

**Untersuchung der Massendifferenz
massiver Neutrinos**

Diplomarbeit

von

**Martin Greulach
Universität Kaiserslautern
Fachbereich Physik
67663 Kaiserslautern**

**betreut von
Prof. Dr. A. Vančura**

2 te inhaltlich unveränderte Auflage

Oktober 1994

Für meine Eltern,
meine Geschwister Uwe und Sabine,
und meine Freundin Tati

Inhaltsverzeichnis

1	Standard Modell	5
1.1	Geschichte der schwachen Wechselwirkung	6
1.2	Die elektroschwache Wechselwirkung	7
1.3	Massenterme	15
1.4	Cabibbo Theorie	20
1.5	Die Lagrangedichte des Standard Modells	26
1.6	Renormalisierung	27
1.7	Parameter des Standardmodells	30
2	Effekte massiver Neutrinos	31
2.1	Modellsystem	32
2.2	Zerfall des Neutrons	33
2.3	Solar Neutrinos	40
2.3.1	Standard Solar Modell	42
2.3.2	Jahreszeitvariationen	43
2.4	Massendifferenz der Neutrinos	48
2.4.1	Der Beitrag der W-Bosonen zur invarianten Amplitude	51
2.4.2	Der Beitrag der S-Boson zur invarianten Amplitude	54
2.4.3	Berechnung der Massendifferenz	57
2.5	Resümee	59
A	Notationen & Konventionen	61
A.1	Verwendete Symbole	61
A.2	Relativistische Notation	62
A.3	Dirac-Algebra	62
A.3.1	Dirac-Algebra im Minkowski-Raum	62
A.3.2	Dirac-Algebra in komplexer Dimension ω	63
A.3.3	Darstellung der Dirac-Algebra	63

A.4	Dirac-Gleichung	64
A.4.1	Hilfsmittel zur Berechnung von Amplituden	65
A.5	Feynman-Regeln	66
B	Nebenrechnungen und Ergänzungen	69
B.1	Nebenrechnungen zum Zerfall des Neutrons	69
B.1.1	Drei-Körper Zerfall	69
B.1.2	Gleichungen	72
B.2	Nebenrechnungen zu den Neutrinooszillationen	74
B.2.1	Vakuumoszillationen	74
B.3	Nebenrechnungen zur der Massendifferenz der Neutrinos	77
B.3.1	Quantenmechanische Störungsrechnung	77
B.3.2	Dimensionale Regularisierung unserer Integrale	79
B.3.3	Gleichungen	80
B.4	Daten	82
B.4.1	Ergebnisse Homestake Experiment:	84
B.5	Numerische Werte der Konstanten	86

Kapitel 1

Standard Modell

Im ersten Teil des Kapitels wollen wir uns mit der frühen Geschichte des Neutrinos und des Standardmodells beschäftigen (Kapitel 1.1). Wie wir sehen werden, sind beide untrennbar miteinander verknüpft.

In den folgenden Abschnitten des Kapitels versuchen wir, das Standardmodell zu konstruieren. Dabei gehen wir ähnlich wie im Buch von O. Nachtmann über Elementarteilchenphysik [Nac86] vor. Als Modellsystem betrachten wir ein Fermionenduplett, das unter anderem auch diese Vorstellungen über eine Theorie der schwachen Wechselwirkung erfüllt:

- *Linkshändigkeit der Ströme*
- *Cabibbo–Theorie (Mischung verschiedener Flavours)**
- *Renormalisierbarkeit*

Um so allgemein wie möglich zu bleiben, werden wir genau so viele rechtshändige, wie linkshändige Felder benutzen. Dabei werden wir das Problem haben, daß wir einige Parameter festlegen müssen. Da wir jedoch dieses Fermionenduplett als Modellsystem für Leptonen einer Generation oder Quarks einer Generation verwenden, bleiben diese Parameter unspezifiziert. Dies stellt kein großes Problem dar, da gezeigt wird, wie man dieses Modell auf alle Generationen von Fermionen verallgemeinert, und die Parameterwahl für den Teilcheninhalt des Standardmodells explizit vorgenommen wird.

Zunächst werden wir uns ansehen, wie man in diesem Modell eine Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung konstruieren kann (Kapitel 1.2). Später betrachten wir dann, wie in dieses Modell die starke Wechselwirkung eingeführt wird (Kapitel 1.5). Um die folgenden Überlegungen im Kapitel 2 besser verstehen zu können, ist es notwendig, einen etwas genaueren Blick auf die möglichen „Massenterme“ für die Neutrinos (Kapitel 1.3) und die Cabibbo–Theorie zu werfen (Kapitel 1.4). Außerdem ist es auch notwendig, sich Gedanken über die Renormalisierbarkeit der Theorie zu machen (Kapitel 1.6). Die Darstellung der Renormalisierung bleibt auf einem sehr oberflächlichem Niveau. Die Darstellung ist im wesentlichen an dem Buch von T. P. Cheng & L. Li über Eichtheorien der Elementarteilchenphysik [CL84] und dem Review Artikel von G. Leibbrandt [Lei75] angelehnt. Es werden aber im wesentlichen die Konventionen von Cheng & Li benutzt.

*Wir werden im folgenden diese Theorie nicht nur für Quarks betrachten, sondern auch für Leptonen

1.1 Geschichte der schwachen Wechselwirkung

Als Beginn der Geschichte der schwachen Wechselwirkung kann man den 1. März 1896 betrachten. An diesem Tag entdeckte H. Becquerel [H.B96] die Radioaktivität*. Das die entdeckte Strahlung aus verschiedenen Komponenten besteht, fiel 1911 E. Rutherford [Rut11a][Rut11b] auf. Er nannte diese Strahlen einfach α - bzw. β -Strahlen, je nach ihrer Reichweite in Materie. 1914 gelang es dann J. Chadwick zu zeigen, daß die β -Strahlen ein kontinuierliches Energiespektrum besitzen [Cha14]. Dreizehn Jahre später stellten C. D. Ellis und W. A. Wooster bei Kalorimetermessungen fest [EWS27], daß die mittlere Energietönung des Zerfalls nicht der maximalen Energie, sondern der mittleren Energie der β -Strahlen entspricht. Dies bedeutete einen Widerspruch mit der Vermutung, daß es sich um einen Zwei-Körper Zerfall handelt†. Um diesen Widerspruch aufzulösen, mußte der Energiesatz verletzt sein‡, oder ein weiteres Teilchen bei dem Zerfall auftreten.

An dieser Stelle begegnet uns zum ersten Mal das Neutrino. In einem Brief an eine Physikertagung in Tübingen, schlägt W. Pauli 1931 [Pau58] vor, ein weiteres neutrales Teilchen, das „Neutron“ §, zu postulieren. Dieses Teilchen sollte Spin $\frac{1}{2}$ haben, und eine Ruhemasse $\simeq m_e$. Diese Idee erwähnte W. Pauli 1931 auf einer Konferenz gegenüber E. Fermi, dem diese Idee sehr gefiel. Der Name Neutrino wurde zuerst von E. Fermi 1932, nach Entdeckung des Neutrons durch J. Chadwick [Cha32], in Seminaren gebraucht um die Teilchen zu unterscheiden.

In den 30-er Jahren unseres Jahrhunderts entwickelte E. Fermi [Fer33][Fer34] eine Theorie des Neutronenzerfalls. Dabei imitierte er einfach die elektromagnetische Wechselwirkung

$$\mathcal{L} = -e\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi A^\mu \tag{1.1}$$

dadurch, daß er folgende Ersetzungen vornahm:

$$\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi \rightarrow \bar{\Psi}_p\gamma_\mu\Psi_n \tag{1.2}$$

$$A^\mu \rightarrow \bar{\Psi}_e\gamma^\mu\Psi_\nu \tag{1.3}$$

Dabei bedeuten die Indizes n Neutron, p Proton, e Elektron und ν Neutrino. Wegen dieser Ersetzung, kann jetzt die Kopplungskonstante nicht mehr dimensionslos sein, sondern muß die Dimension [Masse⁻²] besitzen. In den folgenden Jahren wurde diese Kopplung noch etwas verallgemeinert¶. Diese Verallgemeinerungen waren sehr erfolgreich bei der Beschreibung von Zerfällen, bis zur Entdeckung der Paritätsverletzung durch T. D. Lee und C. N. Yang im Jahre 1956 [LY56]. Man hatte zu dieser Zeit zwei Teilchen, τ - ϑ genannt, entdeckt, die gleiche Masse und gleiche Lebensdauer besaßen. Es gab folgende Zerfallskanäle:

$$\tau^+ \longrightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^- \tag{1.4}$$

$$\vartheta^+ \longrightarrow \pi^+ \pi^0 \tag{1.5}$$

*Wie wir heute wissen hatte er im wesentlichen β -Strahlen, die aus dem Zerfall schwerer Kerne stammten, nachgewiesen.

†Bei einem Zwei-Körper Zerfall ist die Energie der Teilchen festgelegt.

‡Diese Meinung vertrat N. Bohr; er sprach von einer „statistischen Erhaltung der Energie“ [Boh32]

§Dieses Teilchen ist das Neutrino. Zu diesem Zeitpunkt war das Neutron noch nicht entdeckt.

¶Siehe zum Beispiel G. Gamow und E. Teller [GT36]

Man hatte experimentell festgestellt, daß der Endzustand im τ -Zerfall negative, und der Endzustand im ϑ -Zerfall positive Parität hatte. Die revolutionäre Idee von T. D. Lee und C. N. Yang war, daß wenn die Parität in der schwachen Wechselwirkung nicht erhalten ist, das τ und ϑ Zerfallskanäle des gleichen Teilchens sein könnten. Nachdem man diese Idee ernsthaft in Erwägung gezogen hatte, fand man in der Natur weitere Systeme, die die Parität verletzen. Man hatte also die Entdeckung gemacht das die Natur zwischen Rechts- und Linkssystemen unterscheidet. Wegen dieser Entdeckung mußte man die Lagrangedichte des β -Zerfalls leicht modifizieren. Man mußte die chiral projizierten Ströme, anstelle der von Fermi konstruierten Ströme betrachten. Also hatte man als Lagrangedichte für den β -Zerfall des Neutrons:

$$\mathcal{L}_\beta = -\frac{G_\beta}{\sqrt{2}}\bar{\Psi}_p\gamma^\lambda(1 - \frac{g_A}{g_V}\gamma_5)\Psi_n\bar{\Psi}_e\gamma^\lambda(1 - \gamma_5)\Psi_\nu + \text{h.c.} \quad (1.6)$$

An diesem Punkt wollen wir unseren historischen Ausflug beenden. Wir haben erfahren, daß das Postulat des Neutrinos zur Konstruktion der Fermi Vier-Punkt Wechselwirkung führte. Außerdem wissen wir, daß das Neutrino nur linkshändig mit anderen Teilchen koppelt. Diese Voraussetzungen genügen um die Annahmen des nächsten Teils dieses Kapitels zu verstehen. In den weiteren Abschnitten dieses Kapitels werden wir das Standard Modell aus wenigen Annahmen entwickeln. Zur weiteren Geschichte der schwachen Wechselwirkung ist zu sagen, daß diese mit den Namen S. Weinberg, A. Salam und S. L. Glashow verbunden ist, die für ihre Beiträge zur Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung 1979 mit dem Nobelpreis ausgezeichnet wurden. Die Ideen, die sie zur Entwicklung des Standard Modells führten, sind sehr gut in ihren Nobelpreis Reden dargestellt [Wei80] [Sal80] [Gla80].

1.2 Die elektroschwache Wechselwirkung

Wir betrachten jetzt das Verhalten eines Dubletts $\psi(x)$

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

unter verschiedenen Transformationen , die die freie Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_0(x) = \bar{\psi}(x) i \not{\partial} \psi(x) \quad (1.8)$$

invariant lassen.

Wenn man die freie Lagrangedichte \mathcal{L}_0 betrachtet, erkennt man leicht, daß diese invariant unter globalen $SU(2) \times U(1)$ Transformationen ist. Wir betrachten aber nur eine sehr spezielle Form dieser Transformationen, nämlich solche, die auf den rechtshändigen und linkshändigen Anteil der Fermionen verschieden wirken, also $SU(2)_L \times U(1)$ Transformationen. Dabei wählen wir das Transformationsverhalten wie folgt:

Für die Gruppe $SU(2)$ $U \in SU(2)$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi_{1L} \\ \psi_{2L} \end{pmatrix} &\rightarrow U \begin{pmatrix} \psi_{1L} \\ \psi_{2L} \end{pmatrix} \\ \psi_{jR} &\rightarrow \psi_{jR} \end{aligned} \tag{1.9}$$

und für die Gruppe $U(1)$ $e^{i\alpha} \in U(1)$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi_{1L} \\ \psi_{2L} \end{pmatrix} &\rightarrow e^{i\alpha_L} \begin{pmatrix} \psi_{1L} \\ \psi_{2L} \end{pmatrix} \\ \psi_{jR} &\rightarrow e^{i\alpha_{jR}} \psi_{jR} \\ &j = 1, 2 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Jetzt können wir natürlich auch einen neuen Gesamtspinor $\Psi(x)$ wie folgt definieren:

$$\Psi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \psi_{1L} \\ \psi_{2L} \\ \psi_{1R} \\ \psi_{2R} \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

Das Transformationsverhalten unter der Gruppe $SU(2)_L \times U(1)$ läßt sich jetzt natürlich ganz einfach auf den Gesamtspinor $\Psi(\mathbf{x})$ verallgemeinern. Dies wollen wir jetzt aber nicht sofort tun, sondern untersuchen zuerst das Verhalten der Lagrangedichte, bei lokalen Transformationen. Dabei werden auch die notwendigen Verallgemeinerungen von Gleichung (1.9) & (1.10) für den Spinor $\Psi(\mathbf{x})$ eingeführt.

Wir finden eine physikalisch sinnvolle Theorie, wenn wir folgende Annahmen machen:

- Eichinvarianz unter lokalen Transformationen:
 - lokale $U(1)$ Transformationen
 - lokale $SU(2)_L$ Transformationen
- Keine Verletzung dieser Eichinvarianz durch weitere Terme in der Lagrangedichte*

Wenn wir jetzt die Transformation von \mathcal{L}_0 unter der lokalen $U(1)$ Symmetrie betrachten, stellen wir fest, daß die Lagrangedichte nicht mehr invariant ist. Um wieder die Invarianz zu erreichen, müssen wir weitere Felder einführen (sog. Eichfelder). Da wir nur an Eichtransformationen der Form:

$$\Psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)\mathbf{Y}} \Psi(x) \tag{1.12}$$

*Zum Beispiel durch einen expliziten Massenterm

mit

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{1_R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_{2_R} \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

interessiert sind, mit einer speziellen Wahl der Parameter y , genügt es ein Eichfeld \mathbf{B} mit Eichkopplungskonstante g' einzuführen. \mathbf{Y} bezeichnet man als „Hyperladung“. Der Feldstärketensor für das Feld $\mathbf{B}(x)$ lautet dann:

$$\mathbf{B}_{\lambda\rho}(x) = \partial_\lambda \mathbf{B}_\rho(x) - \partial_\rho \mathbf{B}_\lambda(x) \quad (1.14)$$

Man erhält also vollkommen analog zur QED*, als geeichte Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{U(1)}(x) = -\frac{1}{4}(\mathbf{B}_{\lambda\rho}\mathbf{B}^{\lambda\rho}) + \bar{\Psi}(x) i \gamma^\lambda (\partial_\lambda + i g' \mathbf{B}_\lambda(x)\mathbf{Y}) \Psi(x) \quad (1.15)$$

Das Interesse an dieser speziellen Wahl der Parameter wird verständlich, wenn wir das Transformationsverhalten unter lokalen $SU(2)_L$ Transformationen betrachten. Die Analogie zur QED zeigt schon, daß wir versuchen aus diesem Teil der Lagrangedichte die elektromagnetische Wechselwirkung zu konstruieren.

Unter lokalen $SU(2)_L$ Transformationen ($U \rightarrow U(x)$ in Gleichung (1.9)) ist die Lagrangedichte auch nicht invariant. Um diese Invarianz wieder herzustellen, müssen wir so viele Eichfelder einführen, wie die Gruppe Erzeugende besitzt. Eine fundamentale Representation der $SU(2)$ ist durch die Pauli-Matrizen τ_1 , τ_2 und τ_3 gegeben. Wir benötigen also drei reelle Vektorfelder, die wir mit \mathbf{W}_λ^1 , \mathbf{W}_λ^2 und \mathbf{W}_λ^3 bezeichnen wollen.

$$\mathbf{W}_\lambda = \mathbf{W}_\lambda^a(x) \frac{\tau_a}{2} \quad (1.16)$$

$$a \in \{1, 2, 3\}$$

Einen Feldstärketensor $\mathbf{W}_{\lambda\rho}$ mit Kopplungskonstante g führen wir wie folgt ein:

$$\mathbf{W}_{\lambda\rho}(x) = \partial_\lambda \mathbf{W}_\rho(x) - \partial_\rho \mathbf{W}_\lambda(x) + i g [\mathbf{W}_\lambda, \mathbf{W}_\rho] \quad (1.17)$$

Wenn wir anstatt \mathcal{L}_0 die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{SU(2)}(x) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{W}_{\lambda\rho}(x)\mathbf{W}^{\lambda\rho}(x)) + \bar{\Psi}(x) i \gamma^\lambda (\partial_\lambda + i g \mathbf{W}_\lambda^a \mathbf{T}_a) \Psi(x) \quad (1.18)$$

betrachten, mit

$$\mathbf{T}_a = \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{2}\tau_a & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \quad (1.19)$$

finden wir die geforderte Eichinvarianz unter lokalen $SU(2)_L$ Transformationen, wenn \mathbf{W}_λ wie folgt transformiert:

$$\mathbf{W}_\lambda \rightarrow U(x)\mathbf{W}_\lambda(x)U^\dagger(x) - \frac{1}{g}U(x)\partial_\lambda U^\dagger(x) \quad (1.20)$$

$$U(x) \in SU(2)_L \forall x$$

*Nur die Ladung \mathbf{Q} ist durch die Hyperladung \mathbf{Y} ersetzt

Die Eichgruppe, die wir gerade eingeführt haben, wird „schwache Isospin Gruppe“ genannt.

Es ist interessant das Transformationsverhalten unter der Gruppe $SU(2)_L \times U(1)$ zu betrachten, also der Kombination der beiden zuvor untersuchten Gruppen. Man stellt fest, daß die Matrizen \mathbf{T}_a aus Gleichung (1.19) und \mathbf{Y} aus Gleichung (1.13) eine Darstellung dieser Gruppe, mit den Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} [\mathbf{T}_a, \mathbf{T}_b] &= i\epsilon_{abc} \mathbf{T}_c \\ [\mathbf{T}_a, \mathbf{Y}] &= 0 \end{aligned} \quad (1.21)$$

sind.

Wir finden also als eichinvariante Lagrangedichte $\mathcal{L}_{SU(2) \times U(1)}$ für die spezielle Wahl der Transformationen unter der Gruppe $SU(2)_L \times U(1)$ mit $\Psi(x)$ aus Gleichung (1.11):

$$\mathcal{L}_{SU(2) \times U(1)} = -\frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{W}_{\lambda\rho}(x)\mathbf{W}^{\lambda\rho}(x)) - \frac{1}{4} (\mathbf{B}_{\lambda\rho}(x)\mathbf{B}^{\lambda\rho}(x)) + \bar{\Psi}(x) i \not{D} \Psi(x) \quad (1.22)$$

mit

$$\mathbf{D}_\lambda \Psi(x) = \left(\partial_\lambda + i g \mathbf{W}_\lambda^a(x) \mathbf{T}_a + i g' \mathbf{B}_\lambda(x) \mathbf{Y} \right) \Psi(x) \quad (1.23)$$

Wir können jetzt einen der Parameter y_L bzw. y_R frei wählen*, da mit g' noch ein weiterer freier Parameter zur Verfügung steht. Wenn man jetzt den Wechselwirkungsanteil der Lagrangedichte $\mathcal{L}_{SU(2) \times U(1)}(x)$ betrachtet, findet man eine besonders übersichtliche Form für den Wechselwirkungsanteil,

$$\mathcal{L}_{int}(x) = \bar{\Psi}(x) i \not{D} \Psi(x) - \bar{\Psi}(x) i \not{\partial} \Psi(x) \quad , \quad (1.24)$$

wenn man folgende Kombination der Eichfelder betrachtet:

$$\begin{aligned} W_\lambda^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{W}_\lambda^1 \mp i \mathbf{W}_\lambda^2) \\ Z_\lambda &= \frac{1}{\sqrt{g+g'}} (g \mathbf{W}_\lambda^3 - g' \mathbf{B}_\lambda) \\ A_\lambda &= \frac{1}{\sqrt{g+g'}} (g' \mathbf{W}_\lambda^3 - g \mathbf{B}_\lambda) \end{aligned} \quad (1.25)$$

Man kann sich jetzt die richtige Form der elektromagnetische Wechselwirkung konstruieren (Term $\sim A_\lambda$), wenn man die Parameter y_R † geeignet wählt. Die Kombination

$$\begin{aligned} e &= g \sin \vartheta_w \\ &= \frac{g g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \end{aligned} \quad (1.26)$$

mit ϑ_w Weinbergwinkel

entspricht dann der Elementarladung. Die Matrix der elektrischen Ladung \mathbf{Q} für die Fermionen ist gegeben durch:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}_3 + \mathbf{Y} \quad (1.27)$$

*Es ist üblich für Leptonen $y_L = -\frac{1}{2}$ bzw. für Quarks $y_L = \frac{1}{6}$ zu wählen (Siehe auch Tabelle {1.1} auf Seite 14).

†Richtige Zuordnung dieser Parameter für Fermionen siehe Tabelle {1.1} auf Seite 14

und die Lagrangedichte läßt sich nun wie folgt durch Ströme ausdrücken:

$$\mathcal{L}_{int}(x) = -e \left\{ A_\lambda \mathcal{J}_{em}^\lambda + \frac{1}{\sin \vartheta_w \cos \vartheta_w} Z_\lambda \mathcal{J}_{NC}^\lambda + \frac{1}{\sqrt{2} \sin \vartheta_w} \left(W_\lambda^+ \mathcal{J}_{CC}^\lambda + W_\lambda^- \mathcal{J}_{CC}^{\lambda\dagger} \right) \right\} \quad (1.28)$$

mit

dem elektromagnetischem Strom

$$\mathcal{J}_{em}^\lambda = \bar{\Psi}(x) \gamma^\lambda (\mathbf{T}_3 + \mathbf{Y}) \Psi(x) \quad , \quad (1.29)$$

dem neutralem Strom

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{NC}^\lambda &= \bar{\Psi}(x) \gamma^\lambda \left(\mathbf{T}_3 - \sin^2 \vartheta_w (\mathbf{T}_3 + \mathbf{Y}) \right) \Psi(x) \\ &= \bar{\Psi}(x) \gamma^\lambda \mathbf{T}_3 \Psi(x) - \sin^2 \vartheta_w \mathcal{J}_{em}^\lambda \quad , \end{aligned} \quad (1.30)$$

und dem geladenen Strom

$$\mathcal{J}_{CC}^\lambda = \bar{\Psi}(x) \gamma^\lambda (\mathbf{T}_1 + i \mathbf{T}_2) \Psi(x) \quad (1.31)$$

Wir kennen also jetzt das Aussehen der Ströme in unserer Theorie. Wie bereits zuvor gesagt, werden die Parameter erst zugeordnet, wenn wir alle Generationen von Fermionen betrachten.

Bis jetzt haben wir eine Theorie, die viele Eigenschaften besitzt, die eine Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung besitzen sollte. Unsere Konstruktion der $SU(2)_L$ -Transformation in Gleichung (1.9) führte zur gesuchten Unterscheidung von rechtshändigen und linkshändigen Wechselwirkungen der Fermionen. Wir haben nur das Problem, daß unsere Theorie keine Massenterme enthalten darf, da diese nicht invariant unter $SU(2)_L \times U(1)$ Transformationen sind. Eine sehr elegante Methode dieses Problem zu beseitigen ist der Higgs-Mechanismus. Man führt ein weiteres Feld ϕ mit der Lagrangedichte \mathcal{L}_ϕ ein [Hig64]:

$$\mathcal{L}_\phi = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - V(\phi) \quad (1.32)$$

mit

$$V(\phi) = \kappa \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2$$

$$\lambda, \kappa \in \mathfrak{R}$$

(Φ_i Higgs-Feld)

Um eine stabile Theorie zu erhalten, müssen wir $\lambda > 0$ wählen. Die Wahl von κ ist nicht eingeschränkt. Wir werden aber später feststellen, daß die Wahl von $\kappa = -\mu^2 < 0$ zum gewünschten Effekt der spontanen Symmetriebrechung führt. Diese Symmetriebrechung führt zu Termen in der Lagrangedichte, die man als Massenterme interpretieren kann. Dabei wird aber die Symmetrie der Lagrangedichte reduziert.

Wir fordern jetzt, daß das Higgs Feld als ein Isodoublett unter der Gruppe $SU(2)_L \times U(1)$ transformiert*.

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} U(x) \in SU(2) : & \quad \phi(x) \rightarrow U(x) \phi(x) \\ e^{iy_H \xi(x)} \in U(1) : & \quad \phi(x) \rightarrow e^{iy_H \xi(x)} \phi(x) \end{aligned} \quad (1.33)$$

*Für das Higgs wählt man $y_H = \frac{1}{2}$

Wir koppeln jetzt das Feld ϕ mittels einer *Yukawa-Kopplung* mit unserem Spinor Ψ :

$$\mathcal{L}_{Yuk}(x) = \overline{\Psi}(x) \phi_i(x) \mathbf{C}_i \Psi(x) + h.c. \quad (1.34)$$

$$i = 1, 2$$

Dabei ist die Matrix \mathbf{C}_i eine beliebige komplexe Matrix, die auf den Spinor Ψ wirkt. Natürlich muß die Yukawa-Kopplung invariant unter $SU(2)_L \times U(1)$ Transformationen sein. Dadurch ergeben sich Einschränkungen für die Matrix \mathbf{C}_i , die später diskutiert werden*.

Man findet also als Lagrange Dichte für die elektroschwache Wechselwirkung:

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_{SU(2) \times U(1)}(x) + \mathcal{L}_{Yuk}(x) + (\mathbf{D}_\lambda \phi(x))^\dagger (\mathbf{D}^\lambda \phi(x)) - V(\phi) \quad (1.35)$$

In dieser Form sieht man noch nicht, welchen Vorteil die Einführung des Higgs Bosons bedeutet. Es ist aber immer möglich, durch eine geeignete $SU(2)$ Transformation folgende Form des Higgs-Dubletts zu erreichen:

$$U(x)\phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\rho(x) \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

$$\rho(x) \geq 0$$

Jetzt wollen wir den Vakuum Erwartungswert dieser speziellen Wahl des Higgs Feldes untersuchen. In erster Näherung ist der Vakuum Erwartungswert des Higgs Feldes gegeben durch das Minimum des klassischen Potentials. Man findet also:

$$\langle 0 | \rho(x) | 0 \rangle = \rho_0 \quad \text{mit} \quad \rho_0 = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \quad (1.37)$$

$$\langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \rho_0$$

Dieser spezielle Vakuum Erwartungswert ist natürlich nicht mehr invariant unter der vollen $SU(2)_L \times U(1)$ Gruppe. Nur die $U(1)$ Untergruppe, die durch $\mathbf{T}_3 + \mathbf{Y}$ erzeugt wird läßt den Vakuum Erwartungswert von ϕ invariant. Es gilt also:

$$e^{i\xi(x)(\frac{\tau_3}{2} + y_H)} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

Also findet man, daß die Symmetrie der Gruppe:

$$SU(2)_L \times U(1) \longrightarrow U(1)_{em} \quad (1.39)$$

gebrochen wird. Es bleibt also nur die Untergruppe der elektromagnetischen Wechselwirkung ungebrochen[†].

*Wir werden später im Kapitel 1.4 über die Cabibbo Theorie in Gleichung (1.68) auf Seite 20 diesen Term etwas genauer betrachten.

[†] $\mathbf{T}_3 + \mathbf{Y}$ ist die Ladung zugeordnet (Siehe Gl. (1.27))

Wenn wir ein neues Feld ρ' mit Vakuum Erwartungswert Null, also $\langle 0 | \rho'(x) | 0 \rangle = 0$, wie folgt einführen,

$$\rho'(x) = \rho(x) - \rho_0 \quad , \quad (1.40)$$

können wir jetzt die Standardmethoden der Quanten Feld Theorie anwenden ‡.

Mit dem Wissen über das Transformationsverhalten der Felder unter $SU(2)_L \times U(1)$ Transformationen (Gl. (1.9),(1.10),(1.20) und (1.33)) , und durch das Einführen des Feldes ρ' erhalten wir für die Lagrangedichte $\mathcal{L}(x)$ aus Gl. (1.35):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & -\frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{W}_{\lambda\rho}(x) \mathbf{W}^{\lambda\rho}(x)) - \frac{1}{4} (\mathbf{B}_{\lambda\rho}(x) \mathbf{B}^{\lambda\rho}(x)) \\ & + W_\lambda^+ W^{-\lambda} m_W^2 \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right)^2 + \frac{1}{2} Z_\lambda Z^\lambda m_Z^2 \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right)^2 \\ & + \bar{\Psi}(x) i \mathcal{D} \Psi(x) - \bar{\Psi}(x) \mathbf{M} \Psi(x) \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right)^2 \\ & + \frac{1}{2} \partial_\lambda \rho' \partial^\lambda \rho' - \frac{1}{2} m_{\rho'}^2 \rho'^2 \left[1 + \frac{\rho'}{\rho_0} + \frac{1}{4} \left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right)^2\right] \end{aligned} \quad (1.41)$$

mit \mathcal{D} aus Gl. (1.23) und:

$$m_{\rho'}^2 = 2\lambda\rho_0^2 \quad (1.42)$$

$$m_W^2 = \frac{g^2 \rho_0^2}{4} = \frac{e^2 \rho_0^2}{4 \sin^2 \vartheta_w} \quad (1.43)$$

$$m_Z^2 = \frac{(g^2 + g'^2) \rho_0^2}{4} = \frac{e^2 \rho_0^2}{4 \sin^2 \vartheta_w \cos^2 \vartheta_w} \quad (1.44)$$

$$\hookrightarrow \frac{m_W^2}{m_Z^2} = \cos^2 \vartheta_w \quad (1.45)$$

$$\mathbf{M} = -(\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2^\dagger) \frac{\rho_0}{\sqrt{2}} \quad (1.46)$$

Es tritt nur die Matrix C_2 aus Gleichung (1.34) auf wegen der speziellen Wahl des Higgs Feldes in Gleichung (1.36). An der Lagrangedichte \mathcal{L} können wir jetzt den Teilchengehalt der Theorie ablesen.

Wir finden ein Photon A_λ mit Masse Null, drei massive Vektorbosonen W^\pm und Z , ein massives neutrales Boson mit Spin Null, das Higgs-Boson, und die Fermionen. \mathbf{M} ist die Massenmatrix für Fermionen, die mit den so genannten Cabibbo Winkeln parametrisiert werden kann. Es ist auch interessant, daß unsere Theorie jetzt Wechselwirkungen zwischen den massiven Eichbosonen enthält. Jetzt können wir ohne Probleme die Theorie auf alle Generationen der Fermionen verallgemeinern. Wir müssen nur für jede Generation der Leptonen bzw. Quarks einen Gesamtspinor Ψ wie in Gl. (1.11) einführen. Alle Matrixoperationen müssen jetzt so verallgemeinert werden, daß keine Spinoren Ψ von Quarks und Leptonen vermischt werden. Es ist sinnvoll in den neuen Spinor zuerst die Leptonen

‡Störungsrechnung, Ableitung der Feynmanregeln, etc.

und dann die Quarks einzutragen*. Der Spinor besitzt also die Struktur:

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\text{Leptonen}} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\text{Quarks}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \\ e_R \\ \vdots \\ b_R \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

wobei die Zahlen $\{1, 2, 3\}$ die Generationen zählen, und jeder Eintrag einem Spinor wie in Gl. (1.11) entspricht. Die Klammern um die Leptonen bzw. die Quarks sind nur wegen der Übersichtlichkeit eingefügt worden. In der folgenden Tabelle 1.1 sind jetzt alle Fermionen eingetragen*.

Tabelle 1.1: *Flavor Quanten Zahlen der Fermionen. \mathbf{T} ist der schwache Isospin, \mathbf{T}_3 seine dritte Komponente, \mathbf{Y} die schwache Hyperladung und \mathbf{Q} die elektrische Ladung. Die schwachen Isodoublets sind als Zweiervektoren dargestellt.*

Fermionen			\mathbf{T}	\mathbf{T}_3	\mathbf{Y}	\mathbf{Q}
<i>Leptonen</i>						
$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
ν'_{eR}	$\nu'_{\mu R}$	$\nu'_{\tau R}$	0	0	0	0
e_R	μ_R	τ_R	0	0	-1	-1
<i>Quarks</i>						
$\begin{pmatrix} u_L \\ d'_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c_L \\ s'_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t_L \\ b'_L \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
u_R	c_R	t_R	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
d_R	s_R	b_R	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$

(Die mit ' indizierten Größen können von den ungestrichenen Größen durch eine verallgemeinerte Cabibborotation erhalten werden.)

Alles bisher Gesagte reicht aus eine Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung zu konstruieren.

*Dies führt dazu, daß die Ergänzung zum Standard Modell, also die Erweiterung um die starke Wechselwirkung, besonders einfach darzustellen ist.

*Wenn Neutrinos eine Masse besitzen, ist es nicht mehr anzunehmen, daß keine rechtshändigen Neutrinos existieren.

1.3 Massenterme

Alle geladenen Fermionen, also alle bekannten Fermionen außer den Neutrinos, sind Dirac Partikel. Dies ist eine direkte Folge der Ladungserhaltung. Also erfüllen diese Teilchen die Dirac-Gleichung und werden als vierkomponentige komplexe Spinoren

$$\psi^D = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \\ \overline{\psi}_L \\ \overline{\psi}_R \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

dargestellt. Dabei ist es üblich die oberen zwei Komponenten Teilchen und die unteren beiden Komponenten Antiteilchen zu nennen. Unter Lorentz- bzw. \mathcal{CPT} - Transformationen finden wir folgendes Verhalten* (Siehe Abbildung 1.1) .

