MONODROMIE VON DIFFERENTIALGLEICHUNGSSYSTEMEN

MATHIAS SCHULZE

Notation 1. Man bezeichnet mit $E \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ die Einheitsmatix, mit Λ_Γ die Menge der Eigenwerte und mit χ_Γ das charakteristische Polynom einer Matrix $\Gamma \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$, mit $\mathrm{M}^*_\mathbb{C}$ bzw. $\Omega^*_\mathbb{C} \subset \mathrm{M}^*_\mathbb{C}$ die meromorphen bzw. holomorphen Differentialformen auf $\mathbb{C}$, mit $\mathcal{M}_\mathbb{C} = \mathrm{M}^0_\mathbb{C}$ bzw. $\mathcal{O}_\mathbb{C} = \Omega^0_\mathbb{C} \subset \mathcal{M}_\mathbb{C}$ die meromorphen bzw. holomorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$, mit $\mathrm{jet}_k(A)$ die Potenzreihenentwicklung bis zur Ordnung k und mit $A_k \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ die k-te Koeffizientenmatrix in der Potenzreihenentwicklung einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathrm{M}_{\mathbb{C},0})$, mit $\mathbb{C}^* \xhookrightarrow{i} \mathbb{C}$ die Inklusion von $\mathbb{C}^*$ in $\mathbb{C}$ und mit t und z Koordinatenfunktionen von $\mathbb{C}$ mit $p = z \circ p = \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,t}$ für die universelle Überlagerung $\mathbb{C} \xrightarrow{p} \mathbb{C}^*$ von $\mathbb{C}^*$.

Bemerkung 2. p induziert eine Abbildung von Komplexen und graduierten Algebren

$$\begin{tikzcd} \mathrm{M}^*_{\mathbb{C}^*} \arrow[r, "\delta p"] & \mathrm{M}^*_\mathbb{C} \\ \Omega^*_{\mathbb{C}^*} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\delta p"] & \Omega^*_\mathbb{C} \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

mit $\delta p|_{\mathcal{M}_{C^*}} = \delta p|_{\mathcal{O}_{C^*}} = p^*$.

$$\Rightarrow \delta p(f \,\mathrm{d}\, z) = \delta p(f)\delta p(\mathrm{d}\, z) = p^*(f)\,\mathrm{d}(\delta p(z)) = p^*(f)\,\mathrm{d}(p^*(z)) = p^*(f)\,\mathrm{d}\, p$$

Definition 3. Sei $x \in \mathbb{C}^n$.

$$|x| := \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

Lemma 4.

1. $|\cdot|$ *ist eine Norm.*
2. $A \in \mathrm{Mat}(k, l, \mathbb{C}), B \in \mathrm{Mat}(l, m, \mathbb{C}) \Rightarrow |AB| \leq |A||B|$

Satz 5. *Die Abbildung* $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{C}) \xrightarrow{e} \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ *mit*

$$\mathrm{e}^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

ist holomorph.

Beweis. Mit $|\sum_{k=k_0}^{k_1} \frac{A^k}{k!}| \leq \sum_{k=k_0}^{k_1} \frac{|A|^k}{k!}$ folgt aus der lokal gleichmäßigen Konvergenz der komplexen Exponentialreihe die lokal gleichmäßige Konvergenz von e. $\square$

Satz 6.

1. $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \Rightarrow U\,\mathrm{e}^A\,U^{-1} = \mathrm{e}^{UAU^{-1}}$
2. $AB = BA \Rightarrow \mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A\,\mathrm{e}^B$
3. $\det(\mathrm{e}^A) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(A)}$
4. $\mathrm{d}\,\mathrm{e}^A = \mathrm{d}\,A\,\mathrm{e}^A$
5. $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \Rightarrow \exists^1 \Gamma \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C}), \Re(\Lambda_\Gamma) \subset [-1,0) : \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\Gamma} = M$

Corollar 7. $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C}) \xrightarrow{e} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$

