

Ströme in ebenen Gebieten
mit variabler Zusammenhangszahl

Martin Menzel
DISSERTATION

Ströme in ebenen Gebieten
mit variabler Zusammenhangszahl

Martin Menzel

Dissertation
D386

Vom Fachbereich Physik der Universität Kaiserslautern
zur Verleihung des akademischen Grades
„Doktor der Naturwissenschaften“ genehmigte Dissertation

Betreuer: Prof. Dr. Heinz Krüger
Zweitgutachter: Prof. Dr. Antonin Vancura

Datum der wissenschaftlichen Aussprache: 5.12.1997

Zusammenfassung

Um stationäre bzw. quasi-stationäre Ohmsche Ströme in leitenden Medien berechnen zu können, wird aus komplexifizierten Maxwell'schen Gleichungen mittels des Clifford Produktes eine vereinheitlichte hyperkomplexe Feldgleichung hergeleitet. Für, längs einer Achse translationsinvariante, komplexe Leitfähigkeitsfelder wird eine Dimension absepariert und die verbleibenden 2 Raumdimensionen mit der komplexen Zahlenebene identifiziert. Diese Identifikation kann durch den Clifford Formalismus explizit und völlig kanonisch definiert werden, da sowohl die komplexen Zahlen als auch Ortsvektoren in der Clifford Algebra enthalten sind. Da direkt die Spinor Feldgleichung gelöst wird, treten Eichprobleme, wie sie bei entsprechenden Potentialgleichungen üblich sind, erst gar nicht auf. Durch die Liftung der Spinor Feldgleichung vom $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ wird sofort ersichtlich wie wichtig monogene (holomorphe) Funktionen für die Lösung dieser Gleichung sind.

Die zugehörige Randbedingung ist im allgemeinen weder rein vom Neumannschen noch vom Dirichlet'schen Typ. Ausgehend von elementaren Lösungen für δ -Quellen in Gebieten konstanter Leitfähigkeit, werden durch Fortsetzung dieser Lösungen mittels der Randbedingung Feldlösungen für zusammengesetzte Gebiete konstruiert.

Im Gegensatz zu Gebieten mit nur einem Rand, ist es für mehrfach berandete Gebiete viel schwieriger, die lokalen Lösungen so anzupassen, daß alle Randbedingungen erfüllt sind. Deshalb wird eine neue Lösungsmethode vorgestellt, welche die lokalen Feldgleichungen und alle Randbedingungen durch sukzessive Konstruktion von Spiegelpolreihen löst. Dieses Verfahren wird anhand einiger Klassen von geometrischen Konfigurationen erläutert, deren topologische Unterschiede sich direkt auf die Struktur der Spiegelpolverteilungen auswirkt.

Bei der Diskussion wird besonders der Fall von N kreisförmigen Anomalien in einer Kreisscheibe hervorgehoben, da diese Klasse von Problemen auch von besonderem Interesse in der medizinischen Physik, im Bereich der Impedanz-Tomographie ist. Die Lösungen erlauben die Variation der Zusammenhangszahl über die relativen Leitfähigkeitsdifferenzen. Studien der Potentialverteilung auf dem Rand, wie sie für die elektrische Impedanz-Tomographie wesentlich sind, werden zum Teil durch numerische, als auch durch analytische Berechnungen durchgeführt. Komplexe Potentiale können aus den Feldlösungen leicht berechnet werden, indem die typischen Polterme $\frac{1}{z-p}$ durch die komplexen Logarithmen $-\log(z-p)$ ersetzt werden.

Das elektrische Potential ergibt sich aus dem Komplexen als dessen Realteil. Der Imaginärteil hat eine große Bedeutung bei der Visualisierung der Vektorfelder. Es wird gezeigt, daß die Höhenlinien dieses Imaginärteils, der aus der Strömungsmechanik auch als Strömungsfunktion bekannt ist, gerade die Feldlinien des zugehörigen Feldes liefert.

Für die elektrische Impedanz-Tomographie wird am Beispiel einer kleinen, konzentrisch positionierten Anomalie das Auflösungsvermögen diskutiert, woraus unter anderem eine optimale Lage der Einprägepole resultiert. Aus den analytischen Ergebnissen ist eindeutig zu erkennen, daß sich maximale Potentialänderungen auf dem Rand bei diametral angeordneten Einprägepolen ergeben.

Die für die Visualisierung der Felder nötigen Studien von Strömungsfunktionen, lieferte unter anderem auch eine Berechnungsmöglichkeit von Strömungsfunktionen für Felder im \mathbb{R}^3 ! Des weitern wird eine mögliche Wahl der Schnitte dieser mehrblättrigen Funktion für den Fall der Kreisscheibe mit N Anomalien explizit gegeben und die Vorteile dieser speziellen Wahl anhand numerischer Studien aufgezeigt. Typische Darstellungen von Feld- und Potentiallinien, von Verteilungen von Spiegelpolen, sowie von Potential und Strömungsfunktionen selbst, verdeutlichen die Vorteile dieses Lösungsverfahrens. Für sehr viele, in der Praxis wichtige Konfigurationen ist vor allem die große Konvergenzgeschwindigkeit ein Vorteil, welcher es ermöglicht Feldlinienbilder dieser Lösungen in kurzer Zeit auf einem PC zu erstellen.

Abstract

Steady current distributions in plane media with spatially varying conductivities are calculated by directly solving Maxwell's field equations without using potentials. The avoidance of potentials is possible because the vector-structure of Maxwell's equations in the plane may completely be transformed into a **single** hypercomplex field equation by exploiting the algebraic properties of the Graßmann-Clifford product. In this way, the conventional **symbolic** isomorphism between \mathbb{R}^2 and \mathbb{C}^1 is cast into an algebraic realization amenable to simple and fast practical calculations. This hypercomplex field equation which results from Maxwell's system, as well may be regarded as the simplest type of a spinor equation on the group Spin(2), which generates O(2) motions when acting on \mathbb{R}^2 -vectors.

This direct treatment of Maxwell's equations is a big advantage compared with the traditional approaches based on potentials. Potentials are local objects only, which lose their meaning in the case of the multiply-connected regions treated in the underlying work. Here, instead, the complex image of the electric field vector is calculated, thereby avoiding all gauge problems.

The boundary conditions for which Maxwell's equations are solved neither are of Neumann nor of Dirichlet type. Starting from δ -sources for the current in homogeneous conductivity regions, the matching of the boundary conditions is achieved successively by means of adding image poles. In this way, the electric driving field of current through the inside of the unit circle containing several circular conductivity anomalies, is constructed in the form of rapidly convergent image pole series (theta fuchsian series for a Burnside class of automorphic functions).

The principal part of this computer aided work was the development of a symbolic algorithm for the construction of the image pole arrangements corresponding to **any finite number of circular conductivity anomalies inside of the unitcircle**. No restriction of position or size of these anomalies is needed. After determination of the various pole configurations the complex counterpart of the electric field is calculated by numerical summation. In order to visualize the resulting field- and current distributions the image pole contributions also are integrated in terms of complex log-branches. This yields logarithmic series for complex potential functions. The real part of this complex potential is the conventional potential of the electric field, whereas the imaginary part provides the streamfunction. The levelines of the streamfunction serve to visualize the fieldlines of the current.

Visualization of the vectorfields obtained from the above mentioned pole series is a highly nontrivial problem, because fieldlines are needed in the large! Streamfunctions resulting as the imaginary part of an infinite series of log-branches therefore have to be matched continuously from local germs. Particular arrangements of branch-cuts are discussed in detail.

With respect to impedance tomographic applications in geology, medicine, etc., it is important to know the influence of a particular inner conductivity distribution on the potential variation along the boundary of a region. This relation is studied by means of a simple model which allows a perturbative, analytic treatment. The result is that the tomographic sensitivity is maximal for those positions of the current impressing poles on the boundary which induce the strongest flow of current through the subregion to be analysed.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
2	Maxwellsche Theorie für leitenden Medien	10
2.1	Spinorform der Feldgleichung incl. Nebenbedingung (nach H. Krüger)	10
2.1.1	Maxwellsche Gleichungen im CGS-System	10
2.1.2	Die Quellen des elektromagnetischen Feldes	10
2.1.3	Leitfähigkeitsmodell von Drude	12
2.1.4	Komplexifizierung	12
2.1.5	Komplexe Verallgemeinerung der Leitfähigkeit	13
2.1.6	Statische Stromdichte	14
2.1.7	Stationäre Stromdichten mit harmonischer Zeitabhängigkeit	14
2.1.8	Entwicklung nach Potenzen der Frequenz	16
2.1.9	Randbedingungen der \mathcal{E}_0 -Feldgleichung	18
2.2	Reduktion auf 2 Dimensionen	20
2.2.1	Zylindersymmetrie / Translationssymmetrie	20
2.2.2	Infinitesimal dünne Leitfähigkeitsschicht	21
2.2.3	Liftung vom $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$	22
2.2.4	Transformationsverhalten von Feld und Potential (H. Krüger)	24
3	Elementare Lösungskonzepte	26
3.1	Poissonsche Gleichung / zugehörige Feldgleichung	26
3.2	Konstante Leitfähigkeitsfelder	30
3.3	Zwei Halbebenen mit konstanter Leitfähigkeit	30
3.4	Kreisscheibe mit konstanter Leitfähigkeit	32
3.4.1	Quellen außerhalb der Kreisscheibe	32
3.4.2	Quellen innerhalb der Kreisscheibe	36
3.5	Verallgemeinerungsfähigkeit auf 3 Dimensionen	37
4	Mehrfach berandete Gebiete – Spiegelpolreihen	41
4.1	Zwei Halbebenen mit einer Zwischenschicht	41
4.1.1	Strukturerkennung	42
4.1.2	Induktionsbehauptung	43
4.1.3	Induktionsanfang	44
4.1.4	Induktionsschritt $k \rightarrow k + 1$	44
4.1.5	Spiegelpolreihen als exakte Lösungen	44
4.1.6	Relevanz einer dünnen Zwischenschicht	45
4.2	Ausgedehnte Stromeinprägungen	48
4.2.1	Induktionsbehauptung	50
4.2.2	Induktionsanfang	51
4.2.3	Induktionsschritt – ungerade Iterationsschritte	51
4.2.4	Summation der Iterationsstufen	51
4.2.5	Grenzfall ideal leitende Kreisscheiben	54
4.3	N kreisförmige Anomalien in einer Kreisscheibe	54

4.3.1	Initialisierung der Hilfsfelder – lokale Lösungen um die Quellen	56
4.3.2	Erster Iterationsschritt	56
4.3.3	Zweiter Iterationsschritt	57
4.3.4	Dritter Iterationsschritt	57
4.3.5	Vierter Iterationsschritt	58
4.3.6	Induktionsbehauptung	58
4.3.7	Induktionsschritt $k \rightarrow k + 1$	59
4.3.8	Summation aller Zusatzfelder	59
4.3.9	Spezialisierung auf eine Anomalie in einer Kreisscheibe	61
4.3.10	Eine Anomalie in einer Kreisscheibe – Möbius-Transformationen	62
4.4	Auflösungsvermögen – Pseudolinearität bezgl. des Einprägstromes	63
5	Visualisierung der ebenen Stromvektorfelder	65
5.1	Theoretische Eigenschaften	65
5.1.1	Feldlinien eines Rotationsfeldes	65
5.1.2	Feldlinien eines Divergenzfeldes	66
5.1.3	2-dimensionale Divergenzfelder – komplexes Potential	66
5.1.4	Stromlinien in einer Kreisscheibe mit Anomalien	69
5.2	Numerische Algorithmen	73
5.2.1	Berechnung der lokalen Potentiale und Felder	73
5.2.2	Globalisierung der lokalen „Potentiale“	76
5.2.3	Zeichnen von Höhenlinien	80
5.2.4	Newton Verfahren für $f(x, y) = c = \text{const.}$	81
5.2.5	Berechnung der Feldlinien	82
5.2.6	Berechnung der Äquipotentiallinien	83
5.3	Numerische und graphische Ergebnisse	84
5.3.1	Positionen der Spiegelpole	84
5.3.2	Variation der Zusammenhangszahl	90
5.3.3	Variation der relativen Leitfähigkeitsdifferenz	92
A	Mathematische Grundlagen	96
A.1	Clifford Algebra	96
A.1.1	Geometrische Algebra des \mathbb{R}^3 : $\mathcal{G}(3)$	96
A.1.2	Geometrische Algebra des \mathbb{R}^2 : $\mathcal{G}(2)$	97
A.2	Lemma von Poincaré für Bivektorfelder	98
A.3	Möbius Transformationen eines Kreises	98
A.3.1	Stereographische Projektion	98
A.3.2	Erzeugende der Möbius-Transformationen	101
A.3.3	Transformation obere Halbebene \rightarrow Kreisscheibe	101
B	MKSA und CGS System	104
	Literaturverzeichnis	105
	Index	107

Kapitel 1

Einleitung

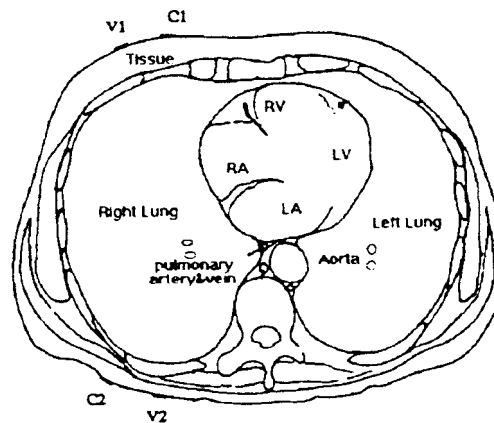
Sir James Clerk Maxwell entwickelte bereits 1873 seine berühmte Theorie des Elektromagnetismus [18]. Bemerkenswerter Weise formulierte er bereits damals seine Gleichungen nicht nur in Komponenten zerlegt, sondern faßte mittels des Hamiltonschen Quaternionen Kalküls sogar Vektor- und Skalargleichungen zusammen. William Kingdon Clifford veröffentlichte 1878 [7, 6, 12] seine, auf Ideen von Hermann Grassmann [28] und Hamilton basierende, Algebra. Mit dieser können nun, im Sinne der bereits von Maxwell verwendeten Quaternionen Formulierung, physikalische Gleichungen noch weiter zusammengefasst werden.

In der vorliegenden Arbeit werden elektrische Ströme in mehrfach zusammenhängenden Gebieten näher untersucht. Um solche elektrischen Ströme in leitender Materie beschreiben zu können, macht man vom Leitfähigkeitsmodell von Drude Gebrauch. In Kapitel 2 dieser Arbeit wird, ausgehend von den Maxwell Gleichungen und dem Drude Modell, eine Spinor Gleichung für das elektrische Feld für Leitfähigkeitsverteilungen mit Translationssymmetrie in einer Richtung hergeleitet. Um auch elektrische Ströme untersuchen zu können, die in Gebieten fließen, welche aus Teilgebieten mit unterschiedlichen, konstanten Leitfähigkeiten zusammengesetzt sind, werden auch Randbedingungen für diese Spinor Feldgleichung hergeleitet. Dazu werden die Unstetigkeiten im Leitfähigkeitsfeld mit Distributionen beschrieben. Da man ein ebenfalls unstetiges elektrisches Feld als Lösungsansatz für die Feldgleichung zulassen möchte und diese Produkte von Leitfähigkeit, bzw. deren Ableitung und Feld beinhaltet, ist ein verallgemeinerter Distributionsbegriff zu verwenden, der auch Multiplikationen von Distributionen erlaubt [8].

Ausgehend von elementaren Lösungen die in Kapitel 3 hergeleitet werden, wird im vierten Kapitel die Methode zur Erzeugung von Spiegelpolreihen erläutert. Die Idee rührt von der Behandlung ähnlicher elektrostatischer Probleme her, die Lord Kelvin um die Jahrhundertwende mittels Spiegelpolreihen löste. In den hier betrachteten Situationen kann allerdings das Potential auch auf den Rändern variieren. Deshalb ist die Methode von Kelvin hier nicht direkt anwendbar. Weitere Ähnlichkeiten sind auch aus der Strömungsmechanik [25] bekannt. Sowohl in der Hydrodynamik als auch in der Aerodynamik können die Strömungen nicht in die Hindernisse eindringen. Die in dieser Arbeit untersuchten Anomalien können, je nach Leitfähigkeit, dem elektrischen Strom einen mehr oder weniger großen elektrischen Widerstand entgegenstellen. Die „Durchlässigkeit“ variiert hier also kontinuierlich von „undurchlässig“

(Isolator) über „absolut durchlässig“ (kein Leitfähigkeitsunterschied zur Umgebung) bis hin zu „attraktiv“ (höhere Leitfähigkeit als die Umgebung).

Die Motivation für die Untersuchung von Randpotentialen in Abhängigkeit von Größe, Anzahl und Eigenschaften der Anomalien lieferten aktuelle Experimente in der medizinischen Physik. Mit „back-projection“ Algorithmen [23] wird im Bereich der elektrischen Impedanz Tomographie versucht das Inverse Problem der Rekonstruktion von Impedanzverteilungen aus gemessenen Randpotentialen zu lösen. Beim Testen der Fähigkeiten der Rückwärtsalgorithmen war man bislang im wesentlichen auf Meßergebnisse aus Eichmessungen angewiesen. Mit den in dieser Arbeit erzielten Ergebnisse ist es erstmals möglich numerisch Daten für eine Klasse von Konfigurationen zu berechnen, die bislang nur als Meßdaten zu bekommen waren. Für den Bereich der EIT (elektrischen Impedanz Tomographie) gibt es nur wenige analytische Lösungen des Vorwärtsproblems [5] für Impedanzverteilungen die später auch in Messungen vorkommen können. Im Querschnitt eines menschlichen Körpers sind die durchschnittlichen Organe bzw. Körperteile (z.B. Knochen in Armen und Beinen oder Organe im Schnitt durch den menschlichen Thorax) in erster Näherung Kreise. Deshalb werden in dieser Arbeit auch kreisförmige Anomalien näher untersucht.



Ein besonderer Schwerpunkt dieser Arbeit wird im nächsten Kapitel behandelt. Im Rahmen Computer gestützter Physik (computational physics) wird erläutert, wie die erhaltenen Feldlösungen mit Hilfe von PC's visualisiert werden können. Erkenntnisse die während meiner Forschung erzielt wurden, fanden unter anderem auch im Fachbereich Informatik in der Arbeitsgruppe Graphische Datenverarbeitung und Computergeometrie von Prof. H. Hagen ihre Anwendung. In Zusammenarbeit mit der AG Hagen und der NASA entstand zu diesem Thema eine Veröffentlichung [24].

Die meisten theoretischen Arbeiten auf dem Gebiet der Elektrodynamik formulieren die physikalischen Beziehungen im Gausschen Einheitensystem. Dies hat den Vorteil, daß man sich in den Rechnungen einige Vorfaktoren sparen kann, die während den Berechnungen nur die physikalischen Zusammenhänge verschleiern. Will man dann letzten Endes konkrete Werte ausrechnen, ist es zweckmäßig die

entsprechenden Formeln, gemäß der Umrechnungstabelle im Anhang, in das übliche MKSA Einheitensystem umzurechnen.

Kapitel 2

Maxwellsche Theorie für leitenden Medien

2.1 Spinorform der Feldgleichung incl. Nebenbedingung (nach H. Krüger)

2.1.1 Maxwellsche Gleichungen im CGS-System

Die Maxwellsche Gleichungen im CGS-System lauten:

$$\begin{aligned}\vec{\partial} \cdot \vec{D} &= 4\pi\varrho & \vec{\partial} \times \vec{H} - \partial_0 \vec{D} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \vec{\partial} \cdot \vec{B} &= 0 & \partial_0 \vec{B} + \vec{\partial} \times \vec{E} &= \vec{0}\end{aligned}\tag{2.1}$$

$$\partial_0 = \frac{1}{c} \partial_t\tag{2.2}$$

Die verwendeten physikalischen Größen haben wie üblich folgende Bedeutung:

\vec{D}	dielektrische Verschiebung
\vec{E}	elektrische Feldstärke
\vec{B}	magnetische Induktion
\vec{H}	magnetische Feldstärke
ϱ	Ladungsdichte
\vec{j}	Stromdichte

Die zugehörigen Materialgleichungen lauten:

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H}\end{aligned}\tag{2.3}$$

mit

ε	Dielektrizitätsfunktion
μ	Permeabilitätsfunktion

2.1.2 Die Quellen des elektromagnetischen Feldes

Die Ladungsdichte ϱ und die Stromdichte \vec{j} können als Quellen des elektromagnetischen Feldes **nicht** beliebig gewählt werden. Damit die Maxwellsche Gleichung(en) überhaupt erfüllbar ist,

müssen diese die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \varrho + \vec{\partial} \cdot \vec{j} = 0 \quad (2.4)$$

erfüllen. Elementarteilchen wie das Elektron liefern als Quellen für das elektromagnetische Feld Elementarladung und magnetisches Moment. Zuerst betrachten wir die Elementarladung näher. Die aus Elementarladungen zusammengesetzte Ladungsdichte ist im allgemeinen zeitabhängig. Die Integration der Kontinuitätsgleichung liefert einen zugehörigen Polarisationsstrom \vec{j}_ϱ . Da dieser Strom seine Ursache in der Bewegung der Ladungsträger hat, gilt

$$\partial_t \varrho = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{j}_\varrho = 0. \quad (2.5)$$

Dies ist wichtig, da durch reine Wirbelstromzusätze die Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung nicht verändert wird.

$$\vec{j} = \vec{\partial} \times \vec{M} \quad \Rightarrow \quad \vec{\partial} \cdot \vec{j} = 0 \quad (2.6)$$

Folglich erfüllt mit \vec{j} auch $\vec{j}' = \vec{j} + \vec{\partial} \times \vec{M}$ die Kontinuitätsgleichung. Wie sich sofort zeigen wird, ist die Annahme, daß die Stromdichte zwingend eine bewegte Ladungsdichte als Ursache hat, ausreichend um aus ϱ die Stromdichte eindeutig zu bestimmen. Mit Hilfe der Antidivergenz ist der Ausdruck

$$\vec{\partial} \cdot \vec{j} = -\partial_t \varrho \quad (2.7)$$

auflösbar nach \vec{j}

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{\partial} \times \vec{M} - \int_0^\infty ds e^{-3s} \vec{r} \partial_t \varrho(\vec{r} e^{-s}, t), \quad (2.8)$$

wobei

$$\lim_{s \rightarrow \infty} e^{-3s} \partial_t \varrho(\vec{r} e^{-s}) = 0 \quad (2.9)$$

erfüllt sein muß, was allerdings keine all zu starke Forderung ist. An dem Ergebnis ist sofort abzulesen, daß hier stets $\vec{M} = 0$ zu wählen ist, damit aus $\partial_t \varrho = 0$ immer $\vec{j} = 0$ folgt. Makroskopisch hat man natürlich doch Ströme ohne „effektive“ Ladung. Eine solche Situation kann beispielsweise wie folgt im Rahmen dieser Theorie beschrieben werden:

Betrachtet man einen Strom, der in einer Metallleitung beliebiger Form fließt, so kann folgendes Modell einen möglichen Ansatz liefern. Die Form der Leitung sei gegeben durch

$$\vec{x}(s), \quad s \in [s_0, s_1] \subset \mathbb{R}, \quad \text{mit} \quad \vec{x}(s_0) = \vec{x}(s_1) \quad \text{geschlossen.} \quad (2.10)$$

N Ladungsträger mit der Gesamtladung $-Q$, die sich auf der vorgegebenen Kurve bewegen sollen, seien definiert durch

$$\varrho_j(\vec{r}, t) = -\frac{Q}{N} \sum_{k=1}^N \delta \left(\vec{r} - \vec{x} \left(\frac{s_1 - s_0}{N} k + v_s t \right) \right). \quad (2.11)$$

Da eine Metallleitung netto nicht geladen erscheint, müssen noch statische Ladung entgegengesetzten Vorzeichens plaziert werden, die die gewünschte (makroskopische) Neutralität schaffen (Gitteratome).

$$\varrho_0(\vec{r}) = \frac{Q}{N} \sum_{k=1}^N \delta \left(\vec{r} - \vec{x} \left(\frac{s_1 - s_0}{N} k \right) \right) \quad (2.12)$$

Für eine große Anzahl N von Ladungsträgern ist dann

$$\varrho(\vec{r}, t) = \varrho_0(\vec{r}) + \varrho_j(\vec{r}, t) \approx 0. \quad (2.13)$$

Aber die zeitliche Ableitung ist allein durch ρ_j bestimmt! Somit kann also auch mit einer verschwindenden effektiven (makroskopischen) elektrischen Ladungsdichte eine Stromdichte resultieren.

Die magnetischen Momente gehen stets als reine Wirbelströme (divergenzfrei) ein, die die Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung für den Gesamtstrom nicht zerstört. Unter diesen Gesichtspunkten können die „physikalischen Quellen“ des elektromagnetischen Feldes völlig beliebig gewählt werden. Dabei ist die Stromdichte zusammengesetzt aus einer Polarisationsstromdichte, die aus bewegten Ladungen resultiert und den Wirbelströmen der magnetischen Momente!

Bei der üblichen Vorgehensweise werden Ladungsdichte und Stromdichte frei gewählt, wobei kontrolliert werden muß, daß die gewählten Quellen die Kontinuitätsgleichung erfüllen.

2.1.3 Leitfähigkeitsmodell von Drude

Im folgenden werden elektromagnetische Felder in Materialien mit ortsabhängigen Leitfähigkeiten näher betrachtet. Dafür kann man in den Materialgleichungen die skalare Dielektrizitätsfunktion durch einen Dielektrizitäts-Operator ersetzen (Heinz Krüger, Elektrodynamik I SS1988, Seite 34):

$$\varepsilon \rightarrow \hat{\varepsilon} = \varepsilon(\vec{r}) + \frac{4\pi\sigma(\vec{r})}{\partial_t(1 + \tau(\vec{r})\partial_t)} \quad (2.14)$$

Für Felder die sich im Vergleich zur Relaxationszeit τ nur langsam verändern, kann man näherungsweise den Operator

$$\varepsilon \rightarrow \hat{\varepsilon} = \varepsilon(\vec{r}) + \frac{4\pi\sigma(\vec{r})}{\partial_t} \quad (2.15)$$

verwenden. Dabei haben die verwendeten Variablen folgende Bedeutung:

$\varepsilon(\vec{r})$	Dielektrizitätsfunktion
$\sigma(\vec{r})$	Leitfähigkeit
$\tau(\vec{r})$	Relaxationszeit (typische Werte $\sim 10^{-14}\text{sec}$)

Dieser Operator ist als bestimmter Integraloperator zu verstehen, der auch in der Form einer linearen Responsefunktion geschrieben werden kann, die beschreibt wie die dielektrische Verschiebung als „Antwort“ auf ein vorgegebenes elektrisches Feld aussieht:

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \int d^3r' \int_{-\infty}^t dt' \varepsilon(\vec{r}, \vec{r}', t, t') \vec{E}(\vec{r}', t') \quad (2.16)$$

Um den obigen Operator zu erhalten, muß der Integralkern durch

$$\varepsilon(\vec{r}, \vec{r}', t, t') = \varepsilon(\vec{r}')\delta(\vec{r}' - \vec{r})\delta(t' - t) + 4\pi\sigma(\vec{r}')\theta(t' - t_0)\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

festgelegt sein. Der erste Summand beschreibt dabei eine gewöhnliche skalare (nicht operatorwertige) Dielektrizitätsfunktion.

2.1.4 Komplexifizierung

Später wird zur Separation der Zeit, ein harmonischer Ansatz in der Zeit gemacht werden. Es erweist sich als zweckmäßig die Maxwell'sche Gleichungen zu komplexifizieren, da dies die Rechnungen vereinfacht. Dazu werden komplexe Zahlen verwendet, die mit allen Größen der verwendeten Clifford Algebra kommutieren. Um die imaginäre Einheit dieser komplexen Zahlen von dem Einheits-Pseudoskalar i der Clifford Algebra unterscheiden zu können, bezeichne ich diese mit \hat{i} . An die Komplexifizierung werden wie üblich zwei Forderungen gestellt:

1. Die reelle Theorie ist ein Spezialfall (Einbettung)
2. Die komplexe Theorie soll bzgl. der Reellen möglichst forminvariant sein.

Die reellen physikalischen Größen sollen wie folgt mit den komplexen Größen zusammenhängen (Einbettung):

$$\begin{aligned}
 \vec{D}(\vec{r}, t) &= \operatorname{Re} \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, t), & \vec{E}(\vec{r}, t) &= \operatorname{Re} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t), & \vec{j}(\vec{r}, t) &= \operatorname{Re} \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}, t) \\
 \vec{B}(\vec{r}, t) &= \operatorname{Re} \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t), & \vec{H}(\vec{r}, t) &= \operatorname{Re} \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t), & \varrho(\vec{r}, t) &= \operatorname{Re} \check{\varrho}_k(\vec{r}, t) \quad (2.17) \\
 \vec{\mathcal{D}}, \vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{H}}, \vec{\mathcal{J}}, \check{\varrho}_k &\in \mathbb{C}(i)
 \end{aligned}$$

Mit diesen Vereinbarungen lauten die komplexen Maxwell'sche Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 \vec{\partial} \cdot \vec{\mathcal{D}} &= 4\pi \check{\varrho}_k & \vec{\partial} \times \vec{\mathcal{H}} - \partial_0 \vec{\mathcal{D}} &= \frac{4\pi}{c} \vec{\mathcal{J}} \\
 \vec{\partial} \cdot \vec{\mathcal{B}} &= 0 & \partial_0 \vec{\mathcal{B}} + \vec{\partial} \times \vec{\mathcal{E}} &= \vec{0}
 \end{aligned} \quad (2.18)$$

komplexe Maxwell'sche Gleichungen

$$\begin{aligned}
 \vec{\mathcal{D}} &= \hat{\varepsilon} \vec{\mathcal{E}} & \hat{\varepsilon} &= \varepsilon(\vec{r}) + \frac{4\pi\sigma(\vec{r})}{\partial_t} \\
 \vec{\mathcal{B}} &= \hat{\mu} \vec{\mathcal{H}} & \hat{\mu} &= \mu(\vec{r}) \approx 1
 \end{aligned} \quad (2.19)$$

komplexe Materialgleichungen

2.1.5 Komplexe Verallgemeinerung der Leitfähigkeit

Die spezielle Form des Dielektrizitätsoperators soll einen Zusatz zur Stromdichte liefern – die Ohmsche Stromdichte! Um diesen Zusatz zu identifizieren wird $\hat{\varepsilon}$ in das Ampèresche Durchflutungsgesetz eingesetzt

$$\vec{\partial} \times \vec{\mathcal{H}} = \frac{4\pi}{c} \vec{\mathcal{J}} + \partial_0 \vec{\mathcal{D}} = \frac{4\pi}{c} (\vec{\mathcal{J}} + \vec{\mathcal{J}}_{ohm}) \quad (2.20)$$

und den neu hinzugekommenen Term (gegenüber einer skalaren Dielektrizitätsfunktion) mit der Stromdichte zusammengefasst. $\vec{\mathcal{J}}_{ohm} = \frac{c}{4\pi} \partial_0 \vec{\mathcal{D}}$ ist die zu berechnende Ohmsche Stromdichte. Physikalisch muß diese Stromdichte **nicht** von $\vec{\mathcal{J}}$ zu unterscheiden sein, da die vorgegebene (eingepägte) Stromdichte $\vec{\mathcal{J}}$ ebenfalls in Materie mit spezifischer Leitfähigkeit fließen kann. Z.B. Stromzuführung in Kupferkabel. Meist will man eine komplizierte Stromdichte in einem Gebiet zwischen den Enden von stromzuführenden Kabeln berechnen. In den stromzuführenden Leitungen wird die Stromdichte einfach als bekannt vorausgesetzt. Setzt man nun die Stromdichte nicht im ganzen stromzuführenden Kabel als bekannt voraus, so muß die zuvor vorausgesetzte Stromdichte als Lösung (Ohmsche Stromdichte) aus den Maxwell'schen Gleichungen resultieren.

$$\vec{\partial} \times \vec{\mathcal{H}} = \frac{4\pi}{c} \vec{\mathcal{J}} + \frac{1}{c} \partial_t \int_{-\infty}^t dt' [\varepsilon(\vec{r}) \delta(t-t') + 4\pi\sigma(\vec{r}) \theta(t'-t_0)] \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t') \quad (2.21)$$

$$= \frac{4\pi}{c} \vec{\mathcal{J}} + \frac{1}{c} [\varepsilon \partial_t \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) + 4\pi\sigma \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)] \quad (2.22)$$

$$= \frac{4\pi}{c} \left(\vec{\mathcal{J}} + \left\{ \frac{\varepsilon}{4\pi} [\partial_t \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)] \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)^{-1} + \sigma \right\} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) \right) \quad (2.23)$$

Der Ausdruck in der geschweiften Klammer kann nun als **komplexe Leitfähigkeit** definiert werden:

$$\varkappa(\vec{r}, t, \check{\mathcal{E}}) \equiv \frac{\varepsilon}{4\pi} [\partial_t \check{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)] \check{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)^{-1} + \sigma \quad (2.24)$$

Eine so definierte komplexe Leitfähigkeit ist für ein allgemeines elektrisches Feld, für welches Ort- und Zeitabhängigkeit noch nicht näher spezifiziert ist, **keine** Materialkonstante sondern ist noch vom elektrischen Feld abhängig. In den folgenden Abschnitten werden spezielle Zeitabhängigkeiten diskutiert, für die die Impedanz vom elektrischen Feld unabhängig wird. Kritisch ist der erste Summand in der Definition der komplexen Leitfähigkeit für $\check{\mathcal{E}} = 0$. Verschwindet $\check{\mathcal{E}}$ an isolierten Punkten bzw. auf Hyperräumen, so kann der Wert durch einen entsprechenden Grenzwert ersetzt werden. Verschwindet $\check{\mathcal{E}}$ in echten Unterräumen der Dimension 4, so betrachtet man den Grenzwert einer konstanten Funktion mit infinitesimalem Wert. Für solche Funktionen verschwindet dieser Summand, da die Zeitableitung dort Null ist. In den folgenden Abschnitten werden einige Beispiele zur konkreten Anwendung dieser Formel gegeben.

2.1.6 Statische Stromdichte

Aus einer statischen komplexen Stromdichte

$$\check{\mathcal{J}}(\vec{r}, t) = \mathcal{J}(\vec{r}) \quad (2.25)$$

folgt durch Integration der Kontinuitätsgleichung die folgende **zeitabhängige** Ladungsdichte

$$\check{\rho}_k(\vec{r}, t) = - \left(\vec{\partial} \cdot \mathcal{J} \right) t + q_0(\vec{r}) \quad (2.26)$$

Da möglichst keine Anteile in der Ladungsdichte auftreten sollen, die **nicht** zwingend zur Beschreibung der vorgegebenen Stromdichte nötig ist, wird $q_0 = 0$ gesetzt. Als Lösungsansatz für die Maxwell'schen Gleichungen mit diesen Quellen werden $\check{\mathcal{E}} = \mathcal{E}(\vec{r})$ und $\check{\mathcal{H}} = \mathcal{H}(\vec{r})$ ebenfalls statisch angesetzt. Die Größen $\check{\mathcal{D}}$ und $\check{\mathcal{B}}$ ergeben sich dann über die Materialgleichungen aus $\check{\mathcal{E}}$ bzw. $\check{\mathcal{H}}$. Ob diese Ansätze zu Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen führen ist hiermit noch nicht geklärt. Die nachfolgenden Schlußfolgerungen gelten auf jeden Fall, falls diese Ansätze zu Lösungen führen.

$$\check{\mathcal{D}} = \int_{-\infty}^t dt' [\varepsilon(\vec{r})\delta(t-t') + 4\pi\sigma(\vec{r})\theta(t'-t_0)] \check{\mathcal{E}}(\vec{r}, t') \quad (2.27)$$

$$= \varepsilon\mathcal{E}(\vec{r}) + 4\pi\sigma(\vec{r})\mathcal{E}(\vec{r})(t-t_0) \quad (2.28)$$

$$\check{\mathcal{B}} = \mu\check{\mathcal{H}} = \mu\mathcal{H}(\vec{r}) \quad (2.29)$$

Die komplexe Leitfähigkeit \varkappa ist für diesen Fall

$$\varkappa = \frac{\varepsilon}{4\pi} \underbrace{[\partial_t \mathcal{E}(\vec{r})]}_0 \mathcal{E}(\vec{r})^{-1} + \sigma = \sigma. \quad (2.30)$$

In diesem Fall ist die komplexe Leitfähigkeit also rein reell und fällt mit der gewöhnlichen reellen Leitfähigkeit σ zusammen.