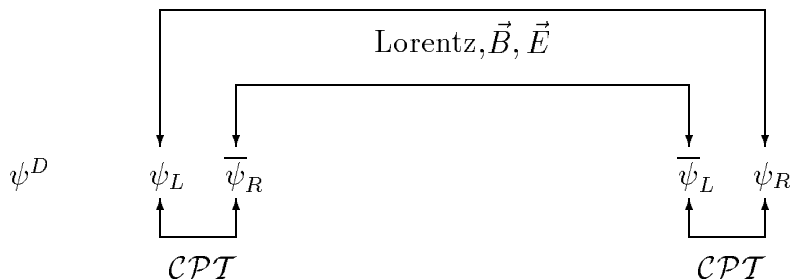


Abbildung 1.1: Transformationsverhalten von Dirac-Teilchen

Man findet also, daß Teilchen nicht durch eine Lorentztransformation in Antiteilchen übergeführt werden können[†]. Es ist möglich, daß auch das Neutrino ein Dirac-Teilchen ist. Die ganze Theorie, die wir bis jetzt aufgebaut haben, geht von dieser Annahme aus[‡], da wir einfach den Quark Sektor der schwachen Wechselwirkung imitiert haben.

Da das Neutrino ungeladen ist, ist jetzt auch das Transformationsverhalten wie in Abbildung 1.2 möglich.

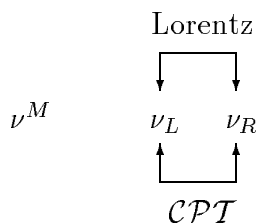


Abbildung 1.2: Transformationsverhalten von Majorana-Teilchen

Diese Möglichkeit existiert nur, weil ein Neutrino keine elektromagnetische Ladung besitzt. Teilchen mit diesem Transformationsverhalten wurden bereits 1937 von E. Majorana [Maj37] untersucht, und werden Majorana-Teilchen genannt. Ein Majorana-Neutrino ist

* \mathcal{C} = Ladungsumkehr, \mathcal{P} = Parität & \mathcal{T} = Bewegungsumkehr

[†]Die Ladung Q ist eine Lorentzinvariante Größe; Teilchen & Antiteilchen unterscheiden sich im Vorzeichen der Ladung.

[‡]Obwohl wir später sehen werden, daß noch eine Verallgemeinerung möglich ist.

also sein eigenes Antiteilchen. Jetzt erfüllt natürlich ein Majorona–Teilchen auch die Dirac Gleichung, nur besitzt es weniger unabhängige Komponenten.

Betrachten wir die Dirac–Gleichung $(i\cancel{\partial} - m)\psi = 0$ mit dem Spinor

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^R \\ \phi^L \end{pmatrix} \quad (1.49)$$

als Lösung, finden wir in der Weyl–Darstellung (Siehe Gl. (A.15) im Anhang auf Seite 64) folgende zwei gekoppelte Differentialgleichungen:

$$\left(-i \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} + i \frac{\partial}{\partial x_0} \right) \phi^R - m \phi^L = 0 \quad (1.50)$$

$$\left(i \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} + i \frac{\partial}{\partial x_0} \right) \phi^L - m \phi^R = 0 \quad (1.51)$$

Wenn $m = 0$ ist, findet man zwei entkoppelte Gleichungen. Diesen Fall untersuchte Weyl bereits in den 20er Jahren dieses Jahrhunderts [Wey29]. Im folgenden interessieren wir uns nicht für diese Lösungen*.

Es gibt aber noch eine weitere Möglichkeit zu entkoppelten Gleichungen zu gelangen. Wenn wir jetzt folgenden Zusammenhang fordern:

$$\psi_3 = \psi_2^* \quad , \quad \psi_4 = -\psi_1^* \quad , \quad (1.52)$$

finden wir, daß die Gleichung (1.50) die komplex konjugierte Gleichung von Gleichung (1.51) ist. Wenn wir jetzt den ladungskonjugierten Spinor

$$\psi^C = \mathcal{C} \bar{\psi}^T \quad (1.53)$$

definieren, finden wir, daß unsere Bedingungen (Gl. 1.52) folgende Form bekommen:

$$\psi = \psi^C \quad (1.54)$$

Nach diesen Überlegungen versteht man jetzt , daß ψ in (1.54) die Hälfte der freien Parameter im Vergleich zum Dirac–Fall besitzt.

Wenn man jetzt aus den Feldern und ladungskonjugierten Feldern den allgemeinsten Massenterm konstruiert, der hermitesch und lorentzinvariant ist, findet man:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{2}(\bar{\psi}_L)^C m_L^M (\psi_L) - \frac{1}{2}(\bar{\psi}_R)^C m_R^M (\psi_R) - \bar{\psi}_R m^D \psi_L + h.c. \\ &= -\frac{1}{2} \left[((\bar{\psi}_L)^C, \bar{\psi}_R) M \begin{pmatrix} \psi_L \\ (\psi_R)^C \end{pmatrix} \right] + h.c. \end{aligned} \quad (1.55)$$

$$\text{mit} \quad M = \begin{pmatrix} m_L^M & m^D \\ m^D & m_R^M \end{pmatrix} \quad (1.56)$$

*Durch diese Lösungen werden masselose Neutrinos im Standard Modell beschrieben.

Dabei bedeutet m^M Majorana- und m^D Dirac-Massenterm. Die Masseneigenzustände finden wir durch Diagonalisieren der Massenmatrix. Wenn wir zur Vereinfachung annehmen, daß \mathcal{CP} erhalten ist, finden wir, daß die Massenmatrix M reell und symmetrisch ist. Wir können die Matrix M also durch eine orthogonale Matrix \mathcal{O} diagonalisieren:

$$\begin{pmatrix} \psi_L \\ (\psi_R)^C \end{pmatrix} = \mathcal{O} \begin{pmatrix} N_{1L} \\ N_{2L} \end{pmatrix} \quad (1.57)$$

$$\mathcal{O}^T M \mathcal{O} = \begin{pmatrix} s_1 m_1 & 0 \\ 0 & s_2 m_2 \end{pmatrix}$$

mit $m_1, m_2 > 0$ und s_1, s_2 ein Vorzeichen. Dieses Vorzeichen kann immer zu $+1$ gewählt werden, da man anstelle des Feldes auch γ_5 -Feld betrachten kann*. Wir nehmen jetzt an, daß die Vorzeichen positiv sind. Also findet man für den Massenterm der Lagrangedichte in den Feldern N_1, N_2 :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 m_j \bar{N}_j N_j \quad (1.58)$$

mit
$$N_j = N_{jL} + (N_{jL})^C$$

Es ist jetzt offensichtlich, daß diese Felder die definierten Massen m_j besitzen, und $N_j = (N_j)^C$ ist. Dieser Massenterm besitzt keine Invarianz unter globalen Eichtransformationen[†] der Form:

$$N_j \longrightarrow e^{i\xi} N_j \quad (1.59)$$

Die folgende Grafik (1.3) auf Seite 18 veranschaulicht nun, welche Kopplungen durch diesen Massenterm möglich sind.

Es ist jetzt interessant einige Spezialfälle zu betrachten:

- Dirac-Massenterm

$$m_L^M = m_R^M = 0$$

Man findet, daß jetzt ein Dirac-Neutrino aus zwei entarteten Majorana Neutrinos ($m_1 = m_2 = m^D$) entsteht.

$$\nu_L = \frac{1}{\sqrt{2}} (N_{1L} + i N_{2L}) \quad (1.60)$$

$$\nu_R = \frac{1}{\sqrt{2}} ((N_{1L})^C + i (N_{2L})^C) \quad (1.61)$$

Diese beiden Neutrinos sind wieder invariant unter globalen Eichtransformationen. Also führt diese Modell zur Erhaltung der Leptonenzahl.

*Siehe Weyl-Darstellung γ_5 im Anhang A.15; Eine Komponente erhält bezüglich der anderen ein negatives Vorzeichen.

[†]Invarianz würde zu einer Erhaltungsgröße führen, die allgemein als Leptonenzahl bezeichnet wird (ein Lepton erhält $+1$ und das Antilepton -1).

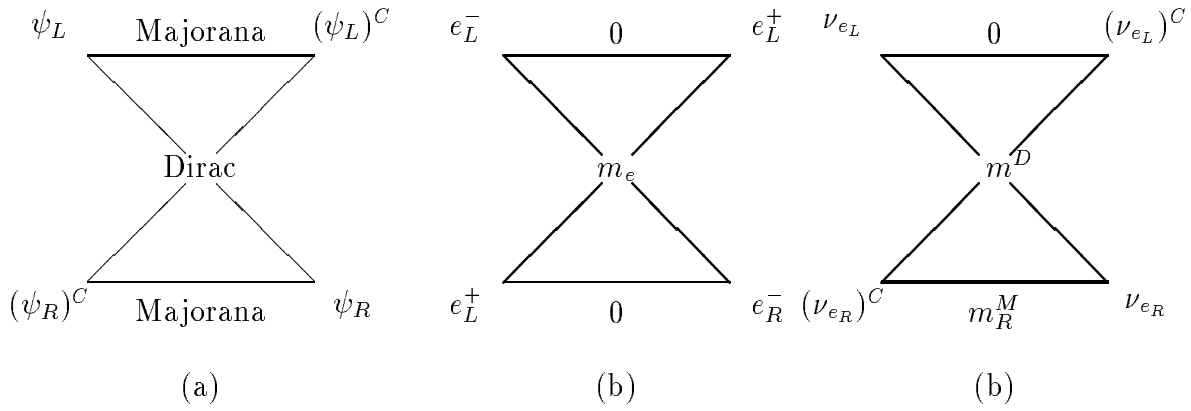


Abbildung 1.3: Die allgemeinste Kopplungen durch einen Massenterm ist in Bild (a) dargestellt. Bild (b) & (c) zeigen den Spezialfall des Dirac–Massenterms am Beispiel des Elektrons und des „see–saw mechanism“ am Beispiel des Elektronneutrinos. Die Linien zeigen an, welche Felder durch welchen Term miteinander gekoppelt werden (0 bedeutet, daß keine Kopplung vorliegt).

- „see–saw mechanism“

$m_L^M = 0$, $m_R^M \gg m^D$ & M^D in der Größenordnung der Leptonenmassen

Man findet nach dem diagonalisieren der Massenmatrix zwei unterschiedlich schwere Majorana–Neutrinos mit Massen**:

$$m_1 \sim \frac{(m^D)^2}{m_R^M} \quad (1.62)$$

$$m_2 \sim m_R^M \quad (1.63)$$

Dieses Modell ist besonders interessant, da es die Massen der geladenen Leptonen mit den Massen der Neutrinos verbindet.

- Pseudo–Dirac Neutrino

$m_L^M = m_R^M \ll m^D$ Diagonalisieren der Massenmatrix führt zu zwei Majorana–Neutrinos mit leicht unterschiedlichen Massen

$$m_{1,2} = m^D \pm m^M \quad (1.64)$$

und entgegengesetztem \mathcal{CP} Vorzeichen. Man findet also ein hauptsächlich als Dirac Teilchen Wechselwirkendes Neutrino, mit einer geringen Beimischung des Majorana Charakters.

Welche Möglichkeiten besitzt jetzt die Theorie, die wir in Kapitel 1.2 vorgestellt haben? Wie wir leicht sehen können, sind die von uns zusätzlich eingeführten rechtshändigen Neutrinos (Siehe Tabelle [1.1]) steril unter der Gruppe $SU(2)_L \times U(1)$. Es gibt also keine Symmetrieargumente, die uns verbieten, Terme der Form

$$m_R^M (\nu_R)^C \nu_R \quad (1.65)$$

**Meistens wird die Masse m_R^M durch Brechung der links–rechts Symmetrie induziert und m^D durch Brechung der $SU(2)_L \times U(1)$ Symmetrie

zu addieren*. Es ist also möglich einen Majorana–Massenterme[†] in unserer Theorie zu konstruieren. Es würde sich also anbieten alle Rechnungen für ein Majorana–Neutrino durchzuführen und das Dirac–Neutrino nur als Spezialfall zu betrachten.

Es tritt dabei nur das Problem auf, daß wir das Majorana Neutrino als Eigenzustand von \mathcal{C} eingeführt haben. Dies ist sicherlich möglich in einer freien Theorie, aber sobald man die schwache Wechselwirkung „*einschaltet*“, kann dies nicht mehr zutreffen. So würde zum Beispiel ein \mathcal{C} invariantes Majorana Neutrino dazu führen, daß sich die Amplituden in unserem Modell der Flavoroszillation in Kapitel 2.4 gegenseitig aufheben*. Wir verlieren also durch diese Erweiterung die geforderte Auszeichnung linkshändiger Ströme.

Wenn man eine etwas kompliziertere Theorie betrachtet[†], kann man dieses Problem wieder beseitigen. Dies geschieht in Links–Rechts symmetrischen Modellen meistens durch eine viel größere Masse der rechtshändigen Wechselwirkungsbosonen.

Wegen diesen Problemen und zur Vereinfachung wird in allen weiteren Teilen der Diplomarbeit nur der Fall des Dirac–Massenterms berücksichtigt.

*Außer wenn wir Invarianz unter globalen Transformationen fordern

[†]mit dem Spezialfall Dirac–Massenterme

*Siehe auch das Buch von Boris Kayser [KGDP89]

[†]z.B. eine Theorie mit einem Higgs-Triplett; für eine Einführung in die möglichen Modelle ist das Buch von Mohapatra [MP91] sehr zu empfehlen;

1.4 Cabibbo Theorie

Wir wollen jetzt die Massenmatrix \mathbf{M} für Dirac-Neutrinos etwas genauer untersuchen. Dabei werden nur die allgemeinen Symmetrieeigenschaften diskutiert. Um eine $SU(2) \times U(1)$ invariante Yukawa-Kopplung zu konstruieren, kombinieren wir das Higgs- (Gl. (1.33)) und das Fermionendublett $\begin{pmatrix} \Psi_{1L} \\ \Psi_{2L} \end{pmatrix}$ zu Singulets. Wir können ϕ oder ϕ^\dagger als Isospin invariante Kombination wählen, da beide Isodoublets representieren.

$$\phi^\dagger \begin{pmatrix} \psi_{1L} \\ \psi_{2L} \end{pmatrix} = \phi_1^\dagger \psi_{1L} + \phi_2^\dagger \psi_{2L} \quad (1.66)$$

$$\phi^T \varepsilon \begin{pmatrix} \psi_{1L} \\ \psi_{2L} \end{pmatrix} = \phi_1 \psi_{2L} - \phi_2 \psi_{1L}$$

mit
$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.67)$$

Diese Invarianten müssen wir jetzt in einer allgemeinen Form mit den rechtshändigen Singulets kombinieren. Dabei muß man aber beachten, daß die Hyperladung erhalten bleibt. Man findet als mögliche Kombinationen*:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yuk} = & (\bar{\nu}'_{eR}, \bar{\nu}'_{\mu R}, \bar{\nu}'_{\tau R}) \mathbf{C}'_l \begin{pmatrix} \phi^\dagger \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \\ \phi^\dagger \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix} \\ \phi^\dagger \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix} \end{pmatrix} - (\bar{e}_R, \bar{\mu}_R, \bar{\tau}_R) \mathbf{C}_l \begin{pmatrix} \phi^T \varepsilon \begin{pmatrix} \nu'_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \\ \phi^T \varepsilon \begin{pmatrix} \nu'_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix} \\ \phi^T \varepsilon \begin{pmatrix} \nu'_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ & + (\bar{u}'_R, \bar{c}'_R, \bar{t}'_R) \mathbf{C}'_q \begin{pmatrix} \phi^T \varepsilon \begin{pmatrix} u_L \\ d'_L \end{pmatrix} \\ \phi^T \varepsilon \begin{pmatrix} c_L \\ s'_L \end{pmatrix} \\ \phi^T \varepsilon \begin{pmatrix} t_L \\ b'_L \end{pmatrix} \end{pmatrix} - (\bar{d}'_R, \bar{s}'_R, \bar{b}'_R) \mathbf{C}_q \begin{pmatrix} \phi^T \varepsilon \begin{pmatrix} u_L \\ d'_L \end{pmatrix} \\ \phi^T \varepsilon \begin{pmatrix} c_L \\ s'_L \end{pmatrix} \\ \phi^T \varepsilon \begin{pmatrix} t_L \\ b'_L \end{pmatrix} \end{pmatrix} + h.c. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Die \mathbf{C}'_l , \mathbf{C}_l , \mathbf{C}'_q & \mathbf{C}_q sind komplexe 3×3 Matrizen, die frei wählbar sind. Es ist aber üblich, eine Standardform zu wählen, denn nicht alle Matrizen \mathbf{C}_l, \dots führen zu physikalisch verschiedenen Theorien.

Es ist zum Beispiel möglich, die Basis der geladenen rechtshändigen Leptonen zu ändern.

$$\begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix} \longrightarrow U_1 \begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix} \quad (1.69)$$

$$U_1 \in U(3)$$

*Die Bedeutung des ' wird später erläutert; wir werden die '-Zustände als Flavor Eigenzustände bezeichnen

Diese Änderung führt zu keinem beobachtbaren Effekt. Da in allen Termen der Lagrange-dichte \mathcal{L} in Gleichung (1.35) die Felder ϵ_R , μ_R und τ_R die gleichen Quantenzahlen tragen, bleiben alle Terme der Lagrange-dichte außer dem Yukawa Term unbeeinflusst. Dieser Term transformiert wie folgt:

$$\mathbf{C}_l \longrightarrow U_1^\dagger \mathbf{C}_l$$

Diese Transformationen können wir entsprechend für alle Dubletts und Singulets der Leptonen und Quarks durchführen. Wir finden dann als mögliche Transformationen der Matrizen:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_l &\longrightarrow U_1^\dagger \mathbf{C}_l V_1 \\ \mathbf{C}'_l &\longrightarrow U_2^\dagger \mathbf{C}'_l V_1 \\ \mathbf{C}_q &\longrightarrow U_3^\dagger \mathbf{C}_q V_2 \\ \mathbf{C}'_q &\longrightarrow U_4^\dagger \mathbf{C}'_q V_2 \end{aligned} \quad (1.70)$$

$$U_j, V_k \in U(3) \quad j \in \{1, \dots, 4\}; \quad k \in \{1, 2\}$$

Da man die weitere Rechnung für Quarks in den meisten Büchern über Elementarteilchenphysik finden kann*, und die Überlegungen für Quarks und Leptonen vollkommen analog sind, betrachten wir im Weiteren nur die Leptonen. Man findet, daß die kombinierte Matrix $\mathbf{C}_l \mathbf{C}_l^\dagger$ nichtnegativ und hermitesch ist. Wenn wir jetzt die Transformationen aus Gleichung (1.70) betrachten, kann man durch eine geeignete Wahl von U_1 diese Matrix auf folgende Form bringen:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_l \mathbf{C}_l^\dagger &\longrightarrow U_1^\dagger \mathbf{C}_l \mathbf{C}_l^\dagger U_1 \\ &= \begin{pmatrix} c_e^2 & 0 & 0 \\ 0 & c_\mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & c_\tau^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.71)$$

mit

$$c_e, c_\mu, c_\tau \geq 0$$

Also besitzt \mathbf{C}_l die Form:

$$\mathbf{C}_l = \begin{pmatrix} c_e & 0 & 0 \\ 0 & c_\mu & 0 \\ 0 & 0 & c_\tau \end{pmatrix} W \quad (1.72)$$

mit

$$W \in U(3) \quad WW^\dagger = 1$$

Wenn wir jetzt $V_1 = W^\dagger$ wählen, finden wir also folgende Diagonalgestalt für \mathbf{C}_l :

$$\mathbf{C}_l = \begin{pmatrix} c_e & 0 & 0 \\ 0 & c_\mu & 0 \\ 0 & 0 & c_\tau \end{pmatrix} \quad (1.73)$$

*Siehe zum Beispiel Nachtmann [Nac86] Kapitel 22.4

Wir haben also gezeigt, daß wir die Matrix \mathbf{C}_l ohne Einschränkung der Theorie als Diagonalmatrix wählen können. Wenn aber \mathbf{C}_l Diagonalgestalt besitzt, haben wir eine explizite Wahl für V_1 getroffen. Dies hat zur Folge, daß wir \mathbf{C}'_l nur auf die Form

$$\mathbf{C}'_l = \begin{pmatrix} c_{\nu_e} & 0 & 0 \\ 0 & c_{\nu_\mu} & 0 \\ 0 & 0 & c_{\nu_\tau} \end{pmatrix} W^\dagger$$

bringen können. Wenn wir jetzt von links mit der Matrix W multiplizieren (also mit $U_2 = W^\dagger$), der einzigen Freiheit die wir noch besitzen, finden wir

$$\mathbf{C}'_l = W \begin{pmatrix} c_{\nu_e} & 0 & 0 \\ 0 & c_{\nu_\mu} & 0 \\ 0 & 0 & c_{\nu_\tau} \end{pmatrix} W^\dagger \quad (1.74)$$

Die Matrix W ist die Entsprechung der Cabibbo–Kobayashi–Maskawa Matrix für Leptonen. Damit haben wir fast alle Freiheiten ausgenutzt, die uns die Transformationen aus Gleichung (1.70) auf dem Leptonen Sektor lassen.

Wir besitzen aber noch die Freiheit, mit unitären Diagonalmatrizen zu multiplizieren. Dabei wählen wir $U_1 = U_2 = V_1 = U_\varphi$.

$$U_\varphi = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\varphi_3} \end{pmatrix} \quad (1.75)$$

mit $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ beliebige Phasen; diese Transformation führt zu folgendem Änderungen in unseren Matrizen \mathbf{C}_l & \mathbf{C}'_l

$$\mathbf{C}_l = \begin{pmatrix} c_e^2 & 0 & 0 \\ 0 & c_\mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & c_\tau^2 \end{pmatrix} \longrightarrow U_\varphi^\dagger \mathbf{C}_l U_\varphi = \mathbf{C}_l \quad (1.76)$$

$$\mathbf{C}'_l = W \begin{pmatrix} c_{\nu_e} & 0 & 0 \\ 0 & c_{\nu_\mu} & 0 \\ 0 & 0 & c_{\nu_\tau} \end{pmatrix} W^\dagger \longrightarrow W' \begin{pmatrix} c_{\nu_e} & 0 & 0 \\ 0 & c_{\nu_\mu} & 0 \\ 0 & 0 & c_{\nu_\tau} \end{pmatrix} W'^\dagger \quad (1.77)$$

mit

$$W' = U_\varphi^\dagger W$$

Die Gestalt von \mathbf{C}_l bleibt auch unverändert, wenn wir die gleiche Transformation mit einer Diagonalmatrix $U_\chi \in U(3)$ von rechts durchführen.

$$U_\chi = \begin{pmatrix} e^{i\chi_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\chi_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\chi_3} \end{pmatrix} \quad (1.78)$$

mit χ_1, χ_2, χ_3 beliebige Phasen;

Also haben wir trotz unserer Forderung nach kanonischer Form für die Matrizen \mathbf{C}_l & \mathbf{C}'_l noch die Freiheit der Transformation unserer Matrix W , wie folgt:

$$W \longrightarrow U_\varphi^\dagger W U_\chi \quad (1.79)$$

Dabei sind U_φ und U_χ definiert wie in Gleichung (1.75) bzw. (1.78). Wenn man jetzt diese Transformationen geschickt ausnützt, findet man die Standardgestalt der Cabibbo–Kobayashi–Maskawa Matrix durch drei Winkel ϑ_1, ϑ_2 & ϑ_3 und eine Phase δ ausgedrückt:

$$W = \begin{pmatrix} c_1 & s_1 c_3 & s_1 s_3 \\ -s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 c_2 s_3 + s_2 c_3 e^{i\delta} \\ -s_1 s_2 & c_1 s_2 s_3 + c_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 s_2 c_3 - c_2 c_3 e^{i\delta} \end{pmatrix} \quad (1.80)$$

mit den Abkürzungen:

$$\begin{aligned} c_j &= \cos \vartheta_j \\ s_j &= \sin \vartheta_j \quad j \in \{1, 2, 3\} \end{aligned}$$

und den Parameterbereichen:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \vartheta_i \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 &\leq \delta \leq 2\pi \end{aligned}$$

Wenn wir eine Theorie mit nur zwei Generationen betrachten, ist die Matrix W reell und besitzt folgende einfache Gestalt:

$$W_{(2)} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta_c & \sin \vartheta_c \\ -\sin \vartheta_c & \cos \vartheta_c \end{pmatrix} \quad (1.81)$$

mit

$$0 \leq \vartheta_c \leq \frac{\pi}{2}$$

In unseren folgenden Rechnungen werden wir fast immer nur Modelle mit zwei Flavours betrachten. Dies scheint vernünftig, da bekannt ist, daß die verschiedenen Generationen von Leptonen* nur in sehr geringem Umfang miteinander mischen. Im Falle der Quarks mischen nur die ersten beiden Flavor stark miteinander. Es scheint vernünftig zu sein, etwas Entsprechendes bei den Leptonen zu vermuten. Außerdem ist eine Verallgemeinerung auf drei Generationen nicht sehr schwierig, und das wesentliche der Modelle ist schon im zwei Generationen System zu erkennen.

Man findet also für die Yukawa Kopplung \mathcal{L}_{Yuk} aus Gleichung (1.68):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yuk} &= \left\{ (\overline{\nu}'_{e_R}, \overline{\nu}'_{\mu_R}, \overline{\nu}'_{\tau_R}) W \begin{pmatrix} c_{\nu_e} & 0 & 0 \\ 0 & c_{\nu_\mu} & 0 \\ 0 & 0 & c_{\nu_\tau} \end{pmatrix} W^\dagger \begin{pmatrix} \nu'_{e_L} \\ \nu'_{\mu_L} \\ \nu'_{\tau_L} \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. - (\overline{e}_R, \overline{\mu}_R, \overline{\tau}_R) \begin{pmatrix} c_e & 0 & 0 \\ 0 & c_\mu & 0 \\ 0 & 0 & c_\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_L \\ \mu_L \\ \tau_L \end{pmatrix} + \left\{ \begin{array}{l} \text{TERME} \\ \text{QUARKS} \end{array} \right\} + h.c. \right\} \\ &\quad \cdot \frac{\rho_0}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0} \right) \end{aligned} \quad (1.82)$$

*Falls die Flavor überhaupt mischen auf dem Leptonensektor. Explizite Zahlenwerte für die Cabibbo–Kobayashi–Maskawa Matrix für Quarks sind in [PM⁺94] auf Seite 1315 ff. zu finden.

$$\begin{aligned}
&= \left\{ (\bar{\nu}'_e, \bar{\nu}'_\mu, \bar{\nu}'_\tau) W \begin{pmatrix} m_{\nu_e} & 0 & 0 \\ 0 & m_{\nu_\mu} & 0 \\ 0 & 0 & m_{\nu_\tau} \end{pmatrix} W^\dagger \begin{pmatrix} \nu'_e \\ \nu'_\mu \\ \nu'_\tau \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. - (\bar{e}, \bar{\mu}, \bar{\tau}) \begin{pmatrix} m_e & 0 & 0 \\ 0 & m_\mu & 0 \\ 0 & 0 & m_\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix} + \left\{ \begin{array}{l} \text{TERME} \\ \text{QUARKS} \end{array} \right\} \right\} \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right)
\end{aligned} \tag{1.83}$$

mit den Definitionen:

$$m_{\nu_e} = c_{\nu_e} \frac{\rho_0}{\sqrt{2}}, \dots, m_\tau = c_\tau \frac{\rho_0}{\sqrt{2}}$$

Dabei kann man die m_{ν_e}, \dots, m_τ als die Massen der Leptonen interpretieren. Für die gestrichenen Größen sind die Terme definierter Masse, die sogenannten Masseneigenzustände*, gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = W^\dagger \begin{pmatrix} \nu'_e \\ \nu'_\mu \\ \nu'_\tau \end{pmatrix} \tag{1.84}$$

Alle Betrachtungen ab Gleichung (1.71) kann man auch für die nicht geladenen Fermionen durchführen. Dann hätte man diese Zustände Massen- und Flavordiagonal wählen können. Dies führt aber, wie wir sehen werden, zu keiner anderen Theorie. Wenn man jetzt die Ströme unserer Theorie betrachtet (definiert auf Seite 11), stellt man leicht fest, daß die Ströme \mathcal{J}_{em}^λ & \mathcal{J}_{NC}^λ keine Übergänge zwischen verschiedenen Flavorn bewirken können[†]. Für den neutralen Strom findet man zum Beispiel:

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{NC}^\lambda &= (\bar{\nu}'_e, \bar{\nu}'_\mu, \bar{\nu}'_\tau) \left(-\frac{1}{2} \frac{1-\gamma_5}{2} \right) \begin{pmatrix} \nu'_e \\ \nu'_\mu \\ \nu'_\tau \end{pmatrix} \\
&\quad + (\bar{e}, \bar{\mu}, \bar{\tau}) \left(-\frac{1}{2} \frac{1-\gamma_5}{2} + \sin^2 \vartheta_w \right) \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.85}$$

$$\begin{aligned}
&= (\bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_\tau) W \left(-\frac{1}{2} \frac{1-\gamma_5}{2} \right) W^\dagger \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \\
&\quad + (\bar{e}, \bar{\mu}, \bar{\tau}) \left(-\frac{1}{2} \frac{1-\gamma_5}{2} + \sin^2 \vartheta_w \right) \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.86}$$

Da aber
$$W \left(-\frac{1}{2} \frac{1-\gamma_5}{2} \right) W^\dagger = \left(-\frac{1}{2} \frac{1-\gamma_5}{2} \right)$$

ist, sieht man, daß offensichtlich der Flavor nicht geändert wird. Wenn man jetzt den

*Der Name sagt, welche Matrix in den Zuständen diagonal ist; da die Ströme in der ' Darstellung „*Flavor diagonal*“ sind, d.h. keine verschiedenen Flavors miteinander mischen, nennt man diese „*Flavor-eigenzustände*“

[†]Für elektromagnetische Ströme ist die Aussage trivial, da ungeladene Fermionen keine direkte elektromagnetische Kopplung besitzen.

geladenen schwachen Strom \mathcal{J}_{CC}^λ betrachtet, findet man:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{CC}^\lambda &= (\bar{\nu}'_{e_L}, \bar{\nu}'_{\mu_L}, \bar{\nu}'_{\tau_L}) \gamma^\lambda \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix} \\ &= (\bar{\nu}_{e_L}, \bar{\nu}_{\mu_L}, \bar{\nu}_{\tau_L}) W \gamma^\lambda \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (1.87)$$

Hier erkennt man, daß dieser Strom zu einer Flavoränderung führen kann, da durch die Matrix W verschiedene Generationen der Leptonen gemischt werden*. Also findet man unter anderem folgende Übergänge:

$$\begin{aligned}e_L &\longrightarrow \nu_{e_L} + W^- && (W_{11}) \\ \mu_L &\longrightarrow \nu_{e_L} + W^- && (W_{12}) \\ &\text{etc.} \dots\end{aligned}\quad (1.88)$$

Die Angabe in der Klammer bezieht sich auf das für den Prozeß relevante Matrixelement. Diese möglichen Übergänge werden uns in den folgenden Kapiteln beschäftigen, da wir unter anderem versuchen werden, aus bisher nicht beobachteten Effekten, eine Abschätzung für die obere Grenzen der Matrixelemente zu bekommen.

*Es ist auch klar, daß es keine Bedeutung hat, ob wir Neutrinos oder geladene Leptonen nicht diagonal gewählt haben.

1.5 Die Lagrangedichte des Standard Modells

Nachdem es uns gelungen ist, eine elektroschwache Theorie zu konstruieren, werden wir nun betrachten, wie wir die starke Wechselwirkung in dieses Schema einfügen können.

Wir fügen die Fermionen zu einem totalen Spinor, wie in Gleichung (1.47) angedeutet, zusammen. Die Eichgruppe der starken Wechselwirkung ist die Color- $SU(3)$ Gruppe[†]. Unter dieser Gruppe transformieren sich die Leptonen wie Singulets und die Quarks wie Triplets. Im Raum der Spinoren Ψ sind die Generatoren \mathbf{F}_a , $a \in \{1, \dots, 8\}$ der Color- $SU(3)$ Gruppe hochgradig reduzibel. Wenn man mit \mathbf{F}_a auf den Spinor Ψ operiert, bedeutet dies, daß alle Leptonenfelder mit Null multipliziert werden, und alle Quarkfelder mit der entsprechenden Gell Mann-Matrix $\frac{\lambda_a}{2}$.

$$\mathbf{F}_a \Psi(x) = \mathbf{F}_a \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{Leptonen} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{Quarks} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{Leptonen} \\ \frac{\lambda_a}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{Quarks} \end{pmatrix} \quad (1.89)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\lambda_a}{2} u_L \\ \vdots \\ \frac{\lambda_a}{2} b_L \end{pmatrix} \quad a \in \{1, \dots, 8\} \quad (1.90)$$

Die Erzeugenden \mathbf{F}_a vertauschen mit den Erzeugenden der $SU(2) \times U(1)$ Gruppe. Man findet also als Eichgruppe des Standardmodells

$$\mathcal{F} = SU(3)_{color} \times SU(2)_L \times U(1) \quad (1.91)$$

Jetzt können wir genau wie zuvor in der elektroschwachen Theorie vorgehen*. Wenn wir alle Überlegungen wiederholt haben, finden wir also für die Lagrangedichte \mathcal{L}_{SM} des Standardmodells in Manifest eichinvarianter Form:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SM} = & -\frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{G}_{\lambda\rho} \mathbf{G}^{\lambda\rho}) - \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{W}_{\lambda\rho}(x) \mathbf{W}^{\lambda\rho}(x)) - \frac{1}{4} \mathbf{B}_{\lambda\rho}(x) \mathbf{B}^{\lambda\rho}(x) \\ & + \bar{\Psi}(x) i \mathcal{D} \Psi(x) + \mathcal{L}_{Yuk} + (\mathbf{D}_\lambda \phi)^\dagger (\mathbf{D}^\lambda \phi) - V(\phi) \end{aligned} \quad (1.92)$$

$$\text{mit} \quad \mathbf{D}_\lambda \Psi = \left(\partial_\lambda + i g \mathbf{W}_\lambda^a(x) \mathbf{T}_a + i g' \mathbf{B}_\lambda(x) \mathbf{Y} + i g_s \mathbf{G}_\lambda^b \mathbf{F}_b \right) \quad (1.93)$$

und nach der Symmetriebrechung

[†]Näheres kann man in dem Buch von Nachtmann [Nac86] finden; z.B. Darstellung $SU(3)$ & Gell Mann-Matrizen in Anhang C.2 dieses Buches.