Notation 8. Man faßt $\tilde{f} \in i_* p_* \,\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(U)$ bzw. $\tilde{f} \in i_* p_* \,\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U)$ als mehrwertige meromorphe bzw. holomorphe Funktion

$$f = \tilde{f}(\frac{\log(z)}{2\pi\,\mathrm{i}})$$

auf U auf. Dabei gilt

$$f \in i_*\,\mathcal{M}_{\mathbb{C}^*}(U) \text{ bzw. } f \in i_*\,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}(U) \Leftrightarrow \tilde{f}(t+1) = \tilde{f}$$

Definition 9. Sei $\Gamma \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$.

$$z^\Gamma := \mathrm{e}^{\Gamma\log(z)} \in \mathrm{Mat}(n, i_* p_*\,\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}))$$

Corollar 10. *Sei* $\Gamma \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$.

1. $U \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \Rightarrow U z^\Gamma U^{-1} = z^{U\Gamma U^{-1}}$
2. $\Gamma\Gamma' = \Gamma'\Gamma \Rightarrow z^{\Gamma+\Gamma'} = z^\Gamma z^{\Gamma'}$
3. $\det(z^\Gamma) = z^{\mathrm{tr}(\Gamma)}$
4. $\mathrm{d}\,z^\Gamma = \frac{\Gamma}{z} z^\Gamma\,\mathrm{d}\,z$

Beweis. Die Behauptung folgt aus 6. □

Theorem und Definition 11. *Ist $U \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U))$, so bilden die Lösungen der Differentialgleichung*

$$\mathrm{d}\,u = Au\,\mathrm{d}\,z$$

einen komplexen Vektorraum der Dimension n.
Eine Basis des Lösungsraums heißt Fundamentalsystem.

Beweis. Siehe [CL], Chap. 3, Sec. 7 und Theorem 2.1. □

Definition 12. Sei $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathcal{M}_{\mathbb{C},0})$.

1. Man nennt

$$\mathrm{D}_A : \mathrm{d}\,u = Au\,\mathrm{d}\,z$$

   durch A definiertes Differentialgleichnungssystem und

$$\mathrm{L}_A := \{u \in i_*\,\mathcal{O}^n_{\mathbb{C}^*,0} \,|\, \mathrm{d}\,u = Au\,\mathrm{d}\,z\}$$

   Lösungsraum von D_A.
2. Man nennt

$$\tilde{\mathrm{D}}_A : \mathrm{d}\,\tilde{u} = \tilde{A}\tilde{u}\,\mathrm{d}\,t$$

   mit

$$\tilde{A} := \frac{\delta p(A\,\mathrm{d}\,z)}{\mathrm{d}\,t} \in \mathrm{Mat}(n, i_* p_*\,\mathcal{O}_{\mathbb{C},0})$$

<u>Liftung von D_A in die universelle Überlagerung von $\mathbb{C}^*$</u> und

$$\tilde{\mathrm{L}}_A := \{\tilde{u} \in i_* p_* \mathcal{O}^n_{\mathbb{C},0} \mid \mathrm{d}\,\tilde{u} = \tilde{A}\tilde{u}\,\mathrm{d}\,t\}$$

<u>Lösungsraum von $\tilde{\mathrm{D}}_A$</u>.

Im Folgenden sind $A, B \in \mathrm{Mat}(n, \mathcal{M}_{\mathbb{C},0})$.

Bemerkung 13.

