_1}^1>, \ldots, <w_1^k \wedge \ldots \wedge w_{m_k}^k>)\\ = (<g(w_1^1) \wedge \ldots \wedge g(w_{m_1}^1)>, \ldots, <g(w_1^k) \wedge \ldots \wedge g(w_{m_k}^k)>)\,,\end{aligned}$$

also ebenfalls eine Klasse eines zerlegbaren Elementes. $\mathbb{F}(m_1, \ldots, m_k; k^n)$ ist jetzt als abgeschlossene Untervarietät von $\mathbb{G}_{m_1}(k^n) \times_k \cdots \times_k \mathbb{G}_{m_k}(k^n)$ genau durch die Elemente gegeben, für die $V_{m_1} \subset \cdots \subset V_{m_k}$ gilt; vgl. 1.3.14. Geeignete Basiswahl für lineare Unterräume $V_{m_1}, \ldots, V_{m_k}$ vorausgesetzt, erhält man für alle $(i,j) \in I^2$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
U_{ij} \times_k \mathbb{F}(m_1, \ldots, m_k; k^n) \arrow[r, "id \times_k ((pl \times_k, \ldots, \times_k pl) \circ \varepsilon)"] \arrow[d, "id \times_\omega <g_{ij}>"'] & U_{ij} \times_k \mathbb{P}(\bigwedge^{m_1} k^n) \times_k \cdots \times_k \mathbb{P}(\bigwedge^{m_k} k^n) \arrow[d, "id \times_{\omega'} (<\wedge^{m_1} g_{ij}>, \ldots, <\wedge^{m_k} g_{ij}>)_k"'] \\
U_{ij} \times_k \mathbb{F}(m_1, \ldots, m_k; k^n) \arrow[r, "id \times_k ((pl \times_k, \ldots, \times_k pl) \circ \varepsilon)"] & U_{ij} \times_k \mathbb{P}(\bigwedge^{m_1} k^n) \times_k \cdots \times_k \mathbb{P}(\bigwedge^{m_k} k^n)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}(x, \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_{m_1}), \ldots \\ \ldots, \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_{m_k})\end{array} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \begin{array}{c}(x, <v_1 \wedge \ldots \wedge v_{m_1}>, \ldots \\ \ldots, <v_1 \wedge \ldots \wedge v_{m_k}>)\end{array} \arrow[d, mapsto] \\
\begin{array}{c}(x, \mathrm{Span}(g_{ij}(x)v_1, \ldots, g_{ij}(x)v_{m_1}), \ldots \\ \ldots, \mathrm{Span}(g_{ij}(x)v_1, \ldots, g_{ij}(x)v_{m_k})\end{array} \arrow[r, mapsto] & \begin{array}{c}(x, <g_{ij}(x)v_1 \wedge \ldots \wedge g_{ij}(x)v_{m_1}>, \ldots \\ \ldots, <g_{ij}(x)v_1 \wedge \ldots \wedge g_{ij}(x)v_{m_k}>)\end{array}
\end{tikzcd}$$

mit $\varepsilon : \mathbb{F}(m_1, \ldots, m_k; k^n) \hookrightarrow \mathbb{G}_{m_1}(k^n) \times_k \cdots \times_k \mathbb{G}_{m_k}(k^n)$. Nach 2.2.4 wird deshalb durch $(pl \times_k \cdots \times_k pl) \circ \varepsilon$ ein globaler Morphismus von Faserbündeln

$$(\boldsymbol{pl} \times_k \cdots \times_k \boldsymbol{pl}) \circ \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{F}(\boldsymbol{m}; Y) \longrightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^{m_1} Y) \times \cdots \times \mathbb{P}(\bigwedge^{m_k} Y)$$

gegeben, der nach 2.3.4 und [EGA I, 4.3.6(i)] eine abgeschlossene Immersion ist. Wegen 2.8.11 (bzw. 2.8.12) ist $\mathbb{P}(\bigwedge^{m_1} Y) \times \cdots \times \mathbb{P}(\bigwedge^{m_k} Y)$ projektiv, womit die Behauptung für $\mathbb{F}(\boldsymbol{m}; Y)$ folgt.

2.8.14 Bemerkung: Betrachtet man Faserbündel über einer algebraischen (d. h. insbesondere quasikompakten) und separierten Varietät X, dann sind die Totalvarietäten separierter und quasikompakter Faserbündel ebenfalls separiert und quasikompakt; vgl. hierzu 0.3.15(ii) und 0.4.2(ii).

Gemäß 2.8.2 und 2.8.9 sind sowohl affine als auch projektive Faserbündel separiert und quasikompakt. Damit sind - vermöge der in diesem Abschnitt bewiesenen Sätze - die Totalvarietäten von

- Prinzipalbündeln mit affiner Strukturgruppe,
- Vektorraumbündeln Y,

sowie die zu Vektorraumbündeln assoziierten Faserbündel

- $\mathbb{S}(Y)$ und
- $\mathbb{F}(\boldsymbol{m}; Y)$ (insbesondere $\mathbb{F}(Y)$ und $\mathbb{G}_k(Y)$)

separiert und quasikompakt, falls dies für die Basisvarietät X gilt.