*Der Sektor der starken Wechselwirkung wird durch die Symmetriebrechung nicht beeinflusst. Die Gruppe $SU(3)_{color}$ bleibt also ungebrochen. Dies führt dazu, daß die acht Gluonen wie das Photon masselos bleiben.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -\frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{G}_{\lambda\rho} \mathbf{G}^{\lambda\rho}) - \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{W}_{\lambda\rho}(x) \mathbf{W}^{\lambda\rho}(x)) - \frac{1}{4} \mathbf{B}_{\lambda\rho}(x) \mathbf{B}^{\lambda\rho}(x) \\
& W_\lambda^+ W^{-\lambda} m_w^2 \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right)^2 + \frac{1}{2} Z_\lambda Z^\lambda m_\lambda^2 \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right)^2 \\
& + \overline{\Psi}(x) i \not{D} \Psi(x) - \overline{\Psi}(x) \mathbf{M} \Psi(x) \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right)^2 \\
& + \frac{1}{2} \partial_\lambda \rho' \partial^\lambda \rho' - \frac{1}{2} m_{\rho'}^2 \rho'^2 \left\{1 + \frac{\rho'}{\rho_0} + \frac{1}{4} \left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right)^2\right\}
\end{aligned} \tag{1.94}$$

Dabei ist $\mathbf{G}_{\lambda\rho}$ der Gluon Feldstärketensor* und g_s ist die Kopplungsstärke. Da wir das Higgs als ein Color-Singulett betrachten, ist der Higgs Sektor unverändert zur elektroschwachen Wechselwirkung gegeben.

Es ist natürlich klar, daß dieses Modell nicht alle Eigenschaften der starken Wechselwirkung reproduzieren kann. Aber in der vorliegenden Arbeit ist ein Bezug auf die starke Wechselwirkung nur an einem Punkt notwendig, nämlich beim Zerfall des Neutrons in Kapitel 2.2. Da wir aber den ganzen Effekt der starken Wechselwirkung in empirisch bestimmte Kopplungskonstanten stecken können und nur an einer Abschätzung interessiert sind, ist es nicht notwendig die starke Wechselwirkung näher zu betrachten.

1.6 Renormalisierung

Bis jetzt haben wir eine Theorie diskutiert, ohne die Renormalisierbarkeit gezeigt zu haben. Dies scheint auch nicht unbedingt erforderlich, da in zwei Artikeln von t'Hooft [tH71b][tH71a] gezeigt wird, daß Theorien, wie wir sie in dieser Arbeit betrachten, also Theorien mit spontaner Symmetriebrechung, immer renormalisierbar sind. Man könnte deshalb auf die Idee kommen, daß es vollkommen ausreichend ist alle Unendlichkeiten aus den Amplituden zu streichen, und den endliche Rest als das exakte Ergebnis zu bezeichnen.

Dies führt aber im Allgemeinen zu falschen Ergebnissen. Wir können nicht sicher sein, daß man das korrekte Ergebnis findet, wenn man nicht renormalisiert hat. Dies kann sogar Ergebnisse verfälschen wenn in der Rechnung nur konvergente Integrale auftreten[†].

Es gib jetzt unter anderem zwei Möglichkeiten:

- R_ξ -Eichung [FLS72]

Da in der R_ξ -Eichung der Bosonenpropagator durch einen Ausdruck der Ordnung $O(p^2)$ gegeben ist[‡], treten meist keine divergenten Integrale auf. Der zusätzlich eingeführte Pol bei $\frac{M^2}{\xi}$ wird durch einen entsprechenden Pol des unphysikalischen Skalarbosons aufgehoben. Am Ende der Rechnung muß nur gezeigt werden, daß S-Matrixelemente unabhängig von dem Eichparameter ξ sind.

*Vollkommen analog definiert wie im Fall der elektroschwachen Wechselwirkung $B_{\lambda\rho}$ (Gl. (1.14)) bzw. $W_{\lambda\rho}$ (Gl. (1.17))

[†]Siehe [FLS72] S.2930 VI Static Charge of the Neutrino

[‡]Also nicht wie in der unitären Eichung ein Term $\sim O(p^0)$ auftritt;

- Dimensionale Regularisierung [Lei75]

Das Problem wird einfach in einer Dimension $d < 4$ betrachtet und das Ergebnis in einer Laurentreihe um $d = 4$ entwickelt. Durch diesen Trick wird die Dimension des Integrationsmaßes verringert und so Konvergenz des Integrals erreicht. Der divergente Anteil wird dadurch einfach in einen Pol der Γ -Funktion überführt.

Um besser zu verstehen, wie die dimensionale Regularisierung funktioniert, untersuchen wir ein einfaches Beispiel. Betrachten wir folgendes logarithmisch divergentes Integral:

$$I = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m^2} \frac{1}{(k - p)^2 + m^2} \quad (1.95)$$

Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß das Integral bereits über einem euklidischen Impulsraum definiert ist. Wie man sieht, konvergiert dieses Integral in 3-Dimensionen:

$$I(3) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + m^2} \frac{1}{(k - p)^2 + m^2} \neq \infty \quad (1.96)$$

Wir könnten jetzt versuchen, das Integral aus Gleichung (1.95) auf Dimension $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ zu verallgemeinern. Dabei müssen wir aber k , p und das Skalarprodukt neu definieren. Durch diese Verallgemeinerung haben wir aber nichts gewonnen, da wir nicht wissen wie wir den Übergang von 3 \rightarrow 4 Dimensionen durchführen sollen.

Deshalb bietet es sich an von den diskreten Zahlen n zu kontinuierlichen komplexen Zahlen ω überzugehen. Wir versuchen also die Raum-Zeit Dimension analytisch fortzusetzen* und betrachten dann am Ende der Rechnung den Grenzübergang $\omega \rightarrow 4$. Nur müssen wir jetzt alle Rechnungen, also auch die Dirac-Algebra, auf ω -Dimensionen verallgemeinern[†]. Es ist aber immer noch möglich, Feynman-Parametrisierungen zu verwenden. Wenn wir unser Integral (Gl. 1.95) jetzt auf ω Dimensionen verallgemeinern und eine Feynmanparametrisierung durchführen, finden wir:

$$\begin{aligned} I(\omega) &= \int \frac{d^\omega k}{(2\pi)^\omega} \frac{1}{k^2 + m^2} \frac{1}{(k - p)^2 + m^2} \\ &= \int \frac{d^\omega k}{(2\pi)^\omega} \int_0^1 d\alpha \frac{1}{\left((k - \alpha p)^2 + a^2(\alpha)\right)^2} \end{aligned} \quad (1.97)$$

mit $a^2(\alpha) = m^2 - \alpha(1 - \alpha)p^2$ (1.98)

Wenn wir annehmen, daß unser Integral konvergiert[‡], können wir die Integrationen vertauschen und finden:

$$I(\omega) = \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^\omega k}{(2\pi)^\omega} \frac{1}{\left((k - \alpha p)^2 + a^2(\alpha)\right)^2} \quad (1.99)$$

*„Physikalisch“ ist dieser Schritt nicht mehr zu erklären; diese Methode ist aber auch nicht so ungewöhnlich, da man im Prinzip beim Übergang von einer Partikel- zu einer Feldtheorie in der klassischen Mechanik etwas ähnliches macht(Siehe Artikel [Lei75] S.352)

[†]Diese Verallgemeinerungen sind in Anhang A.7 zu finden.

[‡]Diese Aussage ist sicherlich richtig für $0 < \Re(\omega) < 4$; durch partielle Integration kann man dies auf den Bereich $-\infty < \Re(\omega) < 4$ ausdehnen (Siehe [CL84] Kapitel 2.3, S. 48)

Nach der Substitution $k \rightarrow k - \alpha p$ können wir die Winkelintegration ausführen (siehe Gleichung (B.61)), weil der Nenner nur eine Funktion von k^2 ist, und finden:

$$I(\omega) = \int_0^1 d\alpha \frac{2\pi^{\frac{\omega}{2}}}{(2\pi)^\omega \Gamma(\frac{\omega}{2})} \int dk \frac{k^{\omega-1}}{(k^2 + a^2(\alpha))^2} \quad (1.100)$$

Wenn man jetzt die Beta-Funktion im Anhang auf Seite 79 betrachtet, stellt man fest, daß man durch einfache Substitutionen dieses Integral durch die Beta-Funktion ausdrücken kann*:

$$\int dk \frac{k^{\omega-1}}{(k^2 + a^2(\alpha))^2} = \frac{1}{a^4(\alpha)} \int dk \frac{k^{\omega-1}}{\left(\frac{k^2}{a^2(\alpha)} + 1\right)^2} \quad (1.101)$$

$$\begin{aligned} k &\rightarrow l = \frac{k^2}{a^2(\alpha)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{(a^2)^{2-\frac{\omega}{2}}} \int dl \frac{l^{\frac{\omega-2}{2}}}{(l+1)^2} \end{aligned} \quad (1.102)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \frac{1}{(a^2)^{2-\frac{\omega}{2}}} \int dl \frac{l^{\frac{\omega}{2}-1}}{(l+1)^{\frac{\omega}{2}+2-\frac{\omega}{2}}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{(a^2)^{2-\frac{\omega}{2}}} \mathcal{B}\left(\frac{\omega+2}{2}, 2 - \frac{\omega+2}{2}\right) \end{aligned} \quad (1.103)$$

Also finden wir für das gesamte Integral aus Gleichung (1.97):

$$I(\omega) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\omega}{2}} \Gamma(\frac{\omega}{2})} \int_0^1 d\alpha \frac{1}{(a^2)^{2-\frac{\omega}{2}}} \mathcal{B}\left(\frac{\omega+2}{2}, 2 - \frac{\omega+2}{2}\right) \quad (1.104)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\omega}{2}}} \int_0^1 d\alpha \frac{1}{(a^2)^{2-\frac{\omega}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{\omega}{2}) \Gamma(2 - \frac{\omega}{2})}{\Gamma(\frac{\omega}{2}) \Gamma(2)} \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\omega}{2}}} \Gamma(2 - \frac{\omega}{2}) \int_0^1 d\alpha \frac{1}{(a^2)^{2-\frac{\omega}{2}}} \end{aligned} \quad (1.105)$$

Wie wir jetzt sehen, ist die Divergenz des Integrals in einen Pol der Gamma-Funktion übergeführt worden. Wenn wir diesen Ausdruck in eine Laurentreihe entwickeln und in den konvergenten Anteilen $\omega \rightarrow 4$ gehen lassen, finden wir:

$$I(\omega) = \left\{ -\frac{1}{4-\omega} + \mathcal{C} + \log(4\pi) + \int_0^1 d\alpha \log(a^2(\alpha)) \right\} + \mathcal{O}(-4 + \omega) \quad (1.106)$$

Dabei ist \mathcal{C} die Eulerkonstante. Also finden wir als divergenten Term:

$$-\frac{1}{4-\omega}$$

Nach dieser kurzen Einführung sollte man die wesentliche Idee der dimensional Regularisierung verstanden haben.

*Dies ist auch notwendig, da ω komplex ist und deshalb eine andere Definition dieses Integrals sehr kompliziert wird.

1.7 Parameter des Standardmodells

Damit die Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung Aussagekraft gewinnt, müssen einige Parameter an Experimente angepasst werden. Einen möglichen Satz dieser Parameter enthält folgende Aufstellung (In Klammern (...) stehen die Parameter, die benötigt werden für massive Neutrinos) :

<u>Kopplungskonstanten</u>	$g_s, e, \sin \vartheta_w$	3	
<u>Massen</u>			
	Bosonen m_W, m_ρ'	2	
	Fermionen		
	Leptonen m_e, m_μ, m_τ $(m_{\nu_e}, m_{\nu_\mu}, m_{\nu_\tau})$	3	(3)
	Quarks $m_u, m_d, m_c, m_s, m_t, m_b$	6	
<u>Mischungswinkel</u>			
	Quarks $(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \delta)_Q$	4	
	Leptonen <i>keine</i> $(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \delta)_L$	0	(4)
		Σ 18	25

Wie man der Aufstellung entnehmen kann, ist das Standardmodell eine Theorie in der 18 Parameter, bzw. 25 Parameter * mit massiven Neutrinos, angepaßt werden müssen. Es ist daher verständlich, daß man versucht eine bessere Theorie zu finden, die mindestens die Größenordnungen der Massen vorhersagen kann.

*Es können aber auch weniger Parameter ausreichen für massive Neutrinos , z. B. wenn die Massen der Neutrinos entartet sind

Kapitel 2

Effekte massiver Neutrinos

Im diesem Kapitel werden wir untersuchen, welchen Parameterbereich Experimente für massive Neutrinos ausschließen können. Zuerst untersuchen wir den Zerfall $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$ (Kapitel 2.2). Wir wollen versuchen, ob die experimentelle Genauigkeit bei der Bestimmung der Zerfallszeit des Neutrons erlaubt, Parameter für massive Neutrinos einzuschränken. Wir werden in diesem Teil der Arbeit ein leicht modifiziertes Modell der Fermi-Vier-Punkt Wechselwirkung verwenden.

Danach werden wir einen Blick auf das „Solar-Neutrino-Problem“ werfen (Kapitel 2.3). Dabei bezeichnet man als das „Solar-Neutrino-Problem“ die Tatsache, daß alle Neutrino Experimente die zur Zeit durchgeführt werden, einen sehr viel geringeren Fluß der Neutrinos messen, wie in theoretischen Modellen vorhergesagt wird. Jetzt ist die allgemeine Meinung unter Fachleuten, daß die Solarmodelle richtig sind. Da die Experimentatoren der Ansicht sind, daß die Fehlerabschätzung der Daten richtig ist, kann man als Erklärung für diese Diskrepanz Eigenschaften des Neutrinos anführen†.*

Wir werden untersuchen, wie sich die Lösungen mit einer kleinen Massendifferenz ($\simeq 10^{-10} eV$) der Neutrinos verhalten. In diesem Zusammenhang werden wir die Daten des Homestake Experiments‡ etwas genauer betrachten.

Wenn Neutrinos massiv sind, muß eine Beziehung zwischen der Massendifferenz und dem Mischungswinkel existieren. In Kapitel 2.4 versuchen wir diesen Zusammenhang zu konstruieren. Dabei gehen wir im Prinzip von einer Idee aus, die in den 60er Jahren als Versuch zur Erklärung der Massendifferenz der neutralen Kaonen benützt wurde§. Diese Rechnung ist das zentrale Thema der vorliegenden Arbeit.

Am Ende dieses Kapitels werden wir die Ergebnisse der verschiedenen Abschnitte zusammenfassen. Wir werden durch Kombination von verschiedenen Ergebnissen die Möglichkeit haben, einen Parameterbereich für die Masse des Neutrinos anzugeben. Dieser Wert ist

*Für eine Zusammenstellung der Daten siehe die Tabelle B.1 auf Seite 82 über die verschiedenen Experimente. Inzwischen ist es auch üblich, das Problem der gemeinsamen Erklärung der Ergebnisse der vier Solar Neutrino Experimente, als Solar-Neutrino-Problem zu bezeichnen.

†Diese Eigenschaften sind natürlich Oszillationen, die es einem Neutrino-Flavor ermöglichen in einen anderen Neutrino-Flavor überzugehen. Diese Oszillationen sind nur für massive Neutrinos möglich. In dieser Arbeit wird nur ein sehr einfaches Modell massiver Neutrinos untersucht (Kapitel 2.1).

‡Die Daten hat uns freundlicherweise Herr R. Davis zur Verfügung gestellt

§Eine Darstellung dieses Modells ist noch im Buch von L. Okun [Oku65] auf Seite 190 ff. zu finden. Dieses Modell hat sich im Fall der neutralen Kaonen als falsch herausgestellt.

natürlich nur mit schwer abschätzbaren Fehlern versehen, auf die wir in diesem Abschnitt näher eingehen.

2.1 Modellsystem

Wir betrachten ein System von zwei Neutrinos mit Dirac-Massenterm. In dem „Zwei-Flavor-Modellsystem“ sind die Massen- ($|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle$) und Flavoreigenzustände ($|\nu_e\rangle, |\nu_\mu\rangle$) nicht identisch. Wir haben folgenden Zusammenhang zwischen Massen- und Flavoreigenzuständen:

$$\begin{aligned} |\nu_e\rangle &= \cos\vartheta |\nu_1\rangle + \sin\vartheta |\nu_2\rangle \\ |\nu_\mu\rangle &= -\sin\vartheta |\nu_1\rangle + \cos\vartheta |\nu_2\rangle \end{aligned} \quad (2.1)$$

bzw:

$$\begin{aligned} |\nu_1\rangle &= \cos\vartheta |\nu_e\rangle - \sin\vartheta |\nu_\mu\rangle \\ |\nu_2\rangle &= \sin\vartheta |\nu_e\rangle + \cos\vartheta |\nu_\mu\rangle \end{aligned} \quad (2.2)$$

Aus diesen Beziehungen kann man die Matrixelemente an den Vertizes ablesen:

- Der Masseneigenzustand $|\nu_1\rangle$ koppelt mit dem Faktor $\cos\vartheta$ an die Elektronen, bzw. $-\sin\vartheta$ an die Myonen.
- Im Gegensatz dazu koppelt der Masseneigenzustand $|\nu_2\rangle$ mit dem Faktor $\sin\vartheta$ an die Elektronen, bzw. $\cos\vartheta$ an die Myonen.

In der vorliegenden Arbeit kann im Kapitel 2.4 nur der Fall der entarteten Massen ($m_1 = m_2 = m$) diskutiert werden. Deshalb werden wir auch meistens in allen anderen Teilen der Arbeit diesen Fall betrachten. Eine direkte Folge der entarteten Massen ist, daß der Mischungswinkel mit $\vartheta = 45^\circ$ festgelegt ist.

2.2 Zerfall des Neutrons

In diesem Kapitel betrachten wir die Effekte, die ein massives Neutrino auf Prozesse der schwachen Wechselwirkung hat. Als Beispiel für einen typischen Prozeß wollen wir den Zerfall des Neutrons betrachten. Dabei zerfällt ein Neutron in ein Proton, ein Elektron und ein Antineutrino. Auf der Ebene der Quarks geht bei dem Zerfall des Neutrons ein d-Quark in ein u-Quark über. Dieser Prozeß wird durch das Kobayashi–Maskawa Matrixelement V_{11} bestimmt. Der Feynmangraph für diesen Prozeß sieht wie folgt aus:

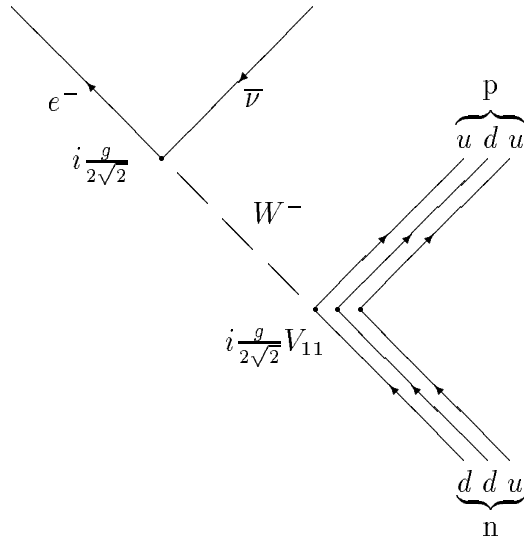


Abbildung 2.1: Zerfall des Neutrons

Dabei haben wir die Color-Freiheitsgrade der Quarks unterdrückt. Da die übertragene Energie mit $m_n - m_p = 1,29$ MeV sehr viel kleiner wie die Masse des W-Bosons ist, genügt eine Betrachtung in dem einfacheren Modell der Fermi Vier-Punkt Wechselwirkung (Siehe Seite 68). Man findet also folgende Graphen in unserem zwei Flavor-Modellsystem aus Kapitel (2.1):

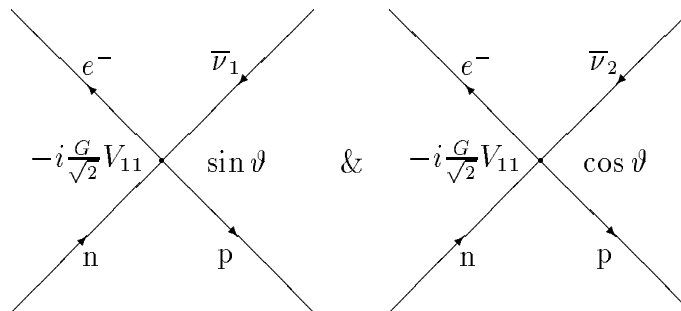


Abbildung 2.2: Vier-Punkt Fermi Wechselwirkung

Die ganzen Effekte der starken Wechselwirkung sind in der effektiven Kopplung V_{11} am

Vertex enthalten. Für die differentielle Zerfallsrate findet man folgende Beziehung (B.16):

$$d\Gamma = \frac{m_n}{E_n} |\overline{\mathcal{M}}|^2 d\Phi_3 \quad (2.3)$$

$$= \frac{m_n}{E_n} \left(\frac{\sin^2 \vartheta |\overline{\mathcal{M}}_{\nu_1}|^2 + \cos^2 \vartheta |\overline{\mathcal{M}}_{\nu_2}|^2}{2E_n} \right) d\Phi_3 \quad (2.4)$$

Dabei ist $d\Phi_3$ der Phasenraumfaktor für den „Drei-Körper Zerfall“ eines Teilchen*. Wir berechnen zuerst die invariante Amplitude für den Zerfall des Neutrons. Dabei koppelt jetzt nicht der Flavoreigenzustand ν_e am Vertex, sondern die beiden Masseneigenzustände ν_1 und ν_2 , wie in Gleichung (2.4) angedeutet. Dabei tritt am Vertex, wie auf Seite 32 bereits gesagt, zusätzlich ein $\sin \vartheta$ bzw. $\cos \vartheta$ aus der Mischungsmatrix der Fermionen auf.

Die folgende Rechnung wird einfach für ein Neutrino ν mit Masse m_ν durchgeführt. Am Ende der Rechnung berücksichtigen wir dann die Beiträge der beiden Masseneigenzustände m_1 und m_2 . Als effektive Kopplung am Vertex findet man $-i \frac{G}{\sqrt{2}} V_{11}$ (Siehe Kapitel A.5 Feynman-Regeln, besonders Seite 68). Außerdem ist die Vektorkopplung g_V in dem Fall des Neutronenzerfalls $\simeq 1$ (Siehe Tabelle B.2). Also ergibt sich mit den Feynman-Regeln aus Kapitel A.5 folgende invariante Amplitude:

$$\mathcal{M}_\nu = -i \frac{G}{\sqrt{2}} V_{11} \bar{u}_e(p'_2) \gamma^\lambda (1 - \gamma_5) v_\nu(p'_3) \bar{u}_p(p'_1) \left(\gamma_\lambda - \frac{g_A}{g_V} \gamma_\lambda \gamma_5 \right) u_n(p) \quad (2.5)$$

Man findet für das Quadrat der invarianten Amplitude†:

$$|\overline{\mathcal{M}}_\nu|^2 = \left(-i \frac{G}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{1}{4} \sum_{s_i} \sum_{s_j} \bar{u}_n(p) \gamma_\lambda (1 - \frac{g_A}{g_V} \gamma_5) u_p(p'_1) \bar{u}_p(p'_1) \gamma_\alpha (1 - \frac{g_A}{g_V} \gamma_5) u_n(p) \\ V_{11}^2 \bar{v}_\nu(p'_3) \gamma_\lambda (1 - \gamma_5) u_e(p'_2) \bar{u}_e(p'_2) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) v_\nu(p'_3) \quad (2.6)$$

$$= -\frac{G^2}{8} V_{11}^2 \frac{1}{2m_n 2m_p} \mathbf{Tr} \left[(\not{p} + m_n) \gamma_\lambda \left(1 - \frac{g_A}{g_V} \gamma_5 \right) (\not{p}'_1 + m_p) \gamma_\alpha \left(1 - \frac{g_A}{g_V} \gamma_5 \right) \right] \\ \frac{1}{2m_e 2m_\nu} \mathbf{Tr} \left[(-\not{p}'_3 + m_\nu) \gamma^\lambda (1 - \gamma_5) (\not{p}'_2 + m_e) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \right] \quad (2.7)$$

Das Matrixelement zerfällt in einen hadronischen- und einen leptonischen Anteil. Betrachten wir zuerst den hadronischen Anteil $H_{\alpha\lambda}$. Man findet mit Hilfe der Nebenrechnungen Gleichung (B.18)-(B.22) aus dem Anhang B.1:

$$H_{\alpha\lambda} = \mathbf{Tr} \left[(\not{p} + m_n) \gamma_\lambda \left(1 - \frac{g_A}{g_V} \gamma_5 \right) (\not{p}'_1 + m_p) \gamma_\alpha \left(1 - \frac{g_A}{g_V} \gamma_5 \right) \right] \quad (2.8)$$

$$= 4 \left\{ \left(1 + \left(\frac{g_A}{g_V} \right)^2 \right) (p_\alpha p'_{1\lambda} + p_\lambda p'_{1\alpha} - g_{\lambda\alpha} p p'_1) + \left(1 - \left(\frac{g_A}{g_V} \right)^2 \right) m_p m_n g_{\lambda\alpha} \right\} \quad (2.9)$$

$$+ 8 \frac{g_A}{g_V} i \varepsilon_{\alpha\nu\lambda\beta} p^\nu p_1'^\beta \quad (2.10)$$

Man sieht, daß das hadronische Matrixelement $H_{\alpha\lambda}$ einen symmetrischen (2.9) und einen antisymmetrischen Anteil (2.10) enthält. Betrachten wir nun den Leptonischen Anteil $L^{\alpha\lambda}$

*Dieser Phasenraumfaktor wird im Anhang auf der Seite 71 genauer betrachtet.

†Wir betrachten hier den Fall das ein unpolarisiertes Neutron zerfällt. Wir müssen deshalb über alle Spins summieren. Zur Vereinfachung des Matrixelements verwenden wir Gleichung A.20.

des Matricelements und benutzen Gleichung (B.23)-(B.26) aus dem Anhang:

$$- L^{\alpha\lambda} = \mathbf{Tr} \left[\gamma^\alpha (1 - \gamma_5) (\not{p}'_3 - m_\nu) \gamma^\lambda (1 - \gamma_5) (\not{p}'_2 + m_e) \right] \quad (2.11)$$

$$= 8 (p'_2{}^\lambda p'_3{}^\alpha + p'_3{}^\lambda p'_2{}^\alpha - g^{\lambda\alpha} p'_2 p'_3) \quad (2.12)$$

$$+ 8 i \varepsilon^{\lambda\varphi\alpha\xi} p'_{2\varphi} p'_{3\xi} \quad (2.13)$$

Auch der Leptonische Anteil $L^{\alpha\lambda}$ enthält einen symmetrischen (2.12) und einen antisymmetrischen Anteil (2.13)*. Als nächstes wollen wir die symmetrischen und antisymmetrischen Terme zusammenfassen. Es treten natürlich keine Mischterme zwischen symmetrischen und antisymmetrischen Anteilen auf. Für die symmetrischen Terme (2.9) und (2.12) findet man:

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|_{sym}^2 &= \frac{G^2 V_{11}^2}{128} 4 \cdot 8 \frac{1}{m_n m_p m_e m_\nu} \\ &\quad \left\{ \left(1 + \left(\frac{g_A}{g_V} \right)^2 \right) (p_\alpha p'_{1\lambda} + p_\lambda p'_{1\alpha} - g_{\lambda\alpha} p p'_1) + \left(1 - \left(\frac{g_A}{g_V} \right)^2 \right) m_p m_n g_{\lambda\alpha} \right\} \\ &\quad \cdot \left\{ p'_2{}^\lambda p'_3{}^\alpha + p'_3{}^\lambda p'_2{}^\alpha - g^{\lambda\alpha} p'_2 p'_3 \right\} \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{G^2 V_{11}^2}{4 m_n m_p m_e m_\nu} \left\{ \left(1 + \left(\frac{g_A}{g_V} \right)^2 \right) \left[(p p'_2)(p'_1 p'_3) + (p p'_3)(p'_1 p'_2) - (p p'_1)(p'_2 p'_3) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (p p'_3)(p'_1 p'_2) + (p p'_2)(p'_1 p'_3) - (p p'_1)(p'_2 p'_3) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (p'_2 p'_3)(p p'_1) - (p'_2 p'_3)(p p'_1) + 4(p p'_1)(p'_2 p'_3) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \left(\frac{g_A}{g_V} \right)^2 \right) m_p m_n \left[(p'_2 p'_3) + (p'_2 p'_3) - 4(p'_2 p'_3) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{G^2 V_{11}^2}{2 m_n m_p m_e m_\nu} \left\{ \left(1 + \left(\frac{g_A}{g_V} \right)^2 \right) \left[(p p'_2)(p'_1 p'_3) + (p p'_3)(p'_1 p'_2) \right] \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - \left(\frac{g_A}{g_V} \right)^2 \right) m_p m_n (p'_2 p'_3) \right\} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Die antisymmetrischen Anteile (2.10) und (2.13) führen zu folgendem Beitrag:

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|_{asym}^2 &= - \frac{G^2 V_{11}^2}{128} 8 \cdot 8 \frac{1}{m_n m_p m_e m_\nu} \\ &\quad \frac{g_A}{g_V} i \varepsilon_{\alpha\nu\lambda\beta} p^\nu p_1{}^\beta i \varepsilon^{\lambda\varphi\alpha\xi} p'_{2\varphi} p'_{3\xi} \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$= \frac{G^2 V_{11}^2}{2 m_n m_p m_e m_\nu} \frac{g_A}{g_V} (-1) \varepsilon_{\beta\nu\alpha\lambda} (-1) \varepsilon_{\xi\varphi}{}^{\alpha\lambda} p^\nu p_1{}^\beta p_2{}^\varphi p_3{}^\xi \quad (2.18)$$

$$= \frac{G^2 V_{11}^2}{2 m_n m_p m_e m_\nu} \frac{g_A}{g_V} \left(-2 (g_{\beta\xi} g_{\nu\varphi} - g_{\nu\xi} g_{\beta\varphi}) p^\nu p_1{}^\beta p_2{}^\varphi p_3{}^\xi \right) \quad (2.19)$$

*Man kann den leptonischen Anteil aus dem hadronischen Anteil erhalten, wenn man $\frac{g_A}{g_V} \rightarrow 1$ betrachtet und die Impulse geeignet ersetzt.

$$|\overline{\mathcal{M}}|_{asym}^2 = \frac{G^2 V_{11}^2}{m_n m_p m_e m_\nu} \frac{g_A}{g_V} \left((pp'_3) (p'_1 p'_2) - (pp'_2) (p'_1 p'_3) \right) \quad (2.20)$$

Für beide Terme zusammen findet man also, wenn man berücksichtigt, daß

$$1 + \left(\frac{g_A}{g_V} \right)^2 \pm 2 \frac{g_A}{g_V} = \left(1 \pm \frac{g_A}{g_V} \right)^2 \quad (2.21)$$

ist:

$$|\overline{\mathcal{M}}_\nu|^2 = |\overline{\mathcal{M}}|_{sym}^2 + |\overline{\mathcal{M}}|_{asym}^2 \quad (2.22)$$

$$= \frac{G^2 V_{11}^2}{2 m_n m_p m_e m_\nu} \left\{ \left(1 - \frac{g_A}{g_V} \right)^2 (pp'_2) (p'_1 p'_3) + \left(1 + \frac{g_A}{g_V} \right)^2 (pp'_3) (p'_1 p'_2) \right. \\ \left. - \left(1 - \left(\frac{g_A}{g_V} \right)^2 \right) m_p m_n p'_2 p'_3 \right\} \quad (2.23)$$

Die weiteren Rechnungen führt man am Einfachsten im Ruhesystem des Neutrons aus. Wir ordnen die Impulse wie in Grafik 2.3 dargestellt zu.

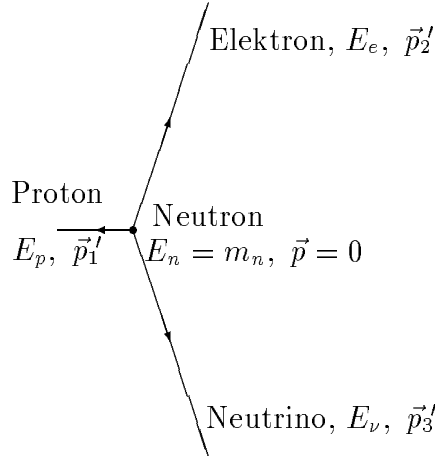


Abbildung 2.3: Variablenzuordnung für den Zerfall des Neutrons im Ruhesystem des Neutrons.

Wir finden also für das Quadrat der invarianten Amplitude folgenden Ausdruck*:

$$|\overline{\mathcal{M}}_\nu|^2 = \frac{G^2 V_{11}^2}{2 m_n m_p m_e m_\nu} \left[\left\{ 1 + 3 \left(\frac{g_A}{g_V} \right)^2 \right\} m_p m_n (E_0 - E_e) E_e \right. \\ \left. + \left\{ 1 - \frac{g_A}{g_V} \right\}^2 m_n E_0 (E_0 - E_e) E_e + 4 \frac{g_A}{g_V} m_n (E_0 - E_e) E_e^2 \right. \\ \left. - \left\{ 1 - \frac{g_A}{g_V} \right\}^2 m_\nu^2 m_n E_e - \left\{ 1 + \frac{g_A}{g_V} \right\}^2 m_e^2 m_n E_e \right. \\ \left. + \left\{ \text{Terme} \sim \cos \vartheta_{e,\nu} \right\} \right] \quad (2.24)$$

*Diesen Ausdruck parametrisieren wir durch die Elektronenenergie E_e und den Winkel zwischen Elektron und Neutrino $\vartheta_{e,\nu}$; für die Rechnung siehe Anhang Gleichung (B.27)-(B.33)

Berücksichtigen wir jetzt die beiden Masseneigenzustände m_1 und m_2 , finden wir als invariante Amplitude die Summe zweier Ausdrücke wie in Gleichung (2.24), nur mit den zusätzlichen Faktoren $\sin^2 \vartheta$ für ν_1 und $\cos^2 \vartheta$ für ν_2 multipliziert*.