1. $\tilde{A} = \frac{\delta p(A\,\mathrm{d}\,z)}{\mathrm{d}\,t} = p^*(A)\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,t} = p^*(A) 2\pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,t} = p^*(2\pi\,\mathrm{i}\,zA)$
2. Da A nur auf einer punktierten Umgebung von $0 \in \mathbb{C}$ holomorph sein muß und diese nicht einfach zusammenhängend ist, kann man 11 auf D_A nicht anwenden.
3. Sei $u \in \mathrm{L}_A$.
$$\begin{aligned} \tilde{u} &:= p^*(u) \in i_* p_* \mathcal{O}^n_{\mathbb{C},0} \\ \Rightarrow \mathrm{d}\,\tilde{u} &= \mathrm{d}(p^*(u)) = \mathrm{d}(\delta p(u)) = \delta p(\mathrm{d}\,u) \\ &= \delta p(Au\,\mathrm{d}\,z) = \delta p(A\,\mathrm{d}\,z)\delta p(u) = \tilde{A}\,\mathrm{d}\,t p^*(u) \\ &= \tilde{A}\tilde{u}\,\mathrm{d}\,t \\ \Rightarrow \tilde{u} &\in \tilde{\mathrm{L}}_A \end{aligned}$$
4. $\tilde{u} \in \tilde{\mathrm{L}}_A$ faßt man als mehrwertige Lösung
$$u = \tilde{u}(\frac{\log(z)}{2\pi\,\mathrm{i}})$$
von D_A auf. Dabei gilt
$$u \in \mathrm{L}_A \Leftrightarrow \tilde{u}(t+1) = \tilde{u}$$
5. Da Urbilder punktierter ϵ-Umgebungen unter p einfach zusammenhängend sind, kann man 11 auf $\tilde{\mathrm{D}}_A$ anwenden.
6. Ein Fundamentalsystem $\tilde{S}$ von $\tilde{\mathrm{D}}_A$ faßt man als mehrwertiges Fundamentalsystem
$$S = \tilde{S}(\frac{\log(z)}{2\pi\,\mathrm{i}})$$
von D_A auf.

Satz und Definition 14. *Für ein Fundamentalsystem S von D_A gibt es ein $\mathrm{M}_A(S) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit*

$$\tilde{S}(t+1) = \tilde{S}\,\mathrm{M}_A(S)$$

$\mathrm{M}_A(S)$ heißt <u>Monodromie von S</u>.

Beweis. Sei S Fundamentalsystem von D_A.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathrm{d}\,\tilde{S} &= \tilde{A}\tilde{S}\,\mathrm{d}\,t \\ \Rightarrow \mathrm{d}\,\tilde{S}(t+1) &= \tilde{A}(t+1)\tilde{S}(t+1)\,\mathrm{d}(t+1) \\ &= p^*(2\pi\,\mathrm{i}\,zA)(t+1)\tilde{S}(t+1)\,\mathrm{d}\,t \\ &= p^*(2\pi\,\mathrm{i}\,zA)\tilde{S}(t+1)\,\mathrm{d}\,t \\ &= \tilde{A}\tilde{S}(t+1)\,\mathrm{d}\,t \end{aligned}$$

Also ist auch $\tilde{S}(t+1)$ Fundamentalsystem von $\tilde{\mathrm{D}}_A$.

$$\Rightarrow \exists\, \mathrm{M}_A(S) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) : \tilde{S}(t+1) = \tilde{S}\,\mathrm{M}_A(S)$$

□

Satz und Definition 15. *Die Konjugationsklasse*

$$\mathrm{M}_A := [\mathrm{M}_A(S)]$$

ist unabhängig vom Fundamentalsystem S von D_A und heißt Monodromie von D_A.

$$\chi_{\mathrm{M}_A} := \chi_{\mathrm{M}_{A(S)}}$$

ist wohldefiniert und heißt charakteristisches Polynom von M_A.

Beweis. Seien S und T Fundamentalsysteme von D_A.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \exists U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) : \tilde{T} &= \tilde{S}U \\
\Rightarrow \tilde{T}\,\mathrm{M}_A(T) &= \tilde{T}(t+1) \\
&= \tilde{S}(t+1)U \\
&= \tilde{S}\,\mathrm{M}_A(S)U \\
&= \tilde{S}UU^{-1}\,\mathrm{M}_A(S)U \\
&= \tilde{T}U^{-1}\,\mathrm{M}_A(S)U \\
\Rightarrow \mathrm{M}_A(T) &= U^{-1}\,\mathrm{M}_A(S)U \\
\Rightarrow [\mathrm{M}_A(T)] &= [\mathrm{M}_A(S)]
\end{aligned}$$

Da χ invariant unter Konjugation ist, ist χ_{M_A} wohldefiniert. □

Definition 16. D_A und D_B heißen äquivalent, wenn es ein $M \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{M}_{\mathbb{C},0})$ gibt mit

$$B\,\mathrm{d}\,z = \mathrm{d}\,MM^{-1} + MAM^{-1}\,\mathrm{d}\,z$$

und man schreibt $\mathrm{D}_B \sim_M \mathrm{D}_A$.