2.1.7 Stationäre Stromdichten mit harmonischer Zeitabhängigkeit

Aus einer stationären, komplexen Stromdichte mit harmonischer Zeitabhängigkeit der Form

$$\check{\mathcal{J}} = \mathcal{J}(\vec{r})e^{i\omega t} \quad (2.31)$$

folgt durch Integration der Kontinuitätsgleichung

$$\check{\varrho}_k(\vec{r}, t) = -(\vec{\partial} \cdot \mathcal{J}) \int_{t_0}^t dt' e^{i\omega t'} \quad (2.32)$$

$$= -(\vec{\partial} \cdot \mathcal{J}) \frac{1}{i\omega} \left(e^{i\omega t} - e^{i\omega t_0} \right). \quad (2.33)$$

Im Limes $\omega \rightarrow 0$ erhält man wieder den statischen Fall

$$\Rightarrow \check{\varrho}_k(\vec{r}, t) = -\left(\vec{\partial} \cdot \mathcal{J}\right) t + q_0(\vec{r}), \quad q_0(\vec{r}) = (\vec{\partial} \cdot \mathcal{J}) t_0 \quad (2.34)$$

Wegen

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{i\omega} \left(e^{i\omega t} - e^{i\omega t_0} \right) = t - t_0 \quad (2.35)$$

folgt für $\omega \rightarrow 0$ nun der statische Fall! Aus den Ansätzen $\check{\mathcal{E}} = \mathcal{E}(\vec{r})e^{i\omega t}$ und $\check{\mathcal{H}} = \mathcal{H}(\vec{r})e^{i\omega t}$ folgt

$$\check{\mathcal{D}} = \varepsilon \check{\mathcal{E}} + \frac{4\pi\sigma}{i\omega} \mathcal{E}(\vec{r}) \left(e^{i\omega t} - e^{i\omega t_0} \right) \quad (2.36)$$

$$\check{\mathcal{B}} = \mu \check{\mathcal{H}} \quad (2.37)$$

Auch hier resultiert der statische Fall für $\omega \rightarrow 0$! Für die komplexe Leitfähigkeit erhält man in diesem Fall

$$\varkappa = \frac{\varepsilon}{4\pi} \left[\partial_t \mathcal{E}(\vec{r}) e^{i\omega t} \right] \mathcal{E}(\vec{r})^{-1} e^{-i\omega t} + \sigma \quad (2.38)$$

$$= \frac{i\varepsilon\omega}{4\pi} + \sigma \quad (2.39)$$

Stationäre (zeitunabhängige) Maxwell'sche Gleichungen

Da die Divergenzgleichung für die Dielektrische Verschiebung

$$\vec{\partial} \cdot \check{\mathcal{D}} = 4\pi \check{\varrho}_k \quad (2.40)$$

für alle Zeiten gelten muß, folgen die beiden Gleichungen

$$\Rightarrow \vec{\partial} \cdot (\varepsilon \mathcal{E}(\vec{r})) = 0 \quad \text{und} \quad \vec{\partial} \cdot (\mathcal{J} + \sigma \mathcal{E}) = 0. \quad (2.41)$$

Aus

$$\vec{\partial} \times \check{\mathcal{H}} - \partial_0 \check{\mathcal{D}} = \frac{4\pi}{c} \check{\mathcal{J}} \quad (2.42)$$

folgt

$$\vec{\partial} \times \mathcal{H} = \frac{4\pi}{c} (\mathcal{J}(\vec{r}) + \varkappa \mathcal{E}(\vec{r})). \quad (2.43)$$

Aus dieser Gleichung folgt die **Divergenzfreiheit des Gesamtstromes**:

$$\vec{\partial} \cdot (\mathcal{J} + \varkappa \mathcal{E}) = 0 \quad (2.44)$$

$$\vec{\partial} \cdot \check{\mathcal{B}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\partial} \cdot (\mu \mathcal{H}) = 0 \quad (2.45)$$

$$\partial_0 \vec{B} + \vec{\partial} \times \vec{\mathcal{E}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu \frac{\hat{i}\omega}{c} \mathcal{H} + \vec{\partial} \times \mathcal{E} = 0 \quad (2.46)$$

Zusammenfassung:

$$\begin{array}{l} \vec{\partial} \cdot (\varepsilon \mathcal{E}(\vec{r})) = 0, \quad \vec{\partial} \cdot (\mathcal{J} + \sigma \mathcal{E}) = 0 \quad \vec{\partial} \times \mathcal{H} = \frac{4\pi}{c} (\mathcal{J}(\vec{r}) + \varkappa \mathcal{E}(\vec{r})) \\ \Rightarrow \vec{\partial} \cdot (\mathcal{J} + \varkappa \mathcal{E}) = 0 \\ \vec{\partial} \cdot (\mu \mathcal{H}) = 0 \quad \mu \frac{\hat{i}\omega}{c} \mathcal{H} + \vec{\partial} \times \mathcal{E} = 0 \end{array} \quad (2.47)$$

stationäre Maxwellgleichungen

2.1.8 Entwicklung nach Potenzen der Frequenz

Um eine quasi-stationäre Näherung der stationären, komplexen Maxwell'schen Gleichungen zu erhalten, wird eine Entwicklung nach Potenzen der Frequenz ω gemacht. Für kleine Frequenzen reicht es dann, je nach gewünschter Genauigkeit, entsprechende Ordnungen der Maxwell'schen Gleichungen zu lösen. Setzt man die Potenzreihenansätze für die Felder

$$\mathcal{E}(\vec{r}) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k \mathcal{E}_k(\vec{r}), \quad \mathcal{H}(\vec{r}) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k \mathcal{H}_k(\vec{r}) \quad (2.48)$$

in das Ampèresche Durchflutungsgesetz ein

$$\vec{\partial} \times \mathcal{H} = \frac{4\pi}{c} (\mathcal{J} + \varkappa \mathcal{E}) = \frac{4\pi}{c} \left(\mathcal{J} + \left[\sigma + \frac{\hat{i}\omega \varepsilon}{4\pi} \right] \mathcal{E} \right), \quad (2.49)$$

so erhält man eine nach ω -Potenzen sortierte Gleichung

$$\sum_{k=0}^{\infty} \omega^k \left[\vec{\partial} \times \mathcal{H}_k - \frac{4\pi}{c} (\sigma \mathcal{E}_k + \mathcal{J} \delta_{k0} + \frac{\hat{i}\varepsilon}{4\pi} \mathcal{E}_{k-1}) \right] = 0. \quad (2.50)$$

Setzt man nun noch $\mathcal{E}_{-1} \equiv 0$ so gelten folgende Gleichungen:

$$\vec{\partial} \times \mathcal{H}_k - \frac{4\pi}{c} (\sigma \mathcal{E}_k + \mathcal{J} \delta_{k0} + \frac{\hat{i}\varepsilon}{4\pi} \mathcal{E}_{k-1}) = 0 \quad \forall k \geq 0 \quad (2.51)$$

Entsprechend erhält man aus dem Faradayschen Induktionsgesetz

$$\mu \frac{\hat{i}\omega}{c} \mathcal{H} + \vec{\partial} \times \mathcal{E} = 0 \quad (2.52)$$

mit der Zusatzdefinition $\mathcal{H}_{-1} \equiv 0$ eine weitere Gleichung für die Koeffizientenfunktionen

$$\hat{i} \frac{\mu}{c} \mathcal{H}_{k-1} + \vec{\partial} \times \mathcal{E}_k = 0 \quad \forall k \geq 0. \quad (2.53)$$

Analog erhält man Divergenzgleichungen für die Felder \mathcal{H}_k

$$\vec{\partial} \cdot (\mu \mathcal{H}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\partial} \cdot (\mu \mathcal{H}_k) = 0 \quad \forall k \geq 0. \quad (2.54)$$

Dieses System von Gleichungen für die Koeffizientenfunktionen erlaubt eine rekursive Berechnung der Felder \mathcal{E}_k und \mathcal{H}_k .

Ordnung $k = 0$ (statischer Fall)

Für die Entwicklungsordnung $k = 0$ geht die eingeprägte Stromdichte \mathcal{J} als Quelle ein. In höheren Ordnungen übernehmen diese Rolle die bereits berechneten Felder niedrigerer Ordnung. Das Ampèresche Durchflutungsgesetz lautet in niedrigster Ordnung

$$\vec{\partial} \times \mathcal{H}_0 - \frac{4\pi}{c}(\sigma \mathcal{E}_0 + \mathcal{J}) = 0. \quad (2.55)$$

Berechnet man hiervon die Divergenz, so entfällt der erste Term und man erhält

$$\Rightarrow \vec{\partial} \cdot (\sigma \mathcal{E}_0 + \mathcal{J}) = 0 = (\vec{\partial} \sigma) \cdot \mathcal{E}_0 + \sigma \vec{\partial} \cdot \mathcal{E}_0 + \vec{\partial} \cdot \mathcal{J} = 0. \quad (2.56)$$

Die niedrigste Ordnung des Faradayschen Induktionsgesetzes besagt, daß die äußere Ableitung des Feldes \mathcal{E}_0 verschwindet

$$\vec{\partial} \times \mathcal{E}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\partial} \wedge \mathcal{E}_0 = 0. \quad (2.57)$$

Mit der Atiyah-Kähler Beziehung $\vec{\partial} \wedge \mathcal{E}_0 + \vec{\partial} \cdot \mathcal{E}_0 = \vec{\partial} \mathcal{E}_0$ kann man die innere und äußere Ableitung zur invarianten Ableitung (Clifford Produkt, geometrisches Produkt) zusammenfassen und man erhält eine Spinorgleichung für das Feld \mathcal{E}_0

$$\Rightarrow \boxed{\sigma \vec{\partial} \mathcal{E}_0 + (\vec{\partial} \sigma) \cdot \mathcal{E}_0 = -\vec{\partial} \cdot \mathcal{J}} \quad (2.58)$$

 \mathcal{E}_0 -Feldgleichung in Spinorform

Für $\sigma \neq 0$ kann diese Spinorgleichung in der Form

$$\vec{\partial} \mathcal{E}_0 + \frac{(\vec{\partial} \sigma) \cdot \mathcal{E}_0}{\sigma} = -\frac{\vec{\partial} \cdot \mathcal{J}}{\sigma} \quad (2.59)$$

geschrieben werden. Entsprechend läßt sich eine Spinorgleichung für das Magnetfeld \mathcal{H}_0 herleiten, indem man die duale Form des Ampèresche Durchflutungsgesetzes

$$\mu \vec{\partial} \wedge \mathcal{H}_0 = \frac{4\pi i \mu}{c}(\sigma \mathcal{E}_0 + \mathcal{J}) \quad (2.60)$$

mit der Divergenzgleichung für das Magnetfeld

$$\vec{\partial} \cdot (\mu \mathcal{H}_0) = (\vec{\partial} \mu) \cdot \mathcal{H}_0 + \mu \vec{\partial} \cdot \mathcal{H}_0 = 0 \quad (2.61)$$

zusammenfaßt

$$\Rightarrow \boxed{\mu \vec{\partial} \mathcal{H}_0 + (\vec{\partial} \mu) \cdot \mathcal{H}_0 = \frac{4\pi i \mu}{c}(\sigma \mathcal{E}_0 + \mathcal{J})}. \quad (2.62)$$

 \mathcal{H}_0 -Feldgleichung in Spinorform

Das i in dieser Gleichung ist der Einheitspseudoskalar der Algebra und nicht die imaginäre Einheit der komplexen Zahlen (i)!

Höhere Ordnungen in ω : $k > 0$

Für die höheren Ordnungen tritt die Stromdichte nicht mehr als Quelle direkt auf. Indirekt geht diese selbstverständlich in die Gleichungen ein, da die Felder niedrigerer Ordnung zukzessive diese Abhängigkeit weiter transportieren. Wie im Fall $k = 0$ wird die Divergenz des Ampèreschen Durchflutungsgesetzes (hier nun in der Ordnung k)

$$\vec{\partial} \times \mathcal{H}_k - \frac{4\pi}{c} \left(\sigma \mathcal{E}_k + \frac{i\varepsilon}{4\pi} \mathcal{E}_{k-1} \right) = 0 \quad (2.63)$$

berechnet, wodurch die Rotation des Magnetfeldes beseitigt wird

$$\Rightarrow (\vec{\partial}\sigma) \cdot \mathcal{E}_k + \sigma \vec{\partial} \cdot \mathcal{E}_k = -\frac{\hat{i}\varepsilon}{4\pi} \vec{\partial} \cdot \mathcal{E}_{k-1}. \quad (2.64)$$

Wie vorher, kann man mit der Atiyah-Kähler Beziehung die duale Version des Faradayschen Induktionsgesetzes und das Ampèresche Durchflutungsgesetz zu einer Spinorgleichung für das elektrische Feld k -ter Ordnung zusammenfassen.

$$\vec{\partial} \times \mathcal{E}_k = -\hat{i}\frac{\mu}{c} \mathcal{H}_{k-1} \quad \Rightarrow \quad \sigma \vec{\partial} \wedge \mathcal{E}_k = -\hat{i}i\frac{\sigma\mu}{c} \mathcal{H}_{k-1} \quad (2.65)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma \vec{\partial} \mathcal{E}_k + (\vec{\partial}\sigma) \cdot \mathcal{E}_k = -\frac{\hat{i}\varepsilon}{4\pi} \vec{\partial} \cdot \mathcal{E}_{k-1} - \hat{i}i\frac{\sigma\mu}{c} \mathcal{H}_{k-1}} \quad (2.66)$$

\mathcal{E}_k -Feldgleichung in Spinorform

Analog erhält man die Spinorgleichung für das Magnetfeld k -ter Ordnung.

$$\vec{\partial} \times \mathcal{H}_k = \frac{4\pi}{c} \left(\sigma \mathcal{E}_k + \frac{\hat{i}\varepsilon}{4\pi} \mathcal{E}_{k-1} \right) \quad (2.67)$$

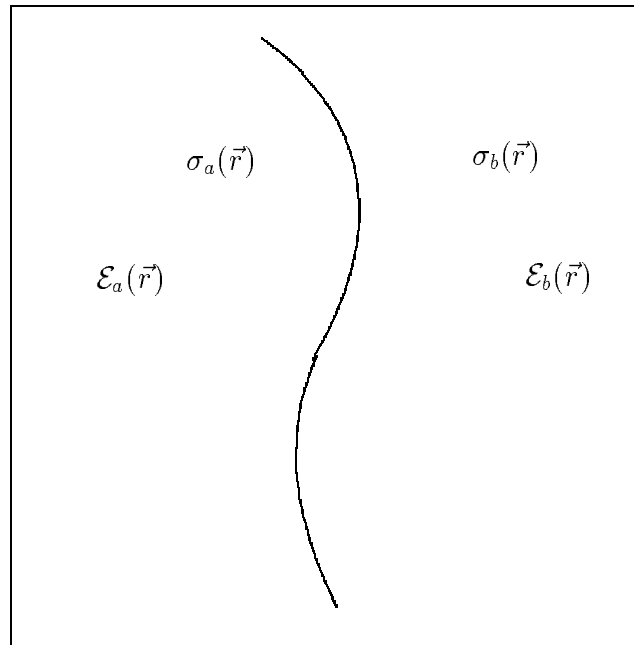
$$\mu \vec{\partial} \cdot \mathcal{H}_k + (\vec{\partial}\mu) \cdot \mathcal{H}_k = 0 \quad (2.68)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu \vec{\partial} \mathcal{H}_k + (\vec{\partial}\mu) \cdot \mathcal{H}_k = i\frac{4\pi\mu}{c} \left(\sigma \mathcal{E}_k + \frac{\hat{i}\varepsilon}{4\pi} \mathcal{E}_{k-1} \right)} \quad (2.69)$$

\mathcal{H}_k -Feldgleichung in Spinorform

2.1.9 Randbedingungen der \mathcal{E}_0 -Feldgleichung

Für Leitfähigkeitsfelder σ die eine Unstetigkeit auf einer Fläche haben, die zwei Raumgebiete trennt, kann das Problem des Lösens der kompletten Feldgleichung auf folgende drei Aufgaben reduziert werden.



1. Lösen der Feldgleichung im Raumgebiet a
2. Lösen der Feldgleichung im Raumgebiet b
3. Anpassen der Lösungen, so daß sie die Randbedingung erfüllen.

Zum Beschreiben dieser Situation werden θ -Distributionen verwendet. Um auch Multiplikationen von Distributionen zu ermöglichen, verwendet man die Distributionen im Sinne von Colombeau [8]. Das globale Leitfähigkeitsfeld wird in zwei lokale Teile zerlegt

$$\sigma(\vec{r}) = \theta(b(\vec{r}))\sigma_a(\vec{r}) + \theta(-b(\vec{r}))\sigma_b(\vec{r}), \quad (2.70)$$

wobei $b(\vec{r}) = 0$ die Grenzfläche definiert. Der entsprechende Ansatz für das elektrische Feld lautet

$$\mathcal{E}_0(\vec{r}) = \theta(b(\vec{r}))\mathcal{E}_a(\vec{r}) + \theta(-b(\vec{r}))\mathcal{E}_b(\vec{r}). \quad (2.71)$$

$$\vec{\partial}\sigma = (\vec{\partial}b)\delta(b)\sigma_a(\vec{r}) + \theta(b)(\vec{\partial}\sigma_a) - (\vec{\partial}b)\delta(b)\sigma_b + \theta(-b)(\vec{\partial}\sigma_b) \quad (2.72)$$

Da in der Spinor Feldgleichung auch der Gradient von σ und die invariante Ableitung von \mathcal{E}_0 enthalten ist, werden diese Größen noch berechnet und anschließend alle Ansätze und Ableitungen in die Feldgleichung eingesetzt.

$$\vec{\partial}\mathcal{E}_0 = (\vec{\partial}b)\delta(b)\mathcal{E}_a + \theta(b)(\vec{\partial}\mathcal{E}_a) - (\vec{\partial}b)\delta(b)\mathcal{E}_b + \theta(-b)(\vec{\partial}\mathcal{E}_b) \quad (2.73)$$

Nach dem alle Größen eingesetzt sind, stellt man fest, daß auf dem Rand nur noch Terme beitragen, die $\delta(b)$ enthalten. Comlombeau hat verallgemeinerte Funktionen und verallgemeinerte Funktionswerte definiert, so daß nach Ausklammern der verallgemeinerten Funktionswert $\delta(b)$ (singulär), alle anderen Funktionswerte (regulär) wegfallen.

$$(\sigma_a + \sigma_b)(\vec{\partial}b)\delta(b)(\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_b) + (\vec{\partial}b)\delta(b)(\sigma_a - \sigma_b) \cdot (\mathcal{E}_a + \mathcal{E}_b) = 0 \quad (2.74)$$

Dieses Ergebnis ist allerdings auf die Annahme gestützt, daß die Stromdichte auf dem Rand regulär ist. Mit der Definition der Normalen auf der Randkurve $\vec{n} \equiv \frac{\vec{\partial}b}{|\vec{\partial}b|}$ läßt sich diese Gleichung in der Form

$$\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_b = -\frac{\sigma_a - \sigma_b}{\sigma_a + \sigma_b} \vec{n}(\vec{n} \cdot (\mathcal{E}_a + \mathcal{E}_b)) \quad (2.75)$$

schreiben. Um diese Gleichung nach \mathcal{E}_a oder \mathcal{E}_b auflösen zu können, muß das innere Produkt durch eines der beiden Felder ausgedrückt werden. Dazu addiert man zuerst $2\mathcal{E}_b$ zu der Gleichung und multipliziert dann mit \vec{n} im inneren Produkt. Damit erhält man dann die gewünschte Beziehung.

$$\vec{n} \cdot (\mathcal{E}_a + \mathcal{E}_b) = 2\vec{n} \cdot \mathcal{E}_b - \frac{\sigma_a - \sigma_b}{\sigma_a + \sigma_b} \vec{n} \cdot (\mathcal{E}_a + \mathcal{E}_b) \quad (2.76)$$

$$\Rightarrow \vec{n} \cdot (\mathcal{E}_a + \mathcal{E}_b) = \vec{n} \cdot \mathcal{E}_b \frac{\sigma_a + \sigma_b}{\sigma_a} \quad (2.77)$$

Nachdem man dieses innere Produkt in obige Gleichung eingesetzt hat, erhält man die gewünschte Randbedingung

$$\boxed{\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_b - \frac{\sigma_a - \sigma_b}{\sigma_a} \vec{n}(\vec{n} \cdot \mathcal{E}_b)}. \quad (2.78)$$

Randbedingung für \mathcal{E}_0

Diese Randbedingung ist weder vom Neumannschen noch vom Dirichletschen Typ. Für spezielle Wahl von Leitfähigkeitswerten in den benachbarten Gebieten kann man diese allgemeinere Randbedingung auf eine Neumannsche oder Dirichletsche spezialisieren. Ist ein Gebiet beispielsweise isolierend, so ist das elektrische Feld notwendig tangential zur Randkurve. Dies ist eine Neumannsche Randbedingung. Möchte man die Verwendung des inneren Produktes vermeiden, so kann die Randbedingung auch nur durch geometrische (Graßmann–Clifford) Produkte ausdrücken. Verwendet man folgende Beziehung für das innere Produkt zweier Vektoren (für Bivektoren und Multi-vektoren höheren Grades sieht diese Formel komplizierter aus!)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a}) \quad (2.79)$$

so erhält man

$$\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_b - \frac{\sigma_a - \sigma_b}{2\sigma_a} \vec{n}(\vec{n}\mathcal{E}_b + \mathcal{E}_b\vec{n}) \quad (2.80)$$

$$= \mathcal{E}_b \frac{\sigma_a + \sigma_b}{2\sigma_a} - \frac{\sigma_a - \sigma_b}{2\sigma_a} \vec{n}\mathcal{E}_b\vec{n} \quad (2.81)$$

und schließlich

$$\boxed{(1 + \eta)\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_b - \eta\vec{n}\mathcal{E}_b\vec{n}, \quad \eta = \frac{\sigma_a - \sigma_b}{\sigma_a + \sigma_b}.} \quad (2.82)$$

Randbedingung für \mathcal{E}_0 mit geometrischem Produkt ausgedrückt

2.2 Reduktion auf 2 Dimensionen

Die Spinorgleichungen niedrigster Ordnung lauten (vergl. (2.58), (2.62)):

$$\sigma\vec{\partial}\mathcal{E} + \mathcal{E} \cdot (\vec{\partial}\sigma) = -\vec{\partial} \cdot \mathcal{J} \quad (2.83)$$

$$\mu(\vec{\partial}\mathcal{H}) + \mathcal{H} \cdot (\vec{\partial}\mu) = \frac{4\pi i\mu}{c}(\sigma\mathcal{E} + \mathcal{J}) \quad (2.84)$$

2.2.1 Zylindersymmetrie / Translationssymmetrie

In diesem Abschnitt werden Konfigurationen einer speziellen Symmetrie näher untersucht. Dazu wird angenommen, daß die vorgegebenen Felder translationsinvariant längs der Achse \vec{s} , $\vec{s}^2 = 1$ sind.

$$\mathcal{J}(\vec{r}) = \mathcal{J}(\vec{r} + \alpha\vec{s}) \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \vec{s} \cdot \mathcal{J} = 0 \quad (2.85)$$

$$\mu(\vec{r}) = \mu(\vec{r} + \alpha\vec{s}), \quad \varkappa(\vec{r}) = \varkappa(\vec{r} + \alpha\vec{s}) \quad (2.86)$$

Um auch durch eine spezielle Einschränkung der Richtung des Vektorfeldes \mathcal{J} bezüglich der ausgezeichneten Achse \vec{s} , die Symmetrie in dem Vektorcharakter respektieren zu können, stehen zwei mögliche Projektionen zur Verfügung – orthogonal oder parallel zur Achse \vec{n} . Da eine Stromdichte längs \vec{s} nicht viel interessante Ergebnisse liefert, wird hier nur der Fall $\vec{s} \cdot \mathcal{J} = 0$ diskutiert. Diese speziellen Ortsabhängigkeiten haben zur Folge, daß alle Richtungsableitungen dieser Felder in Richtung \vec{s} verschwinden. Wendet man also die Richtungsableitung auf die komplette Spinorgleichung für das \mathcal{E} -Feld an, so erhält man sofort:

$$\sigma\vec{\partial} \left[(\vec{s} \cdot \vec{\partial})\mathcal{E} \right] + \left[(\vec{s} \cdot \vec{\partial})\mathcal{E} \right] \cdot (\vec{\partial}\sigma) = 0 \quad (2.87)$$

Dies ist die Feldgleichung für \mathcal{E} ohne Stromquellen. Für diese Situation verschwindet das Feld (ohne Stromeinprägung soll auch kein Ohmscher Strom fließen). Deshalb gilt

$$(\vec{s} \cdot \vec{\partial})\mathcal{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}(\vec{r}) = \mathcal{E}(\vec{r} + \alpha\vec{s}), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.88)$$

Zerlegt man nun das \mathcal{E} Feld in senkrecht und parallel Anteile bezüglich \vec{s}

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\parallel} + \mathcal{E}_{\perp}, \quad \mathcal{E}_{\parallel} = \vec{s}(\vec{s} \cdot \mathcal{E}), \quad \mathcal{E}_{\perp} = \mathcal{E} - \mathcal{E}_{\parallel}, \quad (2.89)$$

so erhält man, mit der gleichen Zerlegung für die invariante Ableitung, $\vec{\partial} = \vec{\partial}_{\parallel} + \vec{\partial}_{\perp}$

$$\sigma \vec{\partial}_{\perp}(\mathcal{E}_{\parallel} + \mathcal{E}_{\perp}) + \mathcal{E}_{\perp} \cdot (\vec{\partial}_{\perp} \sigma) = -\vec{\partial}_{\perp} \cdot \mathcal{J}. \quad (2.90)$$

$$\Rightarrow \quad \sigma i \underbrace{(\vec{\partial}_{\perp} \times \mathcal{E}_{\parallel})}_{\perp} + \underbrace{(\vec{\partial}_{\perp} \times \mathcal{E}_{\perp})}_{\parallel} + \sigma(\vec{\partial}_{\perp} \cdot \mathcal{E}_{\perp}) + \mathcal{E}_{\perp} \cdot (\vec{\partial}_{\perp} \sigma) = -\vec{\partial}_{\perp} \cdot \mathcal{J} \quad (2.91)$$

Vergleicht man nun den Bivektoranteil in Richtung von \vec{s} und senkrecht dazu getrennt, so erkennt man, daß $\vec{\partial}_{\perp} \mathcal{E}_{\parallel} = 0$ und

$$\boxed{\sigma \vec{\partial}_{\perp} \mathcal{E}_{\perp} + \mathcal{E}_{\perp} \cdot (\vec{\partial}_{\perp} \sigma) = -\vec{\partial}_{\perp} \cdot \mathcal{J}.} \quad (2.92)$$

Analoge Überlegungen führen zur Translationsinvarianz des \mathcal{H} -Feldes.

$$\mathcal{H}(\vec{r}) = \mathcal{H}(\vec{r} + \alpha\vec{s}), \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (2.93)$$

Nach Zerlegung in parallel und senkrecht Anteil erhält man

$$\mu(\vec{\partial}_{\perp} \mathcal{H}_{\perp}) + \mathcal{H}_{\perp} \cdot (\vec{\partial}_{\perp} \mu) = 0, \quad \mu \vec{\partial}_{\perp} \mathcal{H}_{\parallel} = -\frac{4\pi i \mu}{c}(\sigma \mathcal{E}_{\perp} + \mathcal{J}). \quad (2.94)$$

Mit der Definition $\mathcal{H}_{\parallel} = \vec{s} h_{\parallel}$, $h_{\parallel} \in \mathbb{R}$ folgt zunächst

$$\vec{s} \times (\vec{\partial}_{\perp} h_{\parallel}) = \frac{4\pi}{c}(\sigma \mathcal{E}_{\perp} + \mathcal{J}). \quad (2.95)$$

Wegen $\vec{s} \times (\vec{s} \times \vec{\partial}_{\perp} h_{\parallel}) = \vec{s}(\vec{s} \cdot \vec{\partial}_{\perp} h_{\parallel}) - \vec{\partial}_{\perp} h_{\parallel}$ resultiert schließlich eine Vektorgleichung für das Hilffeld h_{\parallel}

$$\boxed{\vec{\partial}_{\perp} h_{\parallel} = \frac{4\pi}{c}(\sigma \mathcal{E}_{\perp} + \mathcal{J}) \times \vec{s}.} \quad (2.96)$$

Man erkennt, daß die Spinorgleichung für das elektrische Feld durch diese spezielle Symmetrie forminvariant bleibt und lediglich das Feld durch dessen senkrecht-Anteil ersetzt wird. Für das Magnetfeld ändert sich die Spinorgleichung total ab!

2.2.2 Infinitesimal dünne Leitfähigkeitsschicht

O.B.d.A. soll der Ursprung in dieser Schicht, deren Normale \vec{s} , $\vec{s}^2 = 1$ ist, liegen. Nach der Zerlegung der Ortskoordinate in parallel- und senkrecht-Anteil, seien die Vorgabefelder durch:

$$\mu(\vec{r}) = \delta(\vec{r}_{\parallel})\mu_0(\vec{r}_{\perp}) + 1, \quad (2.97)$$

$$\sigma(\vec{r}) = \delta(\vec{r}_{\parallel})\sigma_0(\vec{r}_{\perp}) \quad (2.98)$$

und

$$\mathcal{J}(\vec{r}) = \mathcal{J}_{\perp}(\vec{r}_{\perp})\delta(\vec{r}_{\parallel}) \quad (2.99)$$

definiert. Für die Richtungsableitungen erhält damit

$$(\vec{s} \cdot \vec{\partial})\mu = \delta'(\vec{r}_{\parallel})\mu_0(\vec{r}_{\perp}), \quad (\vec{s} \cdot \vec{\partial})\sigma = \delta'(\vec{r}_{\parallel})\sigma_0(\vec{r}_{\perp}) \quad (2.100)$$

und

$$(\vec{s} \cdot \vec{\partial})\mathcal{J} = \delta'(\vec{r}_{\parallel})\mathcal{J}_{\perp}(\vec{r}_{\perp}). \quad (2.101)$$

Mit diesen Definition erhält man für die Spinorgleichung des elektrischen Feldes

$$\delta(\vec{r}_{\parallel})\sigma_0(\vec{r}_{\perp})\vec{\partial}\mathcal{E} + \mathcal{E} \cdot ((\vec{\partial}_{\parallel} + \vec{\partial}_{\perp})\delta(\vec{r}_{\parallel})\sigma_0(\vec{r}_{\perp})) = -(\vec{\partial}_{\parallel} + \vec{\partial}_{\perp}) \cdot \delta(\vec{r}_{\parallel})\mathcal{J}_{\perp}(\vec{r}_{\perp}). \quad (2.102)$$

$$\iff \delta(\vec{r}_{\parallel})\sigma_0(\vec{r}_{\perp})\vec{\partial}\mathcal{E} + \mathcal{E} \cdot (\delta(\vec{r}_{\parallel})\vec{\partial}_{\perp}\sigma_0(\vec{r}_{\perp}) + \vec{s}\delta'(\vec{r}_{\parallel})\sigma_0(\vec{r}_{\perp})) = \delta(\vec{r}_{\parallel})\vec{\partial}_{\perp} \cdot \mathcal{J}_{\perp}(\vec{r}_{\perp}) \quad (2.103)$$

Auf der Leitfähigkeitsschicht gilt dann (δ und δ' sind linear unabhängig!)

$$\sigma_0(\vec{r}_{\perp})\vec{\partial}\mathcal{E} + \mathcal{E} \cdot (\vec{\partial}_{\perp}\sigma_0(\vec{r}_{\perp})) = -\vec{\partial}_{\perp} \cdot \mathcal{J}_{\perp}(\vec{r}_{\perp}) \quad (2.104)$$

und

$$\vec{s}\sigma_0(\vec{r}_{\perp}) \cdot \mathcal{E} = 0, \quad \Rightarrow \mathcal{E}_{\parallel} = 0 \quad \vee \quad \sigma_0(\vec{r}_{\perp}) = 0. \quad (2.105)$$

Für unseren Fall bedeutet dies (da $\sigma_0 = 0$ **nicht** in der ganzen Leitfähigkeitsschicht gelten soll)

$$\mathcal{E}_{\parallel} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_0(\vec{r}_{\perp})\vec{\partial}_{\perp}\mathcal{E}_{\perp} + \mathcal{E}_{\perp} \cdot (\vec{\partial}_{\perp}\sigma_0(\vec{r}_{\perp})) = -\vec{\partial}_{\perp} \cdot \mathcal{J}_{\perp}(\vec{r}_{\perp}). \quad (2.106)$$

Also führt auch diese spezielle, ganz anders geartete Konfiguration, zu der selben Spinorgleichung für das \mathcal{E} -Feld! Für das \mathcal{H} -Feld ist das bereits nicht mehr der Fall. Die \mathcal{H} -Feld Gleichung wird für die hier betrachtete Situation deutlich komplizierter, als im vorhergehenden Abschnitt. Oder anders ausgedrückt, die hier vorliegende Symmetrie vereinfacht die Feldgleichung für das \mathcal{H} -Feld kaum.

2.2.3 Liftung vom $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$

In der Clifford Algebra sind sowohl Vektoren, als auch Größen mit Quadrat -1 enthalten. Somit kann ein Isomorphismus zwischen \mathbb{R}^2 und \mathbb{C} kanonisch, durch das Clifford Produkt selbst, erzeugt werden. Durch die explizite Realisierung dieses Isomorphismus ergeben sich wichtige Vorteile gegenüber der sonst üblichen symbolischen Identifizierung komplexer Größen mit Vektoren aus dem \mathbb{R}^2 .

$$\vec{r} = \vec{\sigma}_1 x + \vec{\sigma}_2 y = \vec{\sigma}_1(x + i_3 y) = \vec{\sigma}_1 z \quad (2.107)$$

$$i_3 = \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 = i\vec{\sigma}_3, \quad z = x + i_3 y, \quad z \in \mathbb{C}(i_3) \quad (2.108)$$

$$\boxed{\vec{\sigma}_1 z = \vec{r} \leftrightarrow z} \quad (2.109)$$

Wie sich später als zweckmäßig herausstellen wird, identifiziert man die Feldern im Unterschied zu den Ortsvektoren durch

$$\vec{E} = E_x \vec{\sigma}_1 + E_y \vec{\sigma}_2 = (E_x - i_3 E_y) \vec{\sigma}_1 = E \vec{\sigma}_1 \quad (2.110)$$

$$E = E_x - i_3 E_y \in \mathbb{C}(i_3) \quad (2.111)$$

mit komplexen Funktionen. Die komplexe Konjugation hängt mit der Reversion und der Multiplikation mit dem Vektor $\vec{\sigma}_1$ durch

$$\tilde{z} = \vec{\sigma}_1 z \vec{\sigma}_1 = x - i_3 y \quad (2.112)$$

zusammen. Somit können die Koordinaten x und y auf z und \tilde{z} umgerechnet werden. Diese Lif-
tung des \mathbb{R}^2 in den \mathbb{C}^2 [4] ist schließlich der Schlüssel zur Konstruktion von Lösungen der Feldglei-
chung. Der Dirac-Operator (invariante Ableitung) kann durch partielle Ableitungen nach z oder
 \tilde{z} (Cauchy-Riemann Operator) ausgedrückt werden.

$$\vec{\partial} = \vec{\sigma}_1 \partial_x + \vec{\sigma}_2 \partial_y = \vec{\sigma}_1 (\partial_x + i_3 \partial_y) = \vec{\sigma}_1 (\partial_z + \partial_{\tilde{z}} + i_3 i_3 (\partial_z - \partial_{\tilde{z}})) = 2\vec{\sigma}_1 \partial_{\tilde{z}} = 2\partial_z \vec{\sigma}_1 \quad (2.113)$$

Mit diesen Notationen und der speziellen Wahl von Punktelektroden (δ -Quellen)

$$-\vec{\partial} \cdot \mathcal{J} = \pi \underbrace{\sigma I}_J [\delta(\vec{r} - \vec{p}) - \delta(\vec{r} - \vec{q})], \quad (2.114)$$

erhält man für die Feldgleichung in komplexer Form zunächst

$$2\sigma \vec{\sigma}_1 \partial_{\tilde{z}} E(z, \tilde{z}) \vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_1 (E \partial_z \sigma + \tilde{E} \partial_z \sigma) \vec{\sigma}_1 = \pi \sigma I [\delta(\vec{r} - \vec{p}) - \delta(\vec{r} - \vec{q})]. \quad (2.115)$$

Nach Multiplikation von links und rechts mit $\vec{\sigma}_1$ erhält man

$$\boxed{\sigma \partial_{\tilde{z}} E + \frac{1}{2} (E \partial_z \sigma + \tilde{E} \partial_z \sigma) = \frac{\pi}{2} \sigma I [\delta(\vec{r} - \vec{p}) - \delta(\vec{r} - \vec{q})] = -\frac{1}{2} \vec{\partial} \cdot \mathcal{J}.} \quad (2.116)$$

komplexe Feldgleichung für \mathbf{E}

Um die Randbedingung für die Randkurve $b(z, \tilde{z}) = 0 \iff \beta(z) = \tilde{z}$

$$\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_b - \frac{\sigma_a - \sigma_b}{\sigma_a} \tilde{n} (\tilde{n} \cdot \mathcal{E}_b) \quad (2.117)$$

in komplexe Form umzuschreiben, werden alle Vektorgrößen durch die entsprechenden komplexen
Größen ersetzt.

$$E_a \vec{\sigma}_1 = E_b \vec{\sigma}_1 - \frac{\sigma_a - \sigma_b}{\sigma_a} \vec{\sigma}_1 n \frac{1}{2} (\vec{\sigma}_1 n E_b \vec{\sigma}_1 + E_b n) \quad (2.118)$$

$$= E_b \vec{\sigma}_1 - \frac{\sigma_a - \sigma_b}{2\sigma_a} [E_b + \tilde{n}^2 \tilde{E}_b] \vec{\sigma}_1 \quad (2.119)$$

$$\Rightarrow E_a = E_b \frac{\sigma_a + \sigma_b}{2\sigma_a} - \frac{\sigma_a - \sigma_b}{2\sigma_a} \tilde{n}^2 \tilde{E}_b \quad (2.120)$$

Nun folgt aus $b(z, \tilde{z}) = 0$ und $\beta(z) = \tilde{z}$

$$0 = \frac{d}{dz} b(z, \tilde{z}) = \frac{d}{dz} b(z, \beta(z)) = \partial_z b + \beta'(z) \partial_{\tilde{z}} b \quad (2.121)$$

$$\tilde{n} = \vec{\sigma}_1 n = \vec{\sigma}_1 \frac{\partial_{\tilde{z}} b}{|\partial_{\tilde{z}} b|}, \quad n = \frac{\partial_z b}{|\partial_z b|}, \quad \tilde{n} = \frac{\partial_z b}{|\partial_z b|}, \quad n \tilde{n} = 1 \quad (2.122)$$

$$\Rightarrow 0 = \tilde{n} |\partial_{\tilde{z}} b| + \beta'(z) n |\partial_z b| \Rightarrow \tilde{n} + \beta' n = 0, \Rightarrow \tilde{n}^2 = -\beta' \quad (2.123)$$

$$\Rightarrow E_a = E_b \frac{\sigma_a + \sigma_b}{2\sigma_a} + \frac{\sigma_a - \sigma_b}{2\sigma_a} \beta' \tilde{E}_b \quad (2.124)$$

$$\frac{2\sigma_a}{\sigma_a + \sigma_b} E_a = E_b + \underbrace{\frac{\sigma_a - \sigma_b}{\sigma_a + \sigma_b}}_{\eta} \beta' \tilde{E}_b \quad (2.125)$$

$$1 + \eta = \frac{2\sigma_a}{\sigma_a + \sigma_b} \quad (2.126)$$

$$\boxed{(1 + \eta)E_a = E_b + \eta\beta' \tilde{E}_b} \quad (2.127)$$

komplexe Randbedingung

Um eine entsprechende komplexe Gleichung für das Magnetfeld zu erhalten ersetzt man in der Vektorgleichung (2.96)

$$\vec{\partial} h = \frac{4\pi}{c} (\sigma \mathcal{E} + J) \times \vec{n} \quad (2.128)$$

ebenfalls die Vektorgrößen durch Komplexe. Dabei erweist es sich als zweckmäßig den Vektor \vec{n} zu einer Orthonormalbasis $\{\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}\}$ zu ergänzen. Damit erhält man zunächst

$$(\sigma \mathcal{E} + J) \times \vec{n} = \frac{1}{2\vec{n}_1 \vec{n}_2 \vec{n}} (\sigma \mathcal{E} \vec{n} + \mathcal{J} \vec{n} - \vec{n} \mathcal{J} - \vec{n} \sigma \mathcal{E}) = \frac{1}{\vec{n}_1 \vec{n}_2} \vec{n} (\sigma \mathcal{E} + \mathcal{J}) \vec{n}. \quad (2.129)$$

Dabei wurde verwendet, daß \vec{n} mit $\vec{n}_1 \vec{n}_2$ kommutiert. Mit der Definition $\vec{r}_\perp = \vec{n}_1 x + \vec{n}_2 y = \vec{n}_1 (x + \vec{n}_1 \vec{n}_2 y)$ und folglich $\vec{\partial}_\perp = 2\vec{n}_1 \partial_z$ erhält man

$$2\vec{n}_1 \partial_z h = \frac{4\pi}{c} \frac{1}{\vec{n}_1 \vec{n}_2} \vec{n} (\sigma \mathcal{E} + \mathcal{J}) \vec{n} = \frac{4\pi}{c} \vec{n}_1 \vec{n}_2 (\sigma \mathcal{E} + \mathcal{J}) \quad (2.130)$$

und somit auch sofort

$$\partial_z h = \frac{2\pi}{c} \vec{n}_2 (\sigma \mathcal{E} + \mathcal{J}). \quad (2.131)$$

Mit $\mathcal{E} = E \vec{n}_1$ und $\mathcal{J} = j \vec{n}_1$ erhält man schließlich

$$\boxed{\partial_z h = -\frac{2\pi}{c} i_n (\sigma \tilde{E} + \tilde{j})}. \quad (2.132)$$

komplexe Feldgleichung für h

Dabei ist $i_n = \vec{n}_1 \vec{n}_2$. Interessiert man sich dann für das Magnetfeld von so muß im wesentlichen die Gleichung $\partial_z h = \frac{1}{i_z}$ gelöst werden.