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \sin^2 \vartheta |\overline{\mathcal{M}}_{\nu_1}|^2 + \cos^2 \vartheta |\overline{\mathcal{M}}_{\nu_2}|^2 \quad (2.25)$$

Betrachten wir unsere differentielle Zerfallsrate $d\Gamma$ (2.4) weiter für ein Neutrino der Masse m_ν [†]. Wenn wir die Beziehungen für den Phasenraumfaktor aus dem Anhang (Gleichung (B.13)-(B.15)) benützen, im Ruhesystem des Neutrons rechnen[‡], und die Integration $d\cos \vartheta_{e\nu}$ gleich ausführen[§], finden wir:

$$\begin{aligned} d\Gamma_\nu &= \frac{m_n}{E_n} |\overline{\mathcal{M}}_\nu|^2 d\Phi_3 \\ &= 2 \frac{G^2 V_{11}^2}{2 m_n m_p m_e m_\nu} \left[\left\{ 1 + 3 \left(\frac{g_A}{g_V} \right)^2 \right\} m_p (E_0 - E_e) E_e \right. \\ &\quad \left. + \left\{ 1 - \frac{g_A}{g_V} \right\}^2 E_0 (E_0 - E_e) E_e + 4 \frac{g_A}{g_V} (E_0 - E_e) E_e^2 \right. \\ &\quad \left. - \left\{ 1 - \frac{g_A}{g_V} \right\}^2 m_\nu^2 E_e - \left\{ 1 + \frac{g_A}{g_V} \right\}^2 m_e^2 E_e \right] \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} &\cdot \frac{1}{4\pi^3} \frac{m_p m_e m_\nu}{E_p} \sqrt{E_e^2 - m_e^2} \sqrt{(E_0 - E_e)^2 - m_\nu^2} dE_e \\ &= \frac{G^2 V_{11}^2}{2\pi^3} \left[\left\{ 1 + 3 \left(\frac{g_A}{g_V} \right)^2 \right\} m_p (E_0 - E_e) E_e + \underbrace{\left\{ 1 - \frac{g_A}{g_V} \right\}^2}_{-E_e + E_e} E_0 (E_0 - E_e) E_e \right. \\ &\quad \left. + 4 \frac{g_A}{g_V} (E_0 - E_e) E_e^2 - \left\{ 1 - \frac{g_A}{g_V} \right\}^2 m_\nu^2 E_e - \left\{ 1 + \frac{g_A}{g_V} \right\}^2 m_e^2 E_e \right] \\ &\cdot \frac{1}{m_p} \sqrt{E_e^2 - m_e^2} \sqrt{(E_0 - E_e)^2 - m_\nu^2} dE_e \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{G^2 V_{11}^2}{2\pi^3} dE_e \\ &\cdot \left[\left\{ 1 + 3 \left(\frac{g_A}{g_V} \right)^2 \right\} (E_0 - E_e) E_e \sqrt{E_e^2 - m_e^2} \sqrt{(E_0 - E_e)^2 - m_\nu^2} \right] \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$+ \left\{ 1 - \frac{g_A}{g_V} \right\}^2 \frac{E_e}{m_p} \sqrt{E_e^2 - m_e^2} \left((E_0 - E_e)^2 - m_\nu^2 \right)^{\frac{3}{2}} \quad (2.29)$$

$$+ \left\{ 1 + \frac{g_A}{g_V} \right\}^2 \frac{E_e}{m_p} \left((E_0 - E_e) E_e - m_e^2 \right) \sqrt{E_e^2 - m_e^2} \sqrt{(E_0 - E_e)^2 - m_\nu^2} \quad (2.30)$$

*Man muß beachten, daß ϑ und $\vartheta_{e\nu}$ zwei voneinander unabhängige Variablen sind.

[†]Wir haben in der Gleichung zuvor gezeigt, wie unsere beiden Neutrinos in die Rechnung einzuführen sind. Da wir nur die führende Ordnung der Neutrinomasse in der Rechnung finden wollen, verkürzt diese Vorgehensweise alle weiteren Rechnungen.

[‡]Dann gilt natürlich $E_n = m_n$

[§]Die Terme $\sim \cos \vartheta_{e\nu}$ führen wegen symmetrischer Integration zu keinem Beitrag. Die restlichen Beiträge werden mit 2 multipliziert.

Der letzte Rechenschritt ist eine einfache Umformung. Bezeichnen wir jetzt die differentielle Zerfallsrate für den Neutronenzerfall mit Neutrinomasse = 0 mit $d\Gamma_0$, führt eine Entwicklung nach der Neutrinomasse von Gleichung (2.26) zu folgendem Ergebnis:

$$d\Gamma_\nu = \left(1 + \frac{m_\nu^2}{2(E_0 - E_e)^2}\right) d\Gamma_0 + \frac{G^2 V_{11}^2}{2\pi^3 m_p} \left(\left(1 - \frac{g_A}{g_V}\right)^2 \sqrt{E_e^2 - m_e^2} (E_0 - E_e) E m_\nu^2 \right) dE_e + \mathcal{O}(m_\nu^4) \quad (2.31)$$

Jetzt hängt sowohl $d\Gamma_\nu$, als auch E_{max} (siehe Gleichung (B.10)) von der Neutrinomasse ab. Dies führt dazu, daß die Integration $\int_{m_e}^{E_{max}} dE_e$ zu einem sehr unübersichtlichen Ausdruck führt*. Daher ist es nur sinnvoll und möglich die Daten numerisch auszuwerten. Eine Anpassung einer Fit-Funktion an numerische Werte führte nur zu lokal sinnvollen Ergebnissen, die das Verhalten im Grenzfall $m_\nu \rightarrow 0$ falsch wiedergeben. Aus der berechneten Zerfallsbreite kann man wie folgt die Zerfallszeit berechnen:

$$\tau_{m_\nu} = \frac{\hbar}{d\Gamma_{m_\nu}} \quad (2.32)$$

Dabei müssen wir jetzt den Wert von $\hbar = 6.582122 \cdot 10^{-25} \text{ GeV s}$ zur Umrechnung von unserem natürlichen Einheitensystem in die üblichen SI-Einheiten benutzen. Mit Hilfe dieser Umrechnung kann man folgende Tabelle 2.2 erstellen.

Tabelle 2.1: *Numerische Untersuchung der Zerfallszeit des Neutrons für verschiedene Werte der Neutrinomasse m_ν*

m_ν [eV]	0	1	10	100	10^3	10^4	$17 \cdot 10^3$
τ [s]	966.180	966.180	966.180	966.180	966.184	966.653	967.548
$\tau - \tau_0$ [s]	0	$0.47 \cdot 10^{-8}$	$0.47 \cdot 10^{-6}$	$0.47 \cdot 10^{-4}$	$0.47 \cdot 10^{-2}$	0.474	1.369
$\frac{\tau - \tau_0}{\tau_0}$ [%]	0	$0.5 \cdot 10^{-9}$	$0.5 \cdot 10^{-7}$	$0.5 \cdot 10^{-5}$	$0.5 \cdot 10^{-3}$	0.05	0.14

Die Zeit τ_0 ist die Zerfallszeit des Neutrons für ein masseloses Neutrino in unserem Modell

Unsere berechneten Werte für die Zerfallszeit sind etwa 8% zu groß. Man findet für die Zerfallszeit [PM⁺94]:

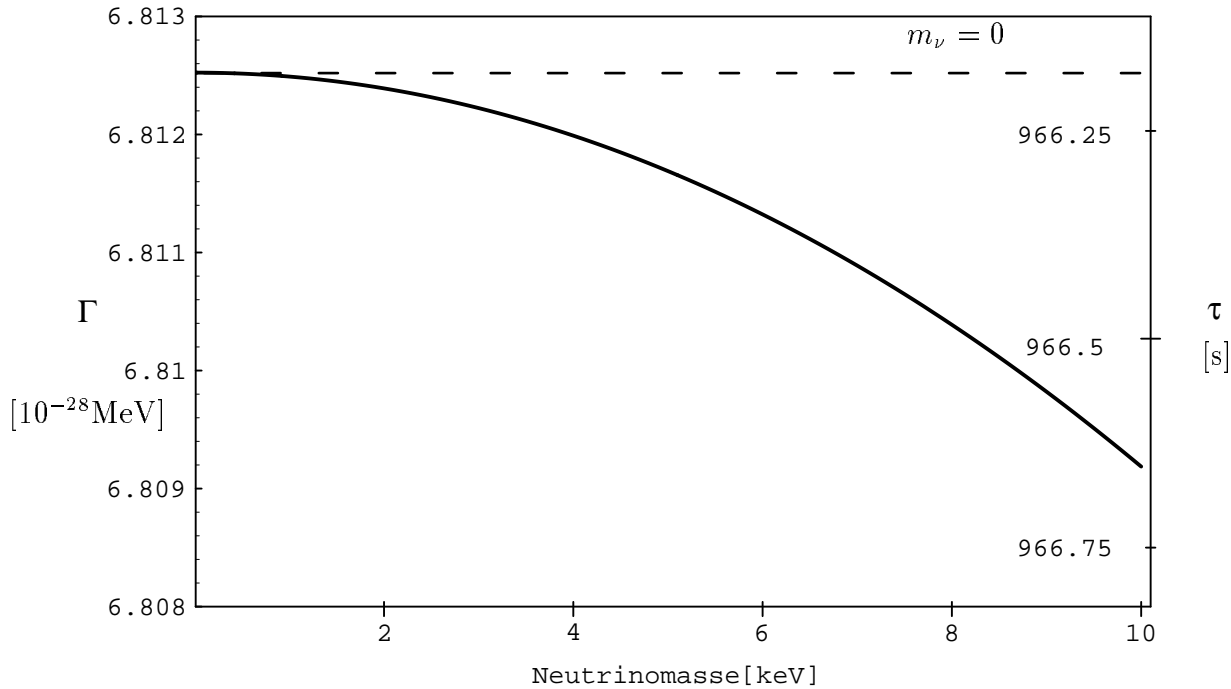
$$\tau_0 = 887,0 \pm 2 \text{ s} \quad (2.33)$$

Die Meßgenauigkeit bei Bestimmung der Zerfallszeit beträgt also 0.2 %. Dieser Wert ist etwas größer wie die von uns berechneten Effekte einer Neutrinomasse von 17 keV.

*Dieser Ausdruck führte auch im Vergleich zu numerischer Rechnung zu etwas ungenaueren Ergebnissen. Ein Versuch diesen Ausdruck in einer Potenzreihe zu entwickeln, führte zu offensichtlich falschen Ergebnissen.

Daher ist klar, daß der Zerfall des Neutrons keine zusätzliche Einschränkung für Massen, bzw. Mischungswinkel der Neutrinos bedeutet. Weil wir außerdem Lösungen mit „kleinen“ Neutrinomassen und „großen“ Mischungswinkeln untersuchen wollen, ist dieser Zerfall zur Untersuchung dieses Parameterbereichs nicht sehr sinnvoll*. Die folgende Grafik 2.4 stellt die Variation der Zerfallsbreite mit der Neutrinomasse dar.

Abbildung 2.4: Zerfallsbreite, bzw. Zerfallszeit des Neutrons in Abhängigkeit von der Neutrinomasse in einem Parameterbereich von $m_\nu \in \{1 - 10\}$ keV.



Die gestrichelte Linie ist die Zerfallsbreite für die Neutrinomasse $m_\nu = 0$. Die durchgezogene Linie ist eine numerisch berechnete Kurve der Zerfallszeit in Abhängigkeit von der Neutrinomasse. Man muß bedenken, daß sich diese Effekte alle innerhalb der Meßgenauigkeit bei der Bestimmung der Lebensdauer des Neutrons bewegen.

Es ist aber trotzdem interessant, daß im Bereich von keV für die Neutrinomasse Auswirkungen zu finden sind, die im Bereich der experimentellen Fehler liegen. Eine Untersuchung noch größerer Neutrinomassen ist nicht sinnvoll, da ein Masseneigenzustand im keV-Bereich als obere Grenze für die Neutrinomasse betrachtet werden kann[†]. In diesem Abschnitt finden wir keine Einschränkung für die Neutrinoparameter.

*In dem Kapitel 2.4 über Neutrinooszillationen werden wir ein Modell mit sehr kleiner Massendifferenz und großem Mischungswinkel finden. Da bekannt ist, daß die Masse des Elektronen-Neutrinos unter 10 eV liegt, ist klar, daß für dieses Modell der Neutronenzerfall keine Einschränkung bedeutet.

[†]Außerdem machen sich in diesem Parameterbereich bereits die Ungenauigkeit der Parameterwerte der Eingangsdaten bemerkbar, die zu komplexen Anteilen führen

2.3 Solar Neutrinos

Auf den folgenden Seiten werden wir Experimente zur Bestimmung des Solar-Neutrino Flusses betrachten. Das Homestake Experiment wird etwas genauer untersucht. Einige Daten zu den Experimenten sind in der Tabelle B.1 (S. 82) zusammengestellt. Inzwischen sind sehr viele sorgfältige Analysen der experimentellen Daten auf mögliche periodische Schwankungen des Solar-Neutrino Flusses veröffentlicht[‡].

In diesen Veröffentlichungen wird meistens als Ergebnis eines numerischen Tests der Daten, ein möglicher Parameterbereich in der $\sin^2 2\theta - \Delta m^2$ Ebene, gezeichnet. Danach werden verschiedene Experimente betrachtet, um den Parameterbereich weiter einzuschränken. Eine solche Analyse ist sehr kompliziert, da man über das Energiespektrum der Neutrinos und den Wirkungsquerschnitt des Detektors mitteln muß. Ein Versuch eine solche Parameterfläche im Rahmen dieser Arbeit zu berechnen, würde zu einem sehr viel ungenaueren Ergebnis, wie in bereits veröffentlichten Artikeln führen. Die folgende Grafik 2.5 zeigt das Ergebnis einer solchen Analyse, aus dem Preprint von N. Hata [Hat94]:

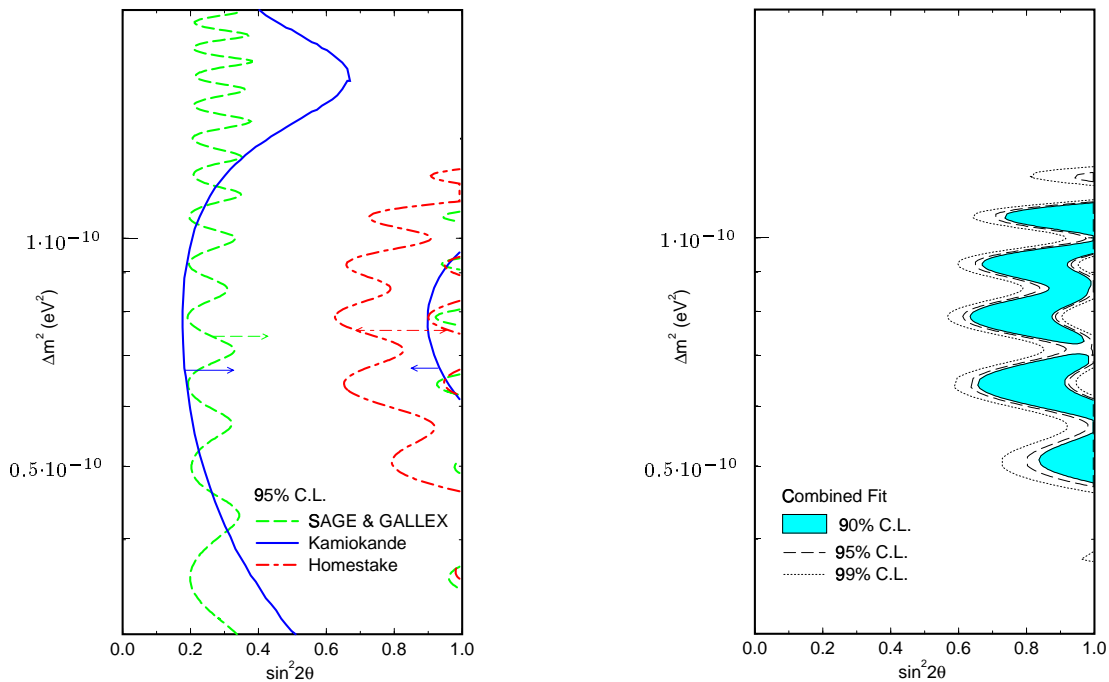


Abbildung 2.5: Mögliche Parameterbereiche im Bereich der Vakuumoszillationen mit den Homestake, Kamiokande, und kombinierten GALLEX und SAGE Daten. Die theoretischen Unsicherheiten sind mit ihren Korrelationen berücksichtigt worden.

Die linke Grafik zeigt die mit 95% Wahrscheinlichkeit (C.L. confidence level) erlaubten Parameterbereiche der einzelnen Experimente. In der rechten Grafik sind die erlaubten Parameterbereiche aus der Kombination dieser Daten gezeichnet. Die Δm^2 -Achse ist logarithmisch-skaliert[¶].

[‡]Für eine Analyse der Daten auf mögliche Vakuumoszillationen empfehlen sich der Artikel von R. Ehrlich [Ehr82], bzw. ein Preprint von N. Hata [Hat94]. Eine sehr aktuelle Analyse der Daten in Bezug auf mögliche Parameterbereiche des MSW-Effekts [Wol78][MS86], findet man in dem Artikel von N. Hata und P. Langacker [HL94] oder dem Artikel von G. Fiorentini et al. [FLM⁺94].

[¶]Die Grafik ist eine verkleinerte Abbildung der Fig. 1 und 2 des Preprints.

Man erkennt in dieser Grafik, daß die wesentlichen Einschränkungen der Parameterfläche durch das Homestake Experiment verursacht werden. Die folgende Tabelle 2.2 stellt die in dem Preprint gefundenen Minima der χ^2 -Verteilung, aus dem in der Grafik gezeigten Parameterbereich, zusammen. Dabei ist zu beachten, daß für diese Tabelle die Daten von GALLEX und SAGE getrennt ausgewertet werden.

	Δm^2 (eV^2)	$\sin^2 2\theta$	χ^2 (2 d. f.)	GOF (%)
A	$1.2 \cdot 10^{-10}$	1.00	10.9	0.42
B	$1.0 \cdot 10^{-10}$	0.96	5.7	5.9
C	$9.0 \cdot 10^{-11}$	0.84	5.1	7.9
D	$7.9 \cdot 10^{-11}$	0.78	5.0	8
E	$6.3 \cdot 10^{-11}$	0.81	5.2	7.6
F	$5.2 \cdot 10^{-11}$	0.99	7.5	2.3
G	$3.8 \cdot 10^{-11}$	1.00	14.5	0.071

Tabelle 2.2: Mögliche Parameterwerte für Vakuumoszillationen.

Dabei bedeutet d. f. (degrees of freedom) die Anzahl der Freiheitsgrade* und GOF (goodness of fit) Güte des Fits.

Der Autor gebraucht den Begriff GOF für die Wahrscheinlichkeit $\mathcal{P}(\chi^2 \geq \chi_{\text{tabell}e}^2)$. Es ist üblich bei einer Wahrscheinlichkeit $\leq 5\%$ von einer signifikanten und bei einer Wahrscheinlichkeit $\leq 1\%$, von einer hochsignifikanten Abweichung zu sprechen. Der beste Fit ist D.

Der Autor N. Hata legt folgenden Parameterbereich mit 99 % Wahrscheinlichkeit als möglich fest:

$$\Delta m^2 = (0.45-1.2) \cdot 10^{-10} \text{ eV} \text{ und } \sin^2 2\theta = 0.6-1 \quad (2.34)$$

Dabei ist zu der Auswertung zu sagen, daß man keine Jahreszeitvariationen in die Daten interpretieren muß, da das Zeitverhalten mit statistischen Schwankungen der Daten zu erklären ist. Aber zur Erklärung der Reduktion des Gesamtflusses bieten sich solche Lösungen an.

Wir werden im Verlaufe dieses Kapitels trotzdem die Auswirkung der Jahreszeitvariationen auf die Messung untersuchen. Als Vergleichsdaten wählen wir die Daten des Homestake Experimentes, um einen Bezug auf ein Experiment zu besitzen[†]. Dabei beschränken wir uns nur auf die Lösungen der Vakuumoszillationen[‡] Eine weitere Annahme, die wir bei allen Rechnungen machen werden, ist, daß die Neutrinos nur eine gemeinsame Energie besitzen.

*Es werden vier Experimente ausgewertet, und aus diesen Daten zwei Parameter berechnet; $4-2 = 2$ Freiheitsgrade

[†]Wir wählen dieses Experiment wegen der großen Anzahl der Meßwerte. Außerdem schränkt dieses Experiment den Parameterbereich am stärksten ein.

[‡]Wir wollen in dieser Arbeit untersuchen, ob ein großer Mischungswinkel und kleine Massendifferenz mit den experimentellen Daten vereinbar ist. In diesem Parameterbereich ist die Analyse der Daten wesentlich vereinfacht.

2.3.1 Standard Solar Modell

Eine Zusammenstellung fast aller im Moment diskutierten Solar Modelle sind im Artikel von O. Cremonesi [Cre93] zu finden*. Als Referenzen für kalkulierte Solar-Neutrino Flüsse werden im Moment meistens das Modell von J. N. Bahcall und M. H. Pinsonneault [BP92] und das Modell von S. Turck-Chièze und I. Lopes [TCL93] angegeben.

Bei dem Fusionsprozeß in der Sonne entstehen Neutrinos. Nach dem Standard Solar Modell befindet sich die Sonne im Moment im „pp“- und „CNO“-Zyklus. Dabei laufen die Reaktionen, die in Grafik B.3 auf Seite 83 dargestellt sind ab. Eine Angabe des Neutrino-Flusses ist in der Tabelle 2.3 zu finden.

Prozeß	BP SSM [BP92]	TCL SSM [TCL93]	Prozeß	BP SSM [BP92]	TCL SSM [TCL93]
pp-Zyklus	$[cm^{-2}s^{-1}]$	$[cm^{-2}s^{-1}]$	CNO-Zyklus	$[cm^{-2}s^{-1}]$	$[cm^{-2}s^{-1}]$
pp	$6 \cdot 10^{10}$	$5.98 \cdot 10^{10}$	^{13}N	$4.9 \cdot 10^8$	$6.1 \cdot 10^8$
pep	$1.4 \cdot 10^8$	$1.30 \cdot 10^8$	^{15}O	$4.3 \cdot 10^8$	$5.6 \cdot 10^8$
$He p$	$1.2 \cdot 10^3$	–			
7Be	$4.9 \cdot 10^9$	$4.18 \cdot 10^9$			
8B	$5.7 \cdot 10^6$	$3.83 \cdot 10^6$			

Tabelle 2.3: In der Tabelle sind die berechneten Flüsse für das Solarmodell von J. N. Bahcall und M. H. Pinsonneault (BP SSM) und das Modell von S. Turck-Chièze und I. Lopes (TCL SSM) angegeben.

Der Grafik B.3 kann man entnehmen, daß nicht bei allen Prozessen Neutrinos beteiligt sind, und daß Neutrinos mit diskretem und kontinuierlichem Energiespektrum entstehen. In der Sonne entstehen bei den Zerfällen Neutrinos, im Gegensatz zu dem im Kapitel 2.2 betrachteten Neutronen-Zerfall, bei dem Antineutrinos entstehen.

In unserer Arbeit werden wir das Modell von J. N. Bahcall und M. H. Pinsonneault als Referenz verwenden.

*Die benützten Daten stammen zum größten Teil aus diesem Artikel.

2.3.2 Jahreszeitvariationen

In diesem Kapitel werden wir jetzt das Verhalten des Neutrino-Flusses in Abhängigkeit der Neutrino-Parameter* betrachten. Wie bereits gesagt, werden wir unsere Betrachtungen mit den Daten des Homestake Experiments vergleichen†. Einige Daten des Homestake Experiments sind in Tabelle B.1 zu finden.

Betrachten wir uns jetzt das Experiment etwas genauer‡. Das Homestake Experiment arbeitet seit 1967, mit Ausnahme einer 18 Monate dauernden Pause (Oktober 1984 bis Mai 1985) wegen eines Defekts der Pumpen, ununterbrochen. Die gesammelten Daten sind in der Tabelle auf Seite 84 zu finden. Die folgende Grafik 2.6 stellt jetzt die chemischen Prozesse dar, die mit dem Perchlorethylen nach dem Neutrinoeinfang passieren§.

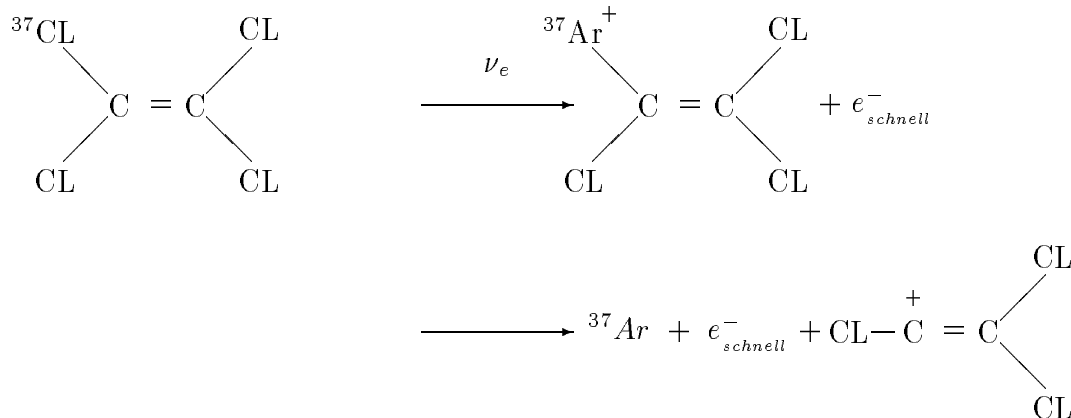


Abbildung 2.6: Die Grafik enthält eine Darstellung der chemischen Prozesse die nach der Neutrinoeinfangreaktion ablaufen. Dabei ist die sicherlich richtige Annahme gemacht, daß die Reaktionen der Kernprozesse wesentlich schneller, als die chemischen Prozesse ablaufen und das schnelle Elektron aus dem Kern nicht mit den Hüllenelektronen wechselwirkt.

Um das Argon zu extrahieren wird der ganze Tank etwa alle drei Monate mit Helium gespült¶. Das Argon wird bei dieser Prozedur in einer Kälte-Falle eingefangen. Die Effizienz dieses Prozesses liegt bei 95%. Danach wird das in der Kältefalle eingefangene Gas gereinigt und anschließend in Proportional-Zähler gefüllt (etwa $0.3 - 0.5 \text{ cm}^3$ Volumen). Die Proben werden dann etwa acht Monate lang gezählt.

Die Statistik, die zur Auswertung verwendet wird ist kompliziert, da man ein kurzlebige Nuklid nachweisen will und nur eine sehr kleinen Anzahl radioaktiver Atome vorhanden ist. Eine Beschreibung der verwendeten Statistik zur Auswertung der Homestakedaten ist in dem Artikel von B. T. Cleveland [Cle83] zu finden. In diesem Artikel sind einige kleine Fehler enthalten. Zwar ist die Annahme, daß der radioaktive Zerfall selbst ein

*Mischungswinkel ϑ und Massendifferenz Δm^2

†Dieser Vergleich besitzt nur einen rein qualitativen Charakter. Wir werden nicht versuchen quantitative Analysen der Daten durchzuführen.

‡Die Daten sind im wesentlichen aus einem Beitrag für das Buch „Solar Interior and Atmosphere“ von R. Davis und A. N. Cox [DC91] übernommen worden.

§Diese Reaktionen sind eine einfache Analyse der Prozesse, die bei einer Diskussion mit meinem Bruder U. Greulach entstanden sind.

¶Auf nähere Details wollen wir in dieser Arbeit nicht eingehen. Eine genaue Beschreibung der experimentellen Vorgänge ist in [RCD85] zu finden.

Poisson-Prozeß ist, die in diesem Artikel gemacht wird, nicht vollkommen richtig für die im Moment durchgeführten Solar-Neutrino Experimente, aber der kombinierte Prozeß (Produktion der radioaktiven Atome, Extraktion und Nachweis) kann korrekt als Poisson-Prozeß beschrieben werden^{||}.

Um die Daten zum Vergleich mit unseren Modellen zu verwenden, gehen wir wie folgt vor:

1. Zuerst fassen wir alle Daten des Homestake Experiments in einem Jahr zusammen.

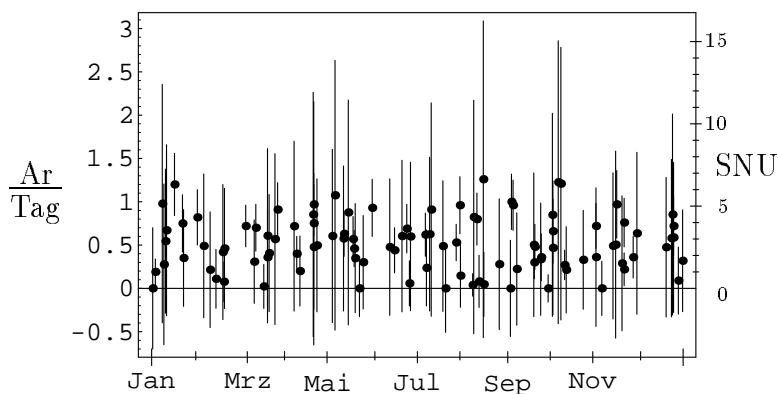


Abbildung 2.7: Die Grafik enthält die Daten des Homestake Experiment in einem Jahr zusammengefaßt. Die angegebenen Marken für die Monate entsprechen dem Anfang des Monats.

Bei den Daten muß man jetzt noch berücksichtigen, daß jeder Meßpunkt einer Messung des Solar-Neutrino Flusses von ca. drei Monaten entspricht.

2. Wir teilen jetzt das Jahr gleichmässig in zehn Abschnitte auf. Ein Abschnitt entspricht also etwa 36 Tagen. In jedem Abschnitt bilden wir dann den Mittelwert der Messungen, deren mittlere Zeit (Siehe Seite 84) in diesen Zeitraum fällt. Eine genauere Analyse ist in dem Artikel von R. Ehrlich [Ehr82] durchgeführt. In diesem Artikel berücksichtigt R. Ehrlich bei der Analyse, daß man die Meßergebnisse mehreren Abschnitten zuordnen muß, da die Meßdauer länger wie die Länge der Abschnitte ist.

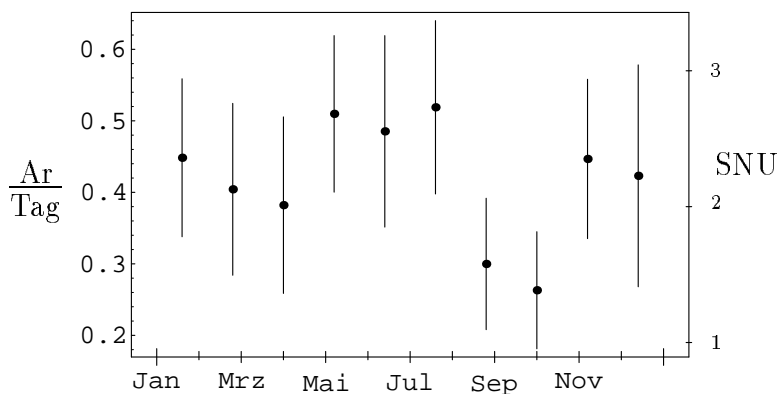


Abbildung 2.8: Die Grafik enthält die Daten des Homestake Experiment in Intervallen zusammengefaßt. Die angegebenen Marken für die Monate entsprechen dem Anfang des Monats.

Die Fehlerbalken in Richtung der Werteachse entsprechen der Standardabweichung der zusammengefaßten Daten. Jeder Datenpunkt entspricht etwa zehn Messungen.

^{||}Diese Aussagen stammen aus einem Artikel von M. Opendak und P. Wildenhain [OW94] in dem eine sehr sorgfältige Analyse der Statistik vorgenommen wird.

3. Jetzt berechnen wir das Verhalten des Neutrino-Flusses im Verlauf eines Jahres. Dabei muß man zwei Effekte berücksichtigen, nämlich die Flußreduzierung wegen der Exzentrizität der Erdbahn* und die Oszillation eines Neutrino flavors in einen anderen Neutrino flavor†. Die Erdbahn parametrisieren wir mit der numerischen Exzentrizität ε und dem mittleren Abstand l_0 , wie folgt:

$$x = l_0(1 - \varepsilon \cos(\varphi)) \quad (2.35)$$

mit

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 0.0167 \\ l_0 &= 1.5 \cdot 10^{13} \text{ cm} \\ \varphi &\in \{0, 2\pi\} \end{aligned}$$

Dabei ist die Parametrisierung so vorgenommen, daß dem Perihel ($\varphi = 0$) der erste Januar entspricht [Thöne75]. Man findet für die Wahrscheinlichkeit der Oszillation des Elektronneutrinos in das Elektronneutrino‡:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e, x) &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2(2\vartheta) \left(1 - \cos\left(2\pi \frac{x}{L}\right)\right) \\ L &= 2\pi \frac{2p_\nu}{\Delta m^2} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Dabei ist der Abstand x , der Abstand Erde - Sonne. Auf Seite 76 wird das Verhalten dieser Gleichung für verschiedene Parameterbereiche $\frac{x}{L}$ untersucht. In diesem Kapitel sind wir nur an dem Parameterbereich $\frac{x}{L} \simeq 1$ interessiert, da in diesem Bereich die Effekte der Neutrinooszillationen maximal sind. Wie bereits erwähnt, werden wir nur den Fall einer diskreten Neutrinoenergie untersuchen. Betrachten wir zuerst nur den Effekt der Erdbahn auf die Meßdaten§:

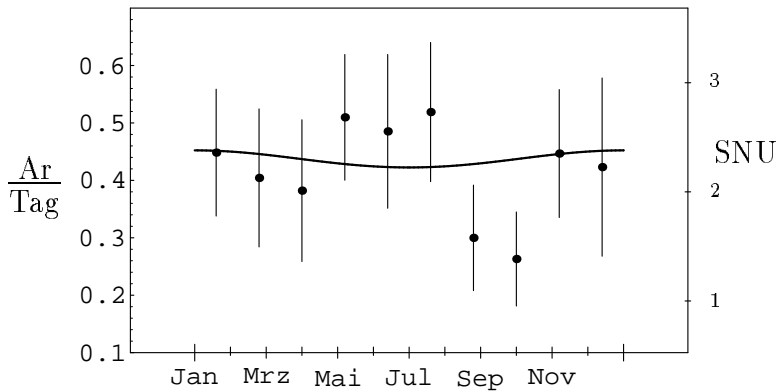


Abbildung 2.9: Die Grafik zeigt die Daten des Homestake Experiment und die Variation des Neutrino Flusses wegen der Exzentrizität der Erdbahn. Die angegebenen Marken für die Monate entsprechen dem Anfang des Monats.