Im Folgenden ist $M \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{M}_{\mathbb{C},0})$.

Bemerkung 17.

1. $\mathrm{D}_B \sim_M \mathrm{D}_A \Leftrightarrow \mathrm{D}_A \sim_{M^{-1}} \mathrm{D}_B$
2. Sei $\mathrm{D}_B \sim_M \mathrm{D}_A$.

$$\begin{aligned}
\tilde{M} &:= p^*(M) \\
\Rightarrow \tilde{B}\,\mathrm{d}\,t &= \delta p(B\,\mathrm{d}\,z) = \delta p(\mathrm{d}\,MM^{-1} + MAM^{-1}\,\mathrm{d}\,z) \\
&= \delta p(\mathrm{d}\,M)\delta p(M^{-1}) + \delta p(M)\delta p(A\,\mathrm{d}\,z)\delta p(M^{-1}) \\
&= \mathrm{d}(\delta p(M))\delta p(M)^{-1} + \delta p(M)\delta p(A\,\mathrm{d}\,z)\delta p(M)^{-1} \\
&= \mathrm{d}(p^*(M))p^*(M)^{-1} + p^*(M)\tilde{A}p^*(M)^{-1}\,\mathrm{d}\,t \\
&= \mathrm{d}\,\tilde{M}\tilde{M}^{-1} + \tilde{M}\tilde{A}\tilde{M}^{-1}\,\mathrm{d}\,t
\end{aligned}$$

Seien $\tilde{u}, \tilde{v} \in i_* p_* \mathcal{O}^n_{\mathbb{C},0}$ mit $\tilde{v} = \tilde{M}\tilde{u}$.

$$\begin{aligned}
&\tilde{u} \in \tilde{\mathrm{L}}_A \\
&\Leftrightarrow \mathrm{d}\,\tilde{u} = \tilde{A}\tilde{u}\,\mathrm{d}\,t \\
&\Leftrightarrow \tilde{M}\,\mathrm{d}(\tilde{M}^{-1}\tilde{v}) = \tilde{M}\tilde{A}\tilde{M}^{-1}\tilde{v}\,\mathrm{d}\,t \\
&\Leftrightarrow \tilde{M}\tilde{M}^{-1}\,\mathrm{d}\,\tilde{v} + \tilde{M}\,\mathrm{d}\,\tilde{M}^{-1}\tilde{v} = \tilde{M}\tilde{A}\tilde{M}^{-1}\tilde{v}\,\mathrm{d}\,t \\
&\Leftrightarrow \mathrm{d}\,\tilde{v} = \mathrm{d}\,\tilde{M}\tilde{M}^{-1}\tilde{v} + \tilde{M}\tilde{A}\tilde{M}^{-1}\tilde{v}\,\mathrm{d}\,t \\
&\Leftrightarrow \mathrm{d}\,\tilde{v} = \tilde{B}\tilde{v}\,\mathrm{d}\,t \\
&\Leftrightarrow \tilde{M}\tilde{u} = \tilde{v} \in \tilde{\mathrm{L}}_B
\end{aligned}$$

Satz 18. *Jedes Fundamentalsystem S von D_A hat eine eindeutige Darstellung*

$$S = \Sigma z^\Gamma$$

mit $\Sigma \in \mathrm{Mat}(n, i_*\,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*,0})$ *und* $\Gamma \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ *mit* $\Re(\Lambda_\Gamma) \subset [-1,0)$.
Dabei ist $\mathrm{M}_A(S) = \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\Gamma}$.

Beweis.