2.2.4 Transformationsverhalten von Feld und Potential (H. Krüger)

Um mit einer Lösung der Feldgleichung gleich eine ganze Klasse von Problemen lösen zu können, ist es von großem Wert, das Transformationsverhalten des Feldes und des Potentials zu kennen. Speziell werden hier monogene, holomorphe Transformationen auf Feld und Potential angewandt. Ist $f(w) = z$ eine solche Transformation,

$$z = f(w), \quad f'(w) = \partial_\alpha |_\alpha f(w + \alpha) \neq 0 \Rightarrow w = f^{-1}(z) = g(z), \quad g(f(w)) = w, \quad \vec{w} = \vec{\sigma}_1 w \quad (2.133)$$

so kann man aus einer Lösung E der Feldgleichung (2.116) in z

$$\partial_z E + \frac{1}{2\sigma} (E \partial_z \sigma + \tilde{E} \partial_z \sigma) = \frac{\pi}{2} I [\delta(\vec{r} - \vec{p}) - \delta(\vec{r} - \vec{q})] \quad (2.134)$$

sofort eine Lösung $E_w = f'(w) E(f(w), \vec{\sigma}_1 f(w) \vec{\sigma}_1)$ konstruieren, welche die entsprechende Feldgleichung in w löst. Da die Transformation monogen (holomorph) ist, gilt für die Ableitung

$$\partial_z = \frac{f'(w)}{|f'(w)|^2} \partial_{\vec{w}}. \quad (2.135)$$

Ersetzt man gemäß dieser Formel die Ableitung in der Feldgleichung so erhält man

$$\frac{f'(w)}{|f'(w)|^2} \partial_{\bar{w}} E + \frac{1}{2\sigma} \left(E f'(w) \frac{\partial_{\bar{w}} \sigma}{|f'(w)|^2} + \widetilde{E f'(w)} \frac{\partial_w \sigma}{|f'(w)|^2} \right) \quad (2.136)$$

$$= \frac{\pi}{2} I \left[\frac{\delta(\bar{w} - \bar{\sigma}_1 g(\bar{\sigma}_1 \vec{p}))}{|f'(w)|^2} - \frac{\delta(\bar{w} - \bar{\sigma}_1 g(\bar{\sigma}_1 \vec{q}))}{|f'(w)|^2} \right]. \quad (2.137)$$

Wegen $\partial_{\bar{w}} f'(w) = 0$ erhält man schließlich

$$\partial_{\bar{w}} (E f'(w)) + \frac{1}{2\sigma} ((E f'(w)) \partial_{\bar{w}} \sigma + (E f'(w))^\sim \partial_w \sigma) \quad (2.138)$$

$$= \frac{\pi}{2} I [\delta(\bar{w} - \bar{\sigma}_1 g(\bar{\sigma}_1 \vec{p})) - \delta(\bar{w} - \bar{\sigma}_1 g(\bar{\sigma}_1 \vec{q}))] \quad (2.139)$$

Für das komplexe Potential Ω definiert durch $E = -\partial_z \Omega$ gilt deshalb

$$-\partial_w \Omega(f(w)) = -\frac{\partial f}{\partial w} \partial_f (\Omega(f)) = -f'(w) E(f(w)) = E_w, \quad (2.140)$$

was bedeutet, daß das komplexe Potential unter monogenen Transformationen invariant bleibt!

Kapitel 3

Elementare Lösungskonzepte

In diesem Kapitel werden Lösungen und Lösungsmethoden vorgestellt, welche die Grundideen beim Lösen der komplexen Feldgleichung für das elektrische Feld aufzeigen sollen.

3.1 Poissonsche Gleichung / zugehörige Feldgleichung

Die Feldgleichung für ein konstantes Leitfähigkeitsfeld mit beliebiger skalarer Inhomogenität (Stromquelle) lautet

$$\partial_{\bar{z}} E(z, \bar{z}) = w(z, \bar{z}) \iff \frac{1}{2} \bar{\sigma}_1 \bar{\partial} \vec{E} \sigma_1 = w(z(\vec{r}), \bar{z}(\vec{r})) \equiv -\frac{1}{2} \varrho(\vec{r}). \quad (3.1)$$

Wichtig dabei ist, daß $w, \varrho \in \mathbb{R}$. In Vektorform schreibt sich die Gleichung also

$$\bar{\partial} \vec{E} = -\varrho(\vec{r}). \quad (3.2)$$

Für skalares ϱ ist $\bar{\partial} \wedge \vec{E} = 0$ und somit existiert nach dem Lemma von Poincaré für das Feld ein Potential ϕ : $\vec{E} = -\bar{\partial} \phi$. Drückt man das Feld durch diese Potential aus, so erhält man die Poissonsche Gleichung

$$\bar{\partial}^2 \phi = \Delta \phi = \varrho(\vec{r}). \quad (3.3)$$

Satz (H. Krüger, persönliche Mitteilung vom 15.12.1993): (3.1.1)

Das Feld

$$E(z, \bar{z}) = h(z) + \int_0^1 d\beta \bar{z} w(z, \beta \bar{z}) \quad (3.4)$$

löst die Gleichung $\partial_{\bar{z}} E = w$ wobei $h(z)$ eine in z holomorphe Funktion ist.

Beweis: Da h holomorph ist, verschwindet die Ableitung $\partial_{\bar{z}} h = 0$. Deshalb ist:

$$\partial_{\bar{z}} E = \partial_{\bar{z}} \int_0^1 d\beta \bar{z} w(z, \beta \bar{z}) = \partial_{\eta}|_0 \int_0^1 d\beta (\bar{z} + \eta) w(z, \beta(\bar{z} + \eta)) \quad (3.5)$$

$$= \int_0^1 d\beta [\bar{z} \partial_{\eta}|_0 w(z, \beta(\bar{z} + \eta)) + w(z, \beta \bar{z})] \quad (3.6)$$

$$= \int_0^1 d\beta \left[\tilde{z}\beta \partial_{\tilde{m}} w(z, \tilde{m}) \Big|_{\tilde{m}=\beta\tilde{z}} + w(z, \beta\tilde{z}) \right] \quad (3.7)$$

$$= \int_0^1 d\beta \left[\tilde{z}\beta \partial_{\beta\tilde{z}} w(z, \beta\tilde{z}) + w(z, \beta\tilde{z}) \right] \quad (3.8)$$

$$= \int_0^1 d\beta [\beta \partial_\beta w(z, \beta\tilde{z}) + w(z, \beta\tilde{z})] \quad (3.9)$$

$$= \int_0^1 d\beta (1 + \beta \partial_\beta) w(z, \beta\tilde{z}) = \int_0^1 d\beta \partial_\beta (\beta w(z, \beta\tilde{z})) \quad (3.10)$$

$$= \beta w(z, \beta\tilde{z}) \Big|_0^1 = w(z, \tilde{z}) \quad (3.11)$$

Beispiel 1:

$$\partial_{\tilde{z}} E = z\tilde{z} \quad (3.12)$$

$$\Rightarrow E(z, \tilde{z}) = h(z) + \int_0^1 d\beta \tilde{z}z\beta\tilde{z} = h(z) + z\frac{\tilde{z}^2}{2} \quad (3.13)$$

Beispiel 2:

$$\partial_{\tilde{z}} E = \theta(R^2 - z\tilde{z})\varrho_0 \quad (3.14)$$

$$E(z, \tilde{z}) = h(z) + \int_0^1 d\beta \tilde{z}\varrho_0\theta(R^2 - z\tilde{z}\beta) \quad (3.15)$$

Zur Berechnung des Integrals erweisen sich konvergente Funktionenfolgen als sehr zweckmäßig. (vergleiche Heinz Krüger Elektrodynamik I SS 1994, Seite 25)

$$\delta(x) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \eta e^{-\pi\eta^2 x^2}, \quad \theta'(x) = \delta(x) \quad (3.16)$$

$$\theta(x) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \eta \int_{-\infty}^x dy e^{-\pi\eta^2 y^2} \quad (3.17)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 d\beta \tilde{z}\varrho_0\theta(R^2 - z\tilde{z}\beta) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_0^1 d\beta \underbrace{\tilde{z}\varrho_0\eta}_{u'} \underbrace{\int_{-\infty}^{R^2 - \beta z\tilde{z}} dy e^{-\pi\eta^2 y^2}}_v \quad (3.18)$$

$$u = \beta\tilde{z}\varrho_0\eta \quad (3.19)$$

$$v = \int_{-\infty}^{R^2 - \beta z\tilde{z}} dy e^{-\pi\eta^2 y^2} = \int_{-\infty}^{-\beta z\tilde{z}} dy e^{-\pi\eta^2 (y - R^2)^2} \quad (3.20)$$

Sei nun F die Stammfunktion zu diesem Integral dann gilt:

$$v(\beta) = F(-\beta z \tilde{z}) - F(-\infty) \quad (3.21)$$

$$\Rightarrow \partial_\beta v = \partial_\beta F(-\beta z \tilde{z}) = -z \tilde{z} \left. \frac{\partial F(u)}{\partial u} \right|_{u=-\beta z \tilde{z}} = -z \tilde{z} e^{\pi \eta^2 (R^2 + \beta z \tilde{z})} \quad (3.22)$$

Folglich ist:

$$\int_0^1 d\beta \tilde{z} \varrho_0 \theta(R^2 - \beta z \tilde{z}) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \beta \tilde{z} \varrho_0 \eta \int_{-\infty}^{R^2 - \beta z \tilde{z}} dy e^{-\pi \eta^2 y^2} \Big|_0^1 \quad (3.23)$$

$$+ \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_0^1 d\beta \beta \tilde{z} \varrho_0 \eta z \tilde{z} e^{\pi \eta^2 (R^2 + \beta z \tilde{z})^2} \quad (3.24)$$

$$= \tilde{z} \varrho_0 \theta(R^2 - z \tilde{z}) + \int_0^1 d\beta \beta \tilde{z} \varrho_0 z \tilde{z} \delta(-R^2 - \beta z \tilde{z}) \quad (3.25)$$

$$= \tilde{z} \varrho_0 \theta(R^2 - \beta z \tilde{z}) \quad (3.26)$$

Die Gesamtlösung lautet also:

$$E(z, \tilde{z}) = h(z) + \tilde{z} \varrho_0 \theta(R^2 - z \tilde{z}) \quad (3.27)$$

Beispiel 3:

Ein weiteres für diese Arbeit sehr wichtiges Beispiel ist die δ -Distribution als Inhomogenität:

$$\partial_{\tilde{z}} E = \delta(z, \tilde{z}) \quad (3.28)$$

Verwendet man wieder die konvergente Funktionenfolge aus dem vorhergehenden Beispiel für die δ -Distribution, so erhält man

$$E_\eta(z, \tilde{z}) = h(z) + \eta^2 \int_0^1 d\beta \tilde{z} e^{-\pi \eta^2 z \beta \tilde{z}} \quad (3.29)$$

$$= h(z) - \frac{1}{z \pi} \left[e^{-\pi \eta^2 z \tilde{z}} - 1 \right]. \quad (3.30)$$

Außerhalb von $z = 0$ konvergiert diese Funktionenfolge gegen

$$E(z, \tilde{z}) = h(z) + \frac{1}{\pi z}. \quad (3.31)$$

Für $z = 0$ konvergiert diese Folge auch und zwar gegen

$$E(z, \tilde{z}) = h(z) - \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ \tilde{z} \rightarrow 0}} \frac{1}{\pi z} [1 - \pi \eta^2 z \tilde{z} + \dots - 1] \quad (3.32)$$

$$= h(z) + \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ \tilde{z} \rightarrow 0}} [\eta^2 \tilde{z} + O(\tilde{z}^2 z)] \quad (3.33)$$

$$= h(z). \quad (3.34)$$

Wichtig ist hier, daß die Funktionenfolge vor der Ausführung des Grenzwertes überall regulär und stetig ist!

Dieses vielleicht überraschende Ergebnis

$$\partial_{\bar{z}} \frac{1}{z} = \pi \delta(z, \bar{z}) \quad (3.35)$$

kann auch mittels des Funktionalbegriffes der Distributionen verifiziert werden. [11]

$$\langle \partial_{\bar{z}} \frac{1}{z}, \psi(z, \bar{z}) \rangle = - \langle \frac{1}{z}, \partial_{\bar{z}} \psi(z, \bar{z}) \rangle = - \frac{i}{2} \int dz d\bar{z} \frac{1}{z} \partial_{\bar{z}} \psi(z, \bar{z}) \quad (3.36)$$

Die Transformation auf Polarkoordinaten liefert

$$z = r e^{i\varphi}, \quad \bar{z} = r e^{-i\varphi}, \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\varphi}. \quad (3.37)$$

Für die Differentiale gilt

$$dz = \frac{\partial z}{\partial r} dr + \frac{\partial z}{\partial \varphi} d\varphi = e^{i\varphi} dr + r i e^{i\varphi} d\varphi, \quad (3.38)$$

$$d\bar{z} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial r} dr + \frac{\partial \bar{z}}{\partial \varphi} d\varphi = e^{-i\varphi} dr - r i e^{-i\varphi} d\varphi. \quad (3.39)$$

Somit ergibt sich das Differential $dz d\bar{z}$ (vergleiche auch [4] Seite 139)

$$dz d\bar{z} = -dr d\varphi 2ri. \quad (3.40)$$

$$\langle \partial_{\bar{z}} \frac{1}{z}, \psi \rangle = - \int dr \int d\varphi e^{-i\varphi} \partial_{\bar{z}} \psi(z, \bar{z}) \quad (3.41)$$

Mit $\psi(z(r, \varphi), \bar{z}(r, \varphi)) = \Psi(r, \varphi)$ und

$$\left. \begin{aligned} \partial_{\varphi} &= -r i e^{-i\varphi} \partial_{\bar{z}} + r i e^{i\varphi} \partial_z \\ r i \partial_r &= r i e^{-i\varphi} \partial_{\bar{z}} + r i e^{i\varphi} \partial_z \end{aligned} \right\} \Rightarrow r i \partial_r - \partial_{\varphi} = 2i \bar{z} \partial_{\bar{z}} \quad (3.42)$$

$$\Rightarrow \partial_{\bar{z}} = \frac{r i \partial_r - \partial_{\varphi}}{2i r e^{-i\varphi}} \quad (3.43)$$

folgt schließlich

$$\langle \partial_{\bar{z}} \frac{1}{z}, \psi \rangle = - \int dr \int d\varphi \frac{1}{2ir} (r i \partial_r - \partial_{\varphi}) \Psi(r, \varphi) \quad (3.44)$$

$$= - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dr \partial_r \Psi(r, \varphi) + \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} dr \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} d\varphi \partial_{\varphi} \Psi(r, \varphi) \quad (3.45)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \Psi(0, \varphi) + \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} dr \frac{1}{r} \underbrace{[\Psi(r, 2\pi) - \Psi(r, 0)]}_{=0} \quad (3.46)$$

$$= \pi \Psi(0, 0) = \pi \psi(0, 0) = \langle \pi \delta, \psi \rangle \quad (3.47)$$

Also erhält man in der üblichen Kurznotation

$$\partial_{\bar{z}} \frac{1}{z} = \pi \delta(z, \bar{z}). \quad (3.48)$$

Unterschiedliche Aspekte dieses Problems sind auch in Gel'fand und Shilov Band 1 [11] diskutiert (S.29, S.378)

3.2 Konstante Leitfähigkeitsfelder

Für den Fall konstanter, nicht verschwindender Leitfähigkeit mit zwei δ -Quellen, reduziert sich die komplexe Feldgleichung des elektrischen Feldes auf

$$\partial_{\bar{z}} E = \frac{\pi}{2} I [\delta(\vec{r} - \vec{p}) - \delta(\vec{r} - \vec{q})]. \quad (3.49)$$

Mit den Kenntnissen aus dem vorhergehenden Abschnitt kann man nun die Lösung für dieses Problem sofort angeben

$$E(z, \bar{z}) = \frac{I}{2} \left[\frac{1}{z - p} - \frac{1}{z - q} \right] + h(z), \quad \vec{\sigma}_1 p = \vec{p}, \quad \vec{\sigma}_1 q = \vec{q}. \quad (3.50)$$

3.3 Zwei Halbebenen mit konstanter Leitfähigkeit

Als nächstes, etwas komplizierteres Beispiel, wird ein Leitfähigkeitsfeld betrachtet, welches in zwei Halbebenen die konstanten Werte σ_1 und σ_2 hat. Die einzige Unstetigkeit liegt also auf einer Geraden, die die beiden Halbebenen trennt. Diese Gerade sei durch den Geradenpunkt p_0 und die Normale n ($n\bar{n} = 1$) festgelegt. Die Geradengleichung $[\vec{\sigma}_1(z - p_0)] \cdot [\vec{\sigma}_1 n] = 0$ kann man umformen in

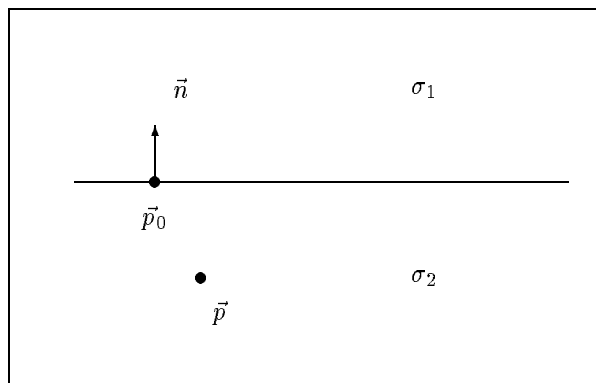
$$b(z, \bar{z}) = (z - p_0)\bar{n} + (\bar{z} - \bar{p}_0)n = 0, \quad (3.51)$$

so daß die Variable \bar{z} explizit auftritt. Löst man diese Gleichung nach \bar{z} auf so kann die Randkurve auch durch

$$\beta(z) = \bar{z} = \bar{p}_0 - (z - p_0)\bar{n}^2 \quad (3.52)$$

gegeben werden. Speziell für die reelle Achse ($n = i, p_0 = 0$) erhält man hier: $\beta(z) = z \stackrel{!}{=} \bar{z}$ was gerade die Bedingung dafür ist, daß z nur reell sein darf. Ist $b(z, \bar{z}) > 0$, so liegt der Punkt z in der Halbebene, die auf der Seite der Geraden liegt auf die die Normale zeigt. Ist $b(z, \bar{z}) < 0$ so liegt z in der anderen Halbebene.

Angenommen wir haben einen Stromeinprägepol im Gebiet mit der Leitfähigkeit σ_2 am Punkt p . Für diese Situation sind zusammenfassend folgende Formeln von Bedeutung:



$$\begin{array}{l}
\sigma(z, \tilde{z}) = \theta(b(z, \tilde{z}))\sigma_1 + \theta(-b(z, \tilde{z}))\sigma_2, \quad b(p, \tilde{p}) < 0 \\
b(z, \tilde{z}) = (z - p_0)\tilde{n} + (\tilde{z} - \tilde{p}_0)n = 0 \\
\sigma \partial_{\tilde{z}} E + \frac{1}{2}(E \partial_{\tilde{z}} \sigma + \tilde{E} \partial_z \sigma) = \pi \frac{I}{2} \sigma I \delta(\vec{r} - \vec{p}) \\
\hline
\partial_{\tilde{z}} E_1 = 0 \\
\partial_{\tilde{z}} E_2 = \pi \frac{I}{2} \delta(\vec{r} - \vec{p}) \\
(1 + \eta)E_1 = E_2 + \eta \beta' \tilde{E}_2, \quad \eta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \\
\tilde{z} = \beta(z) = \tilde{p}_0 - (z - p_0)\tilde{n}^2, \quad \beta' = -\tilde{n}^2
\end{array} \tag{3.53}$$

Die Lösung für das Gebiet zwei, entspricht dem Fall der im vorhergehenden Abschnitt behandelt wurde. Sie lautet:

$$E_2(z) = \frac{I}{2} \frac{1}{z - p} + h(z) \tag{3.54}$$

Wobei $h(z)$ eine **im Gebiet 2** holomorphe Funktion ist. Die Funktion $h(z)$ kann aber durchaus im Gebiet 1 meromorph sein, da nur eine Lösung für das Gebiet zwei gesucht wird, die dann mittels der Randbedingung an die Lösung im Gebiet 1 angepaßt werden muß! Mit dieser Lösung wird nun mit Hilfe der Randbedingung durch geeignete Wahl der frei wählbaren holomorphen Funktion h eine Lösung für das Gebiet 1 berechnet. Die Randbedingung lautet

$$(1 + \eta)E_1 = E_2 + \eta \beta' \tilde{E}_2, \quad \eta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \quad \beta' = \partial_z \beta = -\tilde{n}^2 \tag{3.55}$$

Durch Einsetzen der Lösung für das Gebiet 2 erhält man

$$(1 + \eta)E_1 = \frac{I}{2} \frac{1}{z - p} + h - \eta \tilde{n}^2 \frac{I}{2} \frac{1}{\tilde{z} - \tilde{p}} - \eta \tilde{n}^2 \tilde{h}. \tag{3.56}$$

Da die Randbedingung nur auf dem Rand erfüllt werden muß, kann man mit der impliziten Gleichung für die Randgerade $\beta(z) = \tilde{z}$ die Variable \tilde{z} wieder auf die Variable z zurückführen. Man erhält auf diese Weise nach einigen einfachen algebraischen Umformungen die Beziehung

$$\frac{1}{\tilde{z} - \tilde{p}} = -n^2 \frac{1}{z - S(p)}, \tag{3.57}$$

wobei die Spiegelungsabbildung S definiert ist durch $S(p) = p_0 - n^2(\tilde{p} - \tilde{p}_0)$. Daß die Abbildung wirklich eine Spiegelung an der Randgeraden ist erkennt man durch

$$\vec{S}(\vec{p}) - \vec{p}_0 = -\tilde{n}(\vec{p} - \vec{p}_0)\tilde{n}, \quad \Rightarrow \quad S(p) - p_0 = -n\vec{\sigma}_1(p - p_0)\vec{\sigma}_1 n. \tag{3.58}$$

Somit ist $S(p)$ auch eine Involution

$$S^2(p) = (S \circ S)(p) = p_0 - n^2(\vec{S}(\vec{p}) - \vec{p}_0) = p_0 - n^2(\tilde{p}_0 - n^2(p - p_0) - \tilde{p}_0) = p \tag{3.59}$$

$$\Rightarrow (1 + \eta)E_1 = \frac{I}{2} \frac{1}{z - p} + h + \eta \frac{I}{2} \frac{1}{z - S(p)} - \eta \tilde{n}^2 \tilde{h}. \tag{3.60}$$

Da E in Gebiet 1 regulär sein muß (nach Vssg. sind dort keine Quellen) und $S(p)$ in Gebiet 1 liegt, ist der Term $\frac{1}{z - S(p)}$ durch geeignete Wahl von $h(z)$ zu kompensieren

$$h(z) = -\eta \frac{I}{2} \frac{1}{z - S(p)} + \psi(z). \tag{3.61}$$

Dabei kann $\psi(z)$ eine willkürliche Funktion sein die holomorph im Gebiet 2 ist. Damit ist $h(z)$ auch eine im Gebiet 2 holomorphe Funktion. $h(z)$ ist zwar im Gebiet 1 meromorph, aber im Gebiet 1 sind auch keine Anforderungen an $h(z)$ gestellt.

$$(1 + \eta)E_1 = \frac{I}{2} \frac{1}{z-p} + \psi(z) + \eta^2 \frac{I}{2} \tilde{n}^2 \frac{1}{\tilde{z} - \overline{S(p)}} - \eta \tilde{n}^2 \tilde{\psi} \quad (3.62)$$

$$= \frac{I}{2} \frac{1}{z-p} (1 - \eta^2) + \psi - \eta \tilde{n}^2 \tilde{\psi} \quad (3.63)$$

$$E_2 = \frac{I}{2} \frac{1}{z-p} - \frac{I}{2} \frac{\eta}{z - S(p)} + \psi(z) \quad (3.64)$$

Bei der Konstruktion der Lösung ist automatisch ein Spiegelpol entstanden.

Da das E-Feld linear von der Stromdichte abhängt, kann man aus dieser Lösung sofort die Lösung für das Problem mit zwei Einprägepolen (p=Quelle, q=Senke) zusammensetzen.

$$\boxed{\begin{aligned} E_1 &= \frac{I}{2} \left[\frac{1}{z-p} - \frac{1}{z-q} \right] (1 - \eta) + \psi - \frac{\eta}{1 + \eta} \beta \tilde{n}^2 \tilde{\psi} \\ E_2 &= \frac{I}{2} \left[\frac{1}{z-p} - \frac{1}{z-q} \right] - \frac{I}{2} \eta \left[\frac{1}{z - S(p)} - \frac{1}{z - S(q)} \right] + \psi \end{aligned}} \quad (3.65)$$

3.4 Kreisscheibe mit konstanter Leitfähigkeit

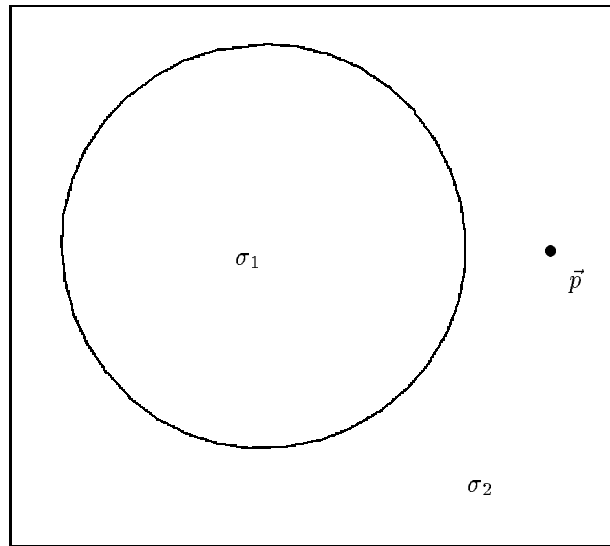
In diesem Abschnitt wird ein Kreis mit Mittelpunkt m und Radius R betrachtet, der die Kreisscheibe (Leitfähigkeit σ_1) von deren Komplement (Leitfähigkeit σ_2) trennt. Der Kreis sei gegeben durch $b(z, \tilde{z}) = (z - m)(\tilde{z} - \tilde{m}) - R^2 = 0$. Für Punkte außerhalb des Kreises ist b positiv, für solche die innerhalb des Kreises liegen, ist b negativ. Löst man diese Formel nach \tilde{z} auf so erhält man

$$\beta(z) = \tilde{m} + \frac{R^2}{z - m}, \quad \Rightarrow \quad \beta'(z) = -\frac{R^2}{(z - m)^2}. \quad (3.66)$$

Im Gegensatz zur Konfiguration zweier Halbebenen mit konstanter Leitfähigkeit ist es hier aus topologischer Sicht grundsätzlich zu unterscheiden, ob die Pole innerhalb oder außerhalb der Kreisscheibe liegen. Deshalb werden hier nun die beiden topologisch zu unterscheidenden Fälle getrennt behandelt.

3.4.1 Quellen außerhalb der Kreisscheibe

Als Quelle sei zunächst nur ein Pol außerhalb des Kreises am Punkt p gegeben ($b(p, \tilde{p}) > 0$). Somit liegt hier insgesamt folgende Situation vor:



$$\begin{aligned}
 \sigma(z, \tilde{z}) &= \theta(b(z, \tilde{z}))\sigma_2 + \theta(-b(z, \tilde{z}))\sigma_1, \quad b(p, \tilde{p}) > 0 \\
 b(z, \tilde{z}) &= (z - m)(\tilde{z} - \tilde{m}) - R^2 = 0 \\
 \sigma \partial_{\tilde{z}} E + \frac{1}{2}(E \partial_{\tilde{z}} \sigma + \tilde{E} \partial_z \sigma) &= \pi \frac{I}{2} \sigma I \delta(\tilde{r} - \tilde{p}) \\
 \hline
 \partial_{\tilde{z}} E_1 &= 0 \\
 \partial_{\tilde{z}} E_2 &= \pi \frac{I}{2} \delta(\tilde{r} - \tilde{p}) \\
 (1 + \eta)E_1 &= E_2 + \eta \beta' \tilde{E}_2, \quad \eta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \\
 \tilde{z} = \beta(z) &= \tilde{m} + \frac{R^2}{z - m}, \quad \beta' = -\frac{R^2}{(z - m)^2}
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

Die lokale Lösung um die Stromeinprägung

$$E_2(z) = \frac{I}{2} \frac{1}{z - p} + h(z) \tag{3.68}$$

wird, wie im Beispiel zuvor, auch hier in die Randbedingung eingesetzt.

$$(1 + \eta)E_1 = \frac{I}{2} \frac{1}{z - p} + h(z) - \eta \frac{R^2}{(z - m)^2} \frac{I}{2} \frac{1}{\tilde{z} - \tilde{p}} + \eta \beta' \tilde{h} \tag{3.69}$$

$$\frac{1}{\tilde{z} - \tilde{p}} = \frac{1}{\beta(z) - \tilde{p}} = \frac{1}{\frac{R^2}{z - m} + \tilde{m} - \tilde{p}} \tag{3.70}$$

$$= \frac{z - m}{\tilde{m} - \tilde{p} \frac{R^2}{m - \tilde{p}} + z - m} = \frac{z - m}{\tilde{m} - \tilde{p}} \frac{1}{z - \left(m + \frac{R^2}{\tilde{p} - \tilde{m}}\right)} \tag{3.71}$$

$$= \frac{z - m}{\tilde{m} - \tilde{p}} \frac{1}{z - S(p)} \tag{3.72}$$

Hier ist S definiert durch $S(p) = \beta(\tilde{p}) = m + \frac{R^2}{\tilde{p} - \tilde{m}}$. Diese Abbildung ist eine Kreisspiegelungsabbildung was man erkennt, wenn man die Variable in geschickter Form schreibt.

$$S(m + aRe^{i\varphi}) = m + \frac{R^2}{aRe^{-i\varphi}} = m + a^{-1}Re^{i\varphi} \tag{3.73}$$

Das heißt für $a = 1$ (auf dem Kreisrand) ist die Abbildung die Identität und der Kreismittelpunkt und der Punkt Unendlich werden aufeinander abgebildet.

$$\frac{R^2}{(z-m)^2} \frac{1}{\tilde{z}-\tilde{p}} = \frac{1}{z-m} \frac{1}{z-S(p)} \frac{R^2}{\tilde{m}-\tilde{p}} \quad (3.74)$$

$$= \frac{R^2}{\tilde{m}-\tilde{p}} \frac{1}{S(p)-m} \left(\frac{1}{z-S(p)} - \frac{1}{z-m} \right) \quad (3.75)$$

$$= \frac{1}{z-m} - \frac{1}{z-S(p)} \quad (3.76)$$

Nachdem diese Hilfsformel mit Partialbruchzerlegung berechnet ist, kann nun das Feld E_2 komplett in die Randbedingung eingesetzt werden.

$$(1+\eta)E_1 = \frac{I}{2} \frac{1}{z-p} + h + \eta \frac{I}{2} \left(\frac{1}{z-S(p)} - \frac{1}{z-m} \right) + \eta \beta' \tilde{h} \quad (3.77)$$

Die singulären Terme im Kreisinneren werden durch geeignete Wahl von h kompensiert

$$h(z) = -\eta \frac{I}{2} \left(\frac{1}{z-S(p)} - \frac{1}{z-m} \right) + \psi(z). \quad (3.78)$$

ψ muß eine, im Gebiet 2, holomorphe Funktion sein. Mit dem so gewählten h ergibt sich als Lösung für das Feld E_1

$$(1+\eta)E_1 = \frac{I}{2} \frac{1}{z-p} + \eta^2 \frac{R^2}{(z-m)^2} \frac{I}{2} \left(\frac{1}{\tilde{z}-\tilde{S}(p)} - \frac{1}{\tilde{z}-\tilde{m}} \right) + \eta \beta' \tilde{\psi} + \psi \quad (3.79)$$

$$= \frac{I}{2} \frac{1}{z-p} - \eta^2 \frac{I}{2} \left[\frac{1}{z-p} - \frac{1}{z-m} - \frac{1}{z-S(m)} + \frac{1}{z-m} \right] + \eta \beta' \tilde{\psi} + \psi \quad (3.80)$$

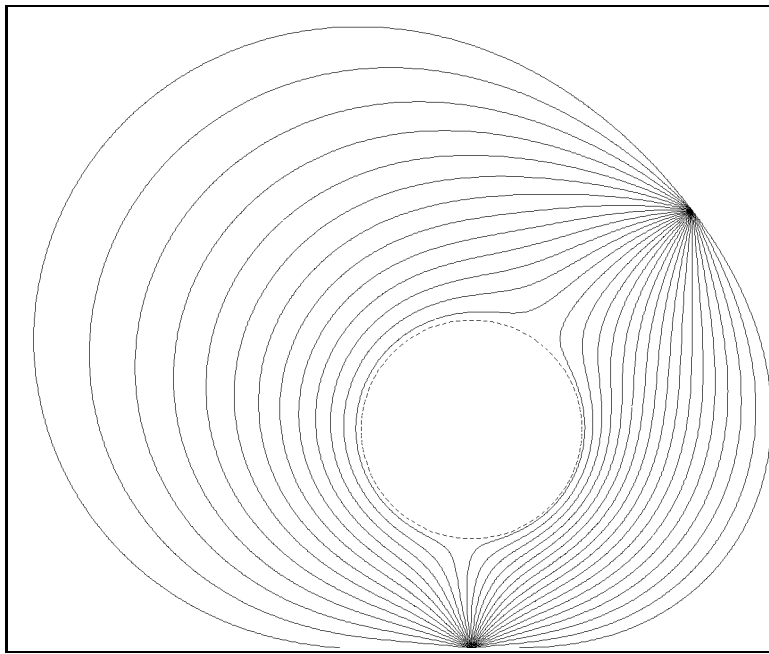
$$= \frac{I}{2} (1-\eta^2) \frac{1}{z-p} + \eta \beta' \tilde{\psi} + \psi. \quad (3.81)$$

$$E_2 = \frac{I}{2} \frac{1}{z-p} - \eta \frac{I}{2} \left(\frac{1}{z-S(p)} - \frac{1}{z-m} \right) + \psi(z) \quad (3.82)$$

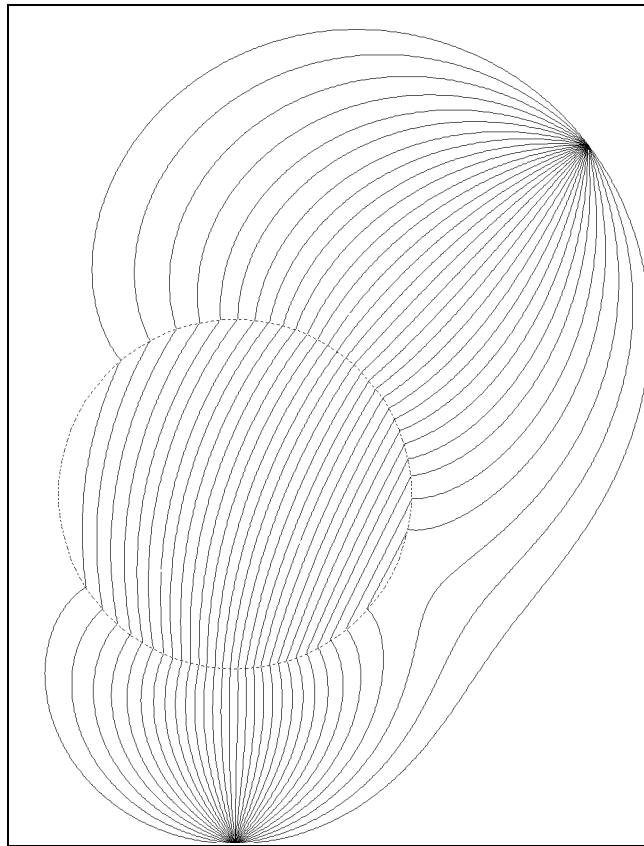
In diesem Beispiel entsteht außer dem Spiegepol von der Stromeinprägung noch ein weiterer Pol im Mittelpunkt des Kreises. Dies ist auch zu verstehen, wenn man erkennt, daß zu einer einzelnen Quelle automatisch eine Senke im Unendlichen entsteht. Im vorhergehenden Fall hat dieser Pol im Unendlichen natürlich keinen Einfluß, da auch dessen Spiegepol wieder im Unendlichen liegt. In dem hier diskutierten Fall, wird dieser Pol im Unendlichen aber auf den Kreismittelpunkt abgebildet! Betrachtet man nun eine Stromquelle am Punkt p und eine zugehörige Senke am Punkt q (beide im Komplement der Kreisscheibe) so taucht auch dieser Pol im Kreismittelpunkt nicht mehr auf!

$$(1+\eta)E_1 = \frac{I}{2} (1-\eta^2) \left[\frac{1}{z-p} - \frac{1}{z-q} \right] + \eta \beta' \tilde{\psi} + \psi \quad (3.83)$$

$$E_2 = \frac{I}{2} \left[\frac{1}{z-p} - \frac{1}{z-q} \right] - \eta \frac{I}{2} \left[\frac{1}{z-S(p)} - \frac{1}{z-S(q)} \right] + \psi \quad (3.84)$$



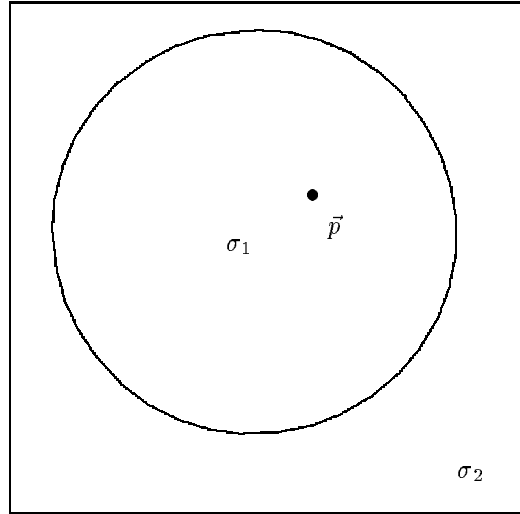
Feldlinien für eine isolierende Kreisscheibe



Feldlinien für eine leitende Kreisscheibe

3.4.2 Quellen innerhalb der Kreisscheibe

Bei gleicher geometrischer Gebietsaufteilung, jedoch mit Einprägepolen im Innenraum der Kreisscheibe, wird wie im vorhergehenden Abschnitt zuerst nur die Lösung für einen Pol konstruiert. Das Problem mit zwei Einprägepolen im Innenraum kann schließlich durch Superposition von Lösungen für einen Pol gewonnen werden.