Mit dieser Kurve, müssen wir alle Lösungen der Gleichung (2.36) multiplizieren um

*Dieser Effekt ist proportional zu $\frac{1}{x^2}$, wenn man mit x den Abstand zwischen Erde und Sonne bezeichnet.

†Dieser Effekt führt natürlich zu einer Reduktion des Neutrino-Flusses, da die radiochemischen Experimente nur Elektronneutrinos nachweisen können. Im Gegensatz dazu kann bei dem Kaminokande Experiment sowohl das Elektronneutrino als auch das Myon neutrino nachgewiesen werden (Das Myon neutrino wird aber nur mit einer geringeren Wahrscheinlichkeit nachgewiesen, da die Wechselwirkung mit einem Elektron nur über neutrale Ströme möglich ist; das Elektronneutrino kann im Gegensatz dazu, über geladene und neutrale Ströme mit einem Elektron wechselwirken.). Der erste Effekt tritt im Gegensatz zum zweiten Effekt auch bei einer Neutrinomasse = 0 auf.

‡Die Formel wird im Anhang B.2.1 hergeleitet; wir kombinieren Formel (B.45) mit der Vereinbarung (B.48); da diese Formel allgemein bekannt ist, wird auf eine Herleitung in diesem Kapitel verzichtet.

§Wir gehen hier von dem gemessenen mittleren Fluß von 0.437 Atome pro Tag bzw. 2.32 SNU aus.

das richtige Oszillationsverhalten zu finden. Im folgenden betrachten wir uns jetzt das Verhalten der allgemeinen Lösungen. Dabei werden wir von dem theoretisch erwarteten Fluß von J. N. Bahcall und M. H. Pinsonneault [BP92] von $1.51 \cdot 10^{37}$ Ar Atomen pro Tag bzw. 8 SNU ausgehen. Meistens werden wir nur die Kenntnis des Verhältnisses $\frac{x}{L}$ benötigen.

Damit man aber eine Vorstellung von der Größenordnung der Massendifferenzen Δm^2 bekommt, werden wir die Oszillationslängen auch in die Massendifferenzen umrechnen. Als Energie der Neutrinos wählen wir die Schwellenenergie von 0,814 MeV des Homestakeexperiments. Die exakte Rechnung würde die Lösung von folgendem Integral bedeuten*:

$$Q_{th} = \int \sigma(E_\nu) F(E_\nu) \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e, E_\nu) dE_\nu \quad (2.37)$$

Dabei ist $\sigma(E_\nu)$ der Streuquerschnitt für die Neutrino-reaktion und $F(E_\nu)$ das Spektrum des Solar-Neutrino Flusses. Bei geeigneter Normierung der Größen ist Q_{th} das Meßergebnis. Da sowohl für $\sigma(E_\nu)$ und $F(E_\nu)$ keine analytischen Formeln existieren, ist diese Analyse im Rahmen dieser Arbeit zu kompliziert.

Eine sehr beliebte Möglichkeit das Oszillationsverhalten der Lösungen zu zeigen, ist im Anhang auf Seite 76 in Figur B.2.1 gezeigt. Dabei wird die Wahrscheinlichkeit $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e, x)$ über einer logarithmischen Skala von $\frac{x}{L}$ gezeichnet. In diesem Teil der Arbeit werden wir versuchen das Verhalten des Neutrino-Flusses im Jahresverlauf zu zeigen. Alle in den Graphiken verwendeten Parameterwerte sind im Anhang in der Tabelle B.3 auf Seite 87 enthalten. Auf dieser Seite sind auch die notwendigen Umrechnungsformeln von unserem natürlichen Einheitensystem in das experimentell gebräuchliche cgs-System zu finden.

Betrachten wir zuerst die Variation des Flusses in Abhängigkeit vom Mischungswinkel. Als Wert für $\frac{x}{L}$ wählen wir $\frac{1}{2\pi}$. Dieser Wert entspricht einer Oszillationslänge von $9.4 \cdot 10^{13}$ cm bzw. einer Massendifferenz von $0.73 \cdot 10^{-10}$ eV.

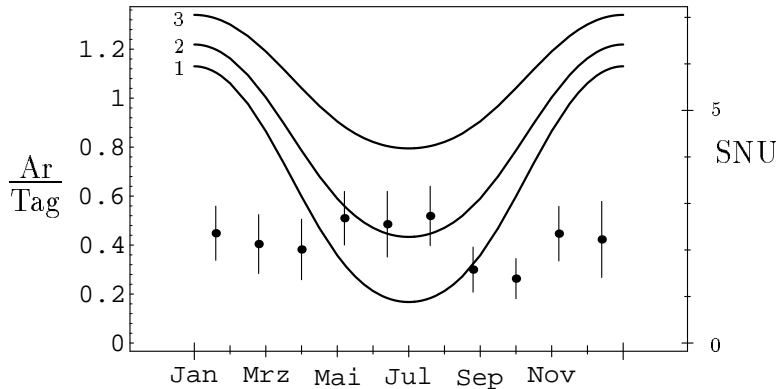


Abbildung 2.10: Die Grafik zeigt das Verhalten des Neutrino-Flusses bei fester Massendifferenz und variablem Mischungswinkel. Der Mischungswinkel nimmt von Kurve 1-3 ab. Die angegebenen Marken für die Monate entsprechen dem Anfang des Monats.

Man kann in der Grafik erkennen, daß mit kleinerem Mischungswinkel der Effekt der Oszillation immer kleiner wird. Die Daten passen sich diesen Kurven schlecht an.

Betrachten wir uns jetzt das Verhalten bei einem festen Mischungswinkel $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ und Variation der Oszillationslänge. Dabei variieren wir die Oszillationslänge zwischen $3.18 \cdot 10^{12}$ cm (Kurve 4) und $0.59 \cdot 10^{12}$ cm (Kurve 6).

*Diese Formel stammt aus einem Artikel von P. I. Krastev und S. T. Petcov [KP92]

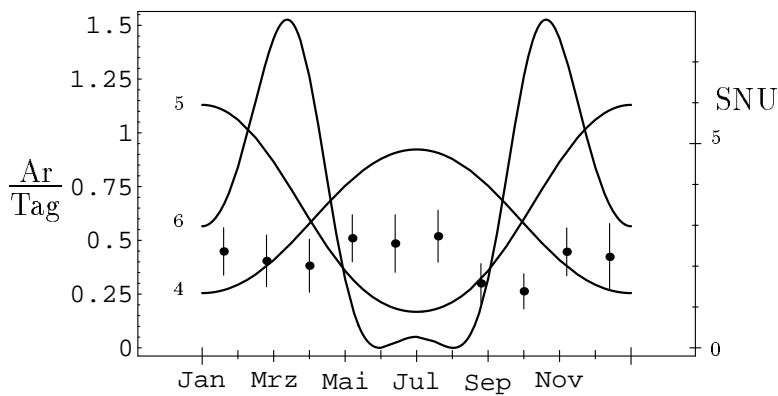


Abbildung 2.11: Die Grafik zeigt das Verhalten des Neutrino-Flusses bei festem Mischungswinkel und variabler Oszillationslänge bzw. Massendifferenz. Von Kurve 4-6 nimmt die Massendifferenz zu. Die angegebenen Marken für die Monate entsprechen dem Anfang des Monats.

Die Parameter der Kurve 5 entsprechen dem Verhältnis $\frac{x}{L} = \frac{1}{2\pi}$. Für die Variation des Oszillationsverhalten lässt sich jetzt nicht so eine einfache Beziehung, wie im vorigen Fall ableiten. Diese Kurven geben einem schon eine Vorstellung, wie kompliziert das Verhalten von Lösungen sein kann. Diese Kurven sind natürlich nur qualitativ zu verstehen, da wie bereits schon mehrfach erwähnt wurde, eine Messung drei Monate dauert und die Neutrinos ein Energiespektrum besitzen.

Als nächste betrachten wir einige Lösungen die N. Hata in seiner Analyse gefunden hat*.

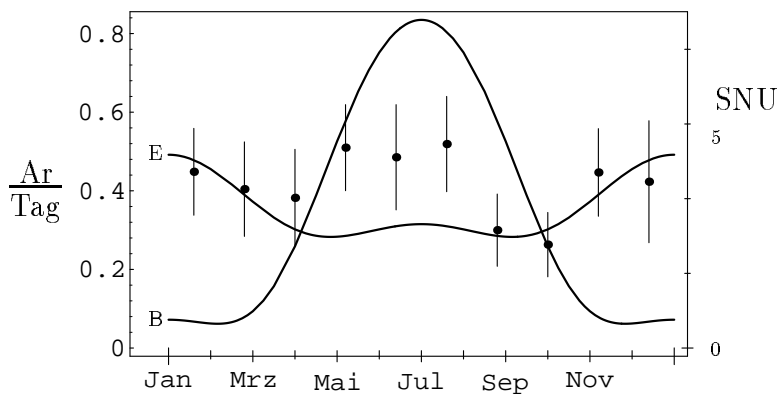


Abbildung 2.12: Die Grafik zeigt das Verhalten des Neutrino-Flusses für verschieden Lösungen aus Tabelle 2.2. Die angegebenen Marken für die Monate entsprechen dem Anfang des Monats.

Man erkennt, daß diese Lösungen sich gut an die Meßdaten anpassen.

In diesem Teil der Diplomarbeit haben wir uns mit dem Solar-Neutrino Problem beschäftigt. Die numerisch Analyse der Daten von N. Hata werden wir am Ende des Kapitels noch einmal benötigen. Das eigentliche Ziel dieses Teils der Arbeit ist zu zeigen, wie die Änderung des Neutrino-Fluß im Laufe des Jahres in Abhängigkeit von den Neutrino-Parametern aussieht. Es ist zu bemerken, daß die Datenmenge des Homestake Experiments im Moment noch nicht ausreicht, um Jahreszeitvariationen direkt nachzuweisen. Deshalb muß man den „Umweg“ über die beobachtete Flußreduzierung wählen um eine Einschränkung der Parameter zu finden.

*Die Bezeichnungen sind aus der Tabelle 2.2 übernommen. Wir zeigen nur die Lösungen die mit unseren vereinfachten Überlegungen graphisch gute Übereinstimmung zeigen.

2.4 Massendifferenz der Neutrinos

In diesem Kapitel zeigen wir, wie man die Massendifferenz der Neutrinos mit anderen Neutrino Parametern verknüpfen kann. Dabei gehen wir ähnlich wie in Rechnungen zur Massendifferenz der Neutralen Kaonen vor*. Diese beiden Systeme besitzen viele Gemeinsamkeiten, aber auch wesentliche Unterschiede, auf die an geeigneter Stelle eingegangen wird.

Die möglichen Graphen niedrigster Ordnung Störungsrechnung für den Übergang eines Neutrino flavors in einen anderen Flavor sind:

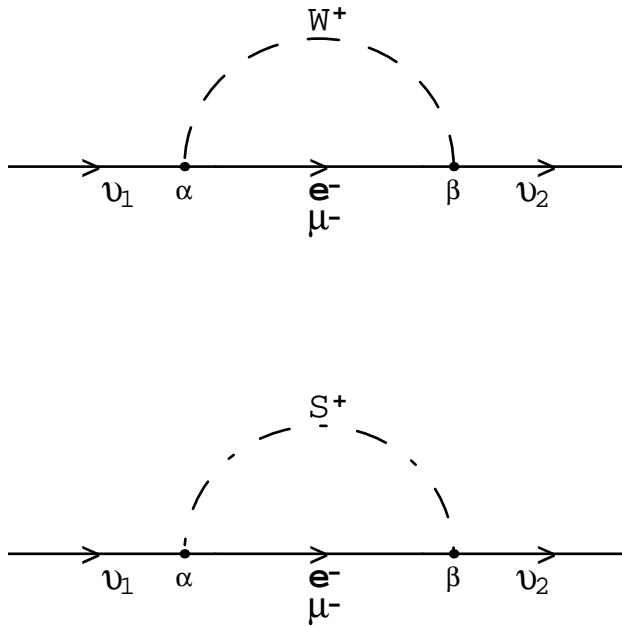


Abbildung 2.13: *Übergang eines Neutrino flavors in einen anderen Neutrino flavor in niedrigster Ordnung Störungsrechnung.*

Wir konstruieren aus der Übergangsamplitude für zwei Neutrinos eine Beziehung zwischen Massendifferenz und Mischungswinkel. Betrachtet werden nur die Graphen niedrigster Ordnung Störungsrechnung[†] in einem zwei Flavor-Modellsystem, das wir mit den ersten beiden Generationen der Leptonen identifizieren[‡]. Eine Verallgemeinerung dieses zwei Flavorsystems auf drei Flavor ist anhand unserer Rechnungen sehr einfach durchzuführen, da alle in den Schleifen auftretenden Divergenzen mit Hilfe der Dimensionalen Regularisierung beseitigt werden. Die betrachteten Graphen führen zu Selbstenergie Beiträgen zur Masse der Neutrinos. Außerdem können an diese Graphen auch Photonen koppeln. Wie

*Siehe z. B. [CB83] S. 244 ff; diese Theorie ist die moderne Theorie der Massendifferenz der Neutralen Kaonen.

[†]In unserer Theorie sind das Graphen zweiter Ordnung;

[‡]Diese Identifizierung ist nicht zwingend, da zum Beispiel nur die zweite und dritte Generationen stark miteinander mischen könnten. Da es aber keine sichere Informationen über die Mischung von Leptonen gibt, außer das noch keine beobachtet wurde, ist diese Wahl so gut wie jede andere.

in dem Artikel von [BGL72] gezeigt wird, führen diese Graphen in ähnlichen Modellen zu keinem statischen elektromagnetischem Moment der Neutrinos.

Wie bereits zuvor erwähnt, können neutrale Ströme in unserer Theorie den Flavor nicht ändern. Außerdem erlaubt unsere Theorie keine Kopplung zwischen Teilchen und Antiteilchen. Man kann folgende Beziehung (Siehe Anhang B.3.1; Gleichung (B.60)) zwischen Massendifferenz, Matrixelement und Mischungswinkel der Neutrinos ν_1 und ν_2 ableiten:

$$\Delta m = 2 \sqrt{\frac{1}{\sin^2(2\vartheta)}} M_{12}^2 \stackrel{\vartheta=45^\circ}{=} 2 \sqrt{M_{12}^2} \quad (2.38)$$

Diese Formel benötigen wir nur im Fall der entarteten Massen. In diesem Fall ist aber der Mischungswinkel mit ($\vartheta=45^\circ$) festgelegt. Das Matrixelement M_{12}^2 entspricht dem Quadrat der invarianten Amplitude für unseren Prozeß. Zur Berechnung des Matrixelementes können wir nicht wie im System der neutralen Kaonen vorgehen*.

Also gehen wir zur Berechnung der invarianten Amplitude wie folgt vor:

- Berechnung der Integrale

- Wir vereinfachen zuerst die invariante Amplitude des W-Boson (Kapitel 2.4.1). Diese setzt sich aus folgenden Anteilen zusammen:

- * Renormalisierter Anteil des Elektrons
- * Renormalisierter Anteil des Myons

Man sieht am Ende der Rechnung, daß Divergenzen nicht auftreten, wenn wir die beiden Beiträge vor der Integration addieren[†].

- Jetzt können wir die invariante Amplitude der S-Boson vereinfachen (Kapitel 2.4.2). Wir gehen wieder vor wie zuvor und finden den:

- * Renormalisierten Anteil des Elektrons
- * Renormalisierten Anteil des Myons

Im Gegensatz zu vorher, werden wir sehen, daß hier die Pole nicht mehr durch Subtraktion vor der Integration zu beseitigen sind. Man findet zwar, daß der Beitrag dieser Graphen vernachlässigbar klein ist, aber vor der Renormalisierung ist dies nicht offensichtlich[‡]

*Man ersetzt bei den neutralen Kaonen den Anteil der Spur am Matrixelement durch die Zerfallskonstante für den K_{12} -Zerfall(Also den Zerfall in zwei Leptonen)(Siehe z. B. [CB83] S. 253). Für unsere Neutrinos besitzen wir keine vergleichbare Möglichkeit.

[†]Wir müssen wegen dieser Addition aber einen Feynmanparameter mehr einführen. Da Feynman-Integrationen im Allgemeinen zu stark oszillierenden Integralen führen, ist nur noch ein numerischer Vergleich mit unserer hier vorgestellten Rechnung möglich. Wegen diesen starken Oszillationen sind außerdem auch die mit „*Mathematica*“ berechneten Endformeln erheblich länger und unübersichtlicher.

[‡]In der Literatur findet man bei Rechnungen in unitärer Eichung oft den Hinweis, daß wegen dem $\frac{k_\mu k_\nu}{M_w^2}$ Term vor dem zweiten Anteil des W-Propagators der Beitrag zur Amplitude vernachlässigbar klein ist. Dieser Anteil des Propagators ist aber in unitärer Eichung $\sim \mathcal{O}(k^{+0})$ im Schleifenimpuls, im Gegensatz zum ersten Anteil der $\sim \mathcal{O}(k^{-2})$ ist(Siehe Gleichung (A.28) mit $\xi \rightarrow \infty$).

- Berechnung der Massendifferenz (Kapitel 2.4.3)

- In diesem Teil werden wir jetzt das Quadrat der invarianten Amplitude berechnen. Wir werden nur die Amplitude der W-Bosonen berechnen*. Danach werden wir uns die Endformel für die Massendifferenz betrachten.

Für die folgenden Rechnungen gelten folgende Vereinbarungen:

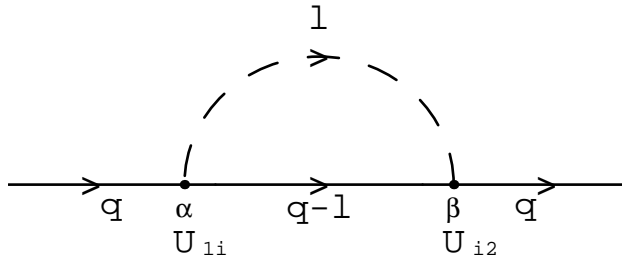


Abbildung 2.14: *Impulsvereinbarungen in den Graphen und Matrixelementen. Dabei ist der äußere Impuls q für beide Masseneigenzustände gleich, wegen der Energie-Impuls Erhaltung an den Vertices.*

Die Nebenrechnungen zu den Integralen sind im Anhang auf den Seiten 79 ff., die Beziehungen der Dirac-Algebra auf den Seiten 63 f. und die Feynmanregeln in R_ξ -Eichung auf den Seiten 66 ff. zu finden. In diesem Teil der Arbeit werden wir mit der Feynman-‘t Hooft Eichung [†] arbeiten. Die Matrixelemente U_{*i} werden wir mit $\sin \vartheta$ bzw. $\cos \vartheta$ bezeichnen, obwohl der Winkel ϑ mit 45° festgelegt ist.

*Der Amplitudenbeitrag der S-Bosonen ist vernachlässigbar klein(aber $\neq 0$)

[†] $\xi \rightarrow 1$

2.4.1 Der Beitrag der W-Bosonen zur invarianten Amplitude

Für den Beitrag der Elektronen zur invarianten Amplitude findet man folgenden Graph:

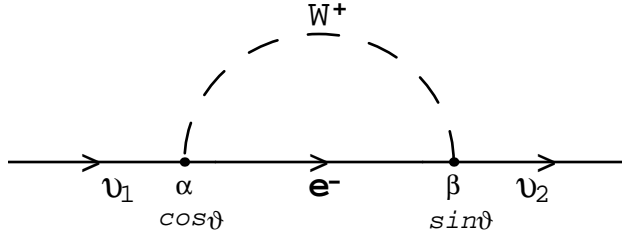


Abbildung 2.15: *W-Bosonen Elektronen Schleife*

Mit den Feynmanregeln aus dem Anhang A.5 kann man folgende Formel für die invariante Amplitude der Elektronen in Feynman-‘t Hooft-Eichung ableiten:

(In den folgenden Rechnungen wird der Term $+i\epsilon$ im Nenner der Propagatoren einfach weggelassen. Dies macht die Darstellung der Gleichungen übersichtlicher. Bei Integrationen* ist dieser Term notwendig, damit keine Pole auf der reellen Achse liegen.)

$$\mathcal{M}_e^W = \left(\frac{ig}{2\sqrt{2}}\right)^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \int \frac{d^\omega l}{(2\pi)^\omega} \mathbf{D}_{\beta\alpha}^W \bar{u}_2(q) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \mathbf{D}^e \gamma^\beta (1 - \gamma_5) u_1(q) \quad (2.39)$$

$$= \left(\frac{ig}{2\sqrt{2}}\right)^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \int \frac{d^\omega l}{(2\pi)^\omega} \frac{-ig_{\beta\alpha}}{l^2 - M_W^2} \bar{u}_2(q) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \frac{i}{(\not{l} - \not{q}) - m_e} \gamma^\beta (1 - \gamma_5) u_1(q) \quad (2.40)$$

$$= -\frac{g^2}{4} \sin\vartheta \cos\vartheta \int \frac{d^\omega l}{(2\pi)^\omega} \frac{q^\rho - l^\rho}{(l^2 - M_W^2)((q-l)^2 - m_e^2)} \bar{u}_2(q) \gamma^\alpha \gamma_\rho \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) u_1(q) \quad (2.41)$$

$$= -\frac{g^2(2-\omega)}{4} \sin\vartheta \cos\vartheta \int \frac{d^\omega l}{(2\pi)^\omega} \frac{q^\rho - l^\rho}{(l^2 - M_W^2)((q-l)^2 - m_e^2)} \bar{u}_2(q) \gamma_\rho (1 - \gamma_5) u_1(q) \quad (2.42)$$

Zur Vereinfachung haben wir die Beziehungen für Dirac-Algebra in Dimension ω aus dem Anhang Kapitel A.3.2 benützt. Das Integral, das in der Amplitude enthalten ist, entspricht in der Struktur dem Typ Integral aus Gleichung (B.66). Wenn wir nur das

*Siehe auch Wick-Rotation im Anhang auf Seite 65

Integral betrachten und eine Feynmanparametrisierung (A.25) durchführen, finden wir:

$$\begin{aligned}
I_e^\rho &= \int \frac{d^\omega l}{(2\pi)^\omega} \frac{q^\rho - l^\rho}{(l^2 - M_W^2)((q-l)^2 - m_e^2)} \\
&= \int \frac{d^\omega l}{(2\pi)^\omega} \int_0^1 d\alpha \frac{q^\rho - l^\rho}{[\alpha((q-l)^2 - m_e^2) + (1-\alpha)(l^2 - M_W^2)]^2} \quad (2.43)
\end{aligned}$$

Da wir das Integral in der Dimension ω konvergent wählen*, ist es möglich die Integrationsreihenfolge zu vertauschen und die Integrationsvariable zu verschieben. Wenn man im Nenner Terme umsortiert findet man:

$$\begin{aligned}
I_e^\rho &= \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^\omega l}{(2\pi)^\omega} \frac{q^\rho - l^\rho}{[(l - \alpha q)^2 - (1-\alpha)M_W^2 - \alpha m_e^2 + (\alpha - \alpha^2)q^2]^2} \\
l^\rho &\longrightarrow l^\rho - \alpha q^\rho \\
&= \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^\omega l}{(2\pi)^\omega} \frac{(1-\alpha)q^\rho - l^\rho}{[l^2 - (1-\alpha)M_W^2 - \alpha m_e^2 + (\alpha - \alpha^2)q^2]^2} \quad (2.44)
\end{aligned}$$

Wegen der symmetrischen Integration $\int d^\omega l$ verschwindet der Anteil $\sim l^\rho$. Führen wir jetzt die Abkürzung

$$M_e^2(\alpha) = (1-\alpha)M_W^2 + \alpha m_e^2 - (\alpha - \alpha^2)q^2 \quad (2.45)$$

ein und eine Wick-Rotation (Gleichung (A.26)) aus, finden wir:

$$\begin{aligned}
I_e^\rho &= i \int_0^1 d\alpha \int_{\mathbb{R}_4} \frac{d^\omega l}{(2\pi)^\omega} \frac{q^\rho}{(l^2 + M_e^2(\alpha))^2} \\
&= i \int_0^1 d\alpha \int_{S_{\omega-1}} d\Omega \int_0^\infty \frac{dl}{(2\pi)^\omega} \frac{q^\rho}{(l^2 + M_e^2(\alpha))^2} \quad (2.46)
\end{aligned}$$

Das $\int d\Omega$ berechnen wir entsprechend Gleichung (B.61). Die Integration $\int dl$ führen wir entsprechend den Gleichungen (B.66)–(B.74) aus. Eine Entwicklung um den Pol bei $\omega = 4$ führt dann zu folgendem Ergebnis:

$$I_e^\rho = \frac{i}{(4\pi)^2} q^\rho \int_0^1 d\alpha (1-\alpha) \left(\frac{2}{4-\omega} - \mathbf{C} + \ln(4\pi) - \ln M_e^2(\alpha) \right) + \mathcal{O}(4-\omega) \quad (2.47)$$

Dabei ist \mathbf{C} die Eulerkonstante.

Den Pol bei $\omega = 4$ kann man durch einen geeigneten Kompensationsterm in der Lagrangedichte beseitigen†. Wir erhalten also für den normierten Anteil der Elektronen an der invarianten Amplitude:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_e^W &= \frac{g^2}{4} \sin \vartheta \cos \vartheta (2-\omega) \frac{i}{(4\pi)^2} q^\rho \\
&\left\{ \int_0^1 d\alpha (1-\alpha) (\ln(4\pi) - \mathbf{C} - \ln M_e^2(\alpha)) + \mathcal{O}(4-\omega) \right\} \quad (2.48) \\
&\bar{u}_2(q) \gamma_\rho (1-\gamma_5) u_1(q)
\end{aligned}$$

*Wir sind erst am Ende der Rechnung am Grenzübergang $\omega \rightarrow 4$ interessiert

†Dieser Kompensationsterm hat sonst keine Auswirkung auf die Amplitude.

Weiter betrachten wir nun den Beitrag des Myons zur invarianten Amplitude[‡]:

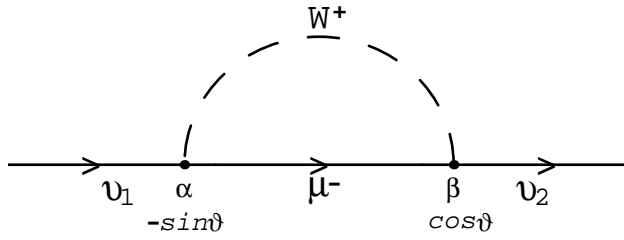


Abbildung 2.16: *W-Bosonen Myonen Schleife*

$$\mathcal{M}_\mu^W = -\left(\frac{ig}{2\sqrt{2}}\right)^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \int \frac{d^\omega l}{(2\pi)^\omega} \mathbf{D}_{\beta\alpha}^W \bar{u}_2(q) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \mathbf{D}^\mu \gamma^\beta (1 - \gamma_5) u_1(q) \quad (2.49)$$

Am Ende der Rechnung findet man entsprechend:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\mu^W &= -\frac{g^2}{4} \sin\vartheta \cos\vartheta (2 - \omega) \frac{i}{(4\pi)^2} q^\rho \\ &\int_0^1 d\alpha (1 - \alpha) \left(\ln(4\pi) - \mathbf{C} - \ln M_\mu^2(\alpha) \right) + \mathcal{O}(4 - \omega) \\ &\bar{u}_2(q) \gamma_\rho (1 - \gamma_5) u_1(q) \end{aligned} \quad (2.50)$$

mit

$$M_\mu^2(\alpha) = (1 - \alpha)M_W^2 + \alpha m_\mu^2 - (\alpha - \alpha^2)q^2 \quad (2.51)$$

Wenn man die Summe beider Terme betrachtet, sieht man, daß die Konstanten herausfallen*. Für die Summe dieser beiden Beiträge findet man also[†]:

$$\begin{aligned} M^W &= M_\mu^W + M_e^W = -\frac{g^2}{4(4\pi)^2} (2 - \omega) \sin\vartheta \cos\vartheta \\ &\cdot \int_0^1 d\alpha (1 - \alpha) \ln\left(\frac{M_\mu^2(\alpha)}{M_e^2(\alpha)}\right) \bar{u}_2(q) \not{q} (1 - \gamma_5) u_1(q) \end{aligned} \quad (2.52)$$

[‡]Alle Rechnungen entsprechen den Rechnungen (2.39)–(2.48). Man erhält nur aus einem Vertex ein relatives Minuszeichen aus der Mischungsmatrix.

*Auch die Polterme heben sich gegenseitig auf.

[†]Im folgenden Formeln werden die Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\omega - 4)$ weggelassen. Der Grenzübergang $\omega \rightarrow 4$ wird erst durchgeführt, wenn alle Spuren berechnet sind.

2.4.2 Der Beitrag der S-Boson zur invarianten Amplitude

Für die invariante Amplitude der S-Bosonen findet man für den Anteil der Elektronen:

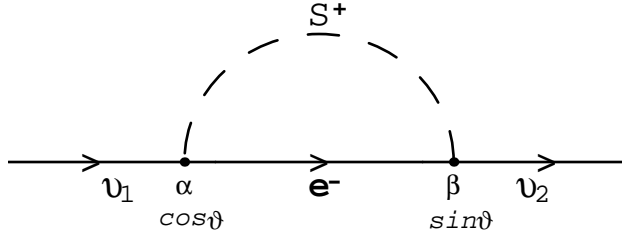


Abbildung 2.17: *S-Bosonen Elektronen Schleife*

$$\mathcal{M}_e^S = -\left(-\frac{ig}{2\sqrt{2}M_W}\right)^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \int \frac{d^\omega l}{(2\pi)^\omega} (m_e - m_1)(m_e - m_2) \mathbf{D}^S \bar{u}_2(q) (1 - \varepsilon_2^e \gamma_5) \mathbf{D}^e (1 + \varepsilon_1^e \gamma_5) u_1(q) \quad (2.53)$$

mit: $\varepsilon_1^e = \frac{(m_e + m_1)}{(m_e - m_1)} \quad \varepsilon_2^e = \frac{(m_e + m_2)}{(m_e - m_2)}$ (2.54)

Man sieht sofort, daß $\varepsilon_i^e \approx 1$ ist, wenn man annimmt, daß $m_{e,\mu} \gg m_{1,2}$ ist*. Mit den Feynmanregeln aus dem Anhang A.5 findet man jetzt für die invariante Amplitude der Elektronen in Feynman-‘t Hooft Eichung:

$$\mathcal{M}_e^S = -\left(-\frac{ig}{2\sqrt{2}M_W}\right)^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \int \frac{d^\omega l}{(2\pi)^\omega} (m_e - m_1)(m_e - m_2) \frac{-i}{l^2 - M_W^2} \bar{u}_2(q) (1 - \varepsilon_2^e \gamma_5) \frac{i}{(\not{q} - \not{l}) - m_e} (1 + \varepsilon_1^e \gamma_5) u_1(q) \quad (2.55)$$

$$= \frac{g^2}{8} \frac{(m_e - m_2)(m_e - m_1)}{M_W^2} \sin \vartheta \cos \vartheta \int \frac{d^\omega l}{(2\pi)^\omega} \frac{1}{(l^2 - M_W^2)} \frac{1}{((q - l)^2 - m_e^2)} \bar{u}_2(q) (1 - \varepsilon_2^e \gamma_5) \{(\not{q} - \not{l}) + m_e\} (1 + \varepsilon_1^e \gamma_5) u_1(q) \quad (2.56)$$

* Alle experimentellen Ergebnisse deuten darauf hin, daß die Neutrinos sehr viel leichter als die geladenen Leptonen sind.

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_e^S &= \frac{g^2}{8} \frac{(m_e - m_2)(m_e - m_1)}{M_W^2} \sin \vartheta \cos \vartheta \int \frac{d^\omega l}{(2\pi)^\omega} \\
&\left\{ \frac{q^\rho - l^\rho}{(l^2 - M_W^2)((q-l)^2 - m_e^2)} \bar{u}_2(q) (1 - \varepsilon_2^e \gamma_5) \gamma_\rho (1 + \varepsilon_1^e \gamma_5) u_1(q) \right. \\
&+ \left. \frac{m_e}{(l^2 - M_W^2)((q-l)^2 - m_e^2)} \bar{u}_2(q) (1 - \varepsilon_2^e \gamma_5) (1 + \varepsilon_1^e \gamma_5) u_1(q) \right\} \quad (2.57)
\end{aligned}$$

Wenn wir die Definition von I_e^ρ aus Gleichung (2.43) einsetzen, finden wir:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_e^S &= \frac{g^2}{8} \frac{(m_e - m_2)(m_e - m_1)}{M_W^2} \sin \vartheta \cos \vartheta \\
&\left\{ I_e^\rho \bar{u}_2(q) \gamma_\rho (1 + \varepsilon_2^e \gamma_5)(1 + \varepsilon_1^e \gamma_5) u_1(q) \right. \\
&+ \left. \int \frac{d^\omega l}{(2\pi)^\omega} \frac{m_e}{(l^2 - M_W^2)((q-l)^2 - m_e^2)} \bar{u}_2(q) (1 - \varepsilon_2^e \gamma_5) (1 + \varepsilon_1^e \gamma_5) u_1(q) \right\} \quad (2.58)
\end{aligned}$$

Für den Anteil des Myons findet man entsprechend:

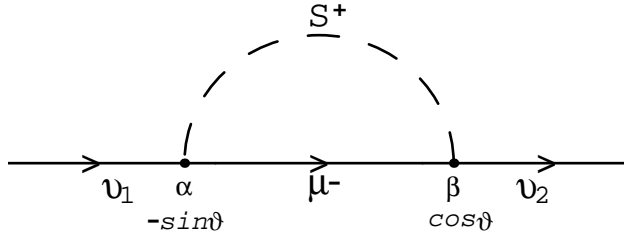


Abbildung 2.18: *S*-Bosonen Myon Schleife

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\mu^S &= -\frac{g^2}{8} \frac{(m_\mu - m_2)(m_\mu - m_1)}{M_W^2} \sin \vartheta \cos \vartheta \\
&\left\{ I_\mu^\rho \bar{u}_2(q) \gamma_\rho (1 + \varepsilon_2^\mu \gamma_5)(1 + \varepsilon_1^\mu \gamma_5) u_1(q) \right. \\
&+ \left. \int \frac{d^\omega l}{(2\pi)^\omega} \frac{m_\mu}{(l^2 - M_W^2)((q-l)^2 - m_\mu^2)} \bar{u}_2(q) (1 - \varepsilon_2^\mu \gamma_5) (1 + \varepsilon_1^\mu \gamma_5) u_1(q) \right\} \quad (2.59)
\end{aligned}$$

Dabei ist I_μ^ρ , ε_1^μ und ε_2^μ entsprechend wie I_e^ρ (Gl. (2.43)), ε_1^e und ε_2^e (Gl. (2.54)) definiert*.