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_A(S) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) &\Rightarrow \exists^1\Gamma \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C}), \Re(\Lambda_\Gamma) \subset [-1,0) : \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\Gamma} = \mathrm{M}_A(S) \\
\Sigma := Sz^{-\Gamma} &\Rightarrow \tilde{\Sigma}(t+1) = \tilde{S}\,\mathrm{M}_A(S)\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\Gamma}\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\Gamma t} = \tilde{S}\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\Gamma t} = \tilde{\Sigma} \\
&\Rightarrow \Sigma \in \mathrm{Mat}(n, i_*\,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*,0})
\end{aligned}$$

Sei $\Sigma' \in \mathrm{Mat}(n, i_*\,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*,0})$ und $\Gamma' \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ mit $\Re(\Lambda_\Gamma) \subset [-1,0)$ und $\Sigma z^\Gamma = \Sigma' z^{\Gamma'}$.

$$\Rightarrow \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\Gamma} = \mathrm{M}_A(\Sigma z^\Gamma) = \mathrm{M}_A(\Sigma' z^{\Gamma'}) = \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\Gamma'} \Rightarrow \Gamma = \Gamma' \Rightarrow \Sigma = \Sigma'$$

□

Im Folgenden sind $\Sigma, \Sigma' \in \mathrm{Mat}(n, i_*\,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*,0})$ und $\Gamma, \Gamma' \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ mit $\Re(\Lambda_\Gamma), \Re(\Lambda_{\Gamma'}) \subset [-1,0)$.

Bemerkung 19. Seien Σz^Γ und $\Sigma' z^{\Gamma'}$ Fundamentalsysteme von D_A.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \exists U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) : \Sigma z^\Gamma &= \Sigma' z^{\Gamma'} U \\
&= \Sigma' U U^{-1} z^{\Gamma'} U \\
&= \Sigma' U z^{U^{-1}\Gamma' U} \\
\Rightarrow \Sigma = \Sigma' U, \Gamma &= U^{-1}\Gamma' U
\end{aligned}$$

Corollar 20. $\mathrm{D}_A \sim \mathrm{D}_B \Rightarrow \mathrm{M}_A = \mathrm{M}_B$

Beweis. Sei $\mathrm{D}_B \sim_M \mathrm{D}_A$ und Σz^Γ Fundamentalsystem von D_A.
Dann ist $M\Sigma z^\Gamma$ Fundamentalsystem von D_B mit $M\Sigma \in \mathrm{Mat}(n, i_*\,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*,0})$.

$$\Rightarrow \mathrm{M}_A = [\mathrm{M}_A(\Sigma z^\Gamma)] = [\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\Gamma}] = [\mathrm{M}_A(M\Sigma z^\Gamma)] = \mathrm{M}_B$$

□

Definition 21. D_A heißt regulär, wenn für ein (und somit für jedes) Fundamentalsystem Σz^Γ von D_A $\Sigma \in \mathrm{Mat}(n, \mathcal{M}_{\mathbb{C},0})$ ist.

Bemerkung 22. Sei D_A regulär mit $\mathrm{D}_B \sim_M \mathrm{D}_A$.
Ist Σz^Γ Fundamentalsystem von D_A, so ist $M\Sigma z^\Gamma$ Fundamentalsystem von D_B mit $M\Sigma \in \mathrm{Mat}(n, \mathcal{M}_{\mathbb{C},0})$. Also ist D_B regulär.

Satz 23. D_A *ist genau dann regulär, wenn es ein* $\Gamma \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ *gibt mit*

$$\mathrm{D}_A \sim \mathrm{D}_{\frac{\Gamma}{z}}$$

Beweis.

1. Sei D_A regulär und $S = \Sigma z^\Gamma$ Fundamentalsystem von D_A.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \mathrm{d}\,\Sigma^{-1}\Sigma + \Sigma^{-1}A\Sigma\,\mathrm{d}\,z &= d(z^\Gamma S^{-1})Sz^{-\Gamma} + z^\Gamma S^{-1}ASz^{-\Gamma}\,\mathrm{d}\,z \\ &= (\mathrm{d}\,z^\Gamma S^{-1} + z^\Gamma\,\mathrm{d}\,S^{-1})Sz^{-\Gamma} + z^\Gamma S^{-1}\,\mathrm{d}\,Sz^{-\Gamma} \\ &= \mathrm{d}\,z^\Gamma z^{-\Gamma} + z^\Gamma(\mathrm{d}\,S^{-1}S + S^{-1}\,\mathrm{d}\,S)z^{-\Gamma} \\ &= \frac{\Gamma}{z}z^\Gamma z^{-\Gamma}\,\mathrm{d}\,z + z^\Gamma\,\mathrm{d}(S^{-1}S)z^{-\Gamma} \\ &= \frac{\Gamma}{z}\,\mathrm{d}\,z \\ \Rightarrow \mathrm{D}_A &\sim_\Sigma \mathrm{D}_{\frac{\Gamma}{z}}\end{aligned}$$