$$\begin{aligned}
 \sigma(z, \tilde{z}) &= \theta(b(z, \tilde{z}))\sigma_2 + \theta(-b(z, \tilde{z}))\sigma_1, \quad b(p, \tilde{p}) < 0 \\
 b(z, \tilde{z}) &= (z - m)(\tilde{z} - \tilde{m}) - R^2 = 0 \\
 \sigma \partial_{\tilde{z}} E + \frac{1}{2}(E \partial_{\tilde{z}} \sigma + \tilde{E} \partial_z \sigma) &= \pi \frac{I}{2} \sigma I \delta(\tilde{r} - \tilde{p}) \\
 \hline
 \partial_{\tilde{z}} E_1 &= \pi \frac{I}{2} \delta(\tilde{r} - \tilde{p}) \\
 \partial_{\tilde{z}} E_2 &= 0 \\
 (1 + \eta)E_1 &= E_2 + \eta \beta' \tilde{E}_2, \quad \eta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \\
 \tilde{z} = \beta(z) &= \tilde{m} + \frac{R^2}{z - m}, \quad \beta' = -\frac{R^2}{(z - m)^2}
 \end{aligned} \tag{3.85}$$

Die Startlösung für das Feld E_1 lautet

$$E_1(z) = \frac{I}{2} \frac{1}{z - p} + h(z). \tag{3.86}$$

Setzt man diese Lösung in die Randbedingung ein, so erhält man

$$(1 - \eta)E_2 = \frac{I}{2} \frac{1}{z - p} + h + \eta \frac{R^2}{(z - m)^2} \frac{I}{2} \frac{1}{\tilde{z} - \tilde{p}} - \eta \beta' \tilde{h} \tag{3.87}$$

$$= \frac{I}{2} \frac{1}{z - p} + h + \eta \frac{I}{2} \left(\frac{1}{z - m} - \frac{1}{z - S(p)} \right) - \eta \beta' \tilde{h}. \tag{3.88}$$

Um den Term zu kompensieren, der die Feldgleichung für E_2 nicht löst, wählt man für $h(z)$

$$h(z) := \eta \frac{I}{2} \frac{1}{z - S(p)}. \tag{3.89}$$

Setzt man dieses $h(z)$ in obige Gleichung für E_2 ein, so folgt

$$(1 - \eta)E_2(z) = \frac{I}{2} \frac{1}{z - p} + \eta \frac{I}{2} \frac{1}{z - m} + \eta^2 \frac{I}{2} \frac{R^2}{(z - m)^2} \frac{1}{\tilde{z} - S(p)} \tag{3.90}$$

$$= \frac{I}{2} \frac{1}{z-p} + \eta \frac{I}{2} \frac{1}{z-m} + \eta^2 \frac{I}{2} \left(\frac{1}{z-m} - \frac{1}{z-p} \right) \quad (3.91)$$

$$= \frac{I}{2} \frac{1}{z-p} (1 - \eta^2) + \eta(1 + \eta) \frac{I}{2} \frac{1}{z-m}. \quad (3.92)$$

Das Ergebnis kann mit $\frac{1+\eta}{1-\eta} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ zu

$$\boxed{\begin{aligned} E_1(z) &= \frac{I}{2} \frac{1}{z-p} + \eta \frac{I}{2} \frac{1}{z-S(p)} \\ E_2(z) &= \frac{I}{2} \frac{1+\eta}{z-p} + \frac{I}{2} \eta \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{1}{z-m} \end{aligned}} \quad (3.93)$$

zusammengefaßt werden. Für zwei Pole innerhalb der Kreisscheibe,

$$-\vec{\partial} \cdot \mathcal{J} = \pi I \sigma [\delta(\vec{r} - \vec{p}) - \delta(\vec{r} - \vec{q})], \quad (3.94)$$

$$b(q, \vec{q}) < 0, \quad b(p, \vec{p}) < 0, \quad (3.95)$$

haben die lokalen Lösungen des elektrischen Feldes die Form

$$\boxed{\begin{aligned} E_1(z) &= \frac{I}{2} \left[\frac{1}{z-p} - \frac{1}{z-q} \right] + \eta \frac{I}{2} \left[\frac{1}{z-S(p)} - \frac{1}{z-S(q)} \right] \\ E_2(z) &= \frac{I}{2} (1 + \eta) \left[\frac{1}{z-p} - \frac{1}{z-q} \right]. \end{aligned}} \quad (3.96)$$

3.5 Verallgemeinerungsfähigkeit auf 3 Dimensionen

Zunächst scheint eine Verallgemeinerung dieser Lösungsmethode auf 3 Dimensionen überhaupt nicht möglich zu sein, da es in 3 Dimensionen kein Pendant zu den Komplexen Zahlen gibt. Formuliert man das Problem direkt mit Vektoren als Elemente der geometrischen Algebra, so wird schnell klar, wie man im Prinzip diese Methode verallgemeinern kann. Bei einer Verallgemeinerung von 2 auf 3 Dimensionen spiegeln sich die geometrischen Besonderheiten jeder Dimension auch sofort in den entsprechenden algebraischen Ausdrücken wieder. Um die Methode in beiden Formulierungen direkt vergleichen zu können, wird die Konfiguration aus dem vorhergehenden Abschnitt nun noch einmal mit Vektoren behandelt. Die Feldgleichung in Vektorform lautet (vergl. auch vorhergehendes Kapitel)

$$\sigma \vec{\partial} \mathcal{E} + \mathcal{E} \cdot (\vec{\partial} \sigma) = -\vec{\partial} \cdot \mathcal{J} \quad (3.97)$$

Die Randbedingung wird in der Form

$$(1 + \eta) \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 - \eta \vec{n} \mathcal{E}_2 \vec{n}, \quad \eta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \quad (3.98)$$

verwendet und der Rand der Kreisscheibe sei gegeben durch

$$b(\vec{r}) = (\vec{r} - \vec{m}) \cdot \vec{r} - R^2 = 0, \quad \vec{m} = \vec{\sigma}_1 m, \quad b(\vec{r}) > 0 \quad \text{außerhalb.} \quad (3.99)$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{\partial} b}{|\vec{\partial} b|} = \frac{\vec{r} - \vec{m}}{|\vec{r} - \vec{m}|} \quad (3.100)$$

Die lokalen Feldgleichungen lauten nun:

$$\begin{aligned} \text{innerhalb des Kreises:} \quad & \vec{\partial} \mathcal{E}_1 = 0 \\ \text{außerhalb des Kreises:} \quad & \vec{\partial} \mathcal{E}_2 = \pi I \delta(\vec{r} - \vec{p}) \end{aligned} \quad (3.101)$$

Nach Beispiel 3 in Abschnitt 3.1 ist die Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\mathcal{E}_2(\vec{r}) = E_2(z, \tilde{z})\vec{\sigma}_1 = I \frac{1}{z - p} \vec{\sigma}_1 = I \frac{\vec{r} - \vec{p}}{(\vec{r} - \vec{p})^2} = I \frac{1}{\vec{r} - \vec{p}}, \quad (3.102)$$

wobei natürlich auch hier noch eine beliebige Funktion hinzugezählt werden kann, die $\vec{\partial}\mathcal{E}_2 = 0$ im Gebiet 2 löst. Z.B. $\frac{1}{\vec{r} - \vec{q}}$ wobei \vec{q} im Gebiet 1 liegt. Als Startlösung wird deshalb

$$\mathcal{E}_2(\vec{r}) = I \frac{1}{\vec{r} - \vec{p}} + \mathcal{F}(\vec{r}), \quad \vec{\partial}\mathcal{F} = 0 \quad \text{in Gebiet 2} \quad (3.103)$$

verwendet. Setzt man \mathcal{E}_2 in die Randbedingung ein, so erhält man

$$(1 + \eta)\mathcal{E}_1 = I \frac{1}{\vec{r} - \vec{p}} + \mathcal{F} - \eta \vec{n} \mathcal{E}_2(\vec{S}(\vec{r})) \vec{n} - \eta \vec{n} \mathcal{F} \vec{n}, \quad (3.104)$$

wobei für $\vec{S}(\vec{r})$ kann jede Funktion eingesetzt werden kann, die auf $b(\vec{r}) = 0$ die Identität ist. D.h. $\vec{S}(\vec{r}) = \vec{r}$ auf dem Rand der durch

$$(\vec{r} - \vec{m})(\vec{r} - \vec{m}) - R^2 = 0 \quad (3.105)$$

gegeben ist. Diese Gleichung kann auch auf die Form

$$\vec{r} = \vec{m} + \frac{R^2}{\vec{r} - \vec{m}} \quad (3.106)$$

gebracht werden, so daß man die rechte Seite als $\vec{S}(\vec{r})$ definieren kann. Per Konstruktion ist dann $\vec{S}(\vec{r}) = \vec{r}$ auf dem Rand.

$$\vec{r} = \vec{S}(\vec{r}) = \vec{m} + \frac{R^2}{\vec{r} - \vec{m}} \quad (3.107)$$

Test: Sei \vec{r} ein Randpunkt $\Rightarrow (\vec{r} - \vec{m})^2 = R^2$

$$\Rightarrow \vec{S}(\vec{r}) = \vec{m} + \frac{R^2(\vec{r} - \vec{m})}{(\vec{r} - \vec{m})^2} = \vec{m} + \vec{r} - \vec{m} = \vec{r} \quad (3.108)$$

Bevor diese Abbildung $\vec{S}(\vec{r})$ in die Randbedingung eingesetzt wird, führen wir zuerst eine Hilfsberechnung durch.

$$\vec{n} \mathcal{E}_2(\vec{S}(\vec{r})) \vec{n} = I \vec{n} \frac{1}{\vec{S}(\vec{r}) - \vec{p}} \vec{n} + \vec{n} \mathcal{F}(\vec{S}(\vec{r})) \vec{n} \quad (3.109)$$

Wegen $\vec{n}^2 = 1 \Rightarrow \vec{n} = \vec{n}^{-1}$ und

$$\vec{n} \frac{1}{\vec{S}(\vec{r}) - \vec{p}} \vec{n} = \vec{n} \frac{1}{\vec{n}(\vec{S}(\vec{r}) - \vec{p})} = \frac{1}{\vec{n}(\vec{S}(\vec{r}) - \vec{p}) \vec{n}} \quad (3.110)$$

folgt für den Ausdruck im Nenner zunächst

$$\vec{n}(\vec{S}(\vec{r}) - \vec{p}) \vec{n} = \vec{n} \left[\vec{m} + \frac{R^2}{\vec{r} - \vec{m}} - \vec{p} \right] \vec{n} \quad (3.111)$$

$$= \frac{1}{\vec{r} - \vec{m}} \vec{n} [(\vec{r} - \vec{m})(\vec{m} - \vec{p}) + R^2] \vec{n} \quad (3.112)$$

$$= \frac{1}{\vec{r} - \vec{m}} \vec{n} \left[\vec{r} - \vec{m} + \frac{R^2}{\vec{m} - \vec{p}} \right] (\vec{m} - \vec{p}) \vec{n} \quad (3.113)$$

$$= \frac{1}{\vec{r} - \vec{m}} \left[\vec{r} - \vec{m} + \frac{R^2}{\vec{n}(\vec{m} - \vec{p}) \vec{n}} \right] \vec{n} (\vec{m} - \vec{p}) \vec{n} \quad (3.114)$$

$$= \frac{1}{\vec{r} - \vec{m}} \left[\vec{r} - \left(\vec{m} + \frac{R^2}{\vec{n}(\vec{p} - \vec{m}) \vec{n}} \right) \right] \vec{n} (\vec{m} - \vec{p}) \vec{n}. \quad (3.115)$$

Abkürzend wird

$$\vec{T}(\vec{r}, \vec{p}) := \vec{m} + \frac{R^2}{\vec{n}(\vec{p} - \vec{m})\vec{n}} \quad (3.116)$$

definiert, womit man für obigen Bruch

$$\Rightarrow \frac{1}{\vec{n}(\vec{S}(\vec{r}) - \vec{p})\vec{n}} = \frac{1}{(\vec{m} - \vec{p})\vec{n}} \frac{1}{(\vec{r} - \vec{T}(\vec{r}, \vec{p}))\vec{n}} (\vec{r} - \vec{m}) \quad (3.117)$$

$$= \frac{1}{(\vec{m} - \vec{p})\vec{n}} \frac{1}{(\vec{r} - \vec{T}(\vec{r}, \vec{p}))\vec{n}} \frac{1}{(\vec{r} - \vec{m})\vec{n}} (\vec{r} - \vec{m})^2 \vec{n} \quad (3.118)$$

erhält. In zwei Dimensionen hat ein Produkt von zwei Vektoren nur Skalar- und Bivektoranteil. Deshalb kommutieren in diesem Fall Paare von Vektoren. Mit dieser Eigenschaft lassen sich die Rechnungen deutlich vereinfachen.

$$\frac{1}{(\vec{r} - \vec{T}(\vec{r}, \vec{p}))\vec{n}(\vec{r} - \vec{m})\vec{n}} = \frac{1}{(\vec{r} - \vec{T})\vec{n}} \frac{1}{(\vec{r} - \vec{m})\vec{n}} = \frac{1}{(\vec{m} - \vec{T})\vec{n}} \left(\frac{1}{(\vec{r} - \vec{m})\vec{n}} - \frac{1}{(\vec{r} - \vec{T})\vec{n}} \right) \quad (3.119)$$

$$\vec{m} - \vec{T} = -\frac{R^2}{\vec{n}(\vec{p} - \vec{m})\vec{n}} = -R^2 \frac{1}{(\vec{p} - \vec{m})\vec{n}} \vec{n} \quad (3.120)$$

$$\frac{1}{(\vec{m} - \vec{T})\vec{n}} = \frac{1}{\vec{n}} \frac{1}{\vec{m} - \vec{T}} = -\frac{1}{R^2} (\vec{p} - \vec{m})\vec{n} \quad (3.121)$$

$$\frac{1}{(\vec{r} - \vec{T}(\vec{r}, \vec{p}))\vec{n}(\vec{r} - \vec{m})\vec{n}} = \frac{(\vec{p} - \vec{m})\vec{n}}{R^2} \left[\frac{1}{(\vec{r} - \vec{T})\vec{n}} - \frac{1}{(\vec{r} - \vec{m})\vec{n}} \right] \quad (3.122)$$

Somit erhält man schließlich:

$$\frac{1}{\vec{n}(\vec{S}(\vec{r}) - \vec{p})\vec{n}} = \frac{(\vec{r} - \vec{m})^2}{R^2} \left[\frac{1}{(\vec{r} - \vec{m})\vec{n}} - \frac{1}{(\vec{r} - \vec{T})\vec{n}} \right] \vec{n} \quad (3.123)$$

$$= \frac{(\vec{r} - \vec{m})^2}{R^2} \left[\frac{1}{\vec{r} - \vec{m}} - \frac{1}{\vec{r} - \vec{S}(\vec{p})} \right] \quad (3.124)$$

$$= \frac{1}{\vec{r} - \vec{m}} - \frac{1}{\vec{r} - \vec{S}(\vec{p})} \quad (3.125)$$

Da auf dem Rand gilt $(\vec{r} - \vec{m})^2 = R^2$. Somit haben wir folgendes vorläufige Ergebnis für \mathcal{E}_1

$$(1 + \eta)\mathcal{E}_1 = I \frac{1}{\vec{r} - \vec{p}} + \mathcal{F} - \eta I \left[\frac{1}{\vec{r} - \vec{m}} - \frac{1}{\vec{r} - \vec{S}(\vec{p})} \right] - \eta \vec{n} \mathcal{F}(\vec{S}(\vec{r}))\vec{n}. \quad (3.126)$$

Der dritte Term hat Pole im Gebiet 1, da die invariante Ableitung dort (Dirac-Operator) δ Distributionen erzeugt. Da im Gebiet 1 die Feldgleichung homogen ist, würde dieses Feld die Feldgleichung nicht erfüllen. Deshalb müssen diese Terme durch geeignet gewähltes \mathcal{F} kompensiert werden.

$$\mathcal{F} := \eta I \left[\frac{1}{\vec{r} - \vec{m}} - \frac{1}{\vec{r} - \vec{S}(\vec{p})} \right] \quad (3.127)$$

$$\Rightarrow (1 + \eta)\mathcal{E}_1 = I \frac{1}{\vec{r} - \vec{p}} - \eta^2 I \left[\frac{1}{\vec{r} - \vec{m}} - \frac{1}{\vec{r} - \vec{S}(\vec{m})} - \frac{1}{\vec{r} - \vec{m}} + \frac{1}{\vec{r} - \vec{p}} \right] \quad (3.128)$$

$$= I \frac{1 - \eta^2}{\vec{r} - \vec{p}} \quad (3.129)$$

$$\mathcal{E}_1 = I(1 - \eta) \frac{1}{\vec{r} - \vec{p}} \quad (3.130)$$

$$\mathcal{E}_2 = I \frac{1}{\vec{r} - \vec{p}} - \eta I \left[\frac{1}{\vec{r} - \vec{m}} - \frac{1}{\vec{r} - \vec{S}(\vec{p})} \right] \quad (3.131)$$

Hieraus lassen sich dann auch wieder die Lösungen für mehrere Einprägepole zusammensetzen.

Kapitel 4

Mehrfach berandete Gebiete – Spiegelpolreihen

In diesem Kapitel werden Leitfähigkeitsfelder betrachtet, deren Gebiete konstanter Leitfähigkeit durch **mehrere Randkurven** voneinander getrennt sind. Für solche mehrfach zusammenhängende Gebiete werden die Feldgleichungen und Randbedingungen von Spiegelpolreihen gelöst. Diese Lösungen entsprechen vom Typ her Mittag-Leffler Reihen [1]. Zu unterschiedlichen topologischen Situationen werden Lösungen konstruiert und deren Unterschiede in den Spiegelpolreihen aufgezeigt.

4.1 Zwei Halbebenen mit einer Zwischenschicht

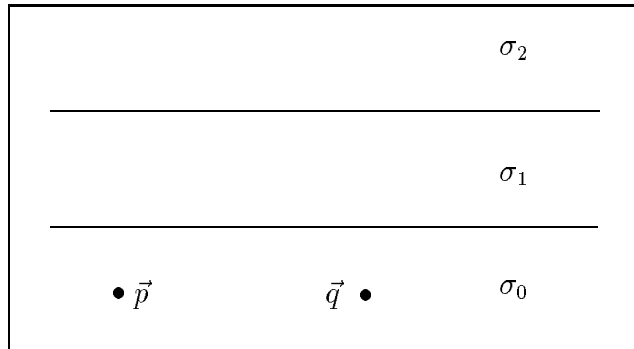
In diesem Fall sollen zwei parallele Geraden mit dem Abstand $\alpha \in \mathbb{R}$ und der gemeinsamen Normalen $n \in \mathbb{C}$ die Randkurven bilden, welche Gebiete konstanter Leitfähigkeit voneinander trennen. Wie in Abschnitt (3.3) sind die Ebenen implizit gegeben durch

$$b_0(z, \tilde{z}) = (z - p_0)\tilde{n} + (\tilde{z} - \tilde{p}_0)n = 0, \quad (4.1)$$

$$b_1(z, \tilde{z}) = (z - p_1)\tilde{n} + (\tilde{z} - \tilde{p}_1)n = 0, \quad p_1 = p_0 + \alpha n. \quad (4.2)$$

Die zugehörigen Spiegelungsabbildungen lauten:

$$S_{10}(p) = p_0 - n^2(\tilde{p} - \tilde{p}_0), \quad S_{21}(p) = p_0 + \alpha n - n^2(\tilde{p} - \tilde{p}_0 - \alpha \tilde{n}) \quad (4.3)$$



Die Leitfähigkeiten seien durch

Gebiet	Bedingung	Leitfähigkeit
0	$b_0(z, \tilde{z}) < 0$	σ_0
1	$(b_0(z, \tilde{z}) > 0) \wedge (b_1(z, \tilde{z}) < 0)$	σ_1
2	$b_1(z, \tilde{z}) < 0$	σ_2

vorgegeben. Die Stromquellen sollen an den Punkten p, q im Gebiet 0 liegen.

$$-\vec{\partial} \cdot \mathcal{J} = \pi \frac{I}{2} [\delta(\vec{r} - \vec{p}) - \delta(\vec{r} - \vec{q})] \quad (4.4)$$

Letzten Endes wird per vollständige Induktion bewiesen, daß durch die hier konstruierten Lösungen alle Feldgleichungen und Randbedingungen erfüllt werden. Mir ist bewußt, daß ein mathematisches Vorgehen mit der Induktionsbehauptung beginnt und der Beweis dieser Aussage völlig ausreicht um zu zeigen, daß die Randbedingungen exakt gelöst werden. Durch eine solche Vorgehensweise wird meist die Idee, die auf eine solche Induktionsbehauptung führte nicht klar. Da hier nicht nur ein erzieltes Ergebnis bewiesen werden soll, sondern vielmehr an einigen Beispielen das Prinzip verdeutlicht werden soll, das auch in anderen Fällen angewandt werden kann, möchte ich die ersten Iterationsschritte explizit aufführen. Diese werden später auch benutzt um die Gültigkeit der Aussage für den Induktionsanfang zu beweisen.

4.1.1 Struktureerkennung

Wie im letzten Kapitel, beginnen wir mit der Lösung der Feldgleichung im Gebiet der Einprägepole

$$E_{0,1}(z) = \frac{I}{2} \left[\frac{1}{z-p} - \frac{1}{z-q} \right] \equiv P_{0,1}. \quad (4.5)$$

Dabei gibt der erste Index das Gebiet an, für welches das Feld gültig ist und der Zweite gibt den Iterationsschritt an.

Um die Formeln kürzer und übersichtlicher zu halten, unterdrücke ich die in den entsprechenden Gebieten holomorphe Zusatzfelder. Wir behalten jedoch im Sinn, daß stets solche Funktionen in allen drei Gebieten hinzugezählt werden können.

Im ersten Schritt wird durch Hinzufügen von geeigneten Funktionen die Randbedingung 0-1 gelöst. Dabei werden die Ergebnisse aus Abschnitt (3.3) verwendet. Im Unterschied zum Problem zweier Halbebenen müssen hier Terme, die durch die Anpassung der Randbedingungen entstanden sind, in höheren Iterationsstufen nochmals für die Anpassung der Felder berücksichtigt werden. Aus diesem Grund werden diesen Zusätzen eigene Bezeichnungen gegeben ($P_{k,l}$: Zusatz zum Feld im Gebiet k der Iterationsstufe l)

$$E_{0,2} = E_{0,1} - \frac{I}{2} \eta_{10} \left[\frac{1}{z-S_{10}(p)} - \frac{1}{z-S_{10}(q)} \right], \quad P_{0,2} \equiv E_{0,2} - E_{0,1} \quad (4.6)$$

$$E_{1,2} = \frac{I}{2} (1 - \eta_{10}) \left[\frac{1}{z-p} - \frac{1}{z-q} \right] \equiv P_{1,2}, \quad P_{1,1} \equiv 0, \quad P_{2,1} \equiv 0, \quad P_{2,2} \equiv 0 \quad (4.7)$$

Dabei sei für die relative Leitfähigkeitsdifferenzen

$$\eta_{kl} = \frac{\sigma_k - \sigma_l}{\sigma_k + \sigma_l} \quad (4.8)$$

definiert. Nun liegt die Situation vor, daß $E_{1,2}$ zwar die Randbedingung 0-1 erfüllt, aber nicht die Randbedingung 1-2. Darum wird nun zum Feld $E_{1,2}$ ein Zusatzterm hinzugefügt um diese Randbedingung zu erfüllen.

$$E_{1,3} = E_{1,2} - \frac{I}{2} (1 - \eta_{10}) \eta_{21} \left[\frac{1}{z-S_{21}(p)} - \frac{1}{z-S_{21}(q)} \right], \quad P_{1,3} \equiv E_{1,3} - E_{1,2} \quad (4.9)$$

$$E_{2,3} = \frac{I}{2} (1 - \eta_{10}) (1 - \eta_{21}) \left[\frac{1}{z-p} - \frac{1}{z-q} \right] \equiv P_{2,3}, \quad P_{0,3} \equiv 0 \quad (4.10)$$

Entsprechend wird nun mit dem Term $P_{1,3} = E_{1,3} - E_{1,2}$ verfahren. Nur dieser Zusatz muß weiter angepaßt werden, da für das Feld $E_{1,2}$ bereits entsprechende Felder im Gebiet 0 existieren, so daß die Randbedingung 0-1 erfüllt ist. Deshalb wird nun nur der Zusatz $P_{1,3}$ bei der Anpassung 0-1 weiter berücksichtigt.

$$E_{1,4} = E_{1,3} + \frac{I}{2}(1 - \eta_{10})\eta_{21}\eta_{01} \left[\frac{1}{z - S_{10}S_{21}(p)} - \frac{1}{z - S_{10}S_{21}(q)} \right] \quad (4.11)$$

$$E_{0,4} = E_{0,2} - \frac{I}{2}(1 - \eta_{10})\eta_{21}(1 - \eta_{01}) \left[\frac{1}{z - S_{21}(p)} - \frac{1}{z - S_{21}(q)} \right] \quad (4.12)$$

$$P_{1,4} \equiv E_{1,4} - E_{1,3}, \quad P_{0,4} = E_{0,4} - E_{0,2}, \quad P_{2,4} \equiv 0 \quad (4.13)$$

Nun liegt strukturell wieder die Situation des Iterationsschritts 2 vor:

$$E_{1,5} = E_{1,4} - \frac{I}{2}(1 - \eta_{10})\eta_{21}\eta_{01}\eta_{21} \left[\frac{1}{z - S_{21}S_{10}S_{21}(p)} - \frac{1}{z - S_{21}S_{10}S_{21}(q)} \right] \quad (4.14)$$

$$E_{2,5} = E_{2,3} + \frac{I}{2}(1 - \eta_{10})\eta_{21}\eta_{01}(1 - \eta_{21}) \left[\frac{1}{z - S_{10}S_{21}(p)} - \frac{1}{z - S_{10}S_{21}(q)} \right] \quad (4.15)$$

Nachdem nun das allgemeine Konstruktionsprinzip klar ist, kann man die Behauptung für einen vollständigen Induktionsbeweis aufstellen.

4.1.2 Induktionsbehauptung

Im Iterationsschritt $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ liegen die Felder in der Form

$$E_{t,n} = \sum_{s=1}^{2k} P_{t,s}, \quad t = 1, 2, 3 \quad (4.16)$$

vor. Der einzige Term, der eine Randbedingung eventuell nicht erfüllt, ist

$$P_{1,2k}. \quad (4.17)$$

Dieser verletzt (falls er nicht verschwindet) die Randbedingung 1-2. Die $P_{k,t}$ haben die Form:

$$P_{0,2k-1} = 0 \quad (4.18)$$

$$P_{0,2k} = -\frac{I}{2}(1 - \eta_{10}^2)\eta_{21}(\eta_{01}\eta_{21})^{k-2} \quad (4.19)$$

$$\left[\frac{1}{z - S_{21}(S_{10}S_{21})^{k-2}(p)} - \frac{1}{z - S_{21}(S_{10}S_{21})^{k-2}(q)} \right] \quad (4.20)$$

$$P_{1,2k-1} = \frac{I}{2}(1 - \eta_{10})(\eta_{12}\eta_{01})^{k-2}\eta_{21} \left[\frac{1}{z - (S_{21}S_{10})^{k-2}S_{21}(p)} - \frac{1}{z - (S_{21}S_{10})^{k-2}S_{21}(q)} \right] \quad (4.21)$$

$$P_{1,2k} = \frac{I}{2}(1 - \eta_{10})(\eta_{21}\eta_{01})^{k-1} \left[\frac{1}{z - (S_{10}S_{21})^{k-1}(p)} - \frac{1}{z - (S_{10}S_{21})^{k-1}(q)} \right] \quad (4.22)$$

$$P_{2,2k-1} = \frac{I}{2}(1 - \eta_{10})(1 - \eta_{21})(\eta_{21}\eta_{01})^{k-2} \left[\frac{1}{z - (S_{10}S_{21})^{k-2}(p)} - \frac{1}{z - (S_{10}S_{21})^{k-2}(q)} \right] \quad (4.23)$$

$$P_{2,2k} = 0 \quad (4.24)$$

4.1.3 Induktionsanfang

Die nötigen Rechnungen sind bereits im Abschnitt (4.1.1) durchgeführt worden.

4.1.4 Induktionsschritt $k \rightarrow k + 1$

Zuerst werden Zusatzterme addiert, so daß schließlich die Randbedingung 1-2 erfüllt ist.

$$P_{1,2k+1} = -\frac{I}{2}(1 - \eta_{10})(\eta_{21}\eta_{01})^{k-1}\eta_{21} \quad (4.25)$$

$$\left[\frac{1}{z - S_{21}(S_{10}S_{21})^{k-1}(p)} - \frac{1}{z - S_{21}(S_{10}S_{21})^{k-1}(q)} \right] = P_{1,2(k+1)-1} \quad (4.26)$$

$$P_{2,2k+1} = \frac{I}{2}(1 - \eta_{10})(\eta_{21}\eta_{01})^{k-1}(1 - \eta_{21}) \quad (4.27)$$

$$\left[\frac{1}{z - (S_{10}S_{21})^{k-1}(p)} - \frac{1}{z - (S_{10}S_{21})^{k-1}(q)} \right] = P_{2,2(k+1)-1} \quad (4.28)$$

$$P_{0,2k+1} = 0 = P_{0,2(k+1)-1} \quad (4.29)$$

Da nun der Term $P_{1,2k+1}$ die Randbedingung 0-1 nicht zwingend erfüllt, werden Terme addiert, welche garantieren, daß diese Randbedingung erfüllt wird.

$$P_{1,2k+2} = \frac{I}{2}(1 - \eta_{10})(\eta_{21}\eta_{01})^{k-1}\eta_{21}\eta_{01} \quad (4.30)$$

$$\left[\frac{1}{z - S_{10}S_{21}(S_{10}S_{21})^{k-1}(p)} - \frac{1}{z - S_{10}S_{21}(S_{10}S_{21})^{k-1}(q)} \right] = P_{1,2(k+1)} \quad (4.31)$$

$$P_{2,2k+2} = 0 = P_{2,2(k+1)} \quad (4.32)$$

$$P_{0,2k+2} = -\frac{I}{2}(1 - \eta_{10})(\eta_{21}\eta_{01})^{k-1}\eta_{21}(1 - \eta_{01}) \quad (4.33)$$

$$\left[\frac{1}{z - S_{21}(S_{10}S_{21})^{k-1}(p)} - \frac{1}{z - S_{21}(S_{10}S_{21})^{k-1}(q)} \right] = P_{2,2(k+1)} \quad (4.34)$$

Somit ist der Induktionsschritt bewiesen.

4.1.5 Spiegelpolreihen als exakte Lösungen

Geht man von den Partialsummen aus dem Induktionsbeweis zu den kompletten Reihen über, so erhält man die exakten Lösungen des Problems, denn der einzige Term der eine Randbedingung nicht zwingend erfüllen könnte, strebt im Grenzfall gegen Null!

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_{1,2k} = 0 \quad (4.35)$$

Dies wird klar, wenn man sich die explizite Form von $P_{1,2k}$ ansieht.

$$P_{1,2k} = \frac{I}{2}(1 - \eta_{10})(\eta_{21}\eta_{01})^{k-1} \left[\frac{1}{z - (S_{10}S_{21})^{k-1}(p)} - \frac{1}{z - (S_{10}S_{21})^{k-1}(q)} \right] \quad (4.36)$$

Die Pole der Polterme in der eckigen Klammer streben beide auf den Punkt Unendlich zu. Deshalb konvergiert die eckige Klammer für $k \rightarrow \infty$ gegen Null. Ferner konvergiert der Vorfaktor $(\eta_{21}\eta_{01})^{k-1}$ ebenfalls gegen Null, wenn nicht $|\eta_{21}| = |\eta_{01}| = 1$ ist. Dies wäre aber nur möglich, wenn die Zwischenschicht ein Isolator ist, und in diesem Fall hat die Halbebene, in der keine

Stromeinprägpole sitzen, sowieso keinen Einfluß. Folglich beschleunigt der Vorfaktor die Konvergenz für physikalisch relevante Situationen zusätzlich. Der explizite Beweis der Konvergenz basiert auf Untersuchung der Komposition der beiden Spiegelungsabbildung.

$$(S_{10} \circ S_{21})(p) = p - 2\alpha n \quad (4.37)$$

Somit ist

$$(S_{10} \circ S_{21})^{k-1}(p) = p - 2(k-1)\alpha n. \quad (4.38)$$

Die eckige Klammer kann umgeformt werden zu

$$K := \frac{1}{z - (S_{10}S_{21})^{k-1}(p)} - \frac{1}{z - (S_{10}S_{21})^{k-1}(q)} = \frac{1}{k-1} \frac{\frac{p-q}{k-1} + 4\alpha n}{\left(\frac{z-p}{k-1} + 2\alpha n\right) \left(\frac{z-q}{k-1} + 2\alpha n\right)}. \quad (4.39)$$

Im Grenzwert konvergiert die Klammer also gegen Null

$$\lim_{k \rightarrow \infty} K = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha n(k-1)} = 0. \quad (4.40)$$

Endergebnis:

Da Differenzen von Poltermen immer wieder vorkommen, definiere ich

$$D(z, F, p, q) := \left[\frac{1}{z - F(p)} - \frac{1}{z - F(q)} \right], \quad (4.41)$$

um eine kürze Schreibweise zu ermöglichen.

$$E_0(z) = \frac{I}{2} D(z, 1, p, q) - \frac{I}{2} \eta_{10} D(z, S_{10}, p, q) \quad (4.42)$$

$$- \frac{I}{2} (1 - \eta_{10}^2) \eta_{21} \sum_{n=0}^{\infty} (\eta_{01} \eta_{21})^n D(z, S_{21} (S_{10} S_{21})^n, p, q) \quad (4.43)$$

$$E_1(z) = \frac{I}{2} (1 - \eta_{10}) D(z, 1, p, q) \quad (4.44)$$

$$- \frac{I}{2} (1 - \eta_{10}) \sum_{n=0}^{\infty} (\eta_{21} \eta_{01})^n \eta_{21} [D(z, (S_{21} S_{10})^n S_{21}, p, q) \quad (4.45)$$

$$- \eta_{01} D(z, (S_{10} S_{21})^{n+1}, p, q)] \quad (4.46)$$

$$E_2(z) = \frac{I}{2} (1 - \eta_{10})(1 - \eta_{21}) D(z, 1, p, q) \quad (4.47)$$

$$+ \frac{I}{2} (1 - \eta_{10})(1 - \eta_{21}) \sum_{n=1}^{\infty} (\eta_{21} \eta_{01})^n D(z, (S_{10} S_{21})^n, p, q) \quad (4.48)$$

4.1.6 Relevanz einer dünnen Zwischenschicht

In diesem Abschnitt wird der Grenzfall $\alpha \rightarrow 0$ untersucht, d.h. man läßt die Dicke der Zwischenschicht gegen Null streben und vergleicht das Ergebnis mit der Situation bei der diese ganz fehlt. Mathematisch ausgedrückt, geht es um die Vertauschbarkeit von Grenzprozessen (Reihe \leftrightarrow Schichtdicke). Für diese Untersuchung müssen die Grenzwerte

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} E_0(z) \quad \text{und} \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} E_2(z) \quad (4.49)$$

berechnet werden. Es gilt $\lim_{\alpha \rightarrow 0} S_{10} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} S_{21} \Rightarrow \lim_{\alpha \rightarrow 0} (S_{10} S_{21}) = 1$. Somit hat das Feld E_0 die Form

$$E_0(z) = \frac{I}{2} D(z, 1, p, q) - \frac{I}{2} \eta_{10} D(z, S_{10}, p, q) \quad (4.50)$$

$$- \frac{I}{2} (1 - \eta_{10}^2) \eta_{21} D(z, S_{21}, p, q) \sum_{n=0}^{\infty} (\eta_{01} \eta_{21})^n. \quad (4.51)$$

Wenn wir zunächst die Extremfälle $\sigma_k = 0$ und $\sigma_k = \infty$ ausnehmen, gilt $-1 < \eta_{01} < 1$ und $-1 < \eta_{21} < 1$. Somit kann man die geometrische Reihe

$$\Rightarrow |\eta_{01} \eta_{21}| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (\eta_{01} \eta_{21})^n = \frac{1}{1 - \eta_{01} \eta_{21}} \quad (4.52)$$

verwenden um

$$\Rightarrow E_0 = \frac{I}{2} D(z, 1, p, q) - \frac{I}{2} D(z, S_{10}, p, q) \left[\eta_{10} + (1 - \eta_{10}^2) \eta_{21} \frac{1}{1 - \eta_{01} \eta_{21}} \right] \quad (4.53)$$

zu berechnen.

$$\frac{1}{1 - \eta_{01} \eta_{21}} = \frac{(\sigma_0 + \sigma_1)(\sigma_2 + \sigma_1)}{2\sigma_1(\sigma_0 + \sigma_2)} \quad (4.54)$$

$$(1 - \eta_{10}^2) \eta_{21} = \frac{4\sigma_1 \sigma_0 (\sigma_2 - \sigma_1)}{(\sigma_1 + \sigma_0)^2 (\sigma_2 + \sigma_1)} \quad (4.55)$$

$$(1 - \eta_{10}^2) \eta_{21} \frac{1}{1 - \eta_{01} \eta_{21}} = \frac{2\sigma_0 (\sigma_2 - \sigma_1)}{(\sigma_0 + \sigma_2)(\sigma_1 + \sigma_0)} \quad (4.56)$$

$$\eta_{10} + (1 - \eta_{10}^2) \eta_{21} \frac{1}{1 - \eta_{01} \eta_{21}} = \eta_{20} \quad (4.57)$$

Somit erhält man im Grenzfall

$$\boxed{\lim_{\alpha \rightarrow 0} E_0(z) = \frac{I}{2} D(z, 1, p, q) - \frac{I}{2} \eta_{20} D(z, S_{10}, p, q)}. \quad (4.58)$$

Für das Feld E_2 erhält man zunächst

$$E_2(z) = \frac{I}{2} (1 - \eta_{10})(1 - \eta_{21}) D(z, 1, p, q) \quad (4.59)$$

$$+ \frac{I}{2} (1 - \eta_{10})(1 - \eta_{21}) D(z, 1, p, q) \sum_{n=1}^{\infty} (\eta_{21} \eta_{01})^n D(z, 1, p, q) \quad (4.60)$$

$$= \frac{I}{2} D(z, 1, p, q) (1 - \eta_{10})(1 - \eta_{21}) \sum_{n=0}^{\infty} (\eta_{21} \eta_{01})^n. \quad (4.61)$$

$$(1 - \eta_{10})(1 - \eta_{21}) \sum_{n=0}^{\infty} (\eta_{21} \eta_{01})^n = \frac{2\sigma_0}{\sigma_1 + \sigma_0} \frac{2\sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} \frac{1}{1 - \eta_{21} \eta_{01}} = 1 - \eta_{20} \quad (4.62)$$

$$\Rightarrow \boxed{E_2(z) = \frac{I}{2} (1 - \eta_{20}) D(z, 1, p, q)} \quad (4.63)$$

Dies sind aber genau die Ergebnisse die man erhält, wenn die Zwischenschicht a priori nicht vorhanden ist! In den ausgeschlossenen Spezialfällen hat die Schichtdicke keinen strukturell wichtigen Einfluß auf das Ergebnis. Anders ausgedrückt heißt dies, daß in diesen Fällen der Einfluß der Schichtdicke auf die Felder nicht mit der Dicke der Zwischenschicht abnimmt! Dies soll am Beispiel einer Isolatorschicht ($\sigma_1 = 0$) zwischen zwei Halbebenen ($\sigma_0, \sigma_2 \neq 0, \infty$) verdeutlicht werden. Die Randbedingung 0-1 zeigt, daß E_0 auf dem Rand nur eine Tangentialkomponente hat. (Die Randbedingung ist in diesem Spezialfall vom Neumannschen Typ)

$$\eta_{10} = -1 \quad \Rightarrow \quad E_0 + \tilde{n}^2 \tilde{E}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_0 n + \tilde{n} \tilde{E}_0 = 0 \quad (4.64)$$

Dies bedeutet aber, daß kein Strom durch den Isolator in das Gebiet 2 fließt (unabhängig von der Schichtdicke!). Dies spiegelt sich auch in den expliziten Feldlösungen wieder.

$$\eta_{21} = 1 \quad \Rightarrow \quad E_2 = 0 \quad (4.65)$$

$$\eta_{10} = -1 \quad \Rightarrow \quad E_1 \text{ endlich,} \quad \Rightarrow \quad k_1 = \sigma_1 E_1 = 0 \quad (4.66)$$

Dies bedeutet, daß im Gebiet 1 zwar ein elektrisches Feld vorhanden ist, aber die ohmsche Stromdichte k_1 dort verschwindet! Im entgegengesetzten Extremfall $\sigma_1 = \infty$ gilt: $\eta_{10} = 1$, $\eta_{21} = -1$.

$$E_1(z) = \frac{2\sigma_0}{\sigma_1 + \sigma_0} \frac{I}{2} \left[D(z, 1, p, q) \quad (4.67)$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} (D(z, (S_{21} S_{10})^n S_{21}, p, q) + D(z, (S_{10} S_{21})^{n+1}, p, q)) \right] \quad (4.68)$$

$$\lim_{\sigma_1 \rightarrow \infty} E_1(z) = 0 \quad (4.69)$$

Die ohmsche Stromdichte $k_1 = \sigma_1 E_1$ hingegen verschwindet nicht:

$$\lim_{\sigma_1 \rightarrow \infty} k_1(z) = I \sigma_0 \left[D(z, 1, p, q) \quad (4.70)$$

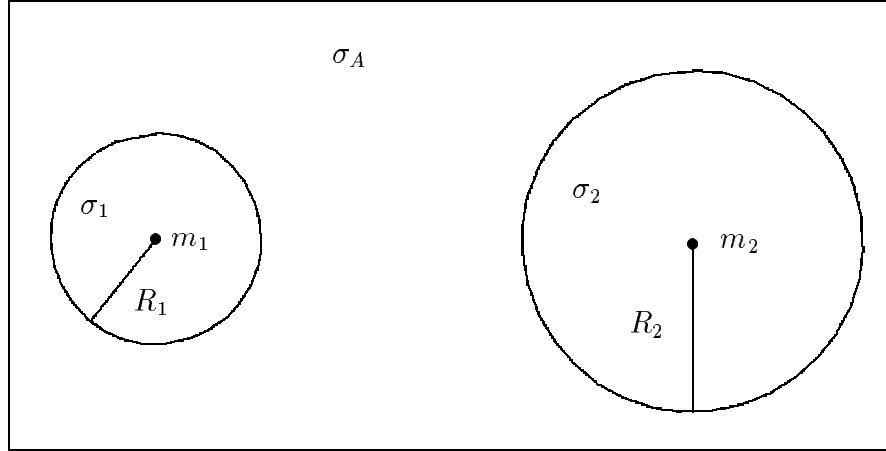
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} (D(z, (S_{21} S_{10})^n S_{21}, p, q) + D(z, (S_{10} S_{21})^{n+1}, p, q)) \right] \quad (4.71)$$

Das Verschwinden des elektrischen Feldes im Gebiet 1 bedeutet für das Feld im Gebiet 2, daß dieses verschwinden muß. Dies ist sieht man auch direkt an der Lösung für E_2 wegen $\eta_{10} = 1$. Dieser Effekt entspricht dem, des Faradayschen Käfigs. Ferner folgt aus der Randbedingung für das Feld im Gebiet 0

$$0 = E_0 - \eta_{10} \tilde{n}^2 \tilde{E}_0 = E_0 - \tilde{n}^2 \tilde{E}_0, \quad \Rightarrow \quad E_0 n - \tilde{n} \tilde{E}_0 = 0, \quad (4.72)$$

was bedeutet, daß das Feld E_0 senkrecht auf dem Rand steht.