*Natürlich muß man überall m_e durch m_μ ersetzen.

Für die Summe dieser beiden Beiträge findet man also:

$$M^S = M_\mu^S + M_e^S = -\frac{g^2}{8} \sin \vartheta \cos \vartheta \left\{ \frac{(m_\mu - m_2)(m_\mu - m_1)}{M_W^2} I_\mu^\rho \quad \bar{u}_2(q) \gamma_\rho (1 + \varepsilon_2^\mu \gamma_5)(1 + \varepsilon_1^\mu \gamma_5) u_1(q) \right. \quad (2.60)$$

$$- \frac{(m_e - m_2)(m_e - m_1)}{M_W^2} I_e^\rho \quad \bar{u}_2(q) \gamma_\rho (1 + \varepsilon_2^e \gamma_5)(1 + \varepsilon_1^e \gamma_5) u_1(q) \quad (2.61)$$

$$+ \frac{(m_\mu - m_2)(m_\mu - m_1)}{M_W^2} \int \frac{d^\omega l}{(2\pi)^\omega} \frac{m_\mu}{(l^2 - M_W^2)((q-l)^2 - m_\mu^2)} \bar{u}_2(q) (1 - \varepsilon_2^\mu \gamma_5) (1 + \varepsilon_1^\mu \gamma_5) u_1(q) \quad (2.62)$$

$$- \frac{(m_e - m_2)(m_e - m_1)}{M_W^2} \int \frac{d^\omega l}{(2\pi)^\omega} \frac{m_e}{(l^2 - M_W^2)((q-l)^2 - m_e^2)} \bar{u}_2(q) (1 - \varepsilon_2^e \gamma_5) (1 + \varepsilon_1^e \gamma_5) u_1(q) \quad (2.63)$$

Die Integrale der zweiten Beiträge ((2.62), (2.63)) besitzen das gleiche asymptotische Verhalten wie die Integrale I^ρ . Man sieht sofort, daß die Amplitude relativ zur Amplitude der W-Bosonen um einen Faktor $\frac{m_\mu^2 - m_e^2}{M_W^2}$ unterdrückt ist. Der zweite Beitrag $\sim m_e$ bzw. m_μ besitzt zwar keine Abhängigkeit vom Impuls \not{q} *, aber die Kombination $(1 - \varepsilon_2 \gamma_5)(1 + \varepsilon_1 \gamma_5)$ führt zu einer weiteren Unterdrückung dieses Amplitudenbeitrages[†]. Aus diesen Gründen ist es berechtigt, diesen Anteil der Amplitude zu vernachlässigen, wenn wir nicht annehmen, daß die Neutrinomassen in der Größenordnung von $\mathcal{O}\left(\frac{m_\mu^4 - m_e^4}{M_W^4}\right)$ sind.

*Diese Abhängigkeit vom Impuls führt zu einem Beitrag in der Größenordnung der Neutrinomasse.

[†]Wie zuvor bereits erwähnt, sind die $\varepsilon_i \approx 1$. Die $1 \pm \gamma_5$ sind (bis auf Konstanten) die Chiralitätsprojektoren und orthogonal zueinander. Daher ist $(1 - \gamma_5) \cdot (1 + \gamma_5) = 0$. Also ist der erste nichtverschwindende Term von der Ordnung $\mathcal{O}\left(\frac{m_\mu^4 - m_e^4}{M_W^4}\right)$.

2.4.3 Berechnung der Massendifferenz

Wie bereits erwähnt werden wir bei der Berechnung des Amplitudenquadrats nur den Anteil des W-Bosons berücksichtigen. Man findet unter dieser Voraussetzung für die invariante Amplitude, wenn man über Anfangs- und Endspins mittelt:

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{s_i} \sum_{s_j} |\mathcal{M}|^2 \quad (2.64)$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{s_i} \sum_{s_j} (|\mathcal{M}^W|^2 + |\mathcal{M}^S|^2) \simeq \frac{1}{4} \sum_{s_i} \sum_{s_j} |\mathcal{M}^W|^2 \quad (2.65)$$

Dabei bedeutet der Querstrich die Mittelung über die Anfangs- und Endspins der Teilchen. Bei dieser Mittelung verhält sich der skalare Anteil von \mathcal{M}^W aus Gleichung (2.52) trivial. Es genügt also, wenn wir uns den Anteil

$$\sim \bar{u}_2(q)(1 + \gamma_5)\not{q}u_1(q) \quad (2.66)$$

in der Spur betrachten. Mit Hilfe der Nebenrechnungen aus dem Anhang (Gl. (B.75)-(B.81)) findet man als Ergebnis für diese Spur:

$$\mathcal{A}^2 = \frac{1}{4} \sum_{s_i} \sum_{s_j} \text{Tr}(\bar{u}_1(q)(1 + \gamma_5)\not{q}u_2(q)\bar{u}_2(q)(1 + \gamma_5)\not{q}u_1(q)) \quad (2.67)$$

$$= \frac{1}{2} f(\omega) m^2 \quad (2.68)$$

Also finden wir als Endergebnis für unser gesuchtes Matrixelement:

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \left(\frac{g^2}{4(4\pi)^2}\right)^2 (2 - \omega)^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta \left\{ \int_0^1 d\alpha (1 - \alpha) \ln \left(\frac{M_\mu^2(\alpha)}{M_e^2(\alpha)} \right) \right\}^2 \mathcal{A}^2 \quad (2.69)$$

Dabei ist der Anteil des W-Bosons durch Gleichung (2.52) gegeben; M_e^2 in Gleichung (2.45) und M_μ^2 in Gleichung (2.51) definiert. Diese Formel kann man nur noch numerisch auswerten* Man findet für das Integral:

$$\int_0^1 d\alpha (1 - \alpha) \ln \left(\frac{M_\mu^2(\alpha)}{M_e^2(\alpha)} \right) = 8.57 \cdot 10^{-7} \quad (2.70)$$

Ein Wert $\ll 1$ für dieses Integral ist zu erwarten, da bei Vernachlässigung aller Massen gegenüber der W-Bosonenmasse man im Integral einen $\ln 1 = 0$ übrig behält. Bei der numerischen Integration wurde für einen Parameterbereich von 0 keV – 17 keV, für die Neutrinomasse, keine Variation des Integrals festgestellt.

*Versuche, die Formel mit Hilfe von symbolischer Algebra („Mathematica“) zu vereinfachen, sind gescheitert.

Wenn wir jetzt den Wert $\vartheta = 45^\circ$ und Gleichung (2.68) für \mathcal{A} berücksichtigen, finden wir für die Massendifferenz aus Gleichung (2.38)*:

$$\begin{aligned}\Delta m &= 2\sqrt{|\mathcal{M}|^2} \\ &= \frac{g^2(\omega - 2)}{4(4\pi)^2} \sqrt{\frac{f(\omega)}{2}} m^2 \int_0^1 d\alpha (1 - \alpha) \ln \left(\frac{M_\mu^2(\alpha)}{M_e^2(\alpha)} \right)\end{aligned}\quad (2.71)$$

$$\stackrel{\omega \rightarrow 4}{\equiv} \frac{1}{\sqrt{2}(4\pi)^2} g^2 m \int_0^1 d\alpha (1 - \alpha) \ln \left(\frac{M_\mu^2(\alpha)}{M_e^2(\alpha)} \right)\quad (2.72)$$

Also findet man für die relative Massendifferenz:

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{1}{\sqrt{2}(4\pi)^2} g^2 \int_0^1 d\alpha (1 - \alpha) \ln \left(\frac{M_\mu^2(\alpha)}{M_e^2(\alpha)} \right)\quad (2.73)$$

Wenn wir diese Formel numerisch auswerten, finden wir mit Hilfe von Gleichung (2.70) und Gleichung (A.31) folgenden Zahlenwert:

$$\frac{\Delta m}{m} = 1.63 \cdot 10^{-9}$$

(2.74)

Diese relative Massendifferenz ist größer als die berechnete Massendifferenz im System der neutralen Kaonen[†]. Dies ist auch zu erwarten, da man im Fall der neutralen Kaonen einen Graph $\sim \mathcal{O}(G^2)$ betrachtet, im Gegensatz zu unserem Modell das nur $\sim \mathcal{O}(G)$ in der Kopplungskonstante ist.

*Jetzt führen wir auch den Grenzübergang $\omega \rightarrow 4$ aus. Dabei geht dann $f(\omega) \rightarrow f(4) = 4$.

[†]Man findet zum Beispiel in [Nac86] Gleichung (26–102) den Wert von $2 \cdot 10^{-12}$ als Abschätzung

2.5 Resümee

Wir haben in dieser Diplomarbeit in Kapitel 2.2 den Neutronenzerfall betrachtet. Am Ende der Überlegungen haben wir gefunden, daß man aus der Zerfallszeit des Neutrons, keine Einschränkung für Parameter des Neutrinos ableiten kann.

Im Kapitel 2.3 haben wir uns mit dem Solar-Neutrino Problem beschäftigt. Unsere eigenen Überlegungen führten auch in diesem Fall zu keiner Einschränkung der Neutrinoparameter. Dies liegt, wie wir schon mehrfach betont haben, an der Komplexität des Neutrinospektrums und des Streuquerschnittes für die Reaktion $^{37}\text{Cl} + \nu_e \rightarrow ^{37}\text{Ar} + e^-$. Die durchgeführte Analyse zeigt aber sehr schön das Oszillationsverhalten von Lösungen für den Neutrinofluß im Verlauf eines Jahres. Mit Hilfe dieser Überlegungen kann man die Parameterplots in der $\sin^2 2\vartheta - \Delta m^2$ Ebene besser verstehen.

Durch den Preprint von N. Hata [Hat94] haben wir die Möglichkeit einen Parameterbereich, in dem Vakuumoszillationen möglich sind, anzugeben. Wenn wir uns auf den Mischungswinkel $\vartheta = 45^\circ$ beschränken, sind folgende Werte für die Massendifferenz möglich (Siehe auch Gleichung 2.34)):

$$\Delta m^2 = (0.45-1.2) \cdot 10^{-10} \quad (2.75)$$

Dabei ist zu diesem angegebenen Parameterbereich kritisch zu bemerken, daß nicht wirklich vier voneinander unabhängige Experimente ausgewertet werden. Außerdem wird die größte Einschränkung des Parameterbereichs durch das Homestake Experiment allein verursacht. Es wäre sicherlich sinnvoll gewesen, für die Minima der χ^2 Verteilung (Tabelle 2.2) das GALLEX und SAGE Experiment zusammen auszuwerten. Dies hätte dann aber dazu geführt das man nur noch einen Freiheitsgrad d besitzt. Dadurch wäre die Güte des Fits (GOF) natürlich schlechter wie der angegebene Wert von 8% geworden. Wir wollen für die folgenden Überlegungen annehmen, daß sich die berechneten χ^2 Werte aus der Tabelle 2.2 nicht wesentlich ändern. Man findet für einen Wert von $\chi^2 = 5$ nur noch eine Güte des Fits von 2.5 %, wenn man nur noch einen Freiheitsgrad besitzt*. Diesen Wert müsste man als signifikante Abweichung von der Hypothese bezeichnen. Wir werden den gefundenen Parameterbereich aber trotzdem verwenden, da der Autor N. Hata diese Überlegungen sicherlich in Erwägung gezogen hat.

In dem letzten Kapitel 2.4 haben wir eine Beziehung für die Massendifferenz der Neutrinos hergeleitet. Dabei haben wir folgenden Zahlenwert für die relative Massendifferenz gefunden:

$$\frac{\Delta m}{m} = 1.63 \cdot 10^{-9} \quad (2.76)$$

*Sich z. Bsp. J. R. Taylor, Fehleranalyse; Anhang D [Tay88]

Jetzt können wir die gefundenen Parameterbereiche von Δm^2 Gleichung (2.75) und den Wert von $\frac{\Delta m}{m}$ Gleichung (2.76) kombinieren. Es gilt, daß $\Delta m^2 = m_1^2 - m_2^2$ ist. Betrachten wir jetzt den Fall fast gleicher Massen mit einer kleinen Massendifferenz, die von den Graphen aus Kapitel 2.4 herrühren. In diesem Fall finden wir:

$$\Delta m^2 = 2m\Delta m - (\Delta m)^2 \quad (2.77)$$

Wenn man jetzt den Term $\sim (\Delta m)^2$ vernachlässigt, findet man:

$$\Delta m^2 = 2m\Delta m \quad (2.78)$$

$$m = \frac{1}{2} \frac{\Delta m^2}{\Delta m} \quad (2.79)$$

$$m^2 = \frac{1}{2} \frac{\Delta m^2}{\frac{\Delta m}{m}} \quad (2.80)$$

$$m = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\Delta m^2}{\frac{\Delta m}{m}}} \quad (2.81)$$

Setzen wir jetzt unsere Werte für $\frac{\Delta m}{m}$ Gleichung (2.76) und Δm^2 Gleichung (2.75) ein, finden wir folgenden möglichen Parameterbereich für die Neutrinomasse im Rahmen dieser Diplomarbeit:

$$m = (0.12 - 0.19) \text{ eV} \quad (2.82)$$

Durch die Kombination verschiedener Ergebnisse ist es uns gelungen eine Vorhersage für die Neutrinomasse zu treffen. Unser gefundener Wert liegt sicherlich außerhalb der durch direkten Massenbestimmung zugänglichen Bereiche. Natürlich können weitere Solar-Neutrino Experimente die Statistik verbessern. Die Effekte die die geplanten Neutrinoexperimente messen, falls die Massendifferenz Δm^2 tatsächlich in diesem Bereich liegt, sind auch in dem Preprint von N. Hata diskutiert.

Bei allen Überlegungen darf man aber nicht außer acht lassen, daß alle Aussagen dieser Arbeit in einem Zwei-Flavor Modell entwickelt wurden.

Anhang A

Notationen & Konventionen

In dieser Arbeit verwenden wir das natürliche Einheitensystem mit $\hbar = c = 1$. In einigen Teilen dieser Arbeit müssen wir dieses Einheitensystem auf das experimentell gebräuchlichere cgs-System umrechnen. Dafür gelten folgende Umrechnungsformeln:

$$1\text{MeV} = 1.602 \cdot 10^{-6} \text{erg} \quad (\text{A.1})$$

$$1\text{MeV}^{-1} \approx 197.328 \cdot 10^{-13} \text{cm} \quad (\text{A.2})$$

$$1\text{MeV}^{-1} \approx 6.582 \cdot 10^{-22} \text{s} \quad (\text{A.3})$$

A.1 Verwendete Symbole

Symbol	Bedeutung
\mathbf{C} $\mathcal{O}(x)$ \approx	Euler-Konstante Terme der Ordnung x entspricht
$a, b, c, \dots \in \{1, 2, 3\}$ $\mu, \nu, \xi, \dots \in \{0, 1, 2, 3\}$ τ_1, τ_2, τ_3 γ_μ γ_5	römische Indizes griechische Indizes Pauli-Matrizen Dirac γ -Matrizen
$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$ \dagger h.c. ε_{abc} $\varepsilon_{\mu\nu\xi\varphi}$	Divergenz Hermitesch konjugiert Total antisymmetrischer Tensor in 3 bzw. 4 Dimensionen
$\text{Tr}(\dots)$ $[\dots, \dots]$ $\{\dots, \dots\}$	Spur Kommutator Antikommutator
$\left(\begin{array}{c c} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{array} \right)$	Matrix, die aus Untermatrizen* aufgebaut ist

*Die Dimension der Untermatrizen muß nicht gleich sein

A.2 Relativistische Notation

$$\begin{aligned}
 g_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} &= \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -\mathbf{1} \end{array} \right) & \text{Metrischer Tensor} \\
 x^\mu &= (x^0, x^1, x^2, x^3) &= (t, \vec{x}) & \text{Kontravariante Basis} \\
 x_\mu &= (t, -\vec{x}) &= g_{\mu\nu} x^\nu & \text{Kovariante Basis} \\
 xy &= x_\mu y^\mu = x^\mu y_\mu &= x_0 y_0 - \vec{x} \cdot \vec{y} & \text{Minkowskiprodukt} \\
 p &= (E, \vec{p}) & & \text{Vierer-Impuls} \\
 \partial_\mu &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} &= \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \vec{\nabla} \right) & \\
 \not{p} &= p^\mu \gamma_\mu &= p_\mu \gamma^\mu & \text{Feynman-Slash}
 \end{aligned}$$

A.3 Dirac-Algebra

A.3.1 Dirac-Algebra im Minkowski-Raum

Definierende Gleichung der Dirac-Algebra:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} \quad (\text{A.4})$$

Beziehungen:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\mu\nu} &= \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \\
 \gamma_\mu \gamma^\mu &= 4 \\
 \gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu &= -2 \not{a} \\
 \gamma_\mu \not{a} \not{b} \gamma^\mu &= 4 a b \\
 &\dots \\
 \{\gamma_5, \gamma_\mu\} &= 0 \\
 \gamma_5 \gamma_5 &= 1 \\
 (1 - \gamma_5)(1 - \gamma_5) &= 2(1 - \gamma_5) \\
 (1 - \gamma_5)(1 + \gamma_5) &= 0 \\
 \mathbf{Tr}(a) &= 4 a \\
 \mathbf{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) &= 4g_{\mu\nu} \\
 \mathbf{Tr}(\sigma_{\mu\nu}) &= 0 \\
 \mathbf{Tr}(\not{a}_1 \not{a}_2 \dots \not{a}_{2n+1}) &= 0 \\
 \mathbf{Tr}(\not{a}_1 \not{a}_2 \dots \not{a}_{2n}) &= \sum_{k=2}^n (-1)^k a_1 a_k \mathbf{Tr}(\not{a}_2 \dots \not{a}_{k-1} \not{a}_{k+1} \dots \not{a}_{2n}) \\
 \mathbf{Tr}(\gamma_5) = \mathbf{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5) &= 0 \\
 \mathbf{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_5) &= 4i \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}
 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

A.3.2 Dirac–Algebra in komplexer Dimension ω

Die folgenden Gleichungen sind die Verallgemeinerungen der Dirac–Algebra:

$$\begin{aligned}
 g_{\mu\nu} p^\nu &= p_\mu \\
 p^\mu p_\mu &= p^2 \\
 \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} &= 2g_{\mu\nu} \\
 \gamma_\mu \gamma^\mu &= \omega \\
 g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} &= 4\omega \\
 \sigma_{\mu\nu} &= \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned}
 \dots \\
 \gamma_\mu \not{p} \gamma^\mu &= (2 - \omega) \not{p} \\
 \text{Spuren}^\dagger:
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Tr}(a) &= f(\omega) a \\
 \mathbf{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) &= f(\omega) g_{\mu\nu} \\
 \mathbf{Tr}(\sigma_{\mu\nu}) &= 0
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

$$\mathbf{Tr}(\not{\phi}_1 \not{\phi}_2 \dots \not{\phi}_{2n+1}) = 0$$

Vereinbarung γ_5 :

$$\begin{aligned}
 \{\gamma_5, \gamma_\mu\} &= 0 \\
 \gamma_5 \gamma_5 &= 1 \\
 (1 - \gamma_5)(1 - \gamma_5) &= 2(1 - \gamma_5) \\
 (1 - \gamma_5)(1 + \gamma_5) &= 0 \\
 \mathbf{Tr}(\gamma_5) &= 0
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

...

In der bei uns betrachteten Theorie ist diese Wahl für γ_5 immer möglich, da diese Theorie Anomalie frei ist.

A.3.3 Darstellung der Dirac–Algebra

Es folgen verschiedene benötigte Darstellung der Dirac–Algebra im Minkowski–Raum.

Dabei gelten folgende allgemeine Vereinbarungen:

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pauli–Matrizen

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.11}$$

[†]Wir benötigen keine explizite Kenntnis der Funktion $f(\omega)$, da wir nur am Grenzfall $\omega \rightarrow 4$ interessiert sind. Dies liegt darin begründet, daß die Ward–Identitäten nur Diagramme mit gleicher Anzahl von Spuren vergleichen (Siehe auch den Artikel von G. 't Hooft und M. Veltman [tHV72] auf Seite 205)

- Dirac-Darstellung

$$\gamma^0 = \gamma_0 = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1} & 0 \\ \hline 0 & -\mathbf{1} \end{array} \right) \quad (\text{A.12})$$

$$\gamma^j = -\gamma_j = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \tau^j \\ \hline -\tau^j & 0 \end{array} \right) \quad (\text{A.13})$$

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{1} & 0 \end{array} \right) \quad (\text{A.14})$$

- Weyl-Darstellung

$$\gamma^5 = \gamma_5 = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1} & 0 \\ \hline 0 & -\mathbf{1} \end{array} \right) \quad (\text{A.15})$$

$$\gamma^j = -\gamma_j = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \tau^j \\ \hline -\tau^j & 0 \end{array} \right) \quad (\text{A.16})$$

$$\gamma_0 = i\gamma^5\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{1} & 0 \end{array} \right) \quad (\text{A.17})$$

In der Weyl-Darstellung tauschen also im Vergleich zur Dirac-Darstellung γ_5 und γ_0 die Rollen.

A.4 Dirac-Gleichung

Die folgenden Beziehungen erfüllen die Lösungen der Dirac-Gleichung*:

$$(\not{p} - m)u_s(p) = 0 \quad (\text{A.18})$$

$$(\not{p} + m)v_s(p) = 0$$

$$\bar{u}_s(p) = u_s^\dagger(p) \gamma_0 \quad (\text{A.19})$$

Normalisierung:

$$\sum_{s=\pm 1/2} u_s(p)\bar{u}_s(p) = \frac{\not{p} + m}{2m} \quad (\text{A.20})$$

$$\sum_{s=\pm 1/2} v_s(p)\bar{v}_s(p) = \frac{\not{p} - m}{2m}$$

$$\bar{u}_s(p)u_r(p) = \delta_{sr} \quad (\text{A.21})$$

$$\bar{v}_s(p)v_r(p) = -\delta_{sr}$$

* s, r sind Spin-Indizes

Gordon-Zerlegung: $q := p' - p$

$$\begin{aligned}
2m \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) &= \bar{u}(p') \left((p + p')^\mu + i\sigma^{\mu\nu} q_\nu \right) u(p) \\
2m \bar{u}(p') \gamma^\mu \gamma_5 u(p) &= \bar{u}(p') \left(q^\mu + i\sigma^{\mu\nu} (p + p')_\nu \right) \gamma_5 u(p)
\end{aligned} \tag{A.22}$$

Beweis von Gl. (A.22)

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p') i\sigma_{\mu\nu} q^\nu u(p) &= -\frac{1}{2} \bar{u}(p') \left(\gamma_\mu (\not{p}' - \not{p}) - (\not{p}' - \not{p}) \gamma_\mu \right) u(p) \\
&= -\frac{1}{2} \bar{u}(p') \left(-2\not{p}' \gamma_\mu + 2p'_\mu - 2\gamma_\mu \not{p} + 2p_\mu \right) u(p) \tag{A.23} \\
&= \bar{u}(p') \left(2m\gamma_\mu - (p' + p)_\mu \right) u(p) \tag{A.24}
\end{aligned}$$

Im Beweis wurden die Beziehungen der Dirac Algebra aus den Gleichungen (A.5) bzw. (A.7) benutzt. Der Beweis für den Anteil $\sim \gamma_5$ ist entsprechend durchzuführen*.

A.4.1 Hilfsmittel zur Berechnung von Amplituden

Die folgenden Formeln sind aus [Cha90] Seite 101 ff. übernommen:

Feynman ParameterDarstellung:

$$\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} = (n-1)! \int_0^1 d\alpha_1 \dots \int_0^1 d\alpha_n \frac{\delta(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n - 1)}{(A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 + \dots + A_n \alpha_n)^n} \tag{A.25}$$

Wick Rotation:

Um Integrale zu berechnen, muß man die Integrale von dem Minkowski-Raum in den Euklidischen Raum überführen. Dabei zählen wir die Komponenten im Euklidischen von 1 - 4 durch[†]. Dies ist möglich, da alle Propagatoren keine Pole auf der reellen Achse besitzen[‡]. Wir können also in der komplexen q_0 -Ebene folgende Transformationen durchführen:

$$\begin{aligned}
q_0 &\longrightarrow i q_4 \\
q^2 &\longrightarrow -(q^2)_{Euclidian} \\
d^4 q &\longrightarrow i (d^4 q)_{Euclidian}
\end{aligned} \tag{A.26}$$

Man integriert im Euklidischen einfach über den \mathfrak{R}_4 .

*Man muß nur beachten, daß γ_5 mit allen anderen γ -Matrizen antikommutiert.

[†]1-3 sind die Raum-Komponenten

[‡]Dies ist der Fall, wegen der Addition des $+i\varepsilon$ im Nenner bei allen Propagatoren

A.5 Feynman-Regeln

Im folgenden sind die in der Arbeit benötigten Feynman-Regeln aufgelistet. Die Aufstellung ist nicht vollständig*. Die Regeln sind hier in allgemeiner R_ξ -Eichung angegeben, da in der Arbeit sowohl die unitäre ($\xi \rightarrow \infty$) als auch die Feynman 't Hooft Eichung ($\xi \rightarrow 1$) verwendet wird.

Freie Teilchen

	einlaufendes Fermion	$u(p)$
	auslaufendes Antifermion	$v(p)$

	auslaufendes Fermion	$\bar{u}(p)$
	einlaufendes Antifermion	$\bar{v}(p)$

Propagatoren

Physikalische Bosonen

	W^\pm	W-Boson	$\mathbf{D}_{\alpha\beta}^W = -i \frac{g_{\alpha\beta} - (1-\xi^{-1}) \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2 - M_W^2/\xi}}{k^2 - M_W^2 + i\varepsilon}$
--	---------	---------	--

Unphysikalische Bosonen

	S^\pm	S-Boson	$\mathbf{D}_{\alpha\beta}^S = \frac{i}{k^2 - M_W^2/\xi}$
--	---------	---------	--

Fermionen

	$e^-, \mu^-, \nu_e, \nu_\mu, \dots$	Leptonen	$\mathbf{D} = \frac{i}{\not{p} - m_l + i\varepsilon}$
--	-------------------------------------	----------	---

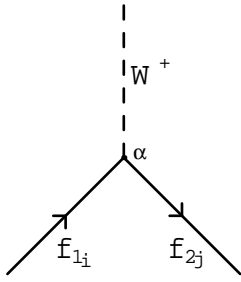
	$e^+, \mu^+, \bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \dots$	Quarks	
--	---	--------	--

	u, d, \dots		$\mathbf{D} = \frac{i}{\not{p} - m_q + i\varepsilon}$
--	---------------	--	---

	\bar{u}, \bar{d}, \dots		
--	---------------------------	--	--

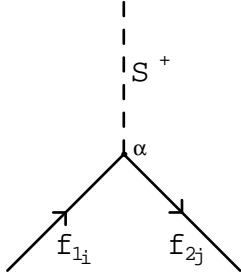
*Für eine komplette Aufstellung siehe das Buch von T. Cheng und L. Li [CL84]

Vertices



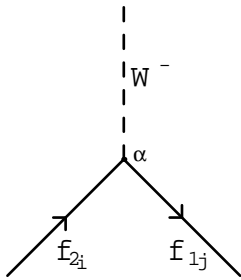
$$W^+ f_{1i} f_{2j}^-$$

$$\frac{ig}{2\sqrt{2}} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) U_{ij}^\dagger$$



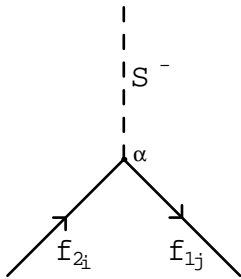
$$S^+ f_{1i} f_{2j}^-$$

$$\begin{aligned} & -\frac{ig}{2\sqrt{2}} \left(\frac{m_j}{M_W} (1 - \gamma_5) - \frac{m_i}{M_W} (1 + \gamma_5) \right) U_{ij}^\dagger \\ & = -\frac{ig}{2\sqrt{2}M_W} \left((m_j - m_i) - (m_j + m_i)\gamma_5 \right) U_{ij}^\dagger \end{aligned}$$



$$W^- f_{2i} f_{1j}^-$$

$$\frac{ig}{2\sqrt{2}} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) U_{ij}^\dagger$$



$$S^- f_{2i} f_{1j}^-$$

$$\begin{aligned} & -\frac{ig}{2\sqrt{2}} \left(\frac{m_j}{M_W} (1 - \gamma_5) - \frac{m_i}{M_W} (1 + \gamma_5) \right) U_{ij}^\dagger \\ & = -\frac{ig}{2\sqrt{2}M_W} \left((m_j - m_i) - (m_j + m_i)\gamma_5 \right) U_{ij}^\dagger \end{aligned}$$

Dabei sind die $f_{1i} f_{2j}$ symbolische Schreibweisen für Fermionen. Die Bedeutung ist:

Leptonen $f_1 \in \{\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau\}$ $f_2 \in \{e, \mu, \tau\}$

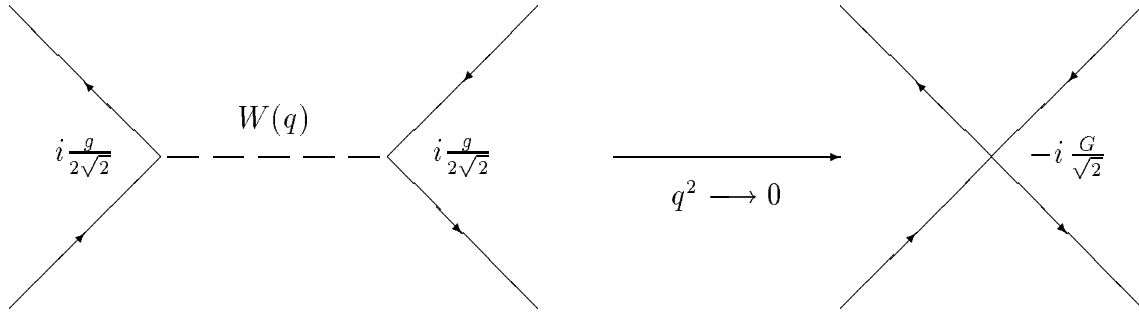
Quarks $f_1 \in \{u, c, t\}$ $f_2 \in \{d, s, b\}$.

$\{i, j \in \{1, 2, 3\}$ zählen die Generationen}

Die Matrix U_{ij} ist die Mischungsmatrix der Fermionen bzw. Quarks.

Fermi–Vierpunkt Wechselwirkung

Wir zeigen in diesem Abschnitt, daß die Fermi–Kopplungskonstante G mit der Kopplungskonstante des Standardmodells g zusammen hängt. Im Gegensatz zu den vorher aufgeführten Feynman–Regeln, leiten wir in diesem Abschnitt nur eine Näherung her. Dabei betrachten wir uns die Feynman–Regeln der elektroschwachen Wechselwirkung im Grenzfall $q^2 \ll M_W^2$. In diesem Fall kann man den Graphen für eine Fermion–Fermion Wechselwirkung wie folgt ersetzen*:



Wie man sieht, ersetzen wir den Effekt des intermediären Wechselwirkungsboson durch die effektive Kopplung G an einem „Vier-Punkt Vertex“. Um den Zusammenhang zwischen G und g zu finden, müssen wir uns den Propagator des W -Bosons genauer betrachten. Man findet in dem uns interessierenden Grenzfall:

$$\mathbf{D}_{\alpha\beta}^W = -i \frac{g_{\alpha\beta} - (1 - \xi^{-1}) \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2 - M_W^2 / \xi}}{k^2 - M_W^2 + i\varepsilon} \quad (\text{A.27})$$

$$= -i \frac{g_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{M_W^2}}{k^2 - M_W^2 + i\varepsilon} - i \frac{k_\alpha k_\beta}{M_W^2} \frac{1}{k^2 - \frac{M_W^2}{\xi}} \xrightarrow{\frac{k^2}{M_W^2} \rightarrow 0} i \frac{g_{\alpha\beta}}{M_W^2} \quad (\text{A.28})$$

Also sind die Kopplungen wie folgt verknüpft:

$$-i \frac{G}{\sqrt{2}} = i \frac{g}{2\sqrt{2}} \cdot i \frac{g}{2\sqrt{2}} \frac{i}{M_W^2} = -i \frac{g^2}{8M_W^2} \quad (\text{A.29})$$

$$G = \frac{g^2}{4\sqrt{2} M_W^2} \quad (\text{A.30})$$

In dem Kapitel über den Neutronenzerfall (2.2) werden wir in dieser Näherung rechnen. Wenn man diese Formel numerisch auswertet, findet man für die Kopplung g^2 :

$$g^2 = 0.424 \quad (\text{A.31})$$

*Die imaginäre Grösse i in der Kopplung führen wir ein um die Normierung der Vier–Punkt Wechselwirkung mit der „modernen“ Normierung in Übereinstimmung zu bringen.

Anhang B

Nebenrechnungen und Ergänzungen

B.1 Nebenrechnungen zum Zerfall des Neutrons

B.1.1 Drei-Körper Zerfall

In diesem Kapitel wollen wir den Drei Körper-Zerfall am Beispiel des Zerfalls des Neutrons untersuchen. Alle Bezeichnungen entsprechen den Bezeichnungen aus Kapitel 2.2.

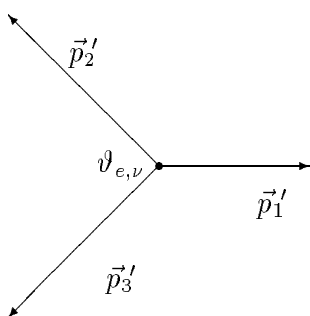


Abbildung B.1: Die Impulszuordnung für den Drei-Körper Zerfall im Schwerpunktsystem.