2. Sei $\mathrm{D}_A \sim_M \mathrm{D}_{\frac{\Gamma}{z}}$.
   Wegen

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\,z^\Gamma &= \frac{\Gamma}{z}z^\Gamma \\ \det(z^\Gamma) &= z^{\mathrm{tr}(\Gamma)}\end{aligned}$$

   ist z^Γ Fundamentalsystem von $\mathrm{D}_{\frac{\Gamma}{z}}$.
   Also ist $\mathrm{D}_{\frac{\Gamma}{z}}$ regulär und somit auch D_A.

□

Bemerkung 24. Sei $\Gamma \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$.

$$\mathrm{M}_{\frac{\Gamma}{z}} = [\mathrm{M}_{\frac{\Gamma}{z}}(z^\Gamma)] = [\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\Gamma}]$$

Satz 25. *Sind* D_A *und* D_B *regulär mit* $\mathrm{M}_A = \mathrm{M}_B$, *so gilt*

$$\mathrm{D}_A \sim \mathrm{D}_B$$

Beweis. Nach 23 kann man $A = \frac{\Gamma}{z}$ und $B = \frac{\Gamma'}{z}$ annehmen.

$$\begin{aligned}\Rightarrow [\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\Gamma}] = \mathrm{M}_{\frac{\Gamma}{z}} &= \mathrm{M}_{\frac{\Gamma'}{z}} = [\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\Gamma'}] \\ \Rightarrow \exists U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) : \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\Gamma} &= U\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\Gamma'}\,U^{-1} \\ &= \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,U\Gamma' U^{-1}} \\ \Rightarrow \Gamma &= U\Gamma' U^{-1} \\ \Rightarrow \frac{\Gamma}{z}\,\mathrm{d}\,z &= \mathrm{d}\,UU^{-1} + U\frac{\Gamma'}{z}U^{-1}\,\mathrm{d}\,z \\ \Rightarrow \mathrm{D}_{\frac{\Gamma}{z}} &\sim_U \mathrm{D}_{\frac{\Gamma'}{z}}\end{aligned}$$

□

Corollar 26. *Sind* D_A *und* D_B *regulär, so gilt*

$$\mathrm{D}_A \sim \mathrm{D}_B \Leftrightarrow \mathrm{M}_A = \mathrm{M}_B$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus 20 und 25. □

Satz 27. *Für* $B \in \mathrm{Mat}(n, \mathcal{O}_{\mathbb{C},0})$ *ist* $\mathrm{D}_{\frac{B}{z}}$ *regulär.*

Beweis. Siehe [CL], Chap. 4, Theorem 2.1. □

Corollar 28. *Es sind äquivalent:*

1. D_A *ist regulär.*
2. *Für ein* $B \in \mathrm{Mat}(n, \mathcal{O}_{\mathbb{C},0})$ *ist* $\mathrm{D}_A \sim \mathrm{D}_{\frac{B}{z}}$.
3. *Für ein* $\Gamma \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ *ist* $\mathrm{D}_A \sim \mathrm{D}_{\frac{\Gamma}{z}}$.