4.2 Ausgedehnte Stromeinprägungen



Bisher wurden die Stromquellen und Senken durch δ -Distributionen vorgegeben. Hier wird nun eine realistischere Situation diskutiert, in der die δ -Pole in ideal leitende Kreisscheiben gesetzt werden, welche dann als Ganzes die Einprägepole repräsentieren. Strukturell und topologisch ist diese Konfiguration unter folgenden Gesichtspunkten von den zuvor betrachteten zu unterscheiden:

1. Die Pole liegen hier in unterschiedlichen Gebieten
2. Das Gebiet außerhalb der beiden Kreisscheiben (Gebiet A) ist dreifach zusammenhängend, während in Abschnitt (4.1) alle Gebiete einfach zusammenhängen waren.

Wie im letzten Beispiel sollen auch hier die Gesamtfelder als Summe der Zusatzterme jeder Iteration gebildet werden

$$E_t(z) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{t,k}, \quad t = 1, 2, A. \quad (4.73)$$

Die Quellen sind hier gegeben durch

$$-\vec{\partial} \cdot \mathcal{J} = \pi J [\delta(\vec{r} - \vec{p}) - \delta(\vec{r} - \vec{q})]. \quad (4.74)$$

Dabei soll für die Positionen der Pole

$$b_1(p, \tilde{p}) < 0, \quad b_2(q, \tilde{q}) < 0 \quad (4.75)$$

gelten, wobei die Ränder durch

$$b_k(z, \tilde{z}) = (z - m_k)(\tilde{z} - \tilde{m}_k) - R_k^2 = 0, \quad k = 1, 2, \quad (4.76)$$

bzw.

$$\beta_k(z) = \tilde{m}_k + \frac{R_k^2}{z - m_k}, \quad (4.77)$$

wie bereits in Abschnitt (3.4), definiert sind. Für dieses Problem lauten die Feldgleichungen

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{z}} E_A &= 0 \\ \partial_{\tilde{z}} E_1 &= \pi \frac{J}{2\sigma_1} \delta(\vec{r} - \vec{p}) \\ \partial_{\tilde{z}} E_2 &= -\pi \frac{J}{2\sigma_2} \delta(\vec{r} - \vec{q}), \end{aligned} \quad (4.78)$$

und die Randbedingungen

$$\begin{aligned} (1 + \eta_{1A})E_1 &= E_A + \eta_{1A}\beta'_1\tilde{E}_A, & \eta_{1A} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_A}{\sigma_1 + \sigma_A}, & \beta_1(z) &= \tilde{m}_1 + \frac{R_1^2}{z - m_1} \\ (1 + \eta_{2A})E_2 &= E_A + \eta_{2A}\beta'_2\tilde{E}_A, & \eta_{2A} &= \frac{\sigma_2 - \sigma_A}{\sigma_2 + \sigma_A}, & \beta_2(z) &= \tilde{m}_2 + \frac{R_2^2}{z - m_2}. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Im ersten Iterationsschritt startet man mit den Elementarlösungen

$$E_{1,1} = \frac{J}{2\sigma_1} \frac{1}{z - p} = P_{1,1}, \quad (4.80)$$

und

$$E_{2,1} = -\frac{J}{2\sigma_2} \frac{1}{z - q} = P_{2,1}, \quad P_{A,1} = 0 \quad (4.81)$$

in Gebieten um die Einprägpole. Die erste Anpassung der Randbedingungen liefert, wie in Abschnitt (3.4) in den Formeln (3.93) die folgenden Felder:

$$E_{1,2} = E_{1,1} + \eta_{1A} \frac{J}{2\sigma_1} \frac{1}{z - S_1(p)}, \quad P_{1,2} = E_{1,2} - E_{1,1} \quad (4.82)$$

$$E_{2,2} = E_{2,1} - \eta_{2A} \frac{J}{2\sigma_2} \frac{1}{z - S_2(q)}, \quad P_{2,2} = E_{2,2} - E_{2,1} \quad (4.83)$$

$$E_{A,2} = \underbrace{\frac{J}{2\sigma_1}(1 + \eta_{1A}) \frac{1}{z - p} + \frac{J}{2\sigma_A} \eta_{1A} \frac{1}{z - m_1}}_{P_{A,2}^1} \quad (4.84)$$

$$\underbrace{-\frac{J}{2\sigma_2}(1 + \eta_{2A}) \frac{1}{z - q} - \frac{J}{2\sigma_A} \eta_{2A} \frac{1}{z - m_2}}_{P_{A,2}^2} = P_{A,2} \quad (4.85)$$

Dabei sind die Spiegelungsabbildungen wieder durch $S_k(p) \equiv \widetilde{\beta_k(p)}$ definiert. $P_{A,2}^1$ ist der Anteil von $P_{A,2}$, der die Randbedingung 1 erfüllt, also an die Randbedingung 2 angepaßt werden muß. Entsprechendes gilt für $P_{A,2}^2$. Durch Anpassung von E_A mittels der Randbedingungen 1-A und 2-A entstehen im nächsten Iterationsschritt folgende Terme:

$$P_{1,3} = -\frac{J}{\sigma_2 + \sigma_A} (1 - \eta_{1A}) \frac{1}{z - q} - \frac{J}{\sigma_1 + \sigma_A} \eta_{2A} \frac{1}{z - m_2} \quad (4.86)$$

$$P_{2,3} = \frac{J}{\sigma_1 + \sigma_A} (1 - \eta_{2A}) \frac{1}{z - p} + \frac{J}{\sigma_2 + \sigma_A} \eta_{1A} \frac{1}{z - m_1} \quad (4.87)$$

$$P_{A,3} = \underbrace{\frac{J\eta_{1A}}{\sigma_2 + \sigma_A} \left(\frac{1}{z - S_1(q)} - \frac{1}{z - m_1} \right) + \frac{J}{2\sigma_A} \eta_{1A} \eta_{2A} \left(\frac{1}{z - S_1(m_2)} - \frac{1}{z - m_1} \right)}_{P_{A,3}^1} \quad (4.88)$$

$$\underbrace{-\frac{J\eta_{2A}}{\sigma_1 + \sigma_A} \left(\frac{1}{z - S_2(p)} - \frac{1}{z - m_2} \right) - \frac{J}{2\sigma_A} \eta_{1A} \eta_{2A} \left(\frac{1}{z - S_2(m_1)} - \frac{1}{z - m_2} \right)}_{P_{A,3}^2} \quad (4.89)$$

Der nächste Iterationsschritt liefert gleichzeitig den Induktionsanfang für den im Anschluß folgenden Induktionsbeweis.

$$P_{1,4} = \frac{J\eta_{2A}}{\sigma_1 + \sigma_A} \frac{1}{z - m_2} - \frac{J\eta_{2A}}{\sigma_1 + \sigma_A} \frac{1 - \eta_{1A}}{z - S_2(p)} - \frac{J\eta_{1A}\eta_{2A}}{\sigma_1 + \sigma_A} \frac{1}{z - S_2(m_1)} \quad (4.90)$$

$$P_{2,4} = -\frac{J\eta_{1A}}{\sigma_2 + \sigma_A} \frac{1}{z - m_1} + \frac{J\eta_{1A}}{\sigma_2 + \sigma_A} \frac{1 - \eta_{2A}}{z - S_1(q)} + \frac{J\eta_{1A}\eta_{2A}}{\sigma_2 + \sigma_A} \frac{1}{z - S_1(m_2)} \quad (4.91)$$

$$P_{A,4}^1 = -\frac{J\eta_{1A}\eta_{2A}}{2\sigma_A} \left(\frac{1}{z - S_1(m_2)} - \frac{1}{z - m_1} \right) \quad (4.92)$$

$$+ \frac{J\eta_{1A}\eta_{2A}}{\sigma_1 + \sigma_A} \left(\frac{1}{z - S_1S_2(p)} - \frac{1}{z - m_1} \right) \quad (4.93)$$

$$+ \frac{J\eta_{1A}\eta_{2A}\eta_{1A}}{2\sigma_A} \left(\frac{1}{z - S_1S_2(m_1)} - \frac{1}{z - m_1} \right) \quad (4.94)$$

$$P_{A,4}^2 = \frac{J\eta_{1A}\eta_{2A}}{2\sigma_A} \left(\frac{1}{z - S_2(m_1)} - \frac{1}{z - m_2} \right) \quad (4.95)$$

$$- \frac{J\eta_{1A}\eta_{2A}}{\sigma_2 + \sigma_A} \left(\frac{1}{z - S_2S_1(q)} - \frac{1}{z - m_2} \right) \quad (4.96)$$

$$- \frac{J\eta_{2A}\eta_{1A}\eta_{2A}}{2\sigma_A} \left(\frac{1}{z - S_2S_1(m_2)} - \frac{1}{z - m_2} \right) \quad (4.97)$$

Die Polterme der Kreismittelpunkte heben sich gegenseitig auf.

$$\frac{1}{z - m_1} J\eta_{1A}\eta_{2A} \left(-\frac{1}{2\sigma_A} + \frac{1}{\sigma_1 + \sigma_A} + \frac{\eta_{1A}}{2\sigma_A} \right) \quad (4.98)$$

$$= \frac{1}{z - m_1} J\eta_{1A}\eta_{2A} \left(-\frac{1}{2\sigma_A} (1 - \eta_{1A}) + \frac{1}{\sigma_1 + \sigma_A} \right) \quad (4.99)$$

$$= \frac{1}{z - m_1} J\eta_{1A}\eta_{2A} \left(-\frac{1}{\sigma_1 + \sigma_A} + \frac{1}{\sigma_1 + \sigma_A} \right) = 0 \quad (4.100)$$

Für die Polterme am Punkt m_2 geht die Rechnung analog. Somit bleibt nur folgendes Ergebnis übrig

$$P_{A,4}^1 = -\frac{J\eta_{1A}\eta_{2A}}{2\sigma_A} \frac{1}{z - S_1(m_2)} + \frac{J\eta_{1A}\eta_{2A}}{\sigma_1 + \sigma_A} \frac{1}{z - S_1S_2(p)} + \frac{J\eta_{1A}\eta_{2A}\eta_{1A}}{2\sigma_A} \frac{1}{z - S_1S_2(m_1)} \quad (4.101)$$

$$P_{A,4}^2 = \frac{J\eta_{1A}\eta_{2A}}{2\sigma_A} \frac{1}{z - S_2(m_1)} - \frac{J\eta_{1A}\eta_{2A}}{\sigma_2 + \sigma_A} \frac{1}{z - S_2S_1(q)} - \frac{J\eta_{2A}\eta_{1A}\eta_{2A}}{2\sigma_A} \frac{1}{z - S_2S_1(m_2)} \quad (4.102)$$

4.2.1 Induktionsbehauptung

Für die Iterationsschritt $k = 2N$, $N \geq 2$ gilt:

$$P_{1,2N} = \frac{J\eta_{2A}}{\sigma_1 + \sigma_A} \frac{(\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-2}}{z - (S_2S_1)^{N-2}(m_2)} - \frac{J\eta_{2A}}{\sigma_1 + \sigma_A} \frac{(1 - \eta_{1A})(\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-2}}{z - S_2(S_1S_2)^{N-2}(p)} \quad (4.103)$$

$$- \frac{J}{\sigma_1 + \sigma_A} \frac{(\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-1}}{z - S_2(S_1S_2)^{N-2}(m_1)} \quad (4.104)$$

$$P_{2,2N} = -\frac{J\eta_{1A}}{\sigma_2 + \sigma_A} \frac{(\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-2}}{z - (S_1S_2)^{N-2}(m_1)} + \frac{J\eta_{1A}}{\sigma_2 + \sigma_A} \frac{(1 - \eta_{2A})(\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-2}}{z - S_1(S_2S_1)^{N-2}(q)} \quad (4.105)$$

$$+ \frac{J}{\sigma_2 + \sigma_A} \frac{(\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-1}}{z - S_1(S_2S_1)^{N-2}(m_2)} \quad (4.106)$$

$$P_{A,2N}^1 = -\frac{J}{2\sigma_A} \frac{(\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-1}}{z - S_1(S_2S_1)^{N-2}(m_2)} + \frac{J}{\sigma_1 + \sigma_A} \frac{(\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-1}}{z - (S_1S_2)^{N-1}(p)} \quad (4.107)$$

$$+ \frac{J\eta_{1A}}{2\sigma_A} \frac{(\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-1}}{z - (S_1S_2)^{N-1}(m_1)} \quad (4.108)$$

$$P_{A,2N}^2 = \frac{J}{2\sigma_A} \frac{(\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-1}}{z - S_2(S_1S_2)^{N-2}(m_1)} - \frac{J}{\sigma_2 + \sigma_A} \frac{(\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-1}}{z - (S_2S_1)^{N-1}(q)} \quad (4.109)$$

$$- \frac{J\eta_{2A}}{2\sigma_A} \frac{(\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-1}}{z - (S_2S_1)^{N-1}(m_2)} \quad (4.110)$$

4.2.2 Induktionsanfang

Die Formeln gelten für $k = 4$ nach den zuvor gemachten Berechnungen.

4.2.3 Induktionsschritt – ungerade Iterationsschritte

Falls die Formeln für $k = 2N$ gelten, kann man durch Ausführen eines einzelnen weiteren Iterationsschrittes die Formeln für die ungeraden Iterationsschritte berechnen. Andererseits müssen zwei Iterationsschritte ausgehend vom k -ten Schritt ausgeführt werden um die Induktionsbehauptung zu beweisen.

$$P_{1,2N+1} = \frac{J}{\sigma_1 + \sigma_A} \frac{(\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-1}}{z - S_2(S_1S_2)^{N-2}(m_1)} - \frac{J}{\sigma_2 + \sigma_A} \frac{(\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-1}(1 - \eta_{1A})}{z - (S_2S_1)^{N-1}(q)} \quad (4.111)$$

$$- \frac{J\eta_{2A}}{\sigma_1 + \sigma_A} \frac{(\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-1}}{z - (S_2S_1)^{N-1}(m_2)} \quad (4.112)$$

$$P_{2,2N+1} = - \frac{J}{\sigma_2 + \sigma_A} \frac{(\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-1}}{z - S_1(S_2S_1)^{N-2}(m_2)} + \frac{J}{\sigma_1 + \sigma_A} \frac{(\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-1}(1 - \eta_{2A})}{z - (S_1S_2)^{N-1}(p)} \quad (4.113)$$

$$+ \frac{J\eta_{1A}}{\sigma_2 + \sigma_A} \frac{(\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-1}}{z - (S_1S_2)^{N-1}(m_1)} \quad (4.114)$$

$$P_{A,2N+1}^1 = - \frac{J\eta_{1A}}{2\sigma_A} \frac{(\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-1}}{z - (S_1S_2)^{N-1}(m_1)} + \frac{J\eta_{1A}}{\sigma_2 + \sigma_A} \frac{(\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-1}}{z - S_1(S_2S_1)^{N-1}(q)} \quad (4.115)$$

$$+ \frac{J}{2\sigma_A} \frac{(\eta_{1A}\eta_{2A})^N}{z - S_1(S_2S_1)^{N-1}(m_2)} \quad (4.116)$$

$$P_{A,2N+1}^2 = \frac{J\eta_{2A}}{2\sigma_A} \frac{(\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-1}}{z - (S_2S_1)^{N-1}(m_2)} - \frac{J\eta_{2A}}{\sigma_1 + \sigma_A} \frac{(\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-1}}{z - S_2(S_1S_2)^{N-1}(p)} \quad (4.117)$$

$$- \frac{J}{2\sigma_A} \frac{(\eta_{1A}\eta_{2A})^N}{z - S_2(S_1S_2)^{N-1}(m_1)} \quad (4.118)$$

Nun kann man die Induktionsbehauptung beweisen, indem man noch einen Iterationsschritt ausführt und das Ergebnis mit dem in der Induktion behaupteten vergleicht. Man erkennt dann sofort, daß die Induktionsbehauptung richtig ist.

4.2.4 Summation der Iterationsstufen

$$E_1(z) = \frac{J}{2\sigma_1} \frac{1}{z - p} + \frac{J}{2\sigma_1} \frac{\eta_{1A}}{z - S_1(p)} - \frac{J}{\sigma_2 + \sigma_A} \frac{1 - \eta_{1A}}{z - q} - \frac{J}{\sigma_1 + \sigma_A} \frac{\eta_{2A}}{z - m_2} \quad (4.119)$$

$$+ \sum_{N=2}^{\infty} (P_{1,2N} + P_{1,2N+1}) \quad (4.120)$$

$$P_{1,2N} + P_{1,2N+1} = \frac{J\eta_{2A}}{\sigma_1 + \sigma_A} \frac{(\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-2}}{z - (S_2S_1)^{N-2}(m_2)} - \frac{J\eta_{2A}}{\sigma_1 + \sigma_A} \frac{(\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-2}(1 - \eta_{1A})}{z - S_2(S_1S_2)^{N-2}(p)} \quad (4.121)$$

$$- \frac{J}{\sigma_2 + \sigma_A} \frac{(1 - \eta_{1A})(\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-1}}{z - (S_2S_1)^{N-1}(q)} - \frac{J\eta_{2A}}{\sigma_1 + \sigma_A} \frac{(\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-1}}{z - (S_2S_1)^{N-1}(m_2)} \quad (4.122)$$

$$\sum_{N=2}^{\infty} (P_{1,2N} + P_{1,2N+1}) = \frac{J\eta_{2A}}{\sigma_1 + \sigma_A} \frac{1}{z - m_2} - \frac{J\eta_{2A}}{\sigma_1 + \sigma_A} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-1}}{z - (S_2S_1)^{N-1}(m_2)} - J(1 - \eta_{1A}) \sum_{N=2}^{\infty} \left(\frac{\eta_{2A}}{\sigma_1 + \sigma_A} \frac{(\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-2}}{z - S_2(S_1S_2)^{N-2}(p)} + \frac{(\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-1}}{\sigma_2 + \sigma_A} \frac{1}{z - (S_2S_1)^{N-1}(q)} \right) \quad (4.123)$$

$$E_1(z) = \frac{J}{2\sigma_1} \frac{1}{z - p} + \frac{J}{2\sigma_1} \frac{\eta_{1A}}{z - S_1(p)} - \frac{J}{\sigma_2 + \sigma_A} \frac{1 - \eta_{1A}}{z - q} \quad (4.124)$$

$$- \frac{J\eta_{2A}}{\sigma_1 + \sigma_A} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-1}}{z - (S_2S_1)^{N-1}(m_2)} \quad (4.125)$$

$$- J(1 - \eta_{1A}) \sum_{N=2}^{\infty} \left(\frac{\eta_{2A}}{\sigma_1 + \sigma_A} \frac{(\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-2}}{z - S_2(S_1S_2)^{N-2}(p)} + \frac{(\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-1}}{\sigma_2 + \sigma_A} \frac{1}{z - (S_2S_1)^{N-1}(q)} \right) \quad (4.126)$$

$$E_2(z) = -\frac{J}{2\sigma_2} \frac{1}{z - q} - \frac{J}{2\sigma_2} \frac{\eta_{2A}}{z - S_2(q)} + \frac{J}{\sigma_1 + \sigma_A} \frac{1 - \eta_{2A}}{z - p} \quad (4.127)$$

$$+ \frac{J\eta_{1A}}{\sigma_2 + \sigma_A} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-1}}{z - (S_1S_2)^{N-1}(m_1)} \quad (4.128)$$

$$+ J(1 - \eta_{2A}) \sum_{N=2}^{\infty} \left(\frac{\eta_{1A}}{\sigma_2 + \sigma_A} \frac{(\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-2}}{z - S_1(S_2S_1)^{N-2}(q)} + \frac{(\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-1}}{\sigma_1 + \sigma_A} \frac{1}{z - (S_1S_2)^{N-1}(p)} \right) \quad (4.129)$$

Entsprechend gilt für das Feld E_A

$$E_A = J \left[\frac{1}{(\sigma_1 + \sigma_A)(z - p)} - \frac{1}{(\sigma_2 + \sigma_A)(z - q)} \right] \quad (4.130)$$

$$+ J \left[\frac{\eta_{1A}}{(\sigma_2 + \sigma_A)(z - S_1(q))} - \frac{\eta_{2A}}{(\sigma_1 + \sigma_A)(z - S_2(p))} \right] \quad (4.131)$$

$$+ \frac{J\eta_{1A}\eta_{2A}}{2\sigma_A} \left[\frac{1}{z - S_1(m_2)} - \frac{1}{z - S_2(m_1)} \right] \quad (4.132)$$

$$+ \sum_{N=2}^{\infty} (P_{A,2N} + P_{A,2N+1}) \quad (4.133)$$

$$P_{A,2N} + P_{A,2N+1} = \frac{J}{2\sigma_A} (\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-1} \left[\frac{1}{z - S_2(S_1S_2)^{N-2}(m_1)} - \frac{1}{z - S_1(S_2S_1)^{N-2}(m_2)} \right] \quad (4.134)$$

$$+ J(\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-1} \left[\frac{1}{(\sigma_1 + \sigma_A)(z - (S_1S_2)^{N-1}(p))} - \frac{1}{(\sigma_2 + \sigma_A)(z - (S_1S_2)^{N-1}(q))} \right] \quad (4.135)$$

$$+ J(\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-1} \left[\frac{\eta_{1A}}{(\sigma_2 + \sigma_A)(z - S_1(S_2S_1)^{N-1}(q))} - \frac{\eta_{2A}}{(\sigma_1 + \sigma_A)(z - S_2(S_1S_2)^{N-1}(p))} \right] \quad (4.136)$$

$$- \frac{J}{2\sigma_A} (\eta_{1A}\eta_{2A})^N \left[\frac{1}{z - S_2(S_1S_2)^{N-1}(m_1)} - \frac{1}{z - S_1(S_2S_1)^{N-1}(m_2)} \right] \quad (4.137)$$

Der letzte Term der Iterationsstufe N und der erste Term der darauf folgenden heben sich gegeneinander auf, so daß man folgende Formel für die Summe erhält:

$$\sum_{N=2}^{\infty} (P_{A,2N} + P_{A,2N+1}) = -\frac{J}{2\sigma_A} \eta_{1A}\eta_{2A} \left[\frac{1}{z - S_1(m_2)} - \frac{1}{z - S_2(m_1)} \right] \quad (4.138)$$

$$+ J \sum_{N=2}^{\infty} (\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-1} \left[\frac{1}{(\sigma_1 + \sigma_A)(z - (S_1S_2)^{N-1}(p))} - \frac{1}{(\sigma_2 + \sigma_A)(z - (S_1S_2)^{N-1}(q))} \right] \quad (4.139)$$

$$+ \frac{\eta_{1A}}{(\sigma_2 + \sigma_A)(z - S_1(S_2S_1)^{N-1}(q))} - \frac{\eta_{2A}}{(\sigma_1 + \sigma_A)(z - S_2(S_1S_2)^{N-1}(p))} \quad (4.140)$$

$$- \frac{J}{2\sigma_A} \lim_{N \rightarrow \infty} (\eta_{1A}\eta_{2A})^N \left[\frac{1}{z - S_2(S_1S_2)^{N-1}(m_1)} - \frac{1}{z - S_1(S_2S_1)^{N-1}(m_2)} \right] \quad (4.141)$$

Somit erhält man insgesamt für das Feld im Außenraum

$$E_A = J \left[\frac{1}{(\sigma_1 + \sigma_A)(z - p)} - \frac{1}{(\sigma_2 + \sigma_A)(z - q)} \right] \quad (4.142)$$

$$+ J \left[\frac{\eta_{1A}}{(\sigma_2 + \sigma_A)(z - S_1(q))} - \frac{\eta_{2A}}{(\sigma_1 + \sigma_A)(z - S_2(p))} \right] \quad (4.143)$$

$$+ J \sum_{N=2}^{\infty} (\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-1} \left[\frac{1}{(\sigma_1 + \sigma_A)(z - (S_1S_2)^{N-1}(p))} - \frac{1}{(\sigma_2 + \sigma_A)(z - (S_1S_2)^{N-1}(q))} \right] \quad (4.144)$$

$$+ \frac{\eta_{1A}}{(\sigma_2 + \sigma_A)(z - S_1(S_2S_1)^{N-1}(q))} - \frac{\eta_{2A}}{(\sigma_1 + \sigma_A)(z - S_2(S_1S_2)^{N-1}(p))} \right] \quad (4.145)$$

$$- \frac{J}{2\sigma_A} \lim_{N \rightarrow \infty} (\eta_{1A}\eta_{2A})^N \left[\frac{1}{z - S_2(S_1S_2)^{N-1}(m_1)} - \frac{1}{z - S_1(S_2S_1)^{N-1}(m_2)} \right] \quad (4.146)$$

Da es physikalisch keinen Sinn macht die Leitfähigkeit eines der 3 Gebiete 0 zu wählen und der Fall in dem zwei benachbarte Gebiete gleiche Leitfähigkeit haben auf einfacheren bereits diskutierten Fällen entspricht, ist hier anzunehmen, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\sigma_A\sigma_1\sigma_2 \neq 0 \quad \text{und} \quad \sigma_A \neq \sigma_1 \quad \text{und} \quad \sigma_A \neq \sigma_2 \quad (4.147)$$

Zunächst nehmen wir nun noch an, daß $\sigma_1 \neq \infty$ und $\sigma_2 \neq \infty$.

$$\Rightarrow |\eta_{1A}\eta_{2A}| < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{N \rightarrow \infty} (\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-1} = 0 \quad (4.148)$$

Somit erhält man folgendes Gesamtergebnis. Die Rechnungen für das Feld E_2 gehen völlig analog zu den für das Feld E_1 . Außerdem kann aus Symmetrieüberlegungen leicht das Feld E_2 aus E_1 gewonnen werden.

$$E_1 = \frac{J}{2\sigma_1} \frac{1}{z - p} + \frac{J}{2\sigma_1} \frac{\eta_{1A}}{z - S_1(p)} - \frac{J}{\sigma_2 + \sigma_A} \frac{1 - \eta_{1A}}{z - q} \quad (4.149)$$

$$- J(1 - \eta_{1A}) \sum_{N=2}^{\infty} (\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-2} \left(\frac{\eta_{2A}}{\sigma_1 + \sigma_A} \frac{1}{z - S_2(S_1S_2)^{N-2}(p)} \right) \quad (4.150)$$

$$+ \frac{\eta_{1A}\eta_{2A}}{\sigma_2 + \sigma_A} \frac{1}{z - (S_2S_1)^{N-1}(q)} \Big) \quad (4.151)$$

$$E_2 = -\frac{J}{2\sigma_2} \frac{1}{z - q} - \frac{J}{2\sigma_2} \frac{\eta_{2A}}{z - S_2(q)} + \frac{J}{\sigma_1 + \sigma_A} \frac{1 - \eta_{2A}}{z - p} \quad (4.152)$$

$$+ J(1 - \eta_{2A}) \sum_{N=2}^{\infty} (\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-2} \left(\frac{\eta_{1A}}{\sigma_2 + \sigma_A} \frac{1}{z - S_1(S_2S_1)^{N-2}(q)} \right) \quad (4.153)$$

$$+ \frac{\eta_{1A}\eta_{2A}}{\sigma_1 + \sigma_A} \frac{1}{z - (S_1S_2)^{N-1}(p)} \Big) \quad (4.154)$$

$$E_A = J \left[\frac{1}{(\sigma_1 + \sigma_A)(z - p)} - \frac{1}{(\sigma_2 + \sigma_A)(z - q)} \right] \quad (4.155)$$

$$+ J \left[\frac{\eta_{1A}}{(\sigma_2 + \sigma_A)(z - S_1(q))} - \frac{\eta_{2A}}{(\sigma_1 + \sigma_A)(z - S_2(p))} \right] \quad (4.156)$$

$$+ J \sum_{N=2}^{\infty} (\eta_{1A}\eta_{2A})^{N-1} \left[\frac{1}{(\sigma_1 + \sigma_A)(z - (S_1S_2)^{N-1}(p))} - \frac{1}{(\sigma_2 + \sigma_A)(z - (S_1S_2)^{N-1}(q))} \right] \quad (4.157)$$

$$+ \frac{\eta_{1A}}{(\sigma_2 + \sigma_A)(z - S_1(S_2S_1)^{N-1}(q))} - \frac{\eta_{2A}}{(\sigma_1 + \sigma_A)(z - S_2(S_1S_2)^{N-1}(p))} \right] \quad (4.158)$$

4.2.5 Grenzfall ideal leitende Kreisscheiben

Es folgt sofort, daß $E_1 = E_2 = 0$. Um das Ergebnis im Außenraum anzugeben, erweist es sich als zweckmäßig, folgende Grenzwerte näher zu untersuchen:

$$M_2 := \lim_{N \rightarrow \infty} S_2(S_1 S_2)^N(m_1), \quad M_1 := \lim_{N \rightarrow \infty} S_1(S_2 S_1)^N(m_2) \quad (4.159)$$

Dies läßt sich leicht umformen und man erkennt, daß M_1 Fixpunkt der Abbildung $S_2 S_1$ ist. Entsprechendes gilt für M_2 .

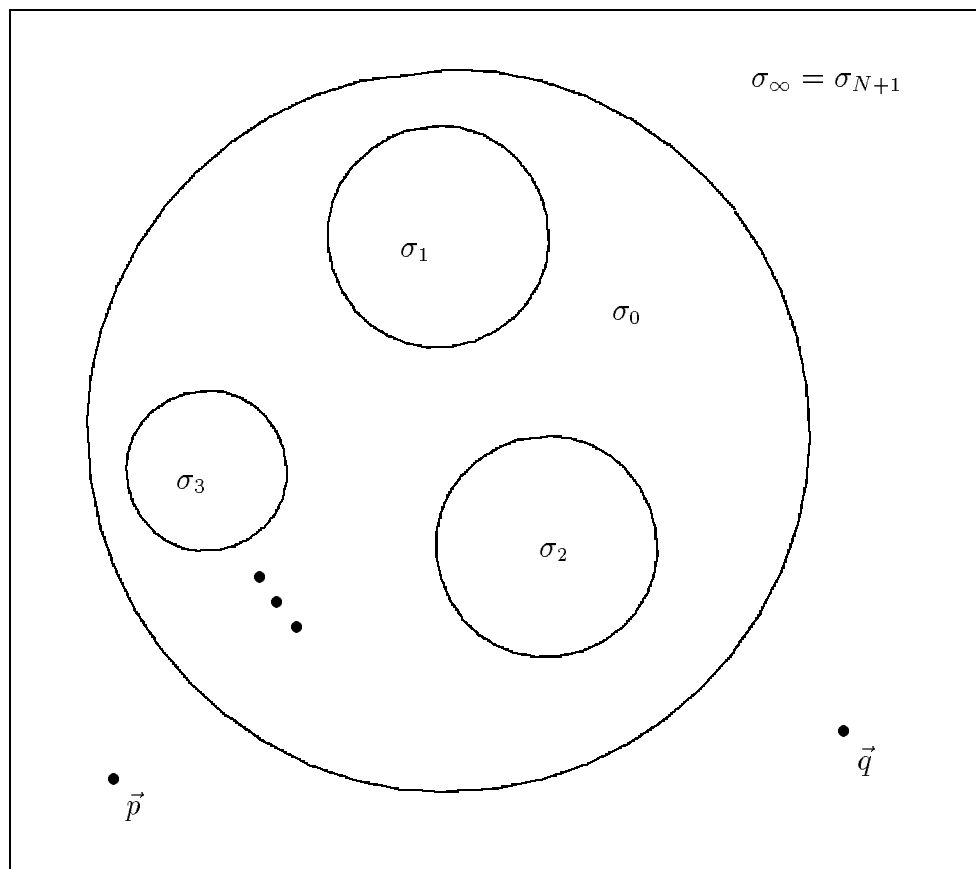
$$M_2 = (S_2 S_1)(M_2), \quad M_1 = (S_1 S_2)(M_1) \Rightarrow M_1 = S_1(M_2) \quad (4.160)$$

Mit diesen beiden Fixpunkten reduziert sich die Lösung im Außenraum auf den kurzen Ausdruck

$$E_A(z) = \frac{J}{2\sigma_A} \left[\frac{1}{z - M_1} - \frac{1}{z - M_2} \right]. \quad (4.161)$$

Man erkennt unschwer, daß für ausgedehnten Einprägequellen mit deren Radius gegen die Lösung für δ -Quellen strebt. Dieses Ergebnis rechtfertigt unter anderem die Verwendung von δ -Quellen in vielen für die Praxis wichtigen Fällen.

4.3 N kreisförmige Anomalien in einer Kreisscheibe



In diesem Abschnitt wird letzten Endes eine nach Außen isolierte leitende Kreisscheibe mit kreisförmigen Anomalien in ihrem Inneren diskutiert. Die Einprägepole liegen auf dem Rand der Kreisscheibe. Da a priori die Pole nicht auf dem Rand liegen dürfen, berechnet man zunächst die Felder mit Einprägepolen außerhalb der Kreisscheibe und bildet dann den Grenzwert für den die

Pole auf den Rand streben. Bei dieser Rechnung wird zunächst die Leitfähigkeit außerhalb der Kreisscheibe ungleich Null angenommen. Die Situation der isolierten Scheibe, kann dann ebenfalls als Grenzfall der nicht isolierten Scheibe berechnet werden. Die hier vorliegende Situation unterscheidet sich wesentlich von den Situationen die bisher betrachtet wurden. Bisher waren alle Gebiete maximal durch zwei Ränder von anderen Gebieten getrennt. D.h. für kompakte Gebiete, daß sie höchstens eine Zusammenhangszahl von 3 hatten. In der hier beschriebenen Situation hat das Komplement aller kreisförmigen Anomalien (Gebiet 0) die Zusammenhangszahl $N + 1$ (auf der Riemann Sphäre hat das Komplement von Gebiet 0 genau $N + 1$ Zusammenhangskomponenten), d.h. es ist von $N + 1$ Rändern begrenzt. Diese Tatsache ist in sofern hier von großer Bedeutung, als eine Lösung die über einen Rand in das betreffende Gebiet hineintransportiert wurde, nicht nur über einen, der verbleibenden N anderen Ränder, wieder hinaustransportiert werden kann. Um bei der Konstruktion der Lösung keine Ränder künstlich auszuzeichnen, die nicht bereits durch die Topologie ausgezeichnet sind, muß ein „symmetrisches“ Lösungsverfahren entwickelt werden!

Im folgenden wird ein allgemeines, von der speziellen Topologie unabhängiges, symmetrisches Verfahren vorgestellt. Dieses wird schließlich auch auf die konkrete Situation der Kreisscheibe mit Anomalien angewandt. Man startet mit den elementaren Lösungen um die Einprägepole. Diese lokalen Lösungen erfüllen zunächst nicht zwingend die Randbedingungen für die direkt angrenzenden Gebiete. Um systematisch, sukzessive alle Randbedingungen immer besser erfüllen zu können, werden für alle Gebiete Restfelder definiert und zwar so viele wie das Gebiet Ränder hat. Zunächst sind alle Restfelder Null. Beim Start werden die lokalen Lösungen um die Einprägepole zu allen Restfelder dieses Gebietes hinzugezählt, da diese lokalen Lösungen nicht zwingend diese Randbedingungen erfüllt. Im jedem Iterationsschritt wird nun jedes dieser Restfelder von dem betreffenden Gebiet über den zugehörigen Rand in das, durch diesen Rand davon abgegrenzte Gebiet transportiert. Danach werden alle Restfelder wieder auf Null gesetzt. Die entstandenen Zusatzterme im Ausgangs- und im Zielgebiet werden wieder zu den Restfeldern hinzugezählt, denen sie der Definition der Restfelder nach zuzuordnen sind. Somit ist eine Iteration ausgeführt und die nächste kann auf die gleiche Weise wie die erste durchgeführt werden.