Den Teilchen ordnen wir also wie folgt Vierer-Impulse zu:

$$\text{Neutron } p = \begin{pmatrix} m_n \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \text{Proton } p'_1 = \begin{pmatrix} E_p \\ \vec{p}'_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Elektron } p'_2 = \begin{pmatrix} E_e \\ \vec{p}'_2 \end{pmatrix} ; \quad \text{Neutrino } p'_3 = \begin{pmatrix} E_\nu \\ \vec{p}'_3 \end{pmatrix}$$

$E_0 = m_n - m_p$ ist die Energie, die bei dem Zerfall frei wird. Alle Impulse sollen auf der Massenschale liegen*. Es gilt der Erhaltungssatz für die Vierer-Impulse†:

$$p = p'_1 + p'_2 + p'_3 \quad (\text{B.1})$$

$$E_n = m_n = E_e + E_p + E_\nu \quad (\text{B.2})$$

$$\vec{p} = 0 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 + \vec{p}'_3 \quad (\text{B.3})$$

* Also gilt: $p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2$ für die Vierer-Impulse

† bzw. in Komponenten ausgeschrieben

Wenn wir jetzt die Näherung benützen, daß $E_p \simeq m_p$ ist[†], finden wir folgende Ergebnisse für die Minkowskiprodukte der Impulse ausgedrückt durch den Winkel $\vartheta_{e,\nu}$ und die Elektronenenergie E_e :

$$pp'_2 = m_n E_e \quad (\text{B.4})$$

$$pp'_3 = m_n E_\nu \stackrel{(\text{B.2})}{=} (E_0 - E_e) m_n \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned} p'_2 p'_3 &= E_e E_\nu - \vec{p}'_2 \cdot \vec{p}'_3 = E_e E_\nu - \|\vec{p}'_2\| \|\vec{p}'_3\| \cos \vartheta_{e,\nu} \\ &= E_e E_\nu - \sqrt{E_e^2 - m_e^2} \sqrt{E_\nu^2 - m_\nu^2} \cos \vartheta_{e,\nu} \\ &\stackrel{(\text{B.2})}{=} E_e (E_0 - E_e) - \sqrt{E_e^2 - m_e^2} \sqrt{(E_0 - E_e)^2 - m_\nu^2} \cos \vartheta_{e,\nu} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} p'_1 p'_2 &= E_p E_e - \vec{p}'_1 \cdot \vec{p}'_2 \stackrel{(\text{B.1})}{=} m_p E_e + \|\vec{p}'_2\|^2 + \vec{p}'_2 \cdot \vec{p}'_3 \\ &= m_p E_e - e + E_e^2 - m_e^2 + \sqrt{E_e^2 - m_e^2} \sqrt{(E_0 - E_e)^2 - m_\nu^2} \cos \vartheta_{e,\nu} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{aligned} p'_1 p'_3 &= E_p E_\nu - \vec{p}'_1 \cdot \vec{p}'_3 \stackrel{(\text{B.1})}{=} m_p E_\nu + \|\vec{p}'_3\|^2 + \vec{p}'_3 \cdot \vec{p}'_2 \\ &= m_p (E_0 - E_e) + (E_0 - E_e)^2 - m_\nu^2 + \sqrt{E_e^2 - m_e^2} \sqrt{(E_0 - E_e)^2 - m_\nu^2} \cos \vartheta_{e,\nu} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

In dem Kapitel 2.2 benötigten wir für die Integrationen folgende Nebenrechnungen*:

Maximale Elektronenenergie:

Zur Berechnung der maximalen Elektronenenergie E_{max} führt man eine effektive Masse $m_{p,\nu}^2 = (p_p + p_\nu)^2$ ein[†]. Diese effektive Masse ist jetzt natürlich keine Konstante mehr. Bei der Rechnung geht man jetzt aber trotzdem wie bei der Rechnung eines Zwei-Körperzerfalls vor. Man findet dann für die Elektronenenergie in Abhängigkeit von der effektiven Masse:

$$E(m_{p,\nu}) = \frac{m_n^2 + m_e^2 - m_{p,\nu}^2}{2m_n} \quad (\text{B.9})$$

Da wir am Maximum der Elektronenenergie interessiert sind, müssen wir das Minimum von $m_{p,\nu}^2$ finden. Dieser minimale Wert wird offensichtlich bei $p_p = m_p$ und $p_\nu = m_\nu$ angenommen. Also finden wir für die maximale Elektronenenergie:

$$E_{max} = \frac{m_n^2 + m_e^2 - (m_\nu + m_p)^2}{2m_n} \quad (\text{B.10})$$

Die minimale Elektronenenergie E_{min} ist offensichtlich durch die Ruhemasse m_e gegeben.

[†]Der Fehler, der gemacht wird, ist in der Größenordnung von $m_p \cdot 10^{-6}$. Wir berücksichtigen aber trotzdem den Impulsbeitrag ($\vec{p}'_1 \neq 0$).

*Die Vereinbarungen entsprechen [Cha90]

[†]Natürlich kann man auch andere Kombinationen wählen. Für unsere Rechnung ist dies aber die sinnvollste Wahl.

Die folgende Aufstellung zeigt, daß die Variation der maximalen Elektronenenergie mit der Neutrinomasse ein sehr kleiner Effekt ist. Man hat nur eine Variation von ca. 0.1 % bei der Variation der Neutrinomasse zwischen 10 keV und 0.

m_ν [eV]	10^3	10^2	10	1	0.1	0
E_{max} [Mev]	1.2923	1.2932	1.2932	1.2933	1.2933	1.2933

Aus diesen Werten wird auch klar, daß eine direkte Bestimmung der Neutrinomasse aus dem Maximum der Elektronenenergie sehr schwierig ist.

Phasenraum Faktor:

Mit den Beziehungen für Oberflächenelemente:

$$\begin{aligned} d\Omega_e d\Omega_\nu &= 4\pi d\Omega_{e,\nu} \\ &= 8\pi^2 d\cos\vartheta_{e,\nu} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

und Vierer-Impulse:

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{E^2 - m^2} \\ \hookrightarrow \|\vec{p}\| dp &= E dE \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

finden wir für den Phasenraum Faktor für Fermionen:

$$d\Phi_3 = (2\pi)^4 \delta^4(p - p'_1 - p'_2 - p'_3) \frac{m_p d^3 p'_1}{(2\pi)^3 E_p} \frac{m_e d^3 p'_2}{(2\pi)^3 E_e} \frac{m_\nu d^3 p'_3}{(2\pi)^3 E_\nu} \quad (\text{B.13})$$

Und nach Ausintegrieren von $d^3 p'_1$:

$$d\Phi_3 = \frac{1}{(2\pi)^5} m_p m_e m_\nu \delta(E_n - E_p - E_e - E_\nu) \frac{\|\vec{p}'_2\|^2 dp'_2 \|\vec{p}'_3\|^2 dp'_3}{E_e E_\nu E_p} d\Omega_e d\Omega_\nu \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{(\text{B.11}), (\text{B.12})}{=} m_p m_e m_\nu \delta(E_0 - E_e - E_\nu) \frac{\sqrt{E_e^2 - m_e^2} dE_e \sqrt{E_\nu^2 - m_\nu^2} dE_\nu}{4\pi^3 E_p} d\cos\vartheta_{e,\nu} \\ &= \frac{1}{4\pi^3} \sqrt{E_e^2 - m_e^2} \sqrt{(E_0 - E_e)^2 - m_\nu^2} \frac{m_p m_e m_\nu}{E_p} dE_e d\cos\vartheta_{e,\nu} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Differentielle Zerfallsrate:

$$d\Gamma = \frac{m_n}{E_n} |\overline{\mathcal{M}}|^2 d\Phi_3 \quad (\text{B.16})$$

$$= \frac{1}{4\pi^3} m_e m_\nu |\overline{\mathcal{M}}|^2 \sqrt{E_e^2 - m_e^2} \sqrt{(E_0 - E_e)^2 - m_\nu^2} dE_e d\cos\vartheta_{e,\nu} \quad (\text{B.17})$$

Bei der Herleitung der letzten Gleichung haben wir benutzt, daß $E_n = m_n$ und $E_p \simeq m_p$ beim Neutronenzerfall ist.

B.1.2 Gleichungen

In diesem Abschnitt fassen wir alle Nebenrechnungen aus dem Kapitel 2.2 zusammen. Die Nebenrechnungen werden wegen der besseren Lesbarkeit der Arbeit im Anhang aufgeföhrt. Bei den Nebenrechnungen handelt es sich meistens um einfache Umformungen.

Nebenrechnung zur Berechnung des hadronischen Matrixelementes (2.8):

$$H_{\alpha\lambda} = \mathbf{Tr}\left((\not{p} + m_n) \gamma_\lambda \left(1 - \frac{g_A}{g_V} \gamma_5\right) (\not{p}'_1 + m_p) \gamma_\alpha \left(1 - \frac{g_A}{g_V} \gamma_5\right)\right) \quad (\text{B.18})$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{Tr}\left(\gamma_\lambda \not{p}'_1 \left(1 + \frac{g_A}{g_V} \gamma_5\right) \left(1 + \frac{g_A}{g_V} \gamma_5\right) \gamma_\alpha (\not{p} + m_n)\right) \\ &+ m_p \mathbf{Tr}\left(\gamma_\lambda \left(1 - \frac{g_A}{g_V} \gamma_5\right) \left(1 + \frac{g_A}{g_V} \gamma_5\right) \gamma_\alpha (\not{p} + m_n)\right) \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{Tr}\left(\gamma_\lambda \not{p}'_1 \left(1 + 2\frac{g_A}{g_V} \gamma_5 + \left(\frac{g_A}{g_V}\right)^2\right) \gamma_\alpha (\not{p} + m_n)\right) \\ &+ m_p \mathbf{Tr}\left(\gamma_\lambda \left(1 - \left(\frac{g_A}{g_V}\right)^2\right) \gamma_\alpha (\not{p} + m_n)\right) \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

$$\begin{aligned} &= \left(1 + \left(\frac{g_A}{g_V}\right)^2\right) \mathbf{Tr}\left(\gamma_\lambda \not{p}'_1 \gamma_\alpha (\not{p} + m_n)\right) \\ &+ 2\frac{g_A}{g_V} \mathbf{Tr}\left(\gamma_\lambda \not{p}'_1 \gamma_5 \gamma_\alpha (\not{p} + m_n)\right) \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

$$\begin{aligned} &+ \left(1 - \left(\frac{g_A}{g_V}\right)^2\right) m_p \mathbf{Tr}\left(\gamma_\lambda \gamma_\alpha (\not{p} + m_n)\right) \\ &= 4\left\{\left(1 + \left(\frac{g_A}{g_V}\right)^2\right)(p_\alpha p'_{1\lambda} + p_\lambda p'_{1\alpha} - g_{\lambda\alpha} p p'_1) + \left(1 - \left(\frac{g_A}{g_V}\right)^2\right) m_p m_n g_{\lambda\alpha}\right\} \\ &+ 8\frac{g_A}{g_V} i \varepsilon_{\alpha\nu\lambda\beta} p^\nu p'_1{}^\beta \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Nebenrechnung zur Berechnung des leptonischen Matrixelementes (2.11):

$$- L^{\alpha\lambda} = \mathbf{Tr}\left(\gamma^\alpha (1 - \gamma_5) (\not{p}'_3 - m_\nu) \gamma^\lambda (1 - \gamma_5) (\not{p}'_2 + m_e)\right) \quad (\text{B.23})$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{Tr}\left(\gamma^\alpha \not{p}'_3 (1 + \gamma_5) (1 + \gamma_5) \gamma^\lambda (\not{p}'_2 + m_e)\right) \\ &- m_\nu \mathbf{Tr}\left(\gamma_\alpha \underbrace{(1 - \gamma_5)(1 + \gamma_5)}_0 \gamma^\lambda (\not{p}'_2 + m_e)\right) \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

$$= 2 \mathbf{Tr}\left(\gamma^\alpha \not{p}'_3 (1 + \gamma_5) \gamma^\lambda (\not{p}'_2 + m_e)\right) \quad (\text{B.25})$$

$$= 8(p_2{}^\lambda p_3{}^\alpha + p_3{}^\lambda p_2{}^\alpha - g^{\lambda\alpha} p_2 p_3) + 8i \varepsilon^{\lambda\varphi\alpha\xi} p_2{}^\varphi p_3{}^\xi \quad (\text{B.26})$$

Nebenrechnung zur Berechnung der invarianten Amplitude aus Gleichung (2.23)(Für Zuordnung der Impulse siehe Seite 69):

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{2} G^2 V_{11}^2 \left\{ \left(1 - \frac{g_A}{g_V}\right)^2 \underbrace{(pp'_2)}_{(B.4)} \underbrace{(p'_1 p'_3)}_{(B.8)} + \left(1 + \frac{g_A}{g_V}\right)^2 \underbrace{(pp'_3)}_{(B.5)} \underbrace{(p'_1 p'_2)}_{(B.7)} \right. \\ \left. - \left(1 - \left(\frac{g_A}{g_V}\right)^2\right) m_p m_n \underbrace{p'_2 p'_3}_{(B.6)} \right\} \quad (B.27)$$

$$= \frac{1}{2} G^2 V_{11}^2 \left[\left\{1 - \frac{g_A}{g_V}\right\}^2 m_n E_e \left(m_p (E_0 - E_e) + (E_0 - E_e)^2 - m_\nu^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{E_e^2 - m_e^2} \sqrt{(E_0 - E_e)^2 - m_\nu^2} \cos\vartheta_{e,\nu} \right) \right] \quad (B.28)$$

$$+ \left\{1 + \frac{g_A}{g_V}\right\}^2 m_n (E_0 - E_e) \left(m_p E_e + E_e^2 - m_e^2 \right. \\ \left. + \sqrt{E_e^2 - m_e^2} \sqrt{(E_0 - E_e)^2 - m_\nu^2} \cos\vartheta_{e,\nu} \right) \quad (B.29)$$

$$- \left\{1 - \left(\frac{g_A}{g_V}\right)^2\right\} m_p m_n \left(E_e (E_0 - E_e) \right. \\ \left. - \sqrt{E_e^2 - m_e^2} \sqrt{(E_0 - E_e)^2 - m_\nu^2} \cos\vartheta_{e,\nu} \right) \quad (B.30)$$

Zur Vereinfachung benützen wir folgende Beziehungen:

$$\left\{1 - \frac{g_A}{g_V}\right\}^2 + \left\{1 + \frac{g_A}{g_V}\right\}^2 - \left\{1 - \left(\frac{g_A}{g_V}\right)^2\right\} = \left\{1 + 3 \left(\frac{g_A}{g_V}\right)^2\right\} \quad (B.31)$$

$$\left\{1 - \frac{g_A}{g_V}\right\}^2 (E_0 - E_e) + \left\{1 + \frac{g_A}{g_V}\right\}^2 E_e = \left\{1 - \frac{g_A}{g_V}\right\}^2 E_0 + 4 \frac{g_A}{g_V} E_e \quad (B.32)$$

Also finden wir für die invariante Amplitude:

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{2} G^2 V_{11}^2 \left[\left\{1 + 3 \left(\frac{g_A}{g_V}\right)^2\right\} m_p m_n (E_0 - E_e) E_e \right. \\ \left. + \left\{1 - \frac{g_A}{g_V}\right\}^2 m_n E_0 (E_0 - E_e) E_e + 4 \frac{g_A}{g_V} m_n (E_0 - E_e) E_e^2 \right. \\ \left. - \left\{1 - \frac{g_A}{g_V}\right\}^2 m_\nu^2 m_n E_e - \left\{1 + \frac{g_A}{g_V}\right\}^2 m_e^2 m_n E_e \right. \\ \left. + \left\{ \text{Terme} \sim \cos\vartheta_{e,\nu} \right\} \right] \quad (B.33)$$

Die Terme $\sim \cos\vartheta_{e,\nu}$ schreiben wir nicht explizit aus, da wir nur an der über $\int_{-1}^1 d\cos\vartheta_{e,\nu}$ integrierten Amplitude interessiert sind. Außerdem führen diese Terme wegen den Wurzeln zu sehr langen und unübersichtlichen Ausdrücken.

B.2 Nebenrechnungen zu den Neutrinooszillationen

B.2.1 Vakuumoszillationen

Wir betrachten Vakuumoszillationen in unserem „Zwei-Flavor“ Modell aus Kapitel 2.1. Für eine allgemeinere Rechnung mit mehreren Neutrino-Flavors siehe das Buch von B. Kayser [KGDP89].

Ein Neutrino, daß bei einem Prozeß der schwachen Wechselwirkung entsteht, ist eine Überlagerung von zwei Masseneigenzuständen. Im folgenden wählen wir unser Koordinatensystem so, daß wir das Neutrino durch eine Zeit- und eine Raumkomponente beschreiben können. Außerdem betrachten wir im folgenden nur den Fall des Elektronneutrinos. Es gilt also für ein Neutrino, daß bei einem Prozeß der schwachen Wechselwirkung am Ort $x=0$ zur Zeit $t=0$ entsteht*:

$$|\nu_e\rangle = \sin\vartheta |\nu_1\rangle + \cos\vartheta |\nu_2\rangle \quad (\text{B.34})$$

Dieser Zustand besitzt für Zeiten t und Orte x folgendes Verhalten:

$$|\nu_e(t, x)\rangle = \sin\vartheta e^{ip_\nu x} e^{-iE_1 t} |\nu_1\rangle + \cos\vartheta e^{ip_\nu x} e^{-iE_2 t} |\nu_2\rangle \quad (\text{B.35})$$

Um diese Formel zu vereinfachen machen wir die Näherung, daß die Masse sehr viel kleiner wie der Impuls der Neutrinos ist[†]. Unter dieser Annahme findet man:

$$E_i \simeq p_\nu + \frac{m_i^2}{2p_i} \quad i \in \{1, 2\} \quad (\text{B.36})$$

Außerdem kann man in dieser Näherung die Zeit t durch den Ort x ersetzen, da sich das Neutrino mit annähernder Lichtgeschwindigkeit bewegt. Wenn man jetzt die Masseneigenzustände wieder durch die Flavoreigenzustände ausdrückt findet man für Gleichung (B.35):

$$|\nu_e(x, x)\rangle = \sin\vartheta e^{-i\frac{m_1^2}{2p_\nu} x} |\nu_1\rangle + \cos\vartheta e^{-i\frac{m_2^2}{2p_\nu} x} |\nu_2\rangle \quad (\text{B.37})$$

$$|\nu_e(x, x)\rangle = \sin\vartheta \cos\vartheta \left(e^{-i\frac{m_1^2}{2p_\nu} x} + e^{-i\frac{m_2^2}{2p_\nu} x} \right) |\nu_e\rangle \quad (\text{B.38})$$

$$+ \left(\cos^2\vartheta e^{-i\frac{m_2^2}{2p_\nu} x} - \sin^2\vartheta e^{-i\frac{m_1^2}{2p_\nu} x} \right) |\nu_\mu\rangle \quad (\text{B.39})$$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten \mathcal{P} sind jetzt wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e, x) &= |\langle \nu_e | \nu_e(x, x) \rangle|^2 \\ \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu, x) &= |\langle \nu_\mu | \nu_e(x, x) \rangle|^2 \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

*Die Abhängigkeit von Raum und Zeit der Zustände wird im folgenden immer explizit angegeben.

[†]Diese Voraussetzung ist bei den uns interessierenden Neutrinomassen immer erfüllt. Diese Annahme wäre aber sicherlich falsch für ein (hypothetisches) 17 keV-Neutrino, das aus dem Tritium-Zerfall ($Q=18.6$ keV) stammt. Ein solches Neutrino ist aber bis jetzt noch nicht mit Sicherheit gefunden worden.

Wenn man jetzt berücksichtigt, daß:

$$2 \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta = \frac{1}{2} \sin^2(2\vartheta) \quad (\text{B.41})$$

$$\cos^4 \vartheta + \sin^4 \vartheta = 1 - \frac{1}{2} \sin^2(2\vartheta) \quad (\text{B.42})$$

$$e^{i\frac{m}{2p_\nu}x} e^{-i\frac{m}{2p_\nu}x} = 2 \cos\left(\frac{m}{2p_\nu}x\right) \quad (\text{B.43})$$

$$1 - \cos\left(\frac{m}{2p_\nu}x\right) = 2 \sin^2\left(\frac{m}{4p_\nu}x\right) \quad (\text{B.44})$$

ist, findet man für die Übergangswahrscheinlichkeiten (B.40):

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e, x) &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2(2\vartheta) \left(1 - \cos\left(\frac{m_1^2 - m_2^2}{2p_\nu}x\right)\right) \\ &= 1 - \sin^2(2\vartheta) \sin^2\left(\frac{m_1^2 - m_2^2}{4p_\nu}x\right) \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu, x) &= \frac{1}{2} \sin^2(2\vartheta) \left(1 - \cos\left(\frac{m_1^2 - m_2^2}{2p_\nu}x\right)\right) \\ &= \sin^2(2\vartheta) \sin^2\left(\frac{m_1^2 - m_2^2}{4p_\nu}x\right) \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

Welche Form der Gleichung (B.45) bzw. (B.46) man bevorzugt, ist unbedeutend. In der Literatur kann man beide Versionen finden. Um die Schreibweise etwas zu verkürzen ist es üblich folgende Größen zu vereinbaren:

$$\Delta m^2 = m_1^2 - m_2^2 \quad (\text{B.47})$$

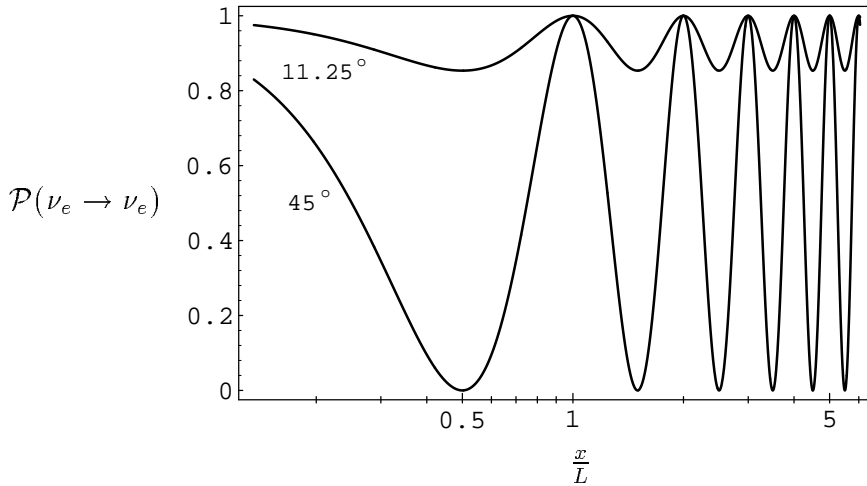
$$L = 2\pi \frac{2p_\nu}{\Delta m^2} \quad (\text{B.48})$$

Die Periode L der Oszillation wird Oszillationslänge genannt. Die Größe Δm^2 wird in der Literatur meistens einfach mit „*Massendifferenz*“ bezeichnet. Es ist zu beachten, daß man sehr sorgfältig zwischen Δm^2 und $\Delta m = m_1 - m_2$ unterscheiden muß*, obwohl beide im Allgemeinen mit dem Wort *Massendifferenz* bezeichnet werden. Man muß auch sorgfältig zwischen Abstand von der Quelle und der Detektorlänge unterscheiden†. Eine Quantenmechanische Analyse mit Hilfe von Wellenpaketen, wird im Artikel von B. Kayser [Kay81] durchgeführt. Eine der wesentlichen Aussagen des Artikels ist, daß das qualitative Verhalten der Oszillationen durch unsere simple Rechnung bereits richtig beschreiben wird.

*Zum Beispiel berechnen wir in Kapitel 2.4 die relative Massendifferenz $\frac{\Delta m}{m}$ für zwei Neutrinos, die auf Grund der schwachen Wechselwirkung entsteht. Aus dieser Grösse kann man keine Aussage über Δm^2 treffen, da die führende Ordnung von $\Delta m^2 \sim \Delta m \cdot m$ ist, und wir die Masse m nicht kennen.

†In der Literatur wird oft der Fall $x \gg L$ diskutiert und behauptet das in diesem Fall sich kein Effekt zeigt(Oszillationen mitteln sich heraus). Da aber der Detektor meist eine sehr viel kleinere Ausdehnung besitzt und nur eine endliche Zeit Meßwerte sammelt, mittelt dieser im Prinzip über eine Periode. Dies kann zu einer Reduzierung des gesamten Flusses führen.

Abbildung B.2: Typische Übergangswahrscheinlichkeiten für die Oszillation $\nu_e \rightarrow \nu_e$ für verschiedene Werte $2\pi \frac{x}{L}$.



Die Abszisse ist logarithmisch-skaliert. In der Grafik sind zwei Kurven für die Variablenwerte $\vartheta = 45^\circ$, also maximale Mischung, und $\vartheta = 11.25^\circ$, als Beispiel für einen kleineren Mischungswinkel, gezeichnet.

Zur Illustration dieses Oszillationsverhalten von Gleichung (B.45) in den drei Bereichen, dient die Grafik B.2.

Es ist nun sehr sinnvoll sich folgende Extremfälle zu betrachten:

(a) $\frac{x}{L} \ll 1$

Man findet in diesem Bereich keinen Effekt der Neutrinooszillation. Die Oszillation hatte noch keine Zeit sich zu entwickeln.

(b) $\frac{x}{L} \simeq 1$

In diesem Bereich findet man den Effekt der Neutrinooszillation am deutlichsten ausgeprägt. Dieser Parameterbereich wird uns in diesem Teil der Arbeit auch im wesentlichen beschäftigen.

(c) $\frac{x}{L} \gg 1$

Das Oszillationsmuster beginnt sich heraus zu mitteln. Es geht die Korrelation zwischen den beiden Masseneigenzuständen verloren. Der gesamte Fluß wird aber evt. reduziert.

Es ist eine sehr brauchbare Abschätzung, daß die Korrelation nach etwa zehn Oszillationen verloren geht.

B.3 Nebenrechnungen zur der Massendifferenz der Neutrinos

B.3.1 Quantenmechanische Störungsrechnung

Betrachten wir die Hamiltonfunktion:

$$H = H_0 + \lambda H_{wk} \quad \lambda \in \{0, 1\} \quad (\text{B.49})$$

In H_0 ist der kinetische Anteil und die Massenterme enthalten. Wir wollen eine Theorie mit zwei Neutrinos betrachten. Die schwache Wechselwirkung wollen wir als eine Störung der Hamiltonfunktion betrachten.

Betrachte $\lambda = 0$:

\hookrightarrow Keine schwache Wechselwirkung

In diesem Fall besitzt die Hamiltonfunktion H folgende Matrixdarstellung:

$$H \rightarrow M = \begin{pmatrix} m_{01} & 0 \\ 0 & m_{02} \end{pmatrix} \quad (\text{B.50})$$

mit Eigenvektoren

$$|\nu_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\nu_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diese Eigenvektoren $|\nu_1\rangle$ & $|\nu_2\rangle$ bilden die „Massenbasis“.

Betrachte $\lambda \neq 0$

\hookrightarrow Schwache Wechselwirkung „eingeschaltet“

Die Hamiltonfunktion H wird jetzt im Allgemeinen in der „Massenbasis“ nicht durch eine Diagonalmatrix dargestellt.

$$H \rightarrow M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{B.51})$$

mit

$$M_{12} = \overline{M}_{21}$$

Im folgenden werden wir nur den Fall M reell betrachten. Die Matrixelemente sind jetzt durch folgende Reihenentwicklungen gegeben.:

$$M_{11} = m_{01} + \langle \nu_1 | H_{wk} | \nu_1 \rangle + \sum_n \frac{|\langle \nu_1 | H_{wk} | n \rangle|^2}{m_{01} - E_n} + \dots \quad (\text{B.52})$$

$$M_{22} = m_{02} + \langle \nu_2 | H_{wk} | \nu_2 \rangle + \sum_n \frac{|\langle \nu_2 | H_{wk} | n \rangle|^2}{m_{02} - E_n} + \dots \quad (\text{B.53})$$

$$M_{21} = \langle \nu_2 | H_{wk} | \nu_1 \rangle + \sum_n \frac{\langle \nu_2 | H_{wk} | n \rangle \langle n | H_{wk} | \nu_1 \rangle}{m_{01} - E_n} + \dots \quad (\text{B.54})$$

...

Als Zwischenzustände koppeln die geladenen Fermionen, also $n \in \{e, \mu\}$. Außerdem fordern wir, daß die direkte Kopplung

$$\begin{aligned} \langle \nu_i | H_{wk} | \nu_j \rangle &= 0 \\ \forall i, j &\in \{1, 2\} \end{aligned}$$

ist. Wir finden jetzt folgende Eigenwerte* der Matrix M aus Gleichung (B.51):

$$m_{\nu_\mu, \nu_e} = \frac{M_{11} + M_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(M_{11} - M_{22})^2}{4} + M_{12}^2} \quad (\text{B.55})$$

mit Eigenvektoren:

$$| \nu_e \rangle \quad | \nu_\mu \rangle \quad (\text{B.56})$$

Die Basis aus diesen Zuständen wird „*Flavorbasis*“ genannt. Man findet als Zusammenhang zwischen Massen- und Flavorbasis†:

$$| \nu_e \rangle = \cos \vartheta | \nu_1 \rangle + \sin \vartheta | \nu_2 \rangle \quad (\text{B.57})$$

$$| \nu_\mu \rangle = -\sin \vartheta | \nu_1 \rangle + \cos \vartheta | \nu_2 \rangle \quad (\text{B.58})$$

Jetzt ist der Winkel ϑ natürlich abhängig von den Matrixelementen M_{ij} . Wir finden, für $\vartheta \neq \frac{\pi}{4}$ ‡, folgenden Zusammenhang :

$$\tan 2\vartheta = \frac{2M_{12}}{M_{11} - M_{22}} \quad (\text{B.59})$$

Also können wir die Massendifferenz Δm wie folgt ausdrücken§:

$$\begin{aligned} \Delta m &= m_{\nu_\mu} - m_{\nu_e} \\ &= 2 \sqrt{\frac{(M_{11} - M_{22})^2}{4} + M_{12}^2} \\ &= 2 \sqrt{\left(\frac{1}{\tan^2(2\vartheta)} + 1\right) M_{12}^2} \\ &= 2 \sqrt{\frac{1}{\sin^2(2\vartheta)} M_{12}^2} \end{aligned} \quad (\text{B.60})$$

Wir haben also gefunden, daß die Massendifferenz Δm durch den Mischungswinkel ϑ und das Matrixelement M_{12} auszudrücken ist.

*Der größere Eigenwert der Matrix wird dem Myon neutrino zugeordnet

†Siehe auch Kapitel über Cabibbo-Theorie 1.4 bzw. Kapitel 2.1

‡ $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ bedeutet, daß $M_{11} = M_{22}$ ist. Dies entspricht dem in dieser Arbeit benutzten Modellsystem. Natürlich schließen wir alle ϑ -Werte aus für die $\tan 2\vartheta = \infty$ wird.

§Die Endformel (B.60) ist auch im Fall gleicher Massen ($\vartheta = 45^\circ$) gültig

B.3.2 Dimensionale Regularisierung unserer Integrale

Zuerst betrachten wir einige Formeln zur Vorbereitung:

- Oberflächenelement in einem Raum der Dimension ω mit Hypersphäre $S_{\omega-1}$:

$$\int_{S_{\omega-1}} d\Omega = \frac{2 \pi^{\frac{\omega}{2}}}{\Gamma(\frac{\omega}{2})} \quad (\text{B.61})$$

- Variablensubstitution in 1-dimensionalen Integral:

$$I = \int_0^\infty dq \frac{q^{\beta+\omega-1}}{(q^2 + m^2)^\alpha} = \frac{1}{(m^2)^\alpha} \int_0^\infty dq \frac{q^{\beta+\omega-1}}{(\frac{q^2}{m^2} + 1)^\alpha} \quad (\text{B.62})$$

$$q \longrightarrow r = \frac{q^2}{m^2} \quad ; \quad \frac{dr}{dq} = 2 \frac{q}{m^2}$$

$$\hookrightarrow I = \frac{1}{2 (m^2)^{\alpha - \frac{\beta+\omega}{2}}} \int_0^\infty dr \frac{r^{\frac{\beta+\omega}{2}-1}}{(r+1)^\alpha} \quad (\text{B.63})$$

- Beta-Funktion [AS65]:

$$\mathcal{B}(x, y) = \int dt \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} \quad (\text{B.64})$$

$$= \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (\text{B.65})$$

Dimensionale Regularisierung eines allgemeinen Integrals (Annahme eines euklidischen Raumes):

$$I(\beta, \alpha) = \int \frac{d^\omega q}{(2\pi)^\omega} \frac{q^\beta}{(q^2 + m^2)^\alpha} \quad (\text{B.66})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^\omega} \int_{S_{\omega-1}} d\Omega \int_0^\infty dq \frac{q^{\beta+\omega-1}}{(q^2 + m^2)^\alpha} \quad (\text{B.67})$$

$$\stackrel{\text{B.61}}{=} \frac{1}{(2\pi)^\omega} \frac{2 \pi^{\frac{\omega}{2}}}{\Gamma(\frac{\omega}{2})} \int_0^\infty dq \frac{q^{\beta+\omega-1}}{(q^2 + m^2)^\alpha} \quad (\text{B.68})$$

$$\stackrel{\text{B.62}}{=} \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\omega}{2}}} \frac{2}{\Gamma(\frac{\omega}{2})} \frac{1}{2 (m^2)^{\alpha - \frac{\beta+\omega}{2}}} \int_0^\infty dq \frac{q^{\frac{\beta+\omega}{2}-1}}{(q+1)^\alpha} \quad (\text{B.69})$$

$$\stackrel{\text{B.64}}{=} \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\omega}{2}} \Gamma(\frac{\omega}{2})} \frac{1}{(m^2)^{\alpha - \frac{\beta+\omega}{2}}} \mathcal{B}\left(\frac{\beta+\omega}{2}, \alpha - \frac{\beta+\omega}{2}\right) \quad (\text{B.70})$$

Wir benötigen für unsere Rechnung nur den Spezialfall $\beta = 0$ & $\alpha = 2$. Für diesen Spezialfall findet man:

$$I(0, 2) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\omega}{2}} \Gamma(\frac{\omega}{2})} \frac{1}{(m^2)^{2-\frac{\omega}{2}}} \mathcal{B}\left(\frac{\omega}{2}, 2 - \frac{\omega}{2}\right) \quad (\text{B.71})$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\omega}{2}}} \frac{1}{(m^2)^{2-\frac{\omega}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\frac{\omega}{2})} \frac{\Gamma(\frac{\omega}{2})\Gamma(2 - \frac{\omega}{2})}{\Gamma(2)} \quad (\text{B.72})$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\omega}{2}}} \frac{1}{(m^2)^{2-\frac{\omega}{2}}} \Gamma\left(2 - \frac{\omega}{2}\right) \quad (\text{B.73})$$

Dieses Integral besitzt jetzt einen Pol im Grenzfall $\omega \rightarrow 4$. Wenn wir das Integral in einer Laurent-Reihe um den Pol bei $\omega = 4$ entwickeln finden wir:

$$I(0, 2) = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{4 - \omega} - \mathbf{C} + \ln(4\pi) - \ln m^2 \right) + \mathcal{O}(4 - \omega) \quad (\text{B.74})$$

B.3.3 Gleichungen

Nebenrechnung zur Berechnung der Spur

Wir untersuchen folgende Spur:

$$\mathcal{A}^2 = \frac{1}{4} \sum_{s_i} \sum_{s_j} \text{Tr} \left(\bar{u}_1(q)(1 + \gamma_5) \not{q} u_2(q) \bar{u}_2(q)(1 + \gamma_5) \not{q} u_1(q) \right) \quad (\text{B.75})$$

Mit Hilfe der Gordon-Zerlegung (A.22) findet man*, daß

$$2m \bar{u}_2(p') \gamma^\mu u_1(p) = \bar{u}_2(p') \left\{ \underbrace{(p + p')^\mu}_{\text{TERM I}} + i \underbrace{\sigma^{\mu\nu} (p - p')_\nu}_{\text{TERM II}} \right\} u_1(p) \quad (\text{B.76})$$

$$2m \bar{u}_2(p') \gamma^\mu \gamma_5 u_1(p) = \bar{u}_2(p') \left\{ \underbrace{(p - p')^\mu \gamma_5}_{\text{TERM III}} + i \underbrace{\sigma^{\mu\nu} (p + p')_\nu \gamma_5}_{\text{TERM IV}} \right\} u_1(p) \quad (\text{B.77})$$

ist. Da in unserem Fall $p' = p = q$ ist, sind die Anteile des TERMS II und TERM III Null. Die restlichen Beiträge führen kontrahiert mit q_μ zu folgenden Werten:

TERM I

$$q_\mu 2 q^\mu = 2 q^2 = 2 m^2 \quad (\text{B.78})$$

TERM IV

$$\underbrace{\sigma^{\mu\nu}}_{\substack{\text{asym} \\ \mu \leftrightarrow \nu}} 2 \underbrace{q_\mu q_\nu}_{\substack{\text{sym} \\ \mu \leftrightarrow \nu}} = 0 \quad (\text{B.79})$$

*Wir betrachten den Fall unterschiedlicher Impulse der äußeren Teilchen. Den Spezialfall der gleichen Impulse kann man ganz einfach ablesen.