Beweis. Die Behauptung folgt aus 23 und 27. □

Definition 29. Sei $\Gamma \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$.

$$\delta_\Gamma := \max(\Lambda_\Gamma - \Lambda_\Gamma) \cap \mathbb{Z}$$

Satz 30. *Für* $B \in \mathrm{Mat}(n, \mathcal{O}_{\mathbb{C},0})$ *gibt es ein* $\hat{B} \in \mathrm{Mat}(n, \mathcal{O}_{\mathbb{C},0})$ *mit den folgenden Eigenschaften.*

1. $\mathrm{D}_{\frac{B}{z}} \sim \mathrm{D}_{\frac{\hat{B}}{z}}$
2. $\delta_{\hat{B}_0} = 0$
3. $\chi_{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}B_0}} = \chi_{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\hat{B}_0}}$
4. $B \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C}) \Rightarrow \hat{B} \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$
5. $\mathrm{jet}_{k+\delta_{\hat{B}_0}}(\hat{B})$ *hängt nur von* $\mathrm{jet}_{k+\delta_{B_0}}(B)$ *ab.*

Beweis. Für $\delta_{B_0} = 0$ ist nichts zu zeigen.
Sei also $\delta_{B_0} \geq 1$ und $\Lambda_{B_0}/\mathbb{Z} = \{[\lambda_1], \ldots, [\lambda_m]\}$ mit $\Re(\lambda_k) = \min \Re([\lambda_k])$.
Nach Konjugation mit geeignetem $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ kann man

$$B = \begin{pmatrix} B^{1,1} & B^{1,2} \\ B^{2,1} & B^{2,2} \end{pmatrix}$$

mit $\Lambda_{B^{1,1}} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$, $\Lambda_{B^{2,2}} = \bigcup_{k=1}^m [\lambda_k] \setminus \{\lambda_k\}$ und $B_0^{1,2} = B_0^{2,1} = 0$ annehmen. Definiert man

$$\begin{aligned} M &:= \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \frac{E}{z} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n, \mathcal{M}_{\mathbb{C},0}) \\ \hat{B} &:= z\frac{\mathrm{d}\,M}{\mathrm{d}\,z} M^{-1} + MBM^{-1} \\ &= z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{E}{z^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & zE \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \frac{E}{z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B^{1,1} & B^{1,2} \\ B^{2,1} & B^{2,2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & zE \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B^{1,1} & zB^{1,2} \\ \frac{B^{2,1}}{z} & B^{2,2} - E \end{pmatrix} \end{aligned}$$

so ist $\hat{B} \in \mathrm{Mat}(n, \mathcal{O}_{\mathbb{C},0})$ und hat die Eigenschaften 1, 4 und 5. Wegen

$$\hat{B}_0 = \begin{pmatrix} B_0^{1,1} & 0 \\ B_1^{2,1} & B_0^{2,2} - E \end{pmatrix}$$

ist $\delta_{\hat{B}_0} = \delta_{B_0} - 1$ und

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\hat{B}_0} &= \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\begin{pmatrix} B_0^{1,1} & 0 \\ B_1^{2,1} & B_0^{2,2} \end{pmatrix}} \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,B_0^{1,1}} & 0 \\ * & \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,B_0^{2,2}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Also hat $\hat{B}_0$ auch die Eigenschaft 3.
Die Behauptung erhält man durch Induktion. □

Lemma 31. *Seien $P, Q \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$.*
Dann hat die Matrixgleichung

$$PX - XQ = Y$$

genau dann für alle $Y \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ eine eindeutige Lösung, wenn P und Q keine gemeinsamen Eigenwerte haben.

Beweis. Siehe [HA], 1.4.4 Sublemma. □

Lemma 32. *Ist D_A regulär und $u = \sum_{k=k_0}^{\infty} u_k z^k \in \mathbb{C}[\![z]\!]^n$ mit $\mathrm{d}\,u = Au\,\mathrm{d}\,z$, so ist $u \in \mathcal{M}_{\mathbb{C},0}^n$.*

Beweis. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \subset \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ ist offen und $\lim_{k\to\infty}(E - \frac{\Gamma}{k}) = E \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

$$\Rightarrow \exists k_1 \geq 0 : \forall k > k_1 : kE - \Gamma = k(E - \frac{\Gamma}{k}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