Um nun dieses Verfahren zur Konstruktion der Lösung auf unsere hier vorliegende Situation anwenden zu können, ist es wichtig geeignete Bezeichnungen einzuführen. Wie sich später zeigen wird sind die folgenden Bezeichnungen besonders günstig:

Gebiete:

- 1 . . . N innerhalb der kreisförmigen Anomalien
- 0 Komplement der Anomalien
- $N + 1$ außerhalb der Kreisscheibe

Die Leitfähigkeiten σ_k tragen die gleichen Indizes wie die zugehörigen Gebiete.

Ränder und Kreisspiegelungsabbildungen:

- R_1, \dots, R_N Radien der Kreise der Anomalien
- R_{N+1} Radius der Kreisscheibe
- m_1, \dots, m_N Mittelpunkte der Anomalien
- m_{N+1} Mittelpunkt der Kreisscheibe
- S_1, \dots, S_N Kreisspiegelung zu den Anomalien
- S_{N+1} Kreisspiegelung zur Kreisscheibe

$$b_k(z, \bar{z}) = (z - m_k)(\bar{z} - \bar{m}_k) - R_k^2, \quad \beta_k(z) = \bar{m}_k + \frac{R_k^2}{z - m_k}, \quad S_k(z) = \widetilde{\beta(z)} \quad (4.162)$$

Felder:

$E_{k,l}$	E-Feld im Gebiet k , Iterationsstufe l
E_k	$\lim_{l \rightarrow \infty} E_{k,l}$ Lösungsfeld für das Gebiet k
k_k	$k_k = \sigma_k E_k$ ohmscher Strom im Gebiet k
$P_{k,l}^m$	Zusatzfeld zum Feld im Gebiet k , Iterationsstufe l , gegebenenfalls vom Restterm m (falls das Gebiet nicht nur einen Rand hat)
$R_{k,l}^m$	Restfeld zum Feld im Gebiet k , Iterationsstufe l , gegebenenfalls bezüglich des Randes m (falls das Gebiet mehr als einen Rand hat)

Die Quellen seien gegeben durch

$$-\vec{\delta} \cdot \mathcal{J} = \pi \sigma_{N+1} I [\delta(\vec{r} - \vec{p}) - \delta(\vec{r} - \vec{q})] = \pi J [\delta(\vec{r} - \vec{p}) - \delta(\vec{r} - \vec{q})] \quad (4.163)$$

Wobei die Pole außerhalb der Kreisscheibe liegen sollen, d.h. $b_{N+1}(p, \vec{p}) > 0$ und $b_{N+1}(q, \vec{q}) > 0$.

4.3.1 Initialisierung der Hilfsfelder – lokale Lösungen um die Quellen

$$E_{0,1} = \dots = E_{N,1} = 0, \quad E_{N+1,1} = \frac{J}{2\sigma_{N+1}} \left[\frac{1}{z-p} - \frac{1}{z-q} \right] \quad (4.164)$$

$$P_{0,1}^1 = \dots = P_{0,1}^{N+1} = P_{1,1} = \dots = P_{N,1} = 0, \quad P_{N+1,1} = E_{N+1,1} \quad (4.165)$$

$$R_{0,1}^1 = \dots = R_{0,1}^{N+1} = R_{1,1} = \dots = R_{N,1} = 0, \quad R_{N+1,1} = P_{N+1,1} \quad (4.166)$$

4.3.2 Erster Iterationsschritt

Im ersten Iterationsschritt muß nur ein Term (bestehen aus zwei Polen p und q) behandelt werden. Das einzige nicht verschwindende Restfeld ist $R_{N+1,1}$. Dieses muß über den Rand $b_{N+1} = 0$ ins Gebiet 0 transportiert werden. Hierzu werden die Formeln (3.83) und (3.84), aus dem Abschnitt (3.4.1) „Kreisscheibe mit Polen außerhalb der Kreisscheibe“, verwandt.

$$P_{0,2}^{N+1} = \frac{J}{\sigma_0 + \sigma_{N+1}} \left[\frac{1}{z-p} - \frac{1}{z-q} \right] \quad (4.167)$$

$$P_{N+1,2} = -\frac{J}{2\sigma_{N+1}} \eta_{0,N+1} \left[\frac{1}{z-S_{N+1}(p)} - \frac{1}{z-S_{N+1}(q)} \right] \quad (4.168)$$

Ansonsten entstehen keine Zusatzfelder.

$$P_{0,2}^1 = \dots = P_{0,2}^N = P_{1,2} = \dots = P_{N,2} = 0 \quad (4.169)$$

Durch die Anpassung über den Rand $b_{N+1} = 0$ existieren zu allen Termen im Gebiet $N+1$, zugehörige Terme im Gebiet 0, so daß für diese die Randbedingung für den Rand $b_{N+1} = 0$ erfüllt ist. Der neu entstandene Term $P_{0,2}^{N+1}$ im Gebiet Null erfüllt aber nicht zwingend die Randbedingungen 1 bis N , wohl aber die Randbedingung $N+1$. Deshalb sind die Restfelder wie folgt zu setzen:

$$R_{N+1,2} = R_{0,2}^{N+1} = R_{1,2} = \dots = R_{N,2} = 0 \quad (4.170)$$

$$R_{0,2}^1 = \dots = R_{0,2}^N = P_{0,2}^{N+1} \quad (4.171)$$

4.3.3 Zweiter Iterationsschritt

In diesem Iterationsschritt sind lediglich die Restfelder $R_{0,2}^1, \dots, R_{0,2}^N$ zu behandeln. Diese Restfelder haben Pole im Gebiet $N+1$ (also außerhalb der Gebiete 1 bis N)! Deshalb sind zur Anpassung der Randbedingungen wieder die Formeln (3.83) und (3.84) zu verwenden. Die Anpassungen können gleich für alle Restfelder zugleich durchgeführt werden. Für $k = 1, \dots, N$ gilt nun

$$P_{0,3}^k = -\frac{J}{\sigma_0 + \sigma_{N+1}} \eta_{k0} \left[\frac{1}{z - S_k(p)} - \frac{1}{z - S_k(q)} \right]. \quad (4.172)$$

$$P_{0,3}^{N+1} = 0 \quad (4.173)$$

Somit ist insgesamt das Zusatzfeld für das Gebiet 0 der Iterationsstufe 3 nach dem zweiten Iterationsschritt

$$P_{0,3} = -\frac{J}{\sigma_0 + \sigma_{N+1}} \sum_{k=1}^N \eta_{k0} \left[\frac{1}{z - S_k(p)} - \frac{1}{z - S_k(q)} \right]. \quad (4.174)$$

Der zugehörige Zusatz im Gebiet k ist

$$P_{k,3} = \frac{J}{\sigma_0 + \sigma_{N+1}} (1 - \eta_{k0}) \left[\frac{1}{z - p} - \frac{1}{z - q} \right]. \quad (4.175)$$

$$P_{N+1,3} = 0 \quad (4.176)$$

Die Restfelder sind nun

$$R_{1,3} = \dots = R_{N+1,3} = 0 \quad (4.177)$$

$$R_{0,3}^t = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq t}}^N P_{0,3}^k, \quad t = 1, \dots, N+1 \quad (4.178)$$

$$R_{0,3}^t = -\frac{J}{\sigma_0 + \sigma_{N+1}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq t}}^N \eta_{k0} \left[\frac{1}{z - S_k(p)} - \frac{1}{z - S_k(q)} \right], \quad t = 1, \dots, N+1 \quad (4.179)$$

4.3.4 Dritter Iterationsschritt

Zunächst werden hier die Restfelder 1 bis N zusammen behandelt. Für das Restfeld $R_{0,3}^t$, $t = 1, \dots, N$ liegen die Pole außerhalb von Kreis t .

$$P_{0,4}^t = \frac{J}{\sigma_0 + \sigma_{N+1}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq t}}^N \eta_{k0} \eta_{t0} \left[\frac{1}{z - S_t S_k(p)} - \frac{1}{z - S_t S_k(q)} \right], \quad t = 1, \dots, N \quad (4.180)$$

$$P_{t,4} = -\frac{J}{\sigma_0 + \sigma_{N+1}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq t}}^N \eta_{k0} (1 - \eta_{t0}) \left[\frac{1}{z - S_k(p)} - \frac{1}{z - S_k(q)} \right], \quad t = 1, \dots, N \quad (4.181)$$

Das noch zu behandelnde Restfeld $R_{0,3}^{N+1}$ hat alle Pole innerhalb des Kreises $N+1$.

$$P_{0,4}^t = \frac{J}{\sigma_0 + \sigma_{N+1}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq t}}^N \eta_{k0} \eta_{t0} \left[\frac{1}{z - S_t S_k(p)} - \frac{1}{z - S_t S_k(q)} \right], \quad t = N+1 \quad (4.182)$$

$$P_{t,4} = -\frac{J}{\sigma_0 + \sigma_{N+1}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq t}}^N \eta_{k0}(1 - \eta_{t0}) \left[\frac{1}{z - S_k(p)} - \frac{1}{z - S_k(q)} \right], \quad t = N + 1 \quad (4.183)$$

Somit gelten die gleichen Formeln insgesamt für $t = 1, \dots, N + 1$. Das gesamte Zusatzfeld für das Gebiet 0 ist somit

$$P_{0,4} = \sum_{s=1}^{N+1} P_{0,4}^s = \frac{J}{\sigma_0 + \sigma_{N+1}} \sum_{s=1}^{N+1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^N \eta_{k0} \eta_{s0} \left[\frac{1}{z - S_s S_k(p)} - \frac{1}{z - S_s S_k(q)} \right] \quad (4.184)$$

Die Restfelder sind nun

$$R_{1,4} = \dots = R_{N+1,4} = 0 \quad (4.185)$$

$$R_{0,4}^t = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq t}}^{N+1} P_{0,4}^k, \quad t = 1, \dots, N + 1 \quad (4.186)$$

4.3.5 Vierter Iterationsschritt

Mit den gleichen Überlegungen wie zuvor, erhält man nun

$$P_{0,5}^t = -\frac{J}{\sigma_0 + \sigma_{N+1}} \sum_{\substack{l_2=1 \\ l_2 \neq t}}^{N+1} \sum_{\substack{l_1=1 \\ l_1 \neq l_2}}^N \eta_{l_1 0} \eta_{l_2 0} \eta_{t0} \left[\frac{1}{z - S_t S_{l_2} S_{l_1}(p)} - \frac{1}{z - S_t S_{l_1} S_{l_2}(q)} \right] \quad (4.187)$$

für $t = 1, \dots, N + 1$ und

$$P_{t,5} = \frac{J}{\sigma_0 + \sigma_{N+1}} \sum_{\substack{l_2=1 \\ l_2 \neq t}}^{N+1} \sum_{\substack{l_1=1 \\ l_1 \neq l_2}}^N \eta_{l_1 0} \eta_{l_2 0} (1 - \eta_{t0}) \left[\frac{1}{z - S_{l_2} S_{l_1}(p)} - \frac{1}{z - S_{l_2} S_{l_1}(q)} \right] \quad (4.188)$$

ebenfalls für $t = 1, \dots, N + 1$. Das Zusatzfeld für das Gebiet 0 ergibt somit insgesamt

$$P_{0,5} = \sum_{k=1}^{N+1} P_{0,5}^k. \quad (4.189)$$

Die Restfelder ergeben sich zu

$$R_{1,5} = \dots = R_{N+1,5} = 0, \quad (4.190)$$

$$R_{0,5}^t = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq t}}^{N+1} P_{0,5}^k. \quad (4.191)$$

4.3.6 Induktionsbehauptung

Für $k \geq 5$ erhält man folgende Zusatz- und Restfelder:

$$P_{0,k}^t = \frac{J}{\sigma_0 + \sigma_{N+1}} \sum_{\substack{l_{k-3}=1 \\ l_{k-3} \neq t}}^{N+1} \dots \sum_{\substack{l_2=1 \\ l_2 \neq l_3}}^{N+1} \sum_{\substack{l_1=1 \\ l_1 \neq l_2}}^N \eta_{[l,k-3]} \eta_{0t} D(z, S_t S_{[l,k-3]}, p, q) \quad (4.192)$$

$$P_{t,k} = \frac{J}{\sigma_0 + \sigma_{N+1}} (1 + \eta_{0t}) \sum_{\substack{l_{k-3}=1 \\ l_{k-3} \neq t}}^{N+1} \dots \sum_{\substack{l_2=1 \\ l_2 \neq l_3}}^{N+1} \sum_{\substack{l_1=1 \\ l_1 \neq l_2}}^N \eta_{[l,k-3]} D(z, S_{[l,k-3]}, p, q) \quad (4.193)$$

für $t = 1, \dots, N + 1$, wobei die Definitionen

$$S_{[l,k]} = S_{l_k} \circ \dots \circ S_{l_1}, \quad \eta_{[l,k]} = \eta_{0l_1} \dots \eta_{0l_k} \quad (4.194)$$

benutzt werden.

$$R_{0,k}^t = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{N+1} P_{0,k}^s, \quad R_{1,k} = \dots = R_{N+1,k} = 0 \quad (4.195)$$

Daß die Induktionsbehauptung für $k = 5$ gilt, ist unmittelbar klar.

4.3.7 Induktionsschritt $k \rightarrow k + 1$

$$P_{0,k+1}^t = \frac{J}{\sigma_0 + \sigma_{N+1}} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{N+1} \sum_{\substack{l_{k-3}=1 \\ l_{k-3} \neq s}}^{N+1} \dots \sum_{\substack{l_2=1 \\ l_2 \neq l_3}}^{N+1} \sum_{\substack{l_1=1 \\ l_1 \neq l_2}}^N \eta_{[l,k-3]} \eta_{0s} \eta_{0t} D(z, S_t S_s S_{[l,k-3]}, p, q) \quad (4.196)$$

$$= \frac{J}{\sigma_0 + \sigma_{N+1}} \sum_{\substack{l_{k-2}=1 \\ l_{k-2} \neq t}}^{N+1} \dots \sum_{\substack{l_2=1 \\ l_2 \neq l_3}}^{N+1} \sum_{\substack{l_1=1 \\ l_1 \neq l_2}}^N \eta_{[l,k-2]} \eta_{0t} D(z, S_t S_{[l,k-2]}, p, q) \quad (4.197)$$

$$P_{t,k+1} = \frac{J}{\sigma_0 + \sigma_{N+1}} (1 + \eta_{0t}) \sum_{\substack{l_{k-2}=1 \\ l_{k-2} \neq t}}^{N+1} \dots \sum_{\substack{l_2=1 \\ l_2 \neq l_3}}^{N+1} \sum_{\substack{l_1=1 \\ l_1 \neq l_2}}^N \eta_{[l,k-2]} D(z, S_{[l,k-2]}, p, q) \quad (4.198)$$

Die Restfelder sind wieder

$$R_{1,k+1} = \dots = R_{N+1,k+1} = 0 \quad (4.199)$$

$$R_{0,k+1}^t = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{N+1} P_{0,k+1}^s \quad (4.200)$$

Damit ist die Induktionsbehauptung bewiesen.

4.3.8 Summation aller Zusatzfelder

Zunächst sei an dieser Stelle das Konvergenzverhalten dieser Reihen angesprochen. Die Reihen erfüllen alle Randbedingungen exakt, wenn alle Restfelder der Iterationsstufe k mit $k \rightarrow \infty$ gegen 0 streben. Da die allgemeine Form der Restfelder in der Induktionsbehauptung nur noch Spiegelpole der Ordnung $k - 3$ aufweist, konvergieren alle Restfelder für disjunkt liegende Kreise gegen 0. Damit erfüllen die konstruierten Felder alle Randbedingungen und alle Feldgleichungen in den Teilgebieten exakt. Also sind die konstruierten Felder eine Lösung unseres Gesamtproblems.

$$E_0 = \frac{J}{\sigma_0 + \sigma_{N+1}} D(z, 1, p, q) + \frac{J}{\sigma_0 + \sigma_{N+1}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 0}}^N \eta_{0k} D(z, S_k, p, q) \quad (4.201)$$

$$+ \frac{J}{\sigma_0 + \sigma_{N+1}} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq 0}}^{N+1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^N \eta_{0k} \eta_{0s} D(z, S_s S_k, p, q) \quad (4.202)$$

$$+ \frac{J}{\sigma_0 + \sigma_{N+1}} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq 0}}^{N+1} \sum_{\substack{l_2=1 \\ l_2 \neq s}}^{N+1} \sum_{\substack{l_1=1 \\ l_1 \neq l_2}}^N \eta_{0l_1} \eta_{0l_2} \eta_{0s} D(z, S_s S_{l_2} S_{l_1}, p, q) \quad (4.203)$$

$$+ \sum_{s=6}^{\infty} P_{0,s} \quad (4.204)$$

$$E_t = \frac{J}{\sigma_0 + \sigma_{N+1}}(1 + \eta_{0t})D(z, 1, p, q) + \frac{J}{\sigma_0 + \sigma_{N+1}}(1 + \eta_{0t}) \underbrace{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq t}}^N \eta_{0k} D(z, S_k, p, q)}_{M_1(z, t)} \quad (4.205)$$

$$+ \frac{J}{\sigma_0 + \sigma_{N+1}}(1 + \eta_{0t}) \underbrace{\sum_{\substack{l_2=1 \\ l_2 \neq t}}^{N+1} \sum_{\substack{l_1=1 \\ l_1 \neq l_2}}^N \eta_{0l_1} \eta_{0l_2} D(z, S_{l_2} S_{l_1}, p, q)}_{M_2(z, t)} \quad (4.206)$$

$$+ \frac{J}{\sigma_0 + \sigma_{N+1}}(1 + \eta_{0t}) \sum_{k=3}^{\infty} M_k(z, t), \quad t = 1, \dots, N \quad (4.207)$$

Wobei die noch nicht festgelegten M_k definiert sind durch:

$$M_k(z, t) = P_{t, k+3}(1 + \eta_{0t})^{-1} \quad (4.208)$$

Für das Feld außerhalb der Kreisscheibe erhält man

$$E_t = \frac{J}{2\sigma_{N+1}}D(z, 1, p, q) - \frac{J}{2\sigma_{N+1}}\eta_{0, N+1}D(z, S_t, p, q) \quad (4.209)$$

$$+ \frac{J}{\sigma_0 + \sigma_{N+1}}(1 + \eta_{0t}) \sum_{k=3}^{\infty} M_k(z, t), \quad t = N + 1. \quad (4.210)$$

Das Feld im Außenraum divergiert also für $\sigma_{N+1} \rightarrow 0$ falls sich die Pole noch nicht auf dem Rand befinden. Dies ist auch sinnvoll, da mit sinkender Leitfähigkeit immer größere Spannung (über ein Wegintegral zwischen den Polen direkt mit dem Feld korreliert) aufgebracht werden muß, um den gewünschten Einprägestrom zu garantieren. Läßt man in einem Grenzprozeß die Pole auf den Rand streben, so gilt $S_{N+1}(p) = p$ und $S_{N+1}(q) = q$ und die beiden ersten Terme lassen sich zusammenfassen.

$$E_t = \frac{J}{\sigma_0 + \sigma_{N+1}}D(z, 1, p, q) \quad (4.211)$$

$$+ \frac{J}{\sigma_0 + \sigma_{N+1}}(1 + \eta_{0t}) \sum_{k=3}^{\infty} M_k(z, t), \quad t = N + 1 \quad (4.212)$$

Nun kann auch die Leitfähigkeit außerhalb der Kreisscheibe gegen 0 gehen, ohne daß das Feld im Außengebiet singular wird (außer natürlich an den Einprägepolen selbst). Für die anderen Felder spielt es keine (strukturelle) Rolle ob sich die Einprägepole auf dem Rand befinden oder echt im Außengebiet liegen. Für Untersuchungen einer isolierten Kreisscheibe mit kreisförmigen Anomalien setzt man nun $\sigma_{N+1} = 0$. Richtet man nun sein Interesse auf den ohmschen Strom, so verliert die konkrete Form des elektrischen Feldes außerhalb der Kreisscheibe seine Bedeutung. Für diesen wichtigen Spezialfall gehen die Formeln für die Felder in den Gebieten 1 bis N und die Formel für das Feld in Gebiet 0 ineinander über, da

$$\frac{J}{\sigma_0 + \sigma_{N+1}}(1 + \eta_{0,t}) \stackrel{\sigma_{N+1}=0}{=} \frac{2J}{\sigma_0 + \sigma_t}, \quad \frac{J}{\sigma_0 + \sigma_{N+1}} \stackrel{\sigma_{N+1}=0}{=} \frac{J}{\sigma_0} = \frac{2J}{\sigma_0 + \sigma_t} \quad \text{mit } t = 0 \quad (4.213)$$

Somit erhalten wir die allgemeine Lösung für die elektrischen Felder in den Gebieten 0 bis N für den Fall der isolierten Kreisscheibe mit Polen auf dem Rand:

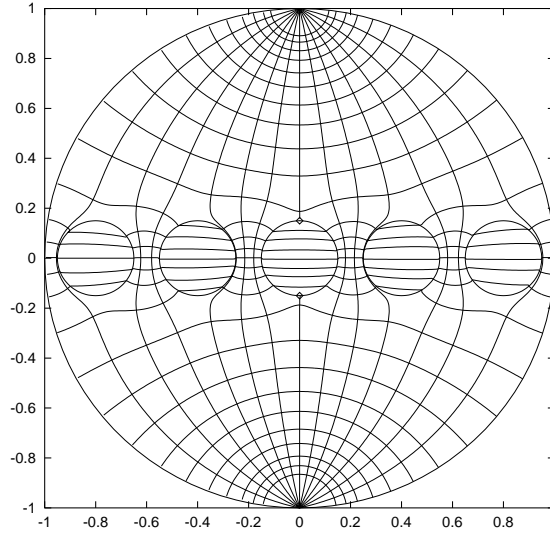
$$\boxed{E_k(z) = \frac{2J}{\sigma_0 + \sigma_k} \left[\frac{1}{z-p} - \frac{1}{z-q} + \sum_{l=1}^{\infty} M_l(z, k) \right]}, \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (4.214)$$

Feldlösungen für N Anomalien in der Kreisscheibe mit Polen auf ihrem Rand

Spezialfälle dieser Formeln sind auch in [16, 17, 19] diskutiert. Aus diesen Formeln lassen sich auch leicht wieder die Formeln für die einzelne Kreisscheibe ableiten, indem man die relativen Leitfähigkeitsunterschiede der Anomalien 0 setzt ($\eta_{0,k} = 0$, $k = 1, \dots, N$). Es folgt direkt das Ergebnis:

$$E_{N+1} \rightarrow \frac{J}{\sigma_0} D(z, 1, p, q), \quad k_{N+1} = E_{N+1} \sigma_{N+1} = 0 \quad (4.215)$$

$$E_0 \rightarrow \frac{J}{\sigma_0} D(z, 1, p, q), \quad k_0 = E_0 \sigma_0 = JD(z, 1, p, q) \quad (4.216)$$



In diesem Beispiel ist bewußt eine Feldlinie eingezeichnet, die auf einen (zwei) „Staupunkt“ [25] läuft. Bei mehrfach zusammenhängenden Gebieten tritt für isolierende Anomalien immer eine solche Situation auf, bei der die Feldlinie weder auf der einen noch auf der anderen Seite der Anomalie vorbei führt.

4.3.9 Spezialisierung auf eine Anomalie in einer Kreisscheibe

Möchte man das Ergebnis für N kreisförmige Anomalien in der nach außen isolierten Kreisscheibe auf den Fall einer einzigen Anomalie in der Kreisscheibe spezialisieren, so hält man am besten die Zahl der Anomalien bei N fest und setzt für $N-1$ Anomalien die relative Leitfähigkeitsdifferenz auf Null. Somit liegt die gleiche Situation vor, als wenn diese $N-1$ Anomalien a priori nicht vorhanden wären. Konkret bedeutet dies also: $\eta_{0,2} = \dots = \eta_{0,N+1} = 0$. Der Tatsache, daß die Kreisscheibe nach außen isoliert sein soll, wird durch $\sigma_{N+1} = 0$ Rechnung getragen. Für das elektrische Feld im Gebiet das die Anomalie umgibt, erhält man:

$$E_0(z) = \frac{J}{\sigma_0} \sum_{k=0}^{\infty} \eta_{01}^k [D(z, (S_{N+1} S_1)^k, p, q) + \eta_{01} D(z, S_1 (S_{N+1} S_1)^k, p, q)] \quad (4.217)$$

$$\Omega_0(z) = \frac{J}{\sigma_0} \sum_{k=0}^{\infty} \eta_{01}^k \left[\log \left(\frac{z - (S_{N+1} S_1)^k(q)}{z - (S_{N+1} S_1)^k(p)} \right) + \eta_{01} \log \left(\frac{z - S_1 (S_{N+1} S_1)^k(q)}{z - S_1 (S_{N+1} S_1)^k(p)} \right) \right] \quad (4.218)$$

Das Feld in der Anomalie hat folgende Form:

$$E_1(z) = \frac{2J}{\sigma_0 + \sigma_1} \sum_{k=0}^{\infty} \eta_{01}^k D(z, (S_{N+1} S_1)^k, p, q) \quad (4.219)$$

4.3.10 Eine Anomalie in einer Kreisscheibe – Möbius–Transformationen

Ein anderer Zugang nutzt die Transformationseigenschaften des Feldes aus. Ausgehend von der Situation einer kreisförmigen Anomalie in der oberen Halbebene, kann man durch Transformation der oberen Halbebene auf das Innere einer Kreisscheibe unter Berücksichtigung des speziellen Transformationsverhaltens des Feldes eine Lösung für das Problem einer kreisförmigen Anomalie in der Kreisscheibe produzieren.

Ähnlich wie in den zuvor beschriebenen Situationen, berechnet man die Lösung für die Situation einer kreisförmigen Anomalie (Gebiet 2) in der oberen Halbebene (Gebiet 1). Die untere Halbebene sei nicht leitend und die Einprägepole sollen sich auf der Gerade liegen, die die beiden Halbebenen trennen.

$$E_1(z) = \frac{J}{\sigma_1} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \eta_{21}^k \left[\frac{1}{z - (S_{10}S_{21})^k(p)} - \frac{1}{z - (S_{10}S_{21})^k(q)} \right] \right. \quad (4.220)$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{\infty} \eta_{21}^{k+1} \left[\frac{1}{z - S_{21}(S_{10}S_{21})^k(p)} - \frac{1}{z - S_{21}(S_{10}S_{21})^k(q)} \right] \right\} \quad (4.221)$$

$$E_2(z) = \frac{J}{\sigma_1} \sum_{k=0}^{\infty} (1 + \eta_{12}) \eta_{21}^k \left[\frac{1}{z - (S_{10}S_{21})^k(p)} - \frac{1}{z - (S_{10}S_{21})^k(q)} \right] \quad (4.222)$$

Transformiert man nun die obere Halbebene mit einer speziellen konformen Abbildung, nämlich einer gebrochen linearen Funktion (Möbius Transformation), auf das Innere einer Kreisscheibe, so wird automatisch die kreisförmige Anomalie mittransformiert, wobei die Kreisform erhalten bleibt. Selbstverständlich wird Radius und Mittelpunkt im allgemeinen abgeändert.

Die Abbildung, welche die obere Halbebene auf das Innere der Einheitskreisscheibe im Ursprung abbildet, lautet:

$$w = f^{-1}(z) = \frac{z - i_3}{z + i_3}, \quad f(w) = i_3 \frac{1+w}{1-w} \quad (4.223)$$

$$f'(w) = \frac{2i_3}{(1-w)^2} \quad (4.224)$$

$$\Rightarrow E_T(w) = \frac{2i_3}{(1-w)^2} E \left(i_3 \frac{1+w}{1-w} \right) \quad (4.225)$$

Hilfsbetrachtung:

$$f'(w) \left[\frac{1}{f(w) - p} - \frac{1}{f(w) - q} \right] \quad (4.226)$$

$$= \frac{2i_3}{(1-w)^2} \left[\frac{1}{i_3 \frac{1+w}{1-w} - p} - \frac{1}{i_3 \frac{1+w}{1-w} - q} \right] \quad (4.227)$$

$$= \frac{2i_3}{1-w} \left[\frac{1}{i_3(1+w) - p(1-w)} - \frac{1}{i_3(1+w) - q(1-w)} \right] \quad (4.228)$$

$$= \frac{2i_3}{1-w} \left[\frac{i_3(1+w) - q(1-w) - i_3(1+w) + p(1-w)}{[i_3(1+w) - p(1-w)][i_3(1+w) - q(1-w)]} \right] \quad (4.229)$$

$$= 2i_3 \frac{p-q}{[i_3(1+w) - p(1-w)][i_3(1+w) - q(1-w)]} \quad (4.230)$$

$$= 2i_3 \frac{p-q}{[(i_3-p)+w(p+i_3)][(i_3-q)+w(q+i_3)]} \quad (4.231)$$

$$= \frac{2i_3(p-q)}{(p+i_3)(q+i_3)} \frac{1}{\left(\frac{p-i_3}{p+i_3}-w\right)\left(\frac{q-i_3}{q+i_3}-w\right)} \quad (4.232)$$

$$= \frac{2i_3(p-q)}{(p+i_3)(q+i_3)} \frac{1}{(w-P)(w-Q)} \quad (4.233)$$

dabei sind P und Q definiert durch

$$P = f^{-1}(p) = \frac{p-i_3}{p+i_3}, \quad Q = f^{-1}(q) = \frac{q-i_3}{q+i_3}. \quad (4.234)$$

$$p = i_3 \frac{1+P}{1-P}, \quad q = i_3 \frac{1+Q}{1-Q} \quad (4.235)$$

Eine Partialbruchzerlegung liefert dann

$$\frac{2i_3(p-q)}{(p+i_3)(q+i_3)} \frac{1}{(w-P)(w-Q)} \quad (4.236)$$

$$= \frac{2i_3(p-q)(P-Q)^{-1}}{(p+i_3)(q+i_3)} \left[\frac{1}{w-P} - \frac{1}{w-Q} \right]. \quad (4.237)$$

$$(P-Q)^{-1} = \left(\frac{(p-i_3)(q+i_3) - (q-i_3)(p+i_3)}{(p+i_3)(q+i_3)} \right)^{-1} = \frac{(p+i_3)(q+i_3)}{2i_3(p-q)} \quad (4.238)$$

Schließlich folgt

$$f'(w) \left[\frac{1}{f(w)-p} - \frac{1}{f(w)-q} \right] = \frac{1}{w-P} - \frac{1}{w-Q}. \quad (4.239)$$

Somit lauten die transformierten elektrischen Felder:

$$E_1^T(w) = \frac{J}{\sigma_1} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \eta_{21}^k \left[\frac{1}{w-f^{-1}(S_{10}S_{21})^k f(p_w)} - \frac{1}{w-f^{-1}(S_{10}S_{21})^k f(q_w)} \right] \right. \quad (4.240)$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{\infty} \eta_{21}^{k+1} \left[\frac{1}{w-f^{-1}S_{21}(S_{10}S_{21})^k f(p_w)} - \frac{1}{w-f^{-1}S_{21}(S_{10}S_{21})^k f(q_w)} \right] \right\} \quad (4.241)$$

$$E_2^T(w) = \frac{J}{\sigma_1} \sum_{k=0}^{\infty} (1+\eta_{12})\eta_{21}^k \left[\frac{1}{w-f^{-1}(S_{10}S_{21})^k f(p_w)} - \frac{1}{w-f^{-1}(S_{10}S_{21})^k f(q_w)} \right] \quad (4.242)$$

p_w und q_w sind hier die Einprägepole auf dem Rand der Kreisscheibe (w -Ebene).

4.4 Auflösungsvermögen – Pseudolinearität bezgl. des Einprägestromes

Bei physikalischen Situationen wie der eben behandelten, wird oft nach einem Auflösungsvermögen gefragt. Im Fall einer kleinen, kreisförmigen, konzentrischen Anomalie im Inneren der Kreisscheibe ist es sinnvoll, die Potentialdifferenz auf dem Kreisrand für die Situationen mit und ohne Anomalie in Abhängigkeit von der Fläche der Anomalie zu untersuchen. Ist die Anomalie hinreichend klein,

muß nur ein, von der Anomalie abhängiger, Zusatzterm der Spiegelpolreihe mit berücksichtigt werden. Setzt man den Mittelpunkt der Kreisscheibe in den Ursprung ($m_{N+1} = 0 = m_1$) und wählt speziell eine Einheitskreisscheibe ($R_{N+1} = 1$) und bezeichnet den Radius der kleinen Anomalie mit $R_1 = \varepsilon$, so erhält man wegen

$$S_{N+1}S_1(z) = \varepsilon^{-2}z \quad (4.243)$$

$$\Omega_0(z) \approx \frac{J}{\sigma_0} \left[\log \left(\frac{z-q}{z-p} \right) + \eta_{01} \log \left(\frac{z-\varepsilon^{-2}q}{z-\varepsilon^{-2}p} \right) \right] \quad (4.244)$$

Die Potentialdifferenz zwischen Potential mit und ohne Anomalie ergibt

$$\Delta\Omega_0 = \Omega_0|_{\varepsilon} - \Omega_0|_{\varepsilon=0} = \frac{J\eta_{01}}{\sigma_0} \log \left(\frac{p}{q} \frac{z-\varepsilon^{-2}q}{z-\varepsilon^{-2}p} \right) \quad (4.245)$$

$$= \frac{J\eta_{01}}{\sigma_0} \log \left(\frac{1-\varepsilon^2\frac{z}{q}}{1-\varepsilon^2\frac{z}{p}} \right) \quad (4.246)$$

Entwickelt man diese spezielle Logarithmusfunktion nach ε um $\varepsilon = 0$ so erhält man

$$f(x) = \log \left(\frac{1-\alpha x}{1-\beta x} \right) \approx (\beta - \alpha)x \quad (4.247)$$

und somit für die Potentialdifferenz

$$\Delta\Omega_0 \approx \frac{J\eta_{01}}{\sigma_0} \frac{z}{pq} (q-p)\varepsilon^2. \quad (4.248)$$

Parametrisiert man die Punkte auf dem Kreisrand durch $z = e^{i\gamma}$, $p = e^{i\alpha}$, $q = e^{i\beta}$, so resultiert eine Potentialdifferenz in der Form

$$\Delta\Omega_0 = \frac{J\eta_{01}}{\sigma_0} \left(e^{i(\gamma-\alpha)} - e^{i(\gamma-\beta)} \right) \varepsilon^2. \quad (4.249)$$

Für das elektrische Potential (Realteil des komplexen Potentials) bedeutet dies:

$$\Delta\phi_0 = \frac{J\eta_{01}\varepsilon^2}{\sigma_0} [\cos(\gamma-\alpha) - \cos(\gamma-\beta)] \quad (4.250)$$

$$= -\frac{2J\eta_{01}\varepsilon^2}{\sigma_0} \sin \left(\gamma - \frac{\alpha+\beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\beta-\alpha}{2} \right) \quad (4.251)$$

Bezeichnet man nun mit $F = \pi\varepsilon^2$ die Fläche der Anomalie, so erhält man für das Auflösungsvermögen $A = |\Delta\phi_{0,max}/F|^2$

$$A = \frac{4J^2\eta_{01}^2}{\pi^2\sigma_0^2} \sin^2 \left(\frac{\beta-\alpha}{2} \right) \quad (4.252)$$

Das bedeutet, daß man ein maximales Auflösungsvermögen bei diametral angeordneten Einprägepolen erhält. Für Dipole ($\alpha \approx \beta$) geht das Auflösungsvermögen gegen Null! Die Formel für das Auflösungsvermögen ist nur für dieses hier betrachtete einfache Modell gültig!

Da das Feld theoretisch linear von der Stromeinprägung abhängt, kann man eigentlich eine diametrale Stromeinprägung durch Superposition von mehreren geeigneten Dipol Stromeinprägungen bekommen. Dies ist allerdings nur theoretisch möglich. Bei experimentellen Messungen sind die Meßdaten stets mit Meßfehlern behaftet. In so extremen Situationen wie beim Dipol, für den das Auflösungsvermögen gegen Null geht, überwiegen dann die Meßfehler und eine Superposition liefert kein sinnvolles Ergebnis. Ähnlich ist die Situation bei numerischen Berechnungen. Dort ist der endliche Wertebereich das Problem, das sich ähnlich wie die Meßungenauigkeit im Experiment auswirkt. Wegen dieser Pseudolinearität ist von Dipol-ähnlichen Stromeinprägungen abzusehen, wenn man ein möglichst großes Signal erhalten möchte, welches von der Anomalie herrührt.

Kapitel 5

Visualisierung der ebenen Stromvektorfelder

5.1 Theoretische Eigenschaften

Eine wichtige Eigenschaft von Vektorfelder ist deren Richtung. Eine Feldlinie oder Integralkurve ist eine Kurve, deren Tangente überall parallel zum Feld an dieser Stelle ist. Zeichnet man ein ganzes Bündel von Feldlinien, so kann unter gewissen Umständen aus der „Feldliniendichte“ auch auf den Betrag des Feldes geschlossen werden. Mathematisch ist eine Feldlinie $\vec{r}(s)$ zu einem Feld $\vec{E}(\vec{r})$ durch die Differentialgleichung

$$\partial_s \vec{r}(s) \wedge \vec{E}(\vec{r}(s)) = 0 \quad (5.1)$$

definiert. Um nun numerisch stabil Feldlinien zeichnen zu können, ohne numerisch Differentialgleichungen lösen zu müssen, habe ich Strömungsfunktionen bzw. Strömungsfelder verwendet, welche durch Konstantsetzen automatisch die Feldlinien liefern. Wie man solche Strömungsfelder konstruieren kann und welche Unterschiede in den Feldtypen zu beachten sind, wird in den folgenden Abschnitten demonstriert.

5.1.1 Feldlinien eines Rotationsfeldes

Die Feldlinien eines Rotationsfeldes \vec{B} sind implizit, mit Hilfe des Vektorpotentials \vec{A} , $\vec{B} = \vec{\partial} \times \vec{A}$, durch die Gleichungen

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{K} \quad \text{und} \quad \vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{r} = \alpha \quad (5.2)$$

gegeben. Dabei sind $\vec{K} \in \mathbb{R}^3$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ Konstanten. Der Beweis dieser Behauptung erfolgt durch Differenzieren. Angenommen man möchte eine Feldlinie, die durch den Punkt \vec{r}_0 geht bekommen, so setzt man $\vec{K} = \vec{A}(\vec{r}_0)$ und $\alpha = \vec{r}_0 \cdot \vec{A}(\vec{r}_0)$. Differenziert man nach dem Kurvenparameter s , so erhält man zunächst

$$\partial_s \vec{A}(\vec{r}) = 0 = ((\partial_s \vec{r}) \cdot \vec{\partial}) \vec{A}(\vec{r}). \quad (5.3)$$

Mit

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (5.4)$$

kann man dies umschreiben in

$$0 = (\partial_s \vec{r}) \times (\vec{A} \times \vec{\partial}) + \vec{\partial} ((\partial_s \vec{r}) \cdot \vec{A}) = \vec{\partial} [(\partial_s \vec{r}) \cdot \vec{A}] - (\partial_s \vec{r}) \times \vec{B} \quad (5.5)$$

Aus der skalaren Gleichung erhält man zusätzlich

$$\partial_s(\vec{A} \cdot \vec{r}) = \underbrace{(\partial_s \vec{A}(\vec{r}(s))) \cdot \vec{r}}_{=0} + \vec{A} \cdot \partial_s \vec{r} = 0. \quad (5.6)$$

Setzt man $\vec{A} \cdot \partial_s \vec{r} = 0$ in obige Beziehung ein, so erhält man schließlich

$$\boxed{(\partial_s \vec{r}) \times \vec{B} = 0 = (\partial_s \vec{r}) \wedge \vec{B}} \quad (5.7)$$

D.h., $\vec{r}(s)$ ist eine Feldlinie!