Dabei haben wir in Gleichung (B.79) ausgenutzt, daß symmetrische Terme kontrahiert mit antisymmetrischen Termen verschwinden. Wir müssen also nur die Spur des skalaren Anteils \mathcal{A}_S^2 berechnen[†]:

$$\mathcal{A}_S^2 = \frac{1}{4m^2} \sum_{s_i} \sum_{s_j} \mathbf{Tr}(\bar{u}_1(q) 2m^2 u_2(q) \bar{u}_2(q) 2m^2 u_1(q)) \quad (\text{B.80})$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{(\text{A.20})}{=} m^2 \mathbf{Tr}\left(\frac{\not{q} + m}{2m} \frac{\not{q} + m}{2m}\right) \stackrel{(\text{A.9})}{=} f(\omega) \frac{1}{4} (q^2 + m^2) \\ &= \frac{1}{2} f(\omega) m^2 \end{aligned} \quad (\text{B.81})$$

Dabei ist, wie wir bereits auf Seite 63 erwähnt haben, die genaue Kenntniss der Funktion $f(\omega)$ nicht notwendig. Es reicht aus, zu wissen, daß im Grenzfall $\omega \rightarrow 4$ die Funktion den Wert 4 annimmt.

[†]Dabei benützen wir die Formeln der ω -dimensionalen Dirac-Algebra von Seite 63

B.4 Daten

Experiment	: Homestake	Kaminokande	GALLEX	SAGE
Standort	: USA /South Dakota Homestake Goldmine	Japan Kamioka Mine	Italien/Alpen Gran Sasso	Rußland/Kaukasus Baskan Neutrino Observatory
Geographische Breite	: 44.3°N	36.4°N	42.4°N	43.5° N
In Betrieb seit	: 1967	1983	1991	1988
Reaktion	: $^{37}\text{Cl} + \nu_e \rightarrow ^{37}\text{Ar} + e^-$	$\nu_x + e^- \rightarrow \nu_x + e^-$	$^{71}\text{Ga} + \nu_e \rightarrow ^{71}\text{Ge} + e^-$	$^{71}\text{Ga} + \nu_e \rightarrow ^{71}\text{Ge} + e^-$
Schwellenenergie [MeV]	: 0.814	7.5	0.233	0.233
Erwartete Rate*	: $8 \pm 4/\text{Tag}$	0.86/Tag	14 Atome ^{71}Ge in drei Wochen	16 Atome ^{71}Ge in vier Wochen
Technische Daten	: 615 t C_2Cl_4 (Perchloroethylen)	680 t Wasser Nachweisvolumen	30.3 t GaCl_3 in wässriger HCl Lsg.	30 t metallisches ^{71}Ge (60 t seit 1992)
Nachweis	: ^{37}Ar Elektroneneinfang	Cherenkov Strahlung	^{71}Ge Elektroneneinfang	^{71}Ge Elektroneneinfang
Gemessener Fluß in [SNU] †	: 2.32 ± 0.22		$79 \pm 10 \pm 6$	$73^{+18}_{-16} \pm 5_{-7}$
relativ zu BP SSM ‡	: 0.29 ± 0.03	0.51 ± 0.07	0.62 ± 0.10	

Tabelle B.1: Die vier großen Neutrinoexperimente.

Die Daten sind aus verschiedenen Veröffentlichungen zusammengestellt worden. Der gemessene Fluß in SNU stammt für das Homestakeexperiment aus einem Preprint von R. Davis [Dav94b], für GALLEX aus [GA⁺94] und für SAGE aus [A⁺94]. Die Daten des Kaminokande Experiments sind in [Nak93], bzw. die aktuellsten Daten in [Suz93], zu finden. In diesen Quellen findet man auch Hinweise auf den experimentellen Ablauf (bzw. Referenzen dazu).

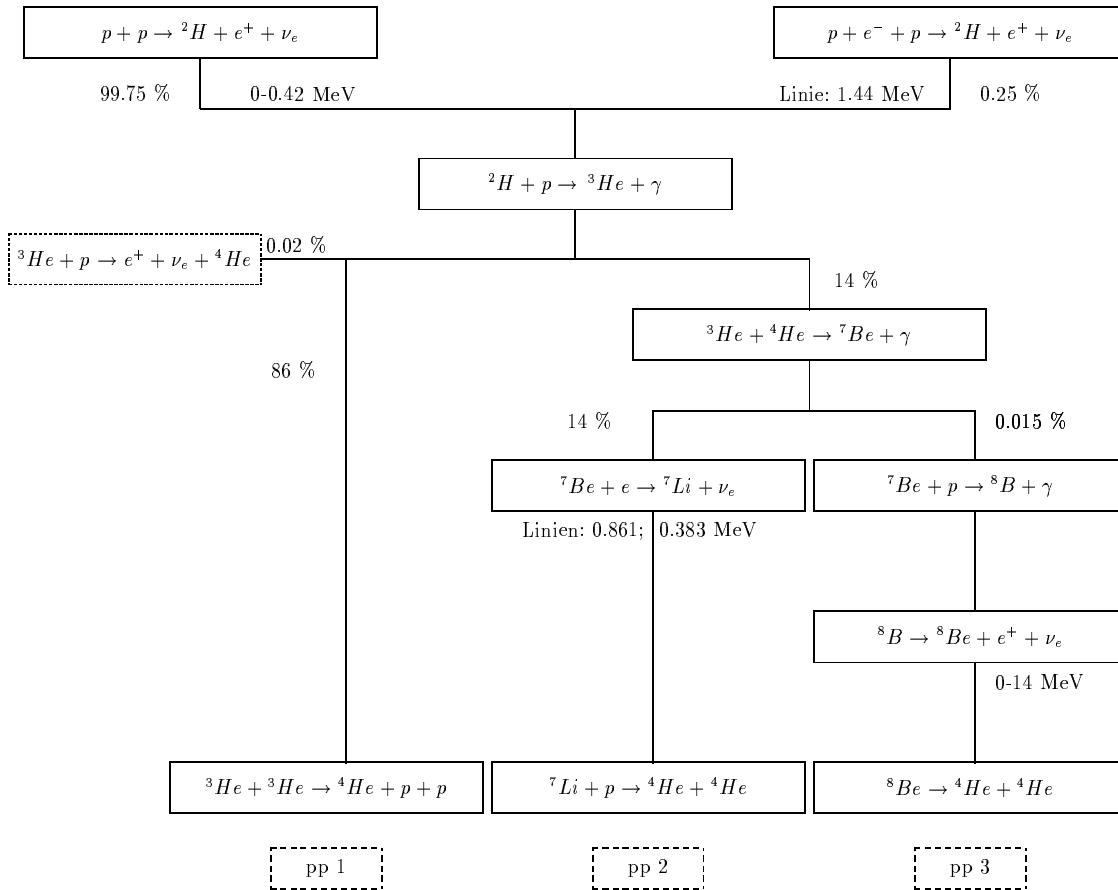
Wie man sieht sind drei der Experimente radiochemische Experimente, daß heißt, daß die Reaktionsprodukte (^{37}Ar bzw. ^{71}Ge) zuerst chemisch extrahiert werden, und dann über ihre Zerfälle nachgewiesen werden. Diese Experimente können nur den integrierten Neutrino-Fluß bestimmen. Im Gegensatz dazu besitzt Kaminokande die Möglichkeit, die Richtung der Neutrinos zu bestimmen, da einzelne Ereignisse gemessen werden.

*Dabei ist die Rate angegeben, die bei der Planung des Experiments geschätzt wurde.

†1 SNU $\hat{=}$ 10^{-36} Einfänge pro ^{37}Cl Atom; diese Einheit wurde, wie man dieser Definition entnehmen kann, für das Homestakeexperiment als praktische Einheit gewählt. Die Daten des Kamiokandeexperiments werden im allgemeinen nur relativ zu einem Standard Solar Modell angegeben. Wenn an einem Ergebnis zwei Fehler angegeben sind, ist die erste Angabe die statistischen Fehler und die zweite Angabe die systematischen Fehler.

‡Als Solarmodell mit dem verglichen wird wählen wir das Modell von Bahcall und Pinesonneault [BP92]. Für den Vergleich werden die Daten von GALLEX und SAGE zusammengefasst betrachtet.

pp-Zyklus



CNO-Zyklus

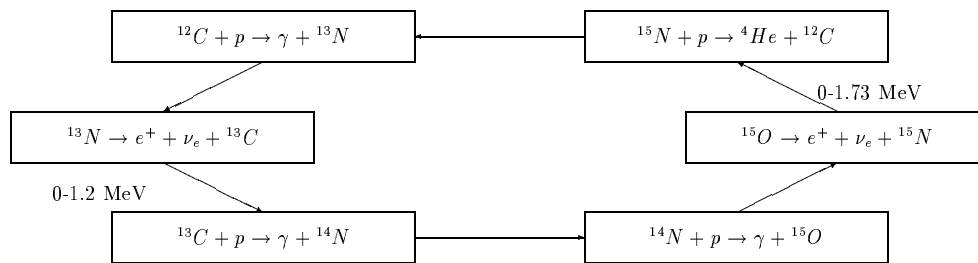


Abbildung B.3: *Hauptsächliche Fusionsprozesse in der Sonne. Die an den Boxen angegebenen Energien, sind die Energien de Neutrinos. Dabei bedeutet „Linie“ eine diskrete Linie im Spektrum. Das kontinuierliche Spektrum wird in der Form „0-...“ MeV angegeben. Die % Angaben beziehen sich immer auf den Anteil am Gesamtfluß. In der Grafik sind im wesentlichen nur die Reaktionen berücksichtigt, die für die betrachteten Experimente relevant sind.*

B.4.1 Ergebnisse Homestake Experiment:

Die Daten des Experiments wurden uns freundlicherweise von Herrn R. Davis [Dav94a] zur Verfügung gestellt. Für die Läufe mit unterschiedlichen oberen und unteren Fehlern, haben wir den größeren Fehler angeführt. Dies vereinfacht die Auswertung der Daten wesentlich. Die mittlere Zeit {mean time} ist definiert wie in [RCD85] auf Seite 8 beschrieben.

Lauf	mittlere Zeit	³⁷ Ar Produktion	Fehler	Lauf	mittlere Zeit	³⁷ Ar Produktion	Fehler
18	70.78	0.214	± 0.498	58	79.304	0.853	± 1.41
19	71.098	0.49	± 0.83	59	79.517	0.237	± 0.439
20	71.383	0.349	± 0.63	60	79.746	0.	± 0.158
21	71.675	0.	± 0.555	61	79.991	0.09	± 0.387
22	71.885	0.289	± 0.779	62	80.211	0.023	± 0.254
24	72.311	0.497	± 0.768	63	80.391	0.	± 0.325
27	72.765	1.226	± 1.633	64	80.548	0.488	± 0.754
28	73.002	0.	± 0.7	65	80.687	0.224	± 0.649
29	73.218	0.608	± 1.006	66	80.836	0.361	± 0.8
30	73.581	0.147	± 0.365	67	80.999	0.319	± 0.588
31	73.873	0.505	± 1.08	68	81.218	0.359	± 0.544
32	74.023	0.277	± 0.928	69	81.448	0.477	± 0.788
33	74.398	0.302	± 0.539	70	81.616	0.081	± 0.301
35	74.553	0.	± 0.509	71	81.77	1.209	± 1.574
36	75.028	0.671	± 0.987	72	81.913	0.636	± 0.935
37	75.37	0.877	± 1.298	73	82.136	0.077	± 0.228
38	75.654	0.279	± 0.755	74	82.305	0.478	± 0.72
39	75.978	0.58	± 0.909	75	82.719	0.503	± 0.83
40	76.134	0.419	± 0.78	76	82.968	0.475	± 0.806
41	76.232	0.569	± 0.987	77	83.137	0.461	± 0.694
42	76.34	0.605	± 1	78	83.305	0.752	± 1.405
43	76.485	0.058	± 0.26	79	83.471	0.604	± 0.875
44	76.625	0.047	± 0.371	80	83.606	0.824	± 1.348
45	76.732	0.337	± 0.648	81	83.812	0.33	± 0.571
46	76.868	0.491	± 0.844	82	84.026	0.545	± 0.832
47	77.02	0.979	± 1.376	83	84.193	0.308	± 0.481
48	77.221	0.407	± 0.676	84	84.361	0.576	± 0.837
49	77.345	1.075	± 1.558	85	84.487	0.599	± 0.857
50	77.526	0.91	± 1.232	86	84.624	1.26	± 1.829
51	77.754	0.849	± 1.173	87	84.847	0.	± 0.313
52	77.982	0.588	± 0.867	88	85.06	0.351	± 0.559
53	78.279	0.2	± 0.404	89	85.268	0.718	± 0.981
54	78.523	0.626	± 0.887	90	86.677	1.	± 0.32
55	78.755	0.468	± 0.774	91	86.875	0.97	± 0.39
56	78.98	0.853	± 1.16	92	87.058	0.75	± 0.33
57	79.11	0.215	± 0.668	94	87.305	0.97	± 0.36

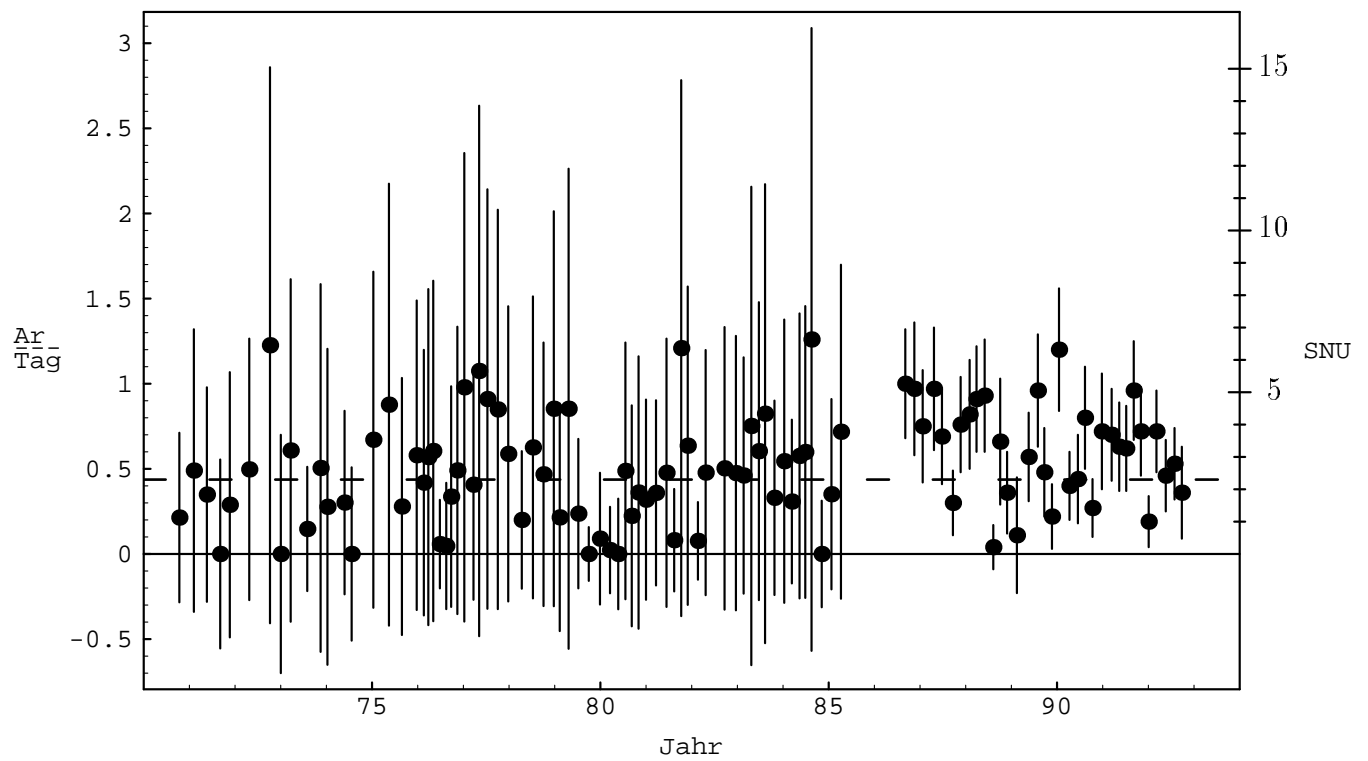


Abbildung B.4: Daten Homestake Experiment.

Die aufgetragenen Werte und Fehler sind der Tabelle entnommen. Die eingezeichnete Linie entspricht dem mittleren Wert.

Lauf	mittlere Zeit	^{37}Ar Produktion	Fehler	Lauf	mittlere Zeit	^{37}Ar Produktion	Fehler
95	87.48	0.69	± 0.28	115	91.196	0.7	± 0.27
96	87.72	0.3	± 0.19	116	91.362	0.63	± 0.26
97	87.889	0.76	± 0.28	118	91.515	0.62	± 0.25
98	88.086	0.82	± 0.32	119	91.68	0.96	± 0.29
99	88.237	0.91	± 0.31	120	91.836	0.72	± 0.26
100	88.415	0.93	± 0.33	121	92.007	0.19	± 0.15
101	88.604	0.04	± 0.13	113	90.777	0.27	± 0.17
102	88.755	0.66	± 0.37	114	90.982	0.72	± 0.34
103	88.906	0.36	± 0.24	115	91.196	0.7	± 0.27
104	89.121	0.11	± 0.34	116	91.362	0.63	± 0.26
105	89.379	0.57	± 0.26	118	91.515	0.62	± 0.25
106	89.58	0.96	± 0.33	119	91.68	0.96	± 0.29
107	89.721	0.48	± 0.26	120	91.836	0.72	± 0.26
108	89.889	0.22	± 0.19	121	92.007	0.19	± 0.15
109	90.043	1.2	± 0.36	122	92.177	0.72	± 0.24
110	90.273	0.4	± 0.2	124	92.381	0.46	± 0.21
111	90.457	0.44	± 0.26	125	92.573	0.53	± 0.21
112	90.612	0.8	± 0.3	126	92.733	0.36	± 0.27
113	90.777	0.27	± 0.17				
114	90.982	0.72	± 0.34				

Die mittlere Rate sind 0.437 ± 0.042 Atome pro Tag. Dies entspricht 2.32 ± 0.22 SNU.

B.5 Numerische Werte der Konstanten

Die folgenden Daten stammen aus der „Review of Particle Properties“ der Particle Data Group [PM⁺94]. Bei den numerischen Rechnungen wurde meistens ohne Berücksichtigung der Fehler gerechnet. Da alle Rechnungen dieser Arbeit mehr den Charakter von Abschätzungen besitzen, reicht die hier benutzte Genauigkeit der Konstante sicherlich aus*.

Die angegebenen Werte der Neutrinomasse entsprechen den experimentell erreichten oberen Schranken. Die Idee, die dieser Arbeit zu Grunde liegt, führt zu einer kleinen Massendifferenz der Neutrinos in unserem zwei Flavormodell. Daher kann der Wert des Elektronneutrinos als obere Schranke der Massen betrachtet werden.

hquer	\hbar	[<i>GeV s</i>]	6.582122	10^{-25}
Fermi-Konstante	G	[<i>GeV⁻²</i>]	1.16639	10^{-5}
Massen				
Elektron	m_e	[<i>MeV</i>]	0.511	
Myon	m_μ	[<i>MeV</i>]	105	
Neutron	m_n	[<i>MeV</i>]	939.566	
Proton	m_p	[<i>MeV</i>]	938.272	
W-Boson	m_W	[<i>GeV</i>]	80.2	
Grenzen Neutrinomassen				
Elektronneutrino	m_{ν_e}	[<i>eV</i>]	< 7.2	
Myonneutrino	m_{ν_μ}	[<i>MeV</i>]	< 0.27	
Tauneutrino	m_{ν_τ}	[<i>MeV</i>]	< 31	
Zerfall Neutron				
Lebensdauer	τ	[<i>s</i>]	887.0 ± 2	
Massendifferenz	$m_n - m_p$	[<i>MeV</i>]	1.2933	
Kopplungsparameter	g_V		1	
	$\frac{g_A}{g_V}$		1.2573	
Matrizelement $d \rightarrow u$	V_{11}		0.974	

Tabelle B.2: Bei den numerischen Rechnungen verwendete Zahlenwerte.

*Dies gilt besonders für die Konstanten, die wir zur Abschätzung des Integrals 2.70 benötigen.

Die folgende Tabelle B.3 enthält die im Kapitel 2.3 in den Grafiken 2.10–2.12 benützten Parameterwerte. Zur Umrechnung in die verschiedenen Einheiten benützen wir folgende Formel:

$$L = \frac{8.796}{\Delta m^2} \frac{1}{\text{MeV}} = \frac{8.796 \cdot 1.97 \cdot 10^{-11}}{\Delta m^2} \text{cm} \quad (\text{B.82})$$

Zur Berechnung der Formel haben wir Gleichung (B.48) mit dem Wert von $p_\nu = 0.814 \text{MeV}$ ausgewertet.

	Δm^2 [10^{-22}MeV^2]	L [10^{22}MeV^{-2}]	L [10^{12}cm]
Grafik 2.10			
1	0.73	12.12	2.38
2	0.73	12.12	2.38
3	0.73	12.12	2.38
Grafik 2.11			
4	0.55	16.14	3.18
5	0.73	12.12	2.38
6	2.88	3.05	0.60
Grafik 2.11			
B	1	8.80	1.73
E	0.63	13.96	4.56

Tabelle B.3: Numerische Werte der Parameter für die Grafiken.

Literaturverzeichnis

- [A⁺94] J. N. Abdurashitov et al. Results from SAGE. *Phys. Lett. B*, 328:234–248, 1994.
- [AS65] M. Abramowitz and I. A. Segun. *Handbook of mathematical functions*. Dover Publ. Inc., New York, 1965.
- [BGL72] W. A. Bardeen, R. Gastmans, and B. Lautrup. Static quantities in Weinberg’s model of weak and elektromagnetic interactions. *Nucl. Phys.*, B46:319–331, 1972.
- [Boh32] N. Bohr. Faraday lectures; chemistry and the quantum theory of atomic constitution. *Journ. of the Chem. Soc.*, pages 349–384, 1932.
- [BP92] J. N. Bahcall and M. H. Pinsonneault. Standard Solar Models, with and without Helium diffusion and the solar neutrino problem. *Rev. Mod. Phys.*, 64:885–926, 1992.
- [CB83] E. D. Commins and P. H. Bucksbaum. *Weak Interactions of Leptons and Quarks*. Cambridge Univ. Pr., Cambridge, 1983.
- [Cha14] J. Chadwick. *Verh. Dtsch. Phys. Ges.*, 16:383, 1914.
- [Cha32] J. Chadwick. The existence of a neutron. *Proc. Roy. Phys. Soc.*, A136:692, 1932.
- [Cha90] S. J. Chang. *Introduction to Quantum Field Theory*. World Scientific, Singapore, 1990.
- [CL84] Ta-Pei Cheng and Ling-Fong Li. *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*. Clarendon Press, Oxford, 1984.
- [Cle83] B. T. Cleveland. The analysis of radioactive decay with a small number of counts by the method of maximum likelihood. *Nucl. Instr. and Meth.*, 214:451–462, 1983.
- [Cre93] O. Cremonesi. Solar neutrinos. *La Rivista del Nuovo Cimento*, 16(12):1–141, 1993.
- [Dav94a] R. Davis. private communication, Jan. 29. 1994.
- [Dav94b] R. Davis. A review of the Homestake solar neutrino experiment. to be published in: *Prog. in Nucl. and Part. Phys.*, Volume 32 (1994), 1994.

- [DC91] R. Davis and A. N. Cox. Solar neutrino experiments. In A. N. Cox, W. C. Livingston, and M. S. Matthews, editors, *Solar Interior and Atmosphere*, pages 51–85. The University of Arizona Press, 1991.
- [Ehr82] R. Ehrlich. Possible time variations in ^{37}Cl solar-neutrino data and neutrino oscillations. *Phys Rev*, D25(9):2282–2286, 1982.
- [EWS27] C. D. Ellis, W. A. Wooster, and C. A. Smith. Average energy of desintegration of Radium E. *Proc. Roy. Soc. London*, A 117:109–123, 1927.
- [Fer33] E. Fermi. *Ricerca Scient.*, 2, issue:12, 1933.
- [Fer34] E. Fermi. Versuch einer Theorie der β -Strahlen. *Z. f. Phys.*, 88:161, 1934.
- [FLM⁺94] G. Fiorentini, M. Lissia, G. Mezzorani, M. Moreti, and D. Vignaud. Solar neutrino experiments and determination of the neutrino oscillation parameters. *Phys. Rev.*, D49(9):6298–6318, 1994.
- [FLS72] K. Fujikawa, B. W. Lee, and A.I. Sanda. Generalized renormalizable gauge formulation of spontaneously broken gauge theories. *Phys. Rev.*, D6(10):2923–2943, 1972.
- [GA⁺94] GALLEX Colaboration, P. Anselmann, et al. GALLEX results from the first 30 solar neutrino runs. *Phys. Lett.*, B 327:377–385, 1994.
- [Gla80] S. L. Glashow. Towards a unified theory: Threads in a tapestry. *Rev. of Mod. Phys.*, 52(3):539–543, 1980.
- [GT36] G. Gamow and E. Teller. Selection rules for β -desintegration. *Phys. Rev.*, 49:895–899, 1936.
- [Hat94] N. Hata. Vacuum oscillations and future solar neutrino experiments. UPR-0605T, February 17 1994.
- [H.B96] H. Becquerell. *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, 122:501, 1896.
- [Hig64] P. W. Higgs. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. *Phys. Rev. Lett.*, 13(16):508–509, 1964.
- [HL94] N. Hata and P. Langacker. Solar modell uncertainties, MSW analysis, and future solar neutrino experiments. *Phys. Rev.*, D50(9):632–660, 1994.
- [Kay81] B. Kayser. On the quantum mechanics of neutrino oscillations. *Phys. Rev. D*, 24(1):110–116, 1981.
- [KGDP89] B. Kayser, F. Gibrat-Debu, and F. Perrier. *The Physics of Massive Neutrinos*. World Scientific, Singapore, 1989.
- [KP92] P. I. Krastev and S. T. Petcov. Neutrino oscillations in vacuum as a possible solution of the solar neutrino problem. *Phys. Lett.*, B 285:85–90, 1992.
- [Lei75] G. Leibbrandt. Introduction to the technique of dimensional regularization. *Rev. Mod. Phys.*, 47(4):849–876, 1975.

- [LY56] T. D. Lee and C. N. Yang. Question of parity conservation in weak interactions. *Phys. Rev.*, 104:254, 1956.
- [Maj37] E. Majorana. Theory of the symmetrie of electrons and positrons. *Nuovo Cimento*, 14:171–184, 1937.
- [MP91] Rabindra N Mohapatra and Palash B Pal. *Massive Neutrinos in Physics and Astrophysics*. World Scientific, Singapore, 1991.
- [MS86] S. P. Mikheev and A. Yu. Smirnov. Resonant amplification of ν -oscilations in matter and solar-neutrino spectroscopy. *Nuovo Cimento*, 9C:17–26, 1986.
- [Nac86] O. Nachtmann. *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik*. Vieweg, Braunschweig, 1986.
- [Nak93] K. Nakamura. Recent results from Kaminokande solar neutrino observations. *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)*, 31:105–110, 1993.
- [Oku65] L. B. Okun. *Weak Interactions of Elementary Particles*. Pergamon Press, Oxford, 1965.
- [OW94] M. Opendak and P. Wildenhain. On the analysis of the decay of a small number of radioactive atoms in radiochemical solar neutrino experiments. *Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res.*, A 345:570–575, 1994.
- [Pau58] W. Pauli. *Zur älteren und neueren Geschichte des Neutrinos*, pages 156–180. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1958.
- [PM+94] Particle Data Group, L. Montanet, et al. Review of particle properties. *Phys. Rev.*, D50(3):1173–1826, 1994.
- [RCD85] J. K. Rowley, B. T. Cleveland, and R. Davis, Jr. The chlorine solar neutrino experiment. In M. L. Cherry, K. Lande, and W. A. Fowler, editors, *Solar Neutrinos and Neutrino Astronomy*, AIP Conference Proceedings, Number 126, pages 1–20, New York, 1985. American Institute of Physics.
- [Rut11a] E. Rutherford. *Phil. Mag*, 21:669, 1911.
- [Rut11b] E. Rutherford. *Proc. Manchester Lit. Philos. Soc.*, 55:18, 1911.
- [Sal80] A. Salam. Gauge unification of fundamental forces. *Rev. of Mod. Phys.*, 52(3):525–538, 1980.
- [Suz93] A. Suzuki. Solar neutrinos, atmospheric neutrinos and proton decay in Kamionokande. KEK Report No. 93-96, 1993.
- [Tay88] J. R. Taylor. *Fehleranalyse*. VCH, Weinheim, 1988.
- [TCL93] S. Turck-Chièze and I. Lopes. Toward a unified classical model of the sun: On the sensivity of neutrinos and helioseismology to the microscopic physics. *Astrophys. J.*, 408:347–367, 1993.

- [tH71a] G. 't Hooft. Renormalizable lagrangians for massive Yang–Mills fields. *Nucl. Phys.*, B35:167–188, 1971.
- [tH71b] G. 't Hooft. Renormalization of massless Yang–Mills Fields. *Nucl. Phys.*, B33:173–199, 1971.
- [Thöne75] K. Thöne. *Einführung in die Astronomie*. Hallweg Verlag, Bern, 6 edition, 1975.
- [tHV72] G. 't Hooft and M. Veltman. Regularization and renormalization of gauge fields. *Nucl. Phys.*, B44:189–213, 1972.
- [Wei80] S. Weinberg. Conceptual foundations of the unified theory of weak and electromagnetic interactions. *Rev. of Mod. Phys.*, 52(3):515–523, 1980.
- [Wey29] H. Weyl. Elektron und Gravitation. i. *Z. Phys.*, 56:330–352, 1929.
- [Wol78] L. Wolfenstein. Neutrino oscillations in matter. *Phys. Rev.*, D17(9):2369–2374, 1978.

Danksagung

An diese Stelle möchte ich mich bei allen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, herzlich bedanken. Besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. A. Vančura für die interessante physikalische Fragestellung der Diplomarbeit.

Danken will ich auch Herrn R. Davis für den Brief mit den aktuellsten Daten des Homestake Experiments und einigen sehr interessanten und hilfreichen Artikeln; besonders für den beigefügten Preprint [Dav94b]. Sehr hilfreich waren auch die Diskussionen mit meinem Bruder Uwe, die unter anderem zu der Reaktionsgleichung aus Kapitel 2.3 geführt haben.

Gegen meine „pfälzischen“ Eigenheiten haben, ich hoffe mit Erfolg, Herr Prof. Dr. A. Vančura, mein Bruder Uwe und meine Freundin Tati gekämpft. Besonders möchte ich mich bei Tati bedanken, da Sie sicherlich am meisten unter dem Stress in der Endphase der Arbeit zu leiden hatte.

Vergessen will ich auch nicht meine Eltern, deren Unterstützung mein Studium erst ermöglichte. Für die Vertretung als Übungsleiter möchte ich meinem Vater an dieser Stelle noch einmal ausdrücklich danken.

An vorletzter Stelle* möchte ich mich bei meinen Studienkollegen für die vielen Gespräche und Diskussionen bedanken. Besonders interessant waren immer die Kaffeepausen mit Klaus Lang. In der Endphase der Arbeit habe ich diese sehr vermisst.

Der letzte Dank gilt allen meinen Freunden, die mir in der Vergangenheit sehr viel Verständniss entgegengebracht haben, wenn das Studium etwas stressig war.

*Diese Reihenfolge ist rein zufällig.