Literaturverzeichnis

Topologie

[Bou(TG)] *Bourbaki, N.* : Topologie Générale, Éléments de Mathématique, Chap. 1-4, 5-10, Hermann Paris, 1971, 1974

[God] *Godement, R.* : Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Actual. Scient. et Industr. n° 1252, Hermann Paris, 1958

[Sch] *Schubert, H.* : Topologie, Math. Leit. B. G. Teubner Stuttgart, 3. Aufl. 1971

Algebraische Geometrie, kommutative Algebra

[Bou(A)] *Bourbaki, N.* : Algèbre, Éléments de Mathématique, Chap. 1-9, Hermann Paris, 1943-1971

[Bou(AC)] *Bourbaki, N.* : Algèbre Commutative, Éléments de Mathématique, Chap. 1-7, Hermann Paris, 1961-1965

[Bur] *Burau, W.* : Eine gemeinsame Verallgemeinerung aller veroneseschen und grassmannschen Mannigfaltigkeiten und die irreduziblen Darstellungen der projektiven Gruppen, Rend. Circ. Mat. Palermo **(2)3** (1954), 244-269

[EGA I] *Grothendieck, A., Dieudonné, J.* : Éléments de Géométrie Algébrique I, Grundlehren 166, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1971;

[EGA II] *ibid.* : Étude globale élémentaire de quelque classes de morphismes, Publ. Math. I. H. E. S. 8 (1961);

[EGA III] *ibid.* : Étude cohomologique des faisceaux cohérents, Publ. Math. I. H. E. S. 11 (1961), 17 (1963);

[EGA IV] *ibid.* : Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Publ. Math. I. H. E. S. 20 (1964), 24 (1965), 28 (1966), 32 (1967)

[FAC] *Serre, J.-P.* : Faisceaux algébriques cohérents, Ann. of Math. **61** (1955), 197-278

[FiSa] *Fischer, G., Sacher, R.* : Einführung in die Algebra, B. G. Teubner Stuttgart, 3. Aufl. 1983

[For] *Forster, O.* : Riemannsche Flächen, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1977

[GH] *Griffiths, P., Harris, J.* : Principles of Algebraic Geometry, Wiley-Interscience, New York 1978

[Har] *Hartshorne, R.* : Algebraic Geometry, GTM Springer-Verlag New York 1977

[Kun] *Kunz, E.* : Einführung in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1980

[SchSt] *Scheja, G., Storch, U.* : Lehrbuch der Algebra, Math. Leit. B. G. Teubner Stuttgart, Teil 1 (1980), Teil 2 (1988), Teil 3 (1981)

[Sha] *Shafarevich, I. R.* : Basic Algebraic Geometry, Vol. 1, Vol. 2, 2nd rev. and expanded ed., Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1994

Algebraische Gruppen

[Bor] *Borel, A.* : Linear Algebraic Groups, GTM Springer-Verlag New York, 2nd enl. ed. 1991

[Hum] *Humphreys, J. A.* : Linear Algebraic Groups, GTM Springer-Verlag New York 1975

[Pop] *Popov, V. L.* in : Algebraic Groups, Utrecht 1986 Proceedings, Springer Lecture Notes 1271, 237-242

[Spr] *Springer, T. A.* : Linear Algebraic Groups, Prog. in Math., Birkhäuser Boston 1980

Geometrische Invariantentheorie

[Che] *Chevalley, C.* : Espaces homogènes des groupes algébriques (Exp. nº 8), Séminaire C. Chevalley 1956-58, Classification des groupes de Lie algébriques, Vol. 1, Secr. Math. Paris 1958

[Cho] *Chow, W. L.* in : Algebraic Geometry and Topology, a symposium in honor of S. Lefschetz, Princeton Univ. Press 1957, 122-128

[GIT] *Mumford, D., Fogarty, J., Kirwan, F.* : Geometric Invariant Theory, Erg. Math. Grenz., Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 3rd enl. ed. 1994

[Gro(Des)] *Grothendieck, A.* : Techniques de descente et théorème d'existence en Géométrie Algebrique. I Généralités. Descente par morphismes fidèlement plats; Sem. Bourbaki, 2e année, 1959/60, nº 190

[Kra] *Kraft, H.* : Geometrische Methoden in der Invariantentheorie, Vieweg & Sohn Braunschweig, 2. Aufl. 1985

[New] *Newstead, P. E.* : Introduction to moduli problems and orbit spaces, Tata Inst. Lecture Notes, Springer-Verlag 1978

[Ros] *Rosenlicht, M.* : Some basic theorems on algebraic groups, Amer. J. Math. **78** (1956), 401-443

Faserbündel, Vektorraumbündel

[Hir] *Hirzebruch, F.* : Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, Erg. Math. Grenz., Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2. erg. Aufl. 1962

[Hus] *Husemoller, D.* : Fibre Bundles, GTM Springer-Verlag New York, 3rd ed. 1994

[OSS] *Okonek, C., Schneider, M., Spindler, H.* : Vector Bundles on Complex Projective Spaces, Prog. in Math., Birkhäuser Boston 1980

[Ser(EF)] *Serre, J.-P.* : Espaces fibrés algébriques, Séminaire C. Chevalley, 2^e année, Anneaux de Chow et Applications, Secr. Math. Paris 1958

[Ste] *Steenrod, N.* : The Topology of Fibre Bundles, Princeton University Press 1951, 1974

Index