5.1.2 Feldlinien eines Divergenzfeldes

In diesem Abschnitt beschränke ich mich auf Divergenzfelder, für die die Feldlinien in Gebieten gezeichnet werden sollen, in denen sie divergenzfrei sind. Ist in solchen Gebieten, auf einer Potentialfläche die Feldliniendichte proportional zum Betrag des Feldes, so ist dies auch auf einer anderen Potentialfläche der Fall, ohne daß Feldlinien hinzugefügt oder entfernt werden müßten. Das heißt, die Struktur des Feldes ist hier so besonders, daß alleine das Weiterführen der Feldlinien von einer Potentialfläche zur nächsten ausreicht, um die gewünschte Feldliniendichte auf dieser neuen Potentialfläche zu bekommen. Da jede einzelne Feldlinie nicht vom Betrag des Feldes abhängt (von den singulären Fällen $\vec{E} = 0$ und $1/\vec{E} = 0$ einmal abgesehen), kann man auch Feldlinien zu anderen Feldern berechnen, die sich durch Multiplikation mit einem beliebigen (nicht singulären) Skalarfeld aus ersterem ergeben. Dadurch entstehen Äquivalenzklassen von Feldern, für die eine Feldlinie sofort Feldlinie aller Felder dieser Klasse ist. Durch diese Freiheit in der Wahl des Feldes aus der Äquivalenzklasse, kann man unter Umständen in manchen Gebieten Divergenzfreiheit erreichen, wodurch das Problem wieder auf das oben beschriebene zurückgeführt ist.

Möchte man zum Beispiel Feldlinien zu dem Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{r}, \quad \vec{\partial} \cdot \vec{E} = 3 \quad \forall \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \quad (5.8)$$

zeichnen, so kann man ebenso die Feldlinien des Feldes

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = \mu(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}), \quad \mu(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r}|^3}, \quad \vec{\partial} \cdot \vec{E}_0 = 0 \quad \forall \vec{r} \in \mathbb{R} - \{\vec{0}\} \quad (5.9)$$

zeichnen. Dieses Feld ist aber überall außer am Nullpunkt divergenzfrei. Inwieweit diese Divergenzfreiheit wichtig zur Konstruktion von Strömungsfeldern ist, wird in den folgenden Abschnitten erläutert.

5.1.3 2–dimensionale Divergenzfelder – komplexes Potential

Aus der Strömungsmechanik [25] ist bereits bekannt, daß aus dem monogenen komplexen Potential $\Omega(z)$ einer (lokal) holomorphen Funktion $E = -\partial_z \Omega$ ($\partial_z E = 0$ außerhalb der Quellen), die reelle skalare Strömungsfunktion ψ , gerade als der Imaginärteil des komplexen Potentials folgt.

$$\Omega = \phi + i_3 \psi, \quad \phi, \psi \in \mathbb{R} \quad (5.10)$$

Das heißt, durch Konstantsetzen der Funktion ψ erhält man implizit die Feldlinien des Feldes E .

$$2\vec{\sigma}_1 \partial_z \Omega = \vec{\partial} \Omega = \vec{\partial}(\phi + i_3 \psi) = 0, \quad \vec{\partial} \phi = i_3 \vec{\partial} \psi \quad (5.11)$$

Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 2.2 gilt:

$$\vec{\sigma}_3 \times \vec{\partial}_\perp = -i\vec{\sigma}_3 \vec{\partial}_\perp = -i_3 \vec{\partial}_\perp \quad (5.12)$$

$$\Rightarrow \vec{\partial}_\perp \phi = -\vec{\sigma}_3 \times \vec{\partial}_\perp \psi, \quad \text{und} \quad \vec{\sigma}_3 \times \vec{\partial}_\perp \phi = \vec{\partial}_\perp \psi \quad (5.13)$$

$$-\partial_z \Omega = E \quad \Rightarrow \quad -\vec{\partial}_\perp \tilde{\Omega} = 2\vec{E} \quad (5.14)$$

$$-\vec{\partial}_\perp (\phi - i_3 \psi) = -2\vec{\partial}_\perp \phi = 2\vec{E} \quad (5.15)$$

$$\boxed{\vec{\sigma}_3 \times \vec{E} = -\vec{\partial}_\perp \psi} \quad (5.16)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \partial_s \psi(\vec{r}(s)) = (\partial_s \vec{r}) \cdot \vec{\partial}_\perp \psi = -(\partial_s \vec{r}) \cdot (\vec{\sigma}_3 \times \vec{E}) = \vec{\sigma}_3 \cdot ((\partial_s \vec{r}) \times \vec{E}) \quad (5.17)$$

Da $\partial_s \vec{r}$ und \vec{E} in der Ebene senkrecht zu $\vec{\sigma}_3$ liegen, ist das Kreuzprodukt parallel zu $\vec{\sigma}_3$. Deshalb folgt:

$$(\partial_s \vec{r}) \times \vec{E} = 0 \quad (5.18)$$

Also erhält man durch Konstantsetzen von ψ implizit eine Feldlinie.

Das Strömungspotential existiert nicht global, da die Bedingung $\partial_z E$ nicht global gültig ist. Betrachtet man nun konkret ein E-Feld, welches aus einer punktförmigen Stromeinprägung resultiert

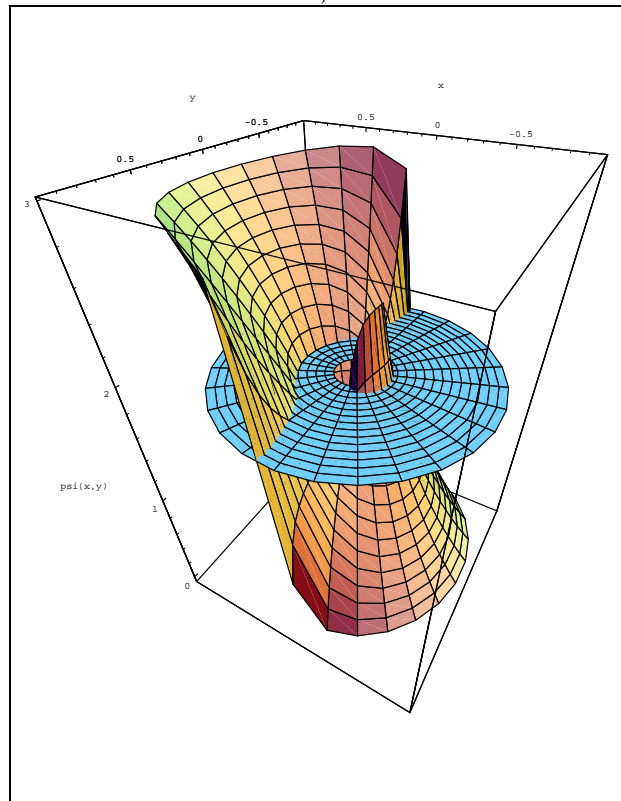
$$E(z) = \frac{I}{2} \frac{1}{z-p}, \quad (5.19)$$

(am Punkt p ist E auch von \tilde{z} abhängig!) so erhält man als komplexes Potential Ω

$$\Omega(z) = -\frac{I}{2} \log(z-p) \quad (5.20)$$

Das Strömungspotential $\psi = \text{Im}(\Omega)$ hat aber immer einen Schnitt vom Punkt p nach Unendlich (ist also nicht global gültig). Für numerische Rechnungen hat diese nur lokale Existenz der Strömungsfunktion eine große Bedeutung. Diese wird später näher untersucht.

Um sich besser vorstellen zu können, wie auf diese Weise die Feldlinien entstehen, betrachten wir die nachfolgende Grafik, welche eine lokale Strömungsfunktion für einer Anomalie zeigt (der Gültigkeitsbereich ist außerhalb dieser Anomalie).



Die Strömungsfunktion ist über ihren eigentlichen Gültigkeitsbereich hinaus in der ganzen Kreisscheibe dargestellt. Man erkennt gut eine Singularität innerhalb der Anomalie. Die eingezeichnete Ebene schneidet die Strömungsfunktion längs der Feldlinie. Durch Variation der Höhe der Ebene erhält man dann auch die anderen Feldlinien.

Verallgemeinerung auf 3 Dimensionen

Möchte man die Feldlinien eines Divergenzfeldes $\vec{E} \in \mathbb{R}^3$ berechnen, so stellt sich zunächst die Frage, wie man ein Feld konstruieren kann, welches auf \vec{E} in jedem Punkt senkrecht steht und welches trotzdem keine Richtung des Raumes auszeichnet. In 2 Dimensionen hatte gerade das Feld $\vec{F} \equiv \vec{\sigma}_3 \times \vec{E}$ diese Bedingungen erfüllt. Dieses Feld \vec{F} liegt wieder in der $\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2$ -Ebene. Deshalb kann man \vec{F} aus \vec{E} auch berechnen ohne auf Elemente der Algebra des \mathbb{R}^3 zurückgreifen zu müssen. \vec{F} ist $-\vec{E}^* = \vec{E} i_3$ (Vergleiche hierzu auch die Definition von Dualität im Anhang oder [13] ($i_3 = \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2$ also ein Element der Algebra des \mathbb{R}^2)). Mit dieser Kenntnis kann man sofort die Verallgemeinerung des Feldes \vec{F} in 3 Dimensionen angeben

$$F = \vec{E}^* = \vec{E} i^\dagger. \quad (5.21)$$

Hier ist das zu \vec{E} duale Feld ein Bivektorfeld. Dies ist auch durchaus sinnvoll, da zu einem Vektor in 3 Dimensionen eine ganze Ebene senkrecht steht. (Die Wahl des Vorzeichens ist irrelevant, da das Feld $-\vec{E}$ die gleichen Feldlinien hat wie \vec{E}) Das so konstruierte Bivektorfeld F steht tatsächlich in jedem Punkt senkrecht auf dem Feld \vec{E} , denn wegen der Dualitätsformel gilt

$$\vec{E} \cdot F = \vec{E} \cdot (\vec{E}^*) = (\vec{E} \wedge \vec{E})^* = 0. \quad (5.22)$$

Als Folge der (lokalen) Divergenzfreiheit von \vec{E} folgt für die äußere Ableitung von F

$$(\vec{\partial} \wedge F)^* = (\vec{\partial} \wedge (\vec{E}^*))^* = \vec{\partial} \cdot \vec{E}^{**} = 0. \quad (5.23)$$

Die äußere Ableitung von F verschwindet also überall wo \vec{E} divergenzfrei ist. Dies bedeutet aber, daß man in diesen Gebieten ein Vektorpotential $\vec{\psi}$ finden kann, für welches $\vec{\partial} \wedge \vec{\psi} = F$ gilt (vergleiche Anhang). Angenommen wir haben bereits ein solches Potential gefunden, so können die Feldlinien von \vec{E} wieder implizit in der Form

$$\vec{\psi} = \vec{K} \quad \text{und} \quad \vec{r} \cdot \vec{\psi} = \alpha \quad (5.24)$$

gegeben werden. Mit Hilfe der Reduktionsformel

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} \wedge A_r) = (\vec{b} \cdot \vec{a}) A_r - \vec{a} \wedge (\vec{b} \cdot A_r) \quad (5.25)$$

folgt zunächst durch Differenzieren der Vektorgleichung nach einem Kurvenparameter

$$0 = \partial_s \vec{\psi} = ((\partial_s \vec{r}) \cdot \vec{\partial}) \vec{\psi} = (\partial_s \vec{r}) \cdot (\vec{\partial} \wedge \vec{\psi}) + \vec{\partial} \wedge [(\partial_s \vec{r}) \cdot \vec{\psi}] = (\partial_s \vec{r}) \cdot F + \vec{\partial} [(\partial_s \vec{r}) \cdot \vec{\psi}]. \quad (5.26)$$

Die Ableitung beider Gleichungen liefert dann noch

$$\partial_s \vec{\psi} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\partial_s \vec{r}) \cdot \vec{\psi} = 0. \quad (5.27)$$

Somit erhält man noch

$$(\partial_s \vec{r}) \cdot F = 0 \quad (5.28)$$

was insgesamt schließlich zu dem gewünschten Ergebnis

$$\Rightarrow \quad (\partial_s \vec{r}) \cdot \vec{E}^* = ((\partial_s \vec{r}) \wedge \vec{E})^* = (\partial_s \vec{r}) \times \vec{E} = 0 \quad (5.29)$$

führt. Damit ist bewiesen, daß durch $\vec{\psi} = \vec{K}$ und $\vec{r} \cdot \vec{\psi} = \alpha$ die Feldlinien von \vec{E} gegeben sind. Folglich reduziert sich das Problem der Berechnung von Feldlinien von Divergenzfeldern im wesentlichen auf das Finden von Potentialen zu den dualen Feldern.

5.1.4 Stromlinien in einer Kreisscheibe mit Anomalien

Um Stromlinien in einer leitenden, nach außen isolierten Kreisscheibe mit N kreisförmigen Anomalien zeichnen zu können, wird zuerst die Strömungsfunktion ψ berechnet. Wie in Abschnitt (5.1.3) bereits diskutiert, kann man ψ als Imaginärteil des komplexen Potentials Ω bekommen.

$$E = -\partial_z \Omega, \quad \psi = \text{Im}(\Omega) \quad (5.30)$$

Das E-Feld für die oben beschriebene Situation ist eine Reihe deren typische Summanden die Form

$$C \left[\frac{1}{z-A} - \frac{1}{z-B} \right], \quad A, B, C \in \mathbb{C}(i_3) \quad (5.31)$$

haben. Für einen solchen Term ist

$$C [\log(z-B) - \log(z-A)] \quad (5.32)$$

ein komplexes Potential. Damit kann man auch ein komplexes Potential zu den kompletten Spiegelpolreihen der (lokalen) E-Feld aus Abschnitt (4.3) angeben. Um Stromlinien zeichnen zu können müssen nur Potentiale zu den lokalen E-Felder innerhalb der Kreisscheibe berechnet werden, da außerhalb die Leitfähigkeit und somit auch das ohmsche Stromfeld verschwindet.

$$E_k(z) = \frac{2J}{\sigma_0 + \sigma_k} \left[\frac{1}{z-p} - \frac{1}{z-q} + \sum_{l=1}^{\infty} M_l(z, k) \right], \quad k = 0, \dots, N \quad (5.33)$$

$$M_l(z, k) = \sum_{\substack{\zeta_l=1 \\ \zeta_l \neq k}}^{N+1} \dots \sum_{\substack{\zeta_2=1 \\ \zeta_2 \neq \zeta_3}}^{N+1} \sum_{\substack{\zeta_1=1 \\ \zeta_1 = \zeta_2}}^N \eta_{[\zeta, l]} D(z, S_{[\zeta, l]}, p, q) \quad (5.34)$$

Mit den zusätzlichen Definitionen

$$N_l(z, k) = \sum_{\substack{\zeta_l=1 \\ \zeta_l \neq k}}^{N+1} \dots \sum_{\substack{\zeta_2=1 \\ \zeta_2 \neq \zeta_3}}^{N+1} \sum_{\substack{\zeta_1=1 \\ \zeta_1 = \zeta_2}}^N \eta_{[\zeta, l]} P(z, S_{[\zeta, l]}, p, q) \quad (5.35)$$

$$P(z, S, p, q) = \log(z - S(q)) - \log(z - S(p)) \quad (5.36)$$

läßt sich das komplexe Potential in der Form

$$\Omega(z) = \frac{2J}{\sigma_0 + \sigma_k} \left[\log(z - q) - \log(z - p) + \sum_{l=1}^{\infty} N_l(z, k) \right], \quad k = 0, \dots, N \quad (5.37)$$

darstellen. Da komplexe Potentiale, die sich nur durch eine Konstante unterscheiden, äquivalent sind, ist auch

$$\bar{N}_l(z, k) = \sum_{\substack{\zeta_l=1 \\ \zeta_l \neq k}}^{N+1} \dots \sum_{\substack{\zeta_2=1 \\ \zeta_2 \neq \zeta_3}}^{N+1} \sum_{\substack{\zeta_1=1 \\ \zeta_1 = \zeta_2}}^N \eta_{[\zeta, l]} \bar{P}_{[\zeta, l]}(z, S_{[\zeta, l]}, p, q) \quad (5.38)$$

$$\bar{P}_{[\zeta, l]}(z, S, p, q) = \log((z - S(q))C_{[\zeta, l]}^1) - \log((z - S(p))C_{[\zeta, l]}^2) \quad (5.39)$$

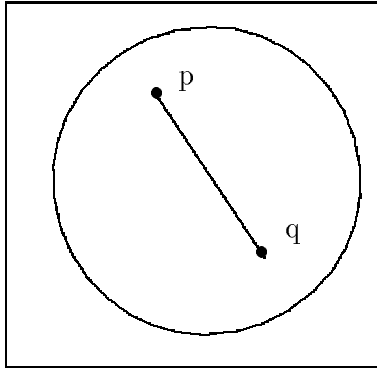
$$\bar{\Omega}_k(z) = \frac{2J}{\sigma_0 + \sigma_k} \left[\log((z - q)C_0^1) - \log((z - p)C_0^2) + \sum_{l=1}^{\infty} \bar{N}_l(z, k) \right] \quad (5.40)$$

ein Potential, wobei $C_0^1, C_0^2, C_{[\zeta, l]}^1, C_{[\zeta, l]}^2$ komplexe Konstanten sind. Nun kann man durch geeignete Wahl der Konstanten und eventuell durch Zusammenfassen von Logarithmen erreichen, daß bei Verwendung des Hauptzweiges des Logarithmus alle Schnitte im Komplement des Definitionsbereiches der lokalen Strömungsfunktion liegen.

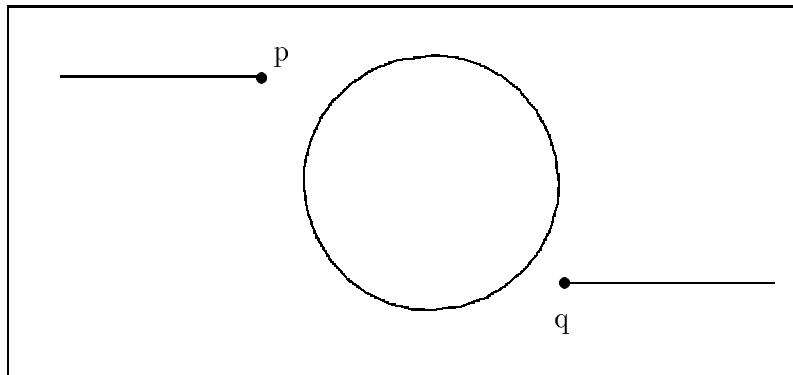
Geeignete Wahl der Schnitte

Aus topologischer Sicht sind prinzipiell nur zwei Pologgen relativ zum Definitionsgebiet des lokalen komplexen Potentials zu unterscheiden:

1. Pole in einem Kreis – Definitionsgebiet außerhalb



2. Pole außerhalb eines Kreises – Definitionsgebiet innerhalb



Im **ersten Fall** kann man das Potential zum Feld

$$E = C \left[\frac{1}{z-p} - \frac{1}{z-q} \right] \quad (5.41)$$

in der Form

$$\Omega = C \log \left(\frac{z-q}{z-p} \right) \quad (5.42)$$

schreiben. Der Schnitt bezüglich der Variablen z liegt auf der Verbindungsstrecke zwischen den Polen, falls man den Hauptast des Logarithmus verwendet, denn

$$-\alpha \stackrel{!}{=} \frac{z-q}{z-p}, \quad \alpha > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (5.43)$$

$$\Rightarrow -\alpha(z-p) = z-q, \quad \Rightarrow z(\alpha) = \frac{\alpha p + q}{1 + \alpha} \quad (5.44)$$

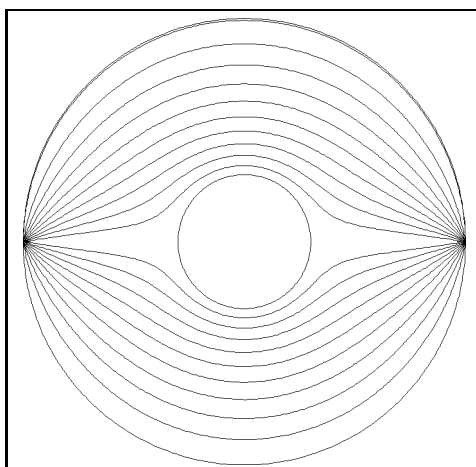
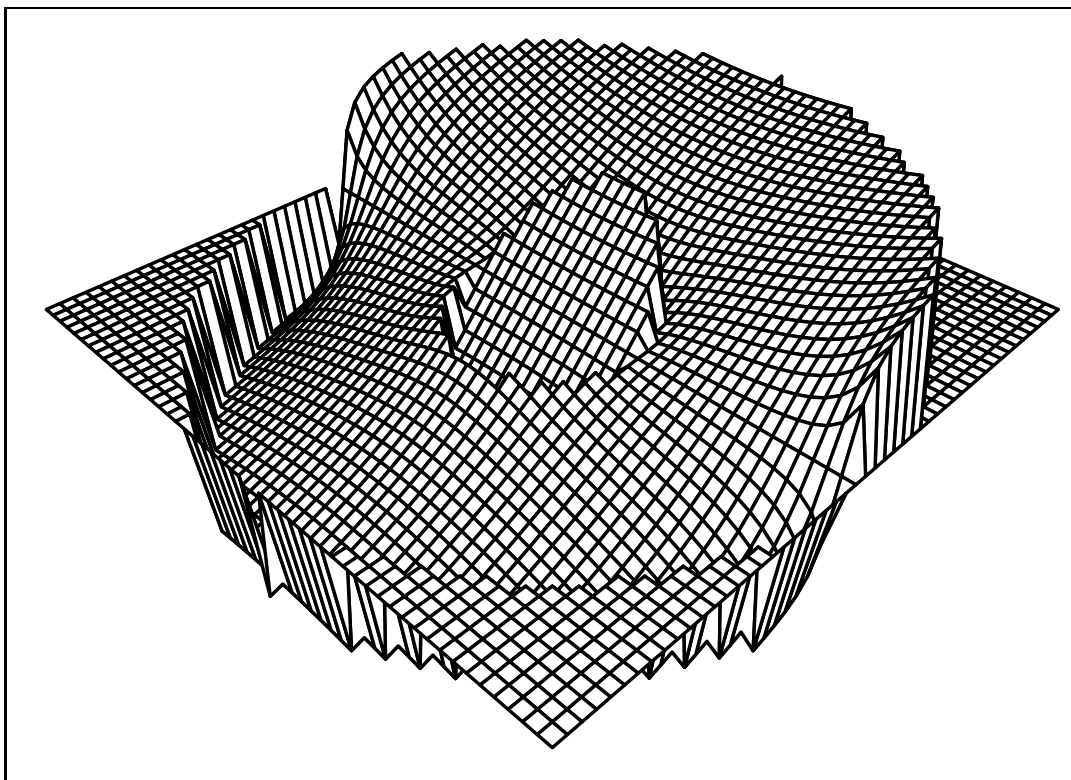
Mit einem Parameterwechsel $\lambda = \frac{1}{1+\alpha}$ erhält man die übliche Darstellung

$$z(\lambda) = p + \lambda(q-p), \quad \lambda \in (0, 1) \quad (5.45)$$

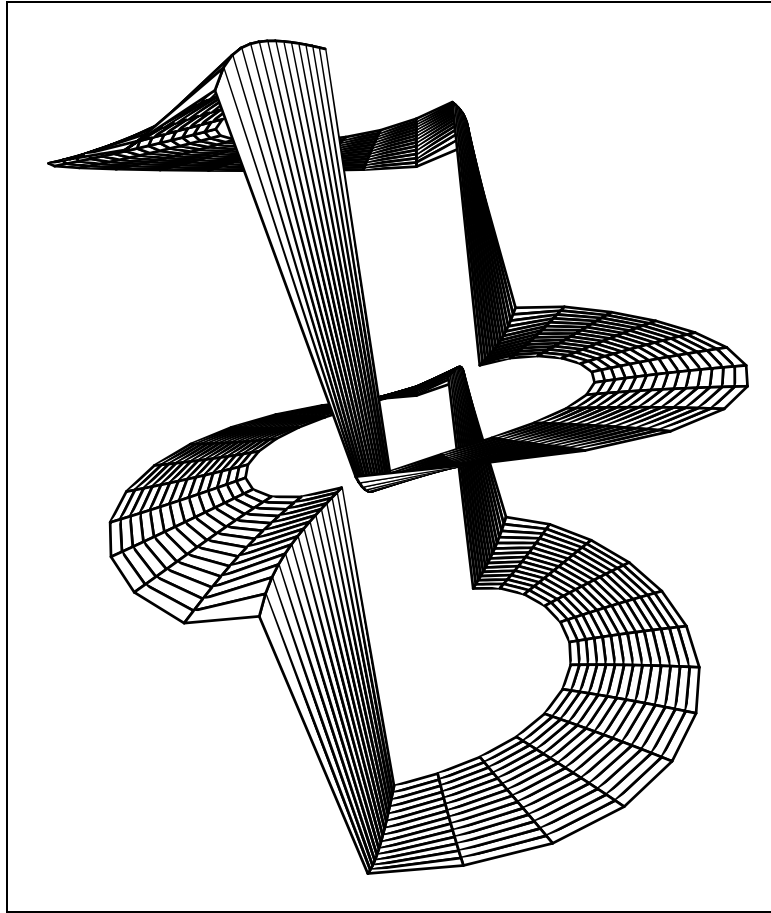
Im **zweiten Fall** kann man die Schnitte relativ zum Kreismittelpunkt positionieren:

$$k(q, m) = \theta(\operatorname{Re}(q - m)), \quad \Omega(z) = C \left[\log(i^{k(q,m)}(z - q)) - \log(i^{k(p,m)}(z - p)) \right] \quad (5.46)$$

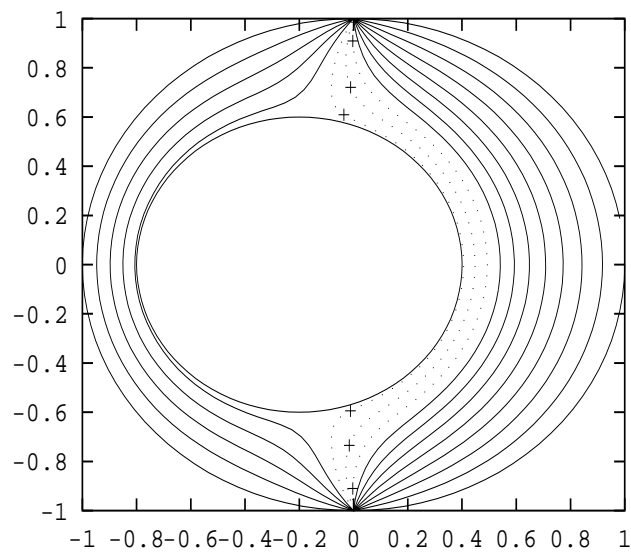
In folgender Abbildung ist eine typische, aus zwei lokalen Teilen bestehende, Strömungsfunktion für eine Kreisscheibe mit einer Anomalie dargestellt.



Ist der Schnitt der Strömungsfunktion nicht geeignet gewählt, so wäre ein Wechsel des Zweiges beim Zeichnen der Feldlinien nötig. Zwei Zweige einer typischen Strömungsfunktion deren Schnitt durch deren Definitionsgebiet geht ist in folgender Grafik zu sehen.



Im folgenden Diagramm sind die Feldlinien und die Punkte gekennzeichnet für die beim Zeichnen ein Wechsel der Zweige der Strömungsfunktion nötig ist, falls die Schnitte zuvor nicht so gewählt wurden, daß sie außerhalb des Bereiches liegen in dem man Feldlinien zeichnen möchte.



Konvergenzverhalten

Sowohl für die hier berechneten Potentiale, als auch für die zugehörigen Felder aus Kapitel (4.3.8) stellt sich die Frage nach Konvergenzbereich und Konvergenzgeschwindigkeit. Wie man an einigen Extremfällen leicht erkennt, konvergieren die angegebenen Reihen nicht immer. Bei den numerischen Studien zeigte sich, daß die Konvergenzgeschwindigkeit entsprechend langsam ist, wenn Konfigurationen gewählt werden, die nahe an solchen Extremsituationen liegen. Abgesehen von diesen wenigen Extremfällen konvergieren die Reihen sehr schnell, was kurze Berechnungszeiten der numerischen Algorithmen zur Folge hat. Abhängig von der gewünschten Genauigkeit reichen aber in den meisten Fällen 3 bis 5 Iterationsstufen zur numerischen Berechnung völlig aus. Da die Lösungen aus Kreisspiegelungsabbildungen gebildet werden, ist klar, daß gerade für sehr dicht benachbarte Anomalien die Konvergenzgeschwindigkeit geringer ist. Die schlechteste Konvergenz erhält man, wenn man nur einen Isolator konzentrisch ins Innere der Kreisscheibe setzt und diese zusätzlich sehr groß macht. Im Grenzfall, indem der Isolator die ganze Kreisscheibe komplett ausfüllt liefert dies auch theoretisch bereits Widersprüche. In diesem Grenzfall kann ein Strom, wie er durch δ -Quellen beschrieben wird überhaupt nicht mehr eingepreßt werden. Dies äußert sich darin, daß die Reihen nicht mehr konvergieren. Setzt man hingegen keinen absoluten Isolator ins Innere der Kreisscheibe, so konvergieren die Reihen auch dann noch, wenn sich benachbarte Kreise bereits berühren. Die Spiegelpole sind dabei allerdings nicht mehr für die Konvergenz entscheidend, sondern die Potenzen der relativen Leitfähigkeitsunterschiede die jeweils vor den Spiegelpoltermen stehen.

5.2 Numerische Algorithmen

Um aus den gewonnenen impliziten Gleichungen für Feld- (Strom-) und Äquipotentiallinien die explizit Kurven für nicht triviale geometrische Konfigurationen zu bekommen werden Algorithmen verwendet, die sowohl symbolische als auch numerische Ergebnisse liefern. Die wesentlichen der von mir entwickelten Algorithmen stelle ich in diesem Abschnitt in Form von Ablaufdiagrammen dar. Ich selbst habe die folgenden Algorithmen zum Teil in Fortran 77 aber hauptsächlich in C++ (GNU) auf einem PC (486DX2-66) implementiert. Um nicht die wesentlichen Ideen der Algorithmen durch sprachspezifische Besonderheiten zu verschleiern und da diese Algorithmen prinzipiell in einer Vielzahl von Hochsprachen implementiert werden können, verzichte ich an dieser Stelle bewußt auf die Auflistung des Quellcodes. Anstatt dessen stelle ich die Algorithmen durch Ablaufdiagramme dar. Auf Details verzichte ich auch hier zu Gunsten der Übersichtlichkeit.

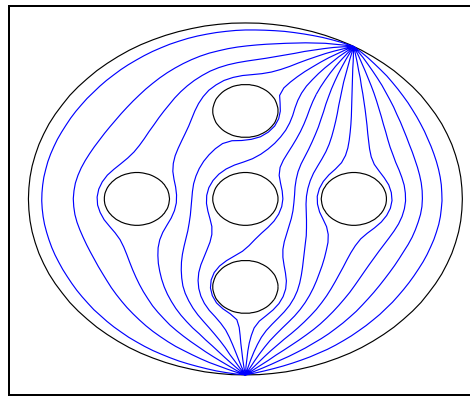
Bei den numerischen Berechnungen in dieser Arbeit habe ich den Schwerpunkt auf die nähere Untersuchung von kreisförmigen Anomalien in einer isolierten Kreisscheibe gelegt.

Die Diagramme die ich bereits im Theorieteil dieser Arbeit, zum besseren Verständnis der diskutierten Formeln präsentiert habe, sind ebenfalls mit den im folgenden erklärten Algorithmen erstellt worden.

5.2.1 Berechnung der lokalen Potentiale und Felder

Die numerische Berechnung der lokalen Potentiale und Felder einer isolierten Kreisscheibe mit N kreisförmigen Anomalien basiert auf den analytischen Lösungen aus den Kapiteln (4.3.8) und (5.1.4).

Zur Implementierung der Potential- und Feldfunktionen habe ich vorab eine Initialisierungsroutine definiert, welche **nur einmal** die Spiegelpole und relativen Leitfähigkeitsfaktoren berechnet und in einer Liste speichert. Ein Großteil dieser Initialisierungsprozedur besteht in der symbolischen Berechnung der Multiindizes, die später zur konkreten Ausführung der mehrfachen Kreisspiegelungsabbildungen benötigt werden. Möchte man beispielsweise 5 Anomalien im Inneren der Kreisscheibe untersuchen,



so sehen die Multiindizes der ersten drei Iterationsstufen für das elektrische Feld in der Anomalie mit der Nummer 1 wie folgt aus.

:2	:2:1:2	:2:6:3	:2:4:5
:3	:3:1:2	:3:6:3	:3:4:5
:4	:4:1:2	:4:6:3	:5:4:5
:5	:5:1:2	:5:6:3	:1:6:5
	:1:3:2	:2:1:4	:2:6:5
:1:2	:2:3:2	:3:1:4	:3:6:5
:3:2	:4:3:2	:4:1:4	:4:6:5
:4:2	:5:3:2	:5:1:4	:5:6:5
:5:2	:1:4:2	:1:2:4	:2:1:6
:1:3	:2:4:2	:3:2:4	:3:1:6
:2:3	:3:4:2	:4:2:4	:4:1:6
:4:3	:5:4:2	:5:2:4	:5:1:6
:5:3	:1:5:2	:1:3:4	:1:2:6
:1:4	:2:5:2	:2:3:4	:3:2:6
:2:4	:3:5:2	:4:3:4	:4:2:6
:3:4	:4:5:2	:5:3:4	:5:2:6
:5:4	:1:6:2	:1:5:4	:1:3:6
:1:5	:2:6:2	:2:5:4	:2:3:6
:2:5	:3:6:2	:3:5:4	:4:3:6
:3:5	:4:6:2	:4:5:4	:5:3:6
:4:5	:5:6:2	:1:6:4	:1:4:6
:1:6	:2:1:3	:2:6:4	:2:4:6
:2:6	:3:1:3	:3:6:4	:3:4:6
:3:6	:4:1:3	:4:6:4	:5:4:6
:4:6	:5:1:3	:5:6:4	:1:5:6
:5:6	:1:2:3	:2:1:5	:2:5:6
	:3:2:3	:3:1:5	:3:5:6
	:4:2:3	:4:1:5	:4:5:6
	:5:2:3	:5:1:5	
	:1:4:3	:1:2:5	
	:2:4:3	:3:2:5	
	:3:4:3	:4:2:5	
	:5:4:3	:5:2:5	
	:1:5:3	:1:3:5	
	:2:5:3	:2:3:5	
	:3:5:3	:4:3:5	
	:4:5:3	:5:3:5	
	:1:6:3	:1:4:5	

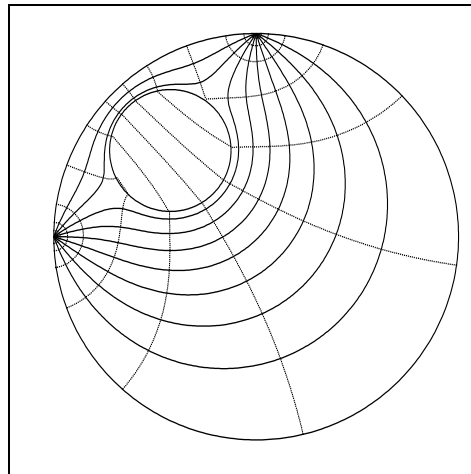
Dabei bezeichnet δ den Kreis, der die Kreisscheibe berandet. Zuerst auszuführende Spiegelungen werden auch zuerst aufgeführt. Man erkennt hier deutlich, daß als letzte Spiegelung nie eine Spiegelung am Kreis mit der Nummer 1 auftritt. Dies macht auch Sinn, da dies zu Polen im Kreis 1 führen würde, was wegen der homogenen Feldgleichung im Gebiet 1 nicht erlaubt ist. Wie letzten Endes die Spiegelpole positioniert sind, ergibt sich erst nach expliziter Ausführung all dieser Kreis-spiegelungsoperationen. Ergebnisse für ein spezielles Beispiel werden im Kapitel (5.3.1) vorgestellt. Nachdem die Initialisierung durchgeführt ist, besteht die eigentliche Berechnung der Potentiale und Felder im wesentlichen nur aus einigen wenigen elementaren Rechenoperationen (die einzige aufwendigere Operation ist der komplexe Logarithmus, der mehrfach bei der Berechnung der komplexen Potentiale ausgeführt wird). Die Initialisierungsroutine war nur mit sehr viel Zeitaufwand zu implementieren, da viele Spezialfälle bedacht werden mußten, in denen die Berechnungen ohne weitere Anpassungen analytisch stabil aber numerisch instabil waren. Zum Beispiel streben die Spiegelpole im Fall einer konzentrisch angeordneten kreisförmigen Anomalie in der Kreisscheibe zum Punkt unendlich. In diesem Fall sind die Summanden für das zugehörige komplexe Potential von der Form

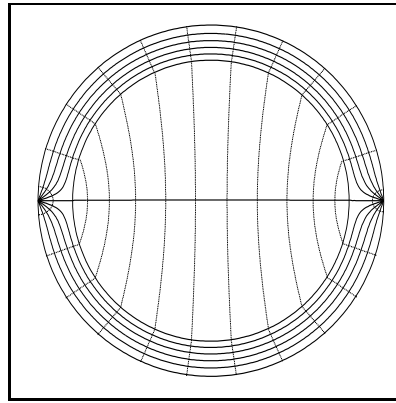
$$C \log \left(\frac{z - S(q)}{z - S(p)} \right). \quad (5.47)$$

Es ist also sofort klar, daß ein Algorithmus, der das komplexe Potential genau auf diese Art und Weise berechnet, aus Gründen des endlichen Wertebereiches zwingend instabil werden muß, falls die Spiegelpole gegen Unendlich streben. Formt man hingegen einen solchen Ausdruck gemäß

$$C \log \left(\frac{z - S(q)}{z - S(p)} \right) = C \left[\log \left(\frac{S(q)}{S(p)} \right) + \log \left(\frac{\frac{z}{S(q)} - 1}{\frac{z}{S(p)} - 1} \right) \right] \quad (5.48)$$

um und macht sich die Eigenschaft des Potentials zunutze, daß es auf Summanden die nicht von z abhängig sind nicht ankommt, so kann auch in solchen Fällen das komplexe Potential numerisch stabil berechnet werden. Solche und ähnliche Probleme sind zwar nicht von all zu großem physikalischem Interesse, haben aber trotzdem viel Zeit gekostet. Ein bereits sehr extremes Beispiel mit konzentrisch positionierter isolierender Anomalie und ein dezentral angeordneter Isolator zeigen wie gut trotz der oben genannten Probleme dieses Verfahren funktioniert. Um in Bereiche zu kommen, bei denen die Konvergenz deutlich langsamer wird, sodaß die Berechnung mit einem gewöhnlichen PC nicht mehr möglich wäre, müßten noch sehr viel extremere Situationen untersucht werden.

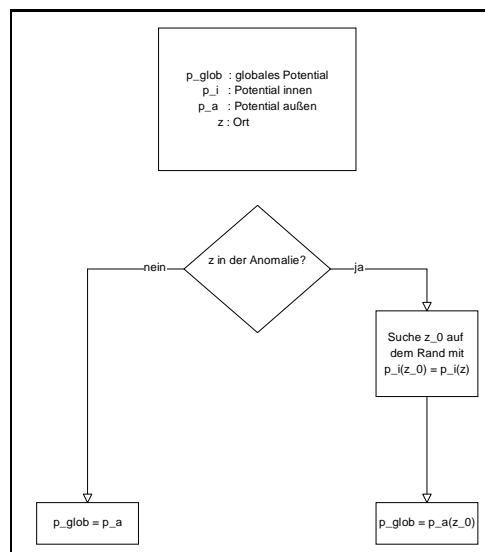




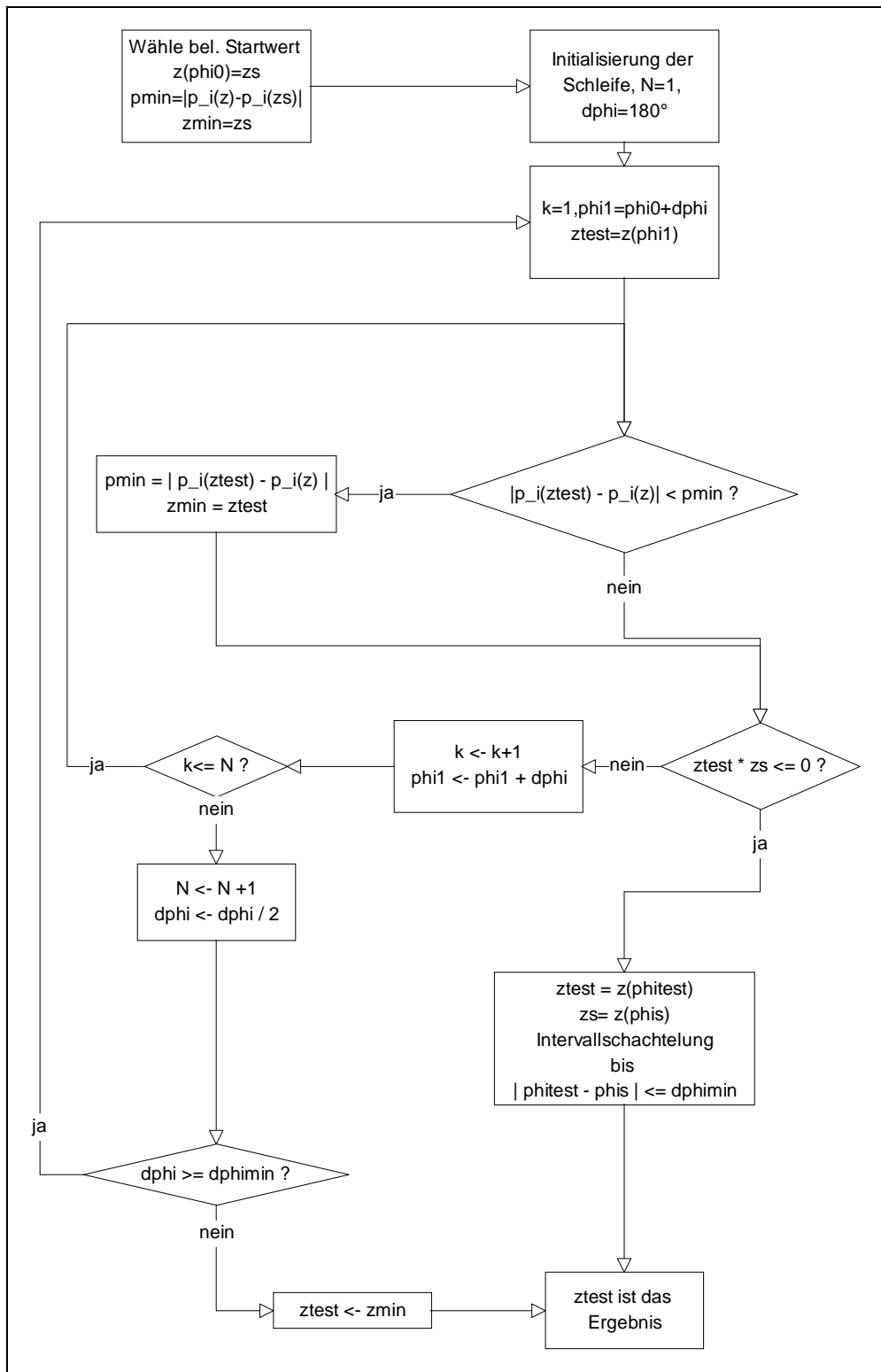
An dem zweiten Beispiel kann man außerdem gut erkennen, daß durch die spezielle geometrische Anordnung, die einem geraden Draht lokal schon sehr nahe kommt, das Potential auch in etwa in gleichen Abständen gleich viel abfällt.

5.2.2 Globalisierung der lokalen „Potentiale“

Mittels der **lokalen** Potentialfunktionen kann man, zuerst einmal nur lokal, Äquipotential- und Feldlinien plotten. Verzichtet man auf andere Eigenschaften der Potentiale und beschränkt sich darauf, daß die Höhenlinien der Potentiale die gewünschten Kurven liefern, so kann man eine **globale** Funktion aus den Potentialen konstruieren, welche globale Feld- bzw. Potentiallinien liefert. Ausgehend vom Potential im Komplement der Anomalien wird die Fortsetzung dieser Funktion in die Anomalien durch stetige Fortsetzung der zugehörigen Linien erreicht. Da die Feld- und Potentiallinien, Höhenlinien entsprechender Potentiale sind, muß der Potentialwert im Inneren einer Anomalie auch mindestens einmal auf dem Rand angenommen werden (vorausgesetzt, die Höhenlinie ist nicht im Inneren der Anomalie geschlossen). An diesem Randpunkt werden nun die betreffenden lokalen Potentiale angepaßt. Somit ist der Funktionswert in der Anomalie durch den Wert gegeben, den das lokale Potential außerhalb der Anomalie auf dem oben beschriebenen Randpunkt annimmt. Diese Anpaßung der lokalen Potentiale ist im allgemeinen nicht durch Addition einer einzigen Konstanten möglich. Typischerweise werden unterschiedliche Konstanten auf unterschiedlichen Höhenlinien zur Anpaßung benötigt. Der Algorithmus zur Berechnung solcher globaler Funktionen deren Höhenlinien dann Potential- oder Feldlinien sind, ist in folgendem Flußdiagramm dargestellt.

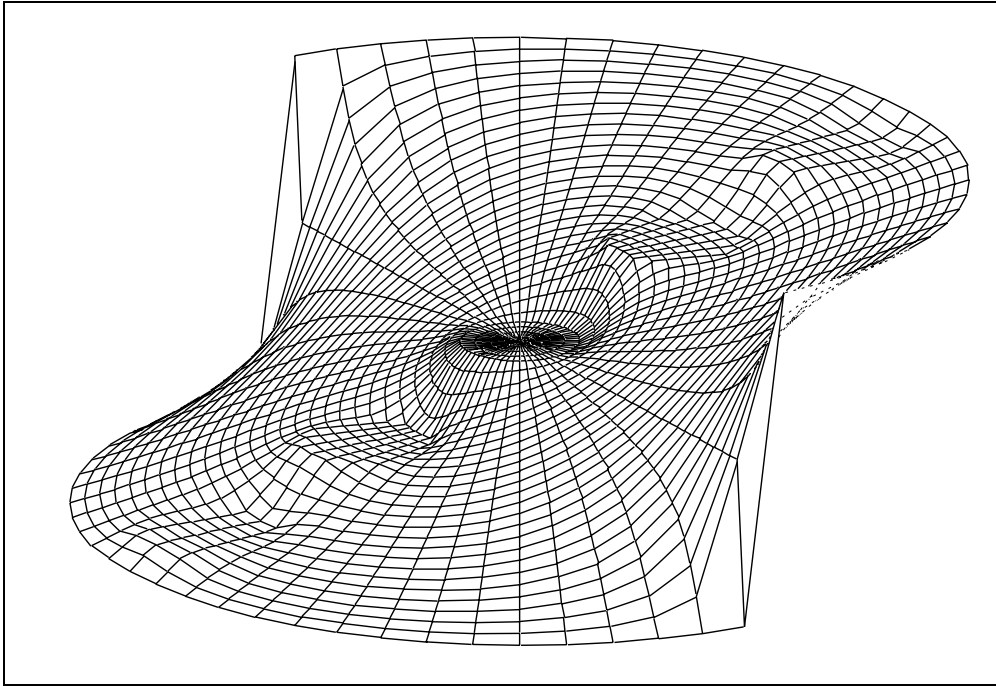


Berechnung globaler Höhenlinienfunktionen

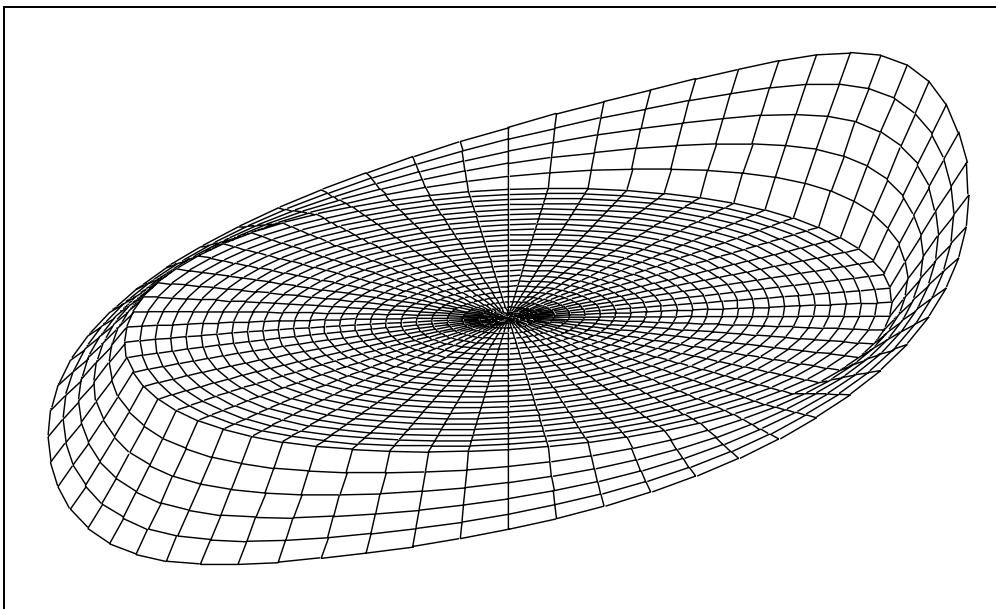


Suche eines Funktionswertes auf dem Kreisrand

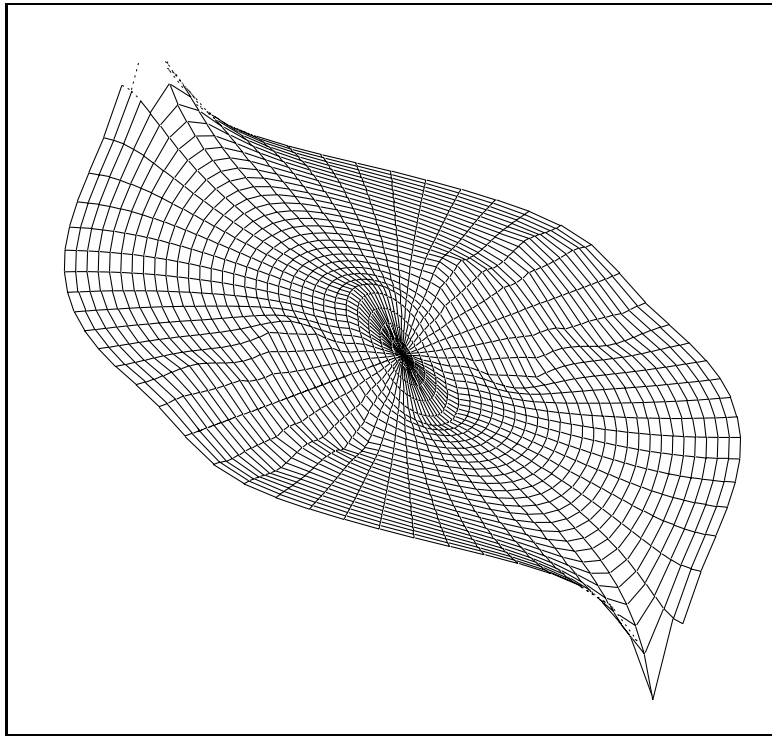
Für das Beispiel von 5 in einer Reihe angeordneten Isolatoren sehen das globale „Potential“ und die globale „Strömungsfunktion“ wie folgt aus. Die Begriffe Potential und Strömungsfunktion sind streng genommen nicht mehr gerechtfertigt, da die Gradienten dieser globalen Funktionen nicht mehr überall ihren Definitionen entsprechend mit dem Feld zusammenhängen! Bei der globalen „Strömungsfunktion“ sind die Plateaus an den Stellen der Isolatoren gut zu erkennen. Vor der Anpassung der lokalen Teile der Strömungsfunktion treten Unstetigkeiten, wie etwa in den Grafiken des Abschnittes (5.1.4) zu sehen ist, auf.



Globale „Strömungsfunktion“

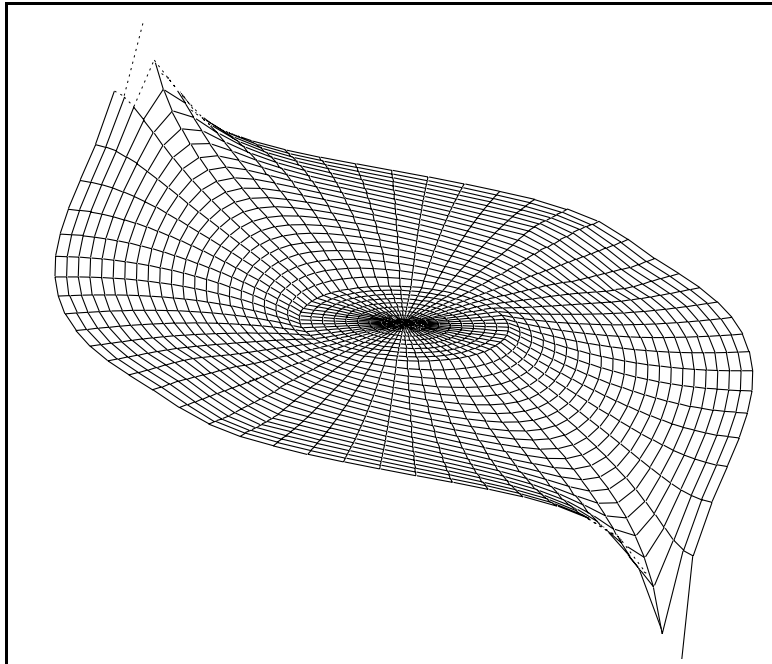


Globale „Strömungsfunktion“ (Ausschnitt eines Plateaus)

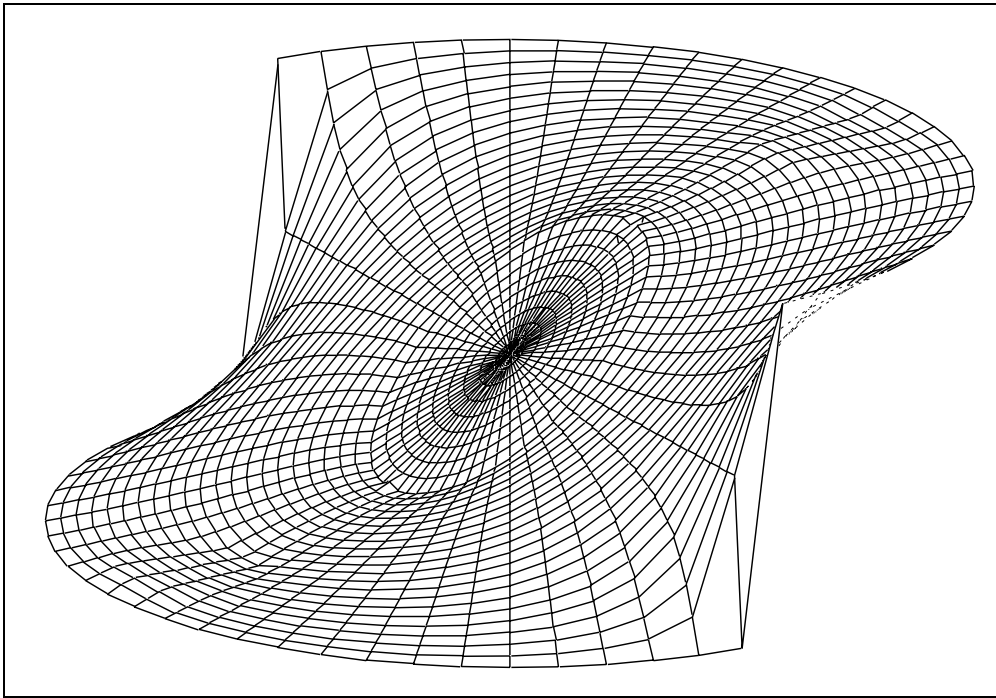


Globales „Potential“

Für ein anderes Beispiel mit drei in einer Reihe angeordneten Anomalien (zwei kleine am Rand und eine größere in der Mitte) welche Leitfähigkeiten haben, die weder einen idealen Leiter noch einen Isolator beschreiben sind in den Potentialen keine Plateaus mehr vorhanden. Je nach Größe der relativen Leitfähigkeitsdifferenz zeichnen sich jedoch die Anomalien mehr oder weniger deutlich ab.



Globales „Potential“



Globale „Strömungsfunktion“

5.2.3 Zeichnen von Höhenlinien

Zu einem vorgegebenen Startpunkt sind im allgemeinen zwei Startrichtungen möglich. Das heißt, die Suche nach Punkten auf einem Kreis (mit Radius ε um den Startpunkt als Mittelpunkt), an welchen die Potentialfunktion den gleichen Wert hat wie am Startpunkt, hat normalerweise zwei Lösungen. Die Startrichtung kann zum Beispiel durch Vorgabe einer Vorzugsrichtung festgelegt werden. Mit einer solchen Vorzugsrichtung kann man durch Projektion der möglichen Richtungen auf die Vorzugsrichtung entscheiden welche Richtung nun ausgewählt werden soll. Um dieses Verfahren anwenden zu können muß selbstverständlich die Schrittweite ε hinreichend klein gewählt werden, um nicht eventuell mehr als zwei Lösungen auf dem oben genannten ε - Kreis zu finden. Ferner ist die Schrittweite so zu wählen, daß die Schritte klein im Vergleich zum Krümmungsradius der Kurve sind. Diese Forderung kann allerdings in dem vorliegenden Fall von N kreisförmigen Anomalien in einer isolierten Kreisscheibe nicht global erfüllt werden, da beim Gebietswechsel die Höhenlinie nicht immer differenzierbar sind. An einer solchen Stelle wäre der Krümmungsradius unendlich klein. Folglich habe ich einen Algorithmus entwickelt, der gegenüber diesen Knicken in den Höhenlinien möglichst unsensibel ist.

Jede einzelne Feldlinie, sowie jede einzelne Äquipotentiallinie ist zwar eine Höhenlinie einer Potentialfunktion, jedoch muß beim Zeichnen von „Bündeln“ von Feld- oder Äquipotentiallinien zwischen diesen beiden Arten unterschieden werden. Bei der Visualisierung eines Feldes durch Feld- und Potentiallinienbilder wird meist eine Schar von Linien ausgewählt, für die benachbarte Linien stets die gleiche Potential-(Strömungsfunktions) Differenz haben. In den folgenden Abschnitten wird erläutert, wie diese Forderung für Potential- und Feldlinien in dem hier vorliegenden zweidimensionalen Fall erfüllt werden kann. In drei Dimensionen gestaltet sich dieses Problem prinzipiell viel schwieriger. Strukturell entspricht das dreidimensionale Problem der Auswahl einer diskreten Linienschar aus dem kontinuierlichen Bündel, der Bestimmung einer diskreten Punkteverteilung auf der Kugeloberfläche, sodaß diese möglichst gleich verteilt sind (im Sinne einer konstanten Oberflächenpunktedichte).

Alternativ dazu kann auch ein für zwei Dimensionen erweitertes Newtonverfahren verwendet werden, wenn man in Kauf nehmen kann, daß jeder Punkt nur bis auf die lineare Approximation ge-

nau berechnet wird. Die Genauigkeit kann zwar auch durch Verkleinerung der Schrittweite erhöht werden, jedoch steigert dies den Rechenaufwand auch enorm und der eigentliche Vorteil dieses Verfahrens geht verloren. Bei dem zuvor beschriebenen Verfahren, kann die Genauigkeit für jeden Punkt unabhängig von der Schrittweite beliebig reguliert werden. Das Newton Verfahren wird im folgenden Abschnitt vorgestellt. Solange keine kritischen Gebietswechsel auftreten, ist dieses Verfahren deutlich schneller und für die meisten Anwendungen hinreichend genau.

5.2.4 Newton Verfahren für $f(x, y) = c = \text{const.}$

Wie beim Newton-Verfahren in einer Dimension, basiert auch dieses von mir entwickelte Verfahren auf einer linearen Approximation der gegebenen Funktion. Hierzu wird die Ableitung bzw. der Gradient verwendet. Dieser kann numerisch berechnet oder auch analytisch vorgegeben werden. Die Taylorentwicklung einer Funktion zweier Variablen $f(x, y)$ bis zum linearen Term hat folgende Gestalt:

$$f(x_1, y_1) \approx f(x_0, y_0) + (\epsilon_x, \epsilon_y) \cdot \vec{\partial}f(x_0, y_0) \quad (5.49)$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{\epsilon}, \quad \vec{r}_k = x_k \vec{\sigma}_1 + y_k \vec{\sigma}_2, \quad \vec{\epsilon} = \epsilon_x \vec{\sigma}_1 + \epsilon_y \vec{\sigma}_2, \quad \epsilon^2 = \epsilon^2 \quad (5.50)$$

Mit einem beliebigen Startwert (x_0, y_0) und vorgegebener Schrittweite ϵ kann in Newton Näherung der Punkt (x_1, y_1) berechnet werden.

$$f(x_1, y_1) \stackrel{!}{=} c \quad (5.51)$$

Schreibt man $\vec{\epsilon}$ in Polarkoordinaten

$$\vec{\epsilon} = \epsilon \vec{\sigma}_1 e^{i\alpha} \quad (5.52)$$

so folgt

$$\cos(\alpha) \partial_x f(x_0, y_0) + \sin(\alpha) \partial_y f(x_0, y_0) = \frac{c - f(x_0, y_0)}{\epsilon} \quad (5.53)$$

Wegen

$$A \sin \alpha + B \cos \alpha = C \sin(\alpha + \phi) \quad (5.54)$$

mit

$$C^2 = A^2 + B^2 \quad \tan \phi = \frac{B}{A} \quad (5.55)$$

folgt:

$$\|\vec{\partial}f(x_0, y_0)\| \sin(\alpha + \phi) = \frac{c - f(x_0, y_0)}{\epsilon} \quad (5.56)$$

$$\sin(\alpha + \phi) = \frac{c - f(x_0, y_0)}{\epsilon \|\vec{\partial}f(x_0, y_0)\|} \quad (5.57)$$

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{c - f(x_0, y_0)}{\epsilon \|\vec{\partial}f(x_0, y_0)\|} \right) - \arctan \left(\frac{\partial_x f(x_0, y_0)}{\partial_y f(x_0, y_0)} \right) \quad (5.58)$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \epsilon \vec{\sigma}_1 e^{i\alpha} \quad (5.59)$$

Nun kann \vec{r}_1 als neuer Startwert verwendet werden.

Man beachte, daß beim eindimensionalen Problem die Lösung genau ein Punkt ist, dem man sich in mehreren Schritten sukzessive nähert. In unserem Fall hat der Lösungsraum Dimension 1. Dies äußert sich auch in einem prinzipiellen Unterschied im Verfahren. Um eine hohe Genauigkeit zu erhalten wird lediglich die Schrittweite ϵ angepaßt, aber keine höhere Newton-Näherungen gerechnet (die eigentliche Iteration ist bei diesem Problem nicht mehr möglich).

Falls die Schrittweite ϵ so gewählt ist, daß der Abstand vom Startwert zur gesuchten Höhenlinie das ϵ übersteigt, so findet man in linearer Näherung keine Lösung. Man kann allerdings einen Punkt finden der möglichst nahe an der gesuchten Kurve liegt. In dem Iterationsverfahren zeigt sich dieses Problem bei der Berechnung des arcsin — ist nämlich ϵ zu klein oder $c - f(x_0, y_0)$ zu groß, so kann der Betrag des Argumentes vom arcsin die 1 übersteigen und er ist nicht mehr definiert. Vergrößert man gedanklich ϵ solange bis das Argument des arcsin in dessen Definitionsbereich liegt, so erhält man gerade den nächsten Punkt der in linearer Näherung auf der gesuchten Kurve liegt. Dieser Punkt liegt dann in Richtung

$$\alpha = \arcsin(\pm 1) - \arctan\left(\frac{\partial_x f(x_0, y_0)}{\partial_y f(x_0, y_0)}\right) \quad (5.60)$$

Das Vorzeichen wird durch

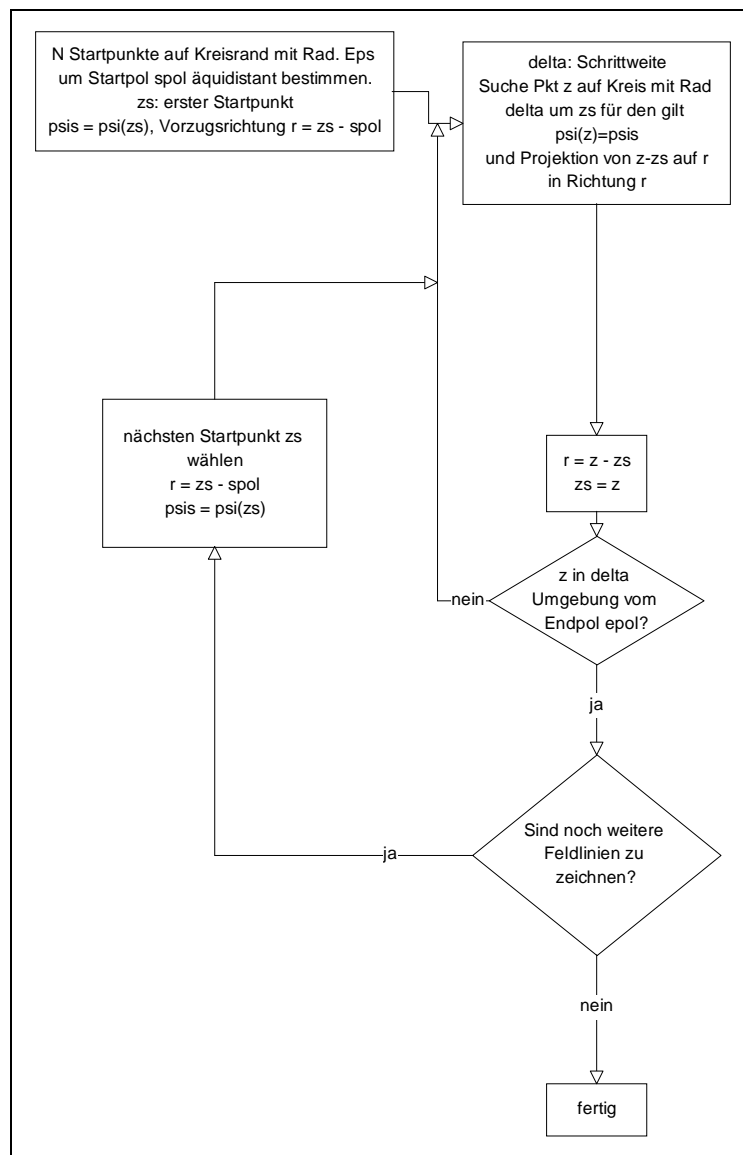
$$\pm 1 = \operatorname{sgn}\left(\frac{c - f(x_0, y_0)}{\epsilon \|\vec{\partial} f(x_0, y_0)\|}\right) \quad (5.61)$$

bestimmt. Somit muß die Schrittweite nicht verändert werden und zuweit entfernte Startwerte laufen schnellstmöglich auf die gewünschte Höhenlinie zu. Man muß lediglich beachten, daß die erhaltenen Punkte in diesen Fällen nicht in linearer Approximation auf der Kurve liegen.

Somit ist das Verfahren stabil, denn auch für Startwerte, die weit weg von der gesuchten Kurve sind, strebt das Verfahren auf die Kurve zu!

5.2.5 Berechnung der Feldlinien

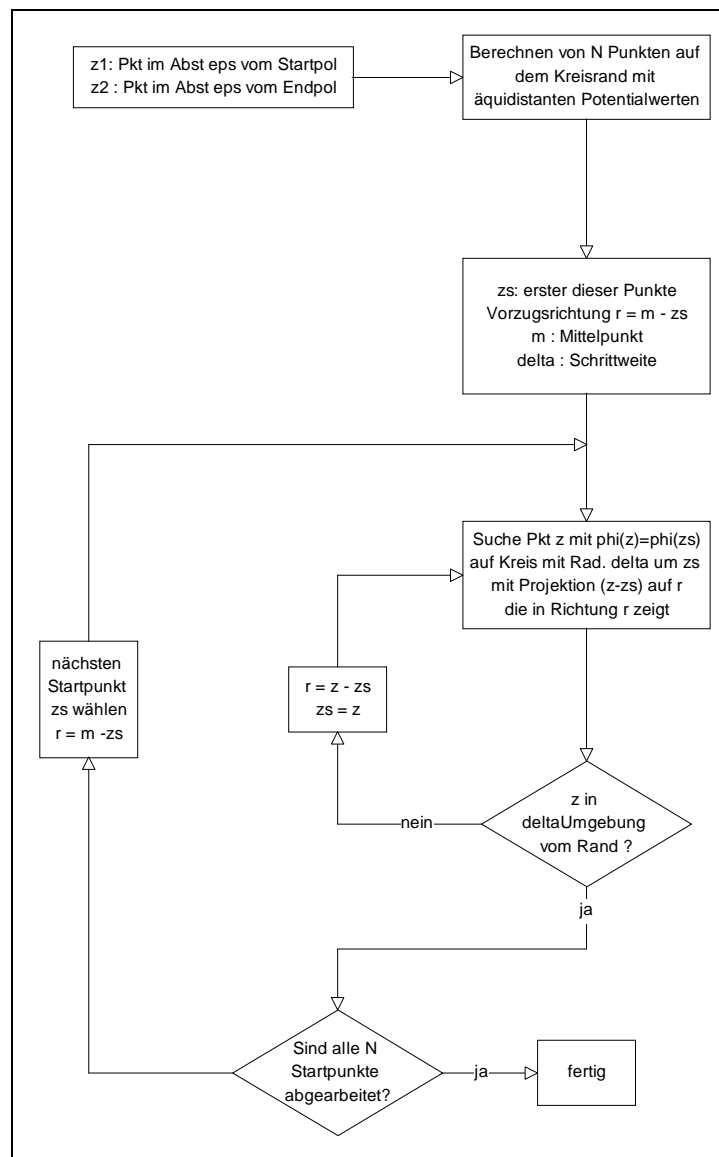
In der Klasse von Konfigurationen, die hier betrachtet werden, liegt stets eine Stromquelle und eine Senke vor. Bei einer vorgegebenen Genauigkeit findet man einen hinreichend kleinen Abstand zur Quelle, sodaß die Feldlinien auf einem Kreis um den Pol äquidistant bzgl. der Bogenlänge sind. Da in den betrachteten Konfigurationen das E-Feld außerhalb der Stromquelle und Senke wirbel- und quellenfrei ist, kann überall die Feldliniendichte als Maß für die Feldstärke verwendet werden, ohne, daß „künstlich“ Feldlinien hinzugefügt oder entfernt werden müssten. Entscheidend beim Zeichnen der Feldlinien ist also, daß die Bogenlänge auf dem geeignet gewählten Kreis um Quelle oder Senke in guter Näherung direkt mit dem Wert der Strömungsfunktion korreliert ist. Somit können die Startpunkte der Feldlinien, einfach als äquidistante Punktesfolge auf diesem Kreis gewählt werden.



Plotten von Feldlinien

5.2.6 Berechnung der Äquipotentiallinien

Bei den Potentiallinien ist jedoch eine geänderte Vorgehensweise erforderlich. Das elektrische Potential fällt von einem Pol zum anderen sukzessive ab. Die Pole teilen den Kreisrand in zwei Segmente auf. Die Potentiallinien starten auf einem Segment des Kreisrandes und enden auf dem anderen. Da das Potential an den Polen singularär ist, muß ein kleiner Bereich um die Pole ausgenommen werden. Auf dem dadurch eingeschränkten Randsegment bleibt das Potential stets endlich und man kann die Differenz zwischen Maximalwert und Minimalwert in eine gewünschte Anzahl gleich großer Potentialintervalle aufteilen. Die zu diesen Werten gehörenden Randpunkte sind dann die gewünschten Startwerte der Potentiallinien.



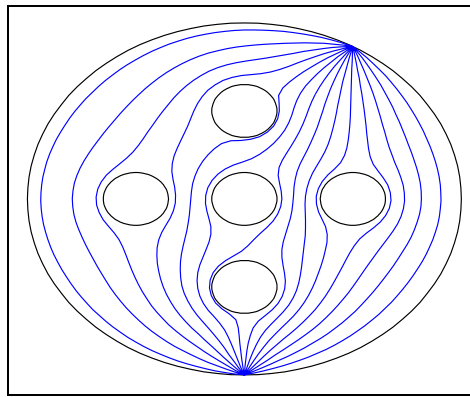
Plotten von Potentiallinien

5.3 Numerische und graphische Ergebnisse

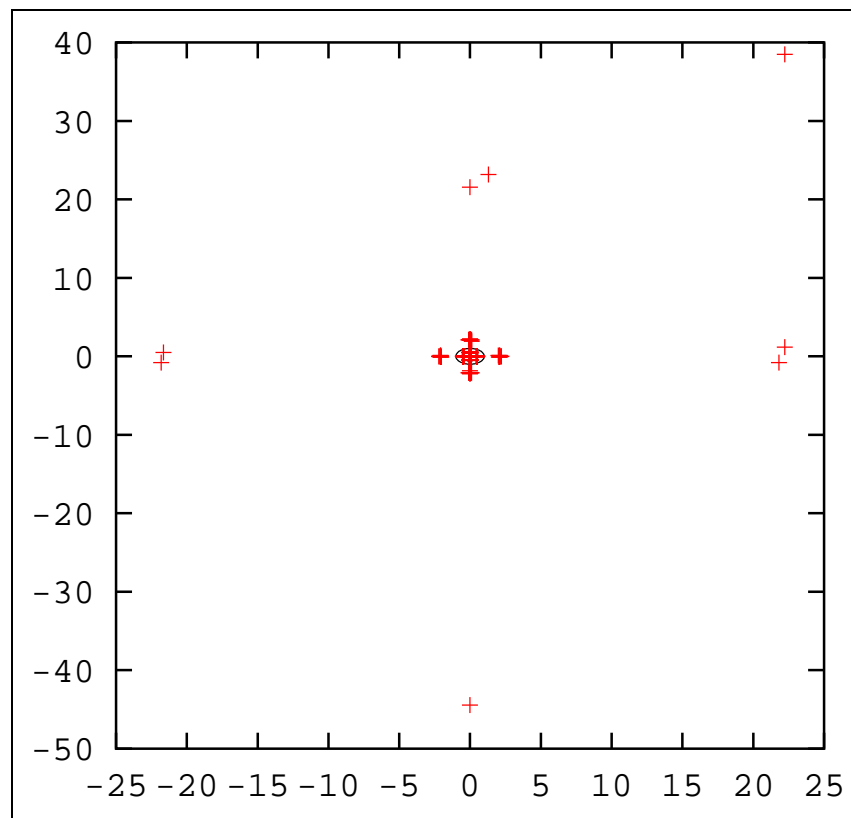
5.3.1 Positionen der Spiegelpole

Um die Lage der Spiegelpole für einen konkreten Fall untersuchen zu können, werden in den folgenden Grafiken die Positionen der Spiegelpole für die Situation von 5 gleich großen Anomalien mit Kreuzen gekennzeichnet. Hierbei ist zu beachten, daß absichtlich die Einprägepole nicht völlig symmetrisch angeordnet sind. Dies wirkt sich dann auch in einer deutlich sichtbaren Unsymmetrie der Spiegelpolverteilung aus.

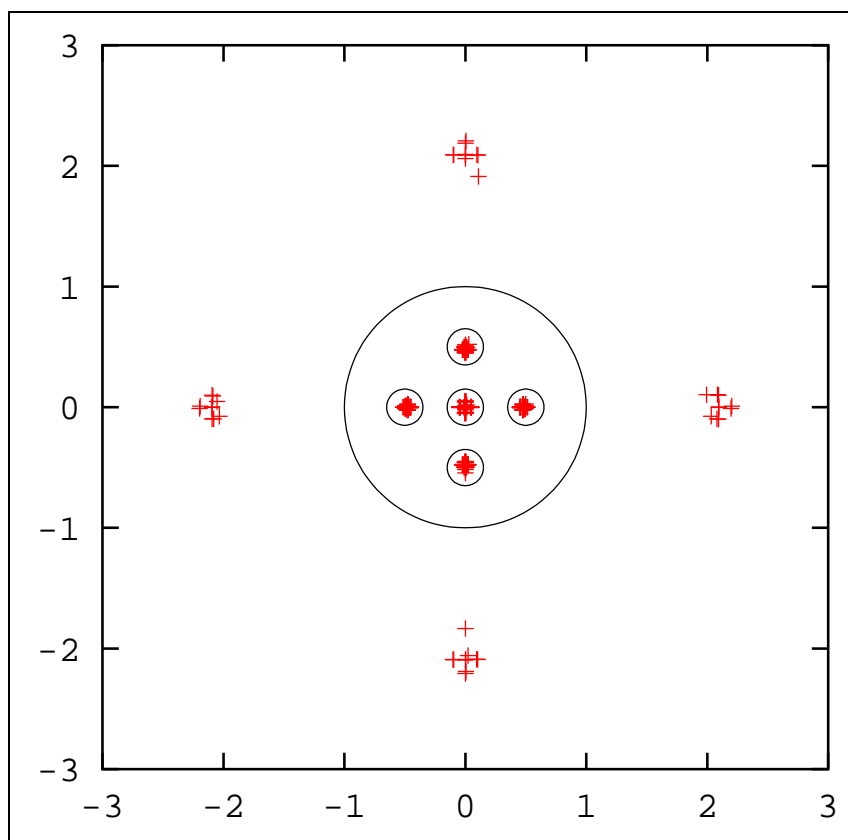
Im folgenden werden Spiegelpole für ein sechsfach zusammenhängendes Gebiet gezeichnet.