Nach 23 kann man $A = \frac{\Gamma}{z}$ annehmen.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \mathrm{d}\,u = \frac{\Gamma}{z} u\,\mathrm{d}\,z \\
&\Rightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} k u_k z^k\,\mathrm{d}\,z = \Gamma \sum_{k=k_0}^{\infty} u_k z^k\,\mathrm{d}\,z \\
&\Rightarrow \forall k \geq k_0 : (kE - \Gamma) u_k = 0 \\
&\Rightarrow \forall k \geq \max\{k_0, k_1 + 1\} : u_k = 0 \\
&\Rightarrow u = \sum_{k=k_0}^{k_1} u_k z^k \in \mathcal{M}_{\mathbb{C},0}^n
\end{aligned}$$

□

Satz 33. *Für $B \in \mathrm{Mat}(n, \mathcal{O}_{\mathbb{C},0})$ mit $\delta_{B_0} = 0$ ist*

$$\mathrm{D}_{\frac{B}{z}} \sim \mathrm{D}_{\frac{B_0}{z}}$$

Beweis. Wegen $\delta_{B_0} = 0$ haben $kE - B_0$ und B_0 für $k \geq 1$ keine gemeinsamen Eigenwerte. Nach 31 gibt es daher ein $M \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C}[\![z]\!])$ mit $M_0 = E$ und

$$\begin{aligned} \forall k \geq 0 : (kE - B_0)M_k + M_k B_0 &= -\sum_{l=0}^{k-1} M_l B_{k-l} \\ \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} k M_k z^k \,\mathrm{d}\, z &= \sum_{k=0}^{\infty} B_0 M_k z^k \,\mathrm{d}\, z - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} M_l B_{k-l} z^k \,\mathrm{d}\, z \\ \Rightarrow \mathrm{d}\, M &= \frac{B_0}{z} M \,\mathrm{d}\, z - M \frac{B}{z} \,\mathrm{d}\, z \end{aligned}$$

Nach 27 und 32 ist also $M \in \mathrm{Mat}(n, \mathcal{M}_{\mathbb{C},0})$ und somit $\mathrm{D}_{\frac{B_0}{z}} \sim_M \mathrm{D}_{\frac{B}{z}}$. □

Corollar 34. *Für* $B \in \mathrm{Mat}(n, \mathcal{O}_{\mathbb{C},0})$ *mit* $\delta_{B_0} = 0$ *ist*

$$\mathrm{M}_{\frac{B}{z}} = [\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\, B_0}]$$

Beweis. Nach 33 ist $\mathrm{D}_{\frac{B}{z}} \sim \mathrm{D}_{\frac{B_0}{z}}$ und somit nach 20

$$\mathrm{M}_{\frac{B}{z}} = \mathrm{M}_{\frac{B_0}{z}} = [\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\, B_0}]$$

□

Corollar 35. *Für* $B \in \mathrm{Mat}(n, \mathcal{O}_{\mathbb{C},0})$ *hängt* $\mathrm{M}_{\frac{B}{z}}$ *nur von* $\mathrm{jet}_{\delta_{B_0}}(B)$ *ab und*

$$\chi_{\mathrm{M}_{\frac{B}{z}}} = \chi_{\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\, B_0}}$$

Beweis. Nach 30 ist

$$\mathrm{D}_{\frac{B}{z}} \sim \mathrm{D}_{\frac{\hat{B}}{z}}$$

mit $\delta_{\hat{B}_0} = 0$ und somit nach 20 und 34

$$\mathrm{M}_{\frac{B}{z}} = \mathrm{M}_{\frac{\hat{B}}{z}} = [\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\, \hat{B}_0}]$$

Nach 30 hängt $\hat{B}_0 = \mathrm{jet}_0(\hat{B})$ nur von $\mathrm{jet}_{\delta_{B_0}}(B)$ ab und

$$\chi_{\mathrm{M}_{\frac{B}{z}}} = \chi_{\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\, \hat{B}_0}} = \chi_{\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\, B_0}}$$

□

Literatur

[HA] A. Borel et al., Algebraic D-Modules, Academic Press, 1987, III., §1

[CL] Coddington & Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill Book Company, 1955

[WA] Frank W. Warner, Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Springer-Verlag, 1983

Mathias Schulze, Jakob-Locher-Strasse 16, 66482 Zweibrücken

E-mail address: `mschulze@mathematik.uni-kl.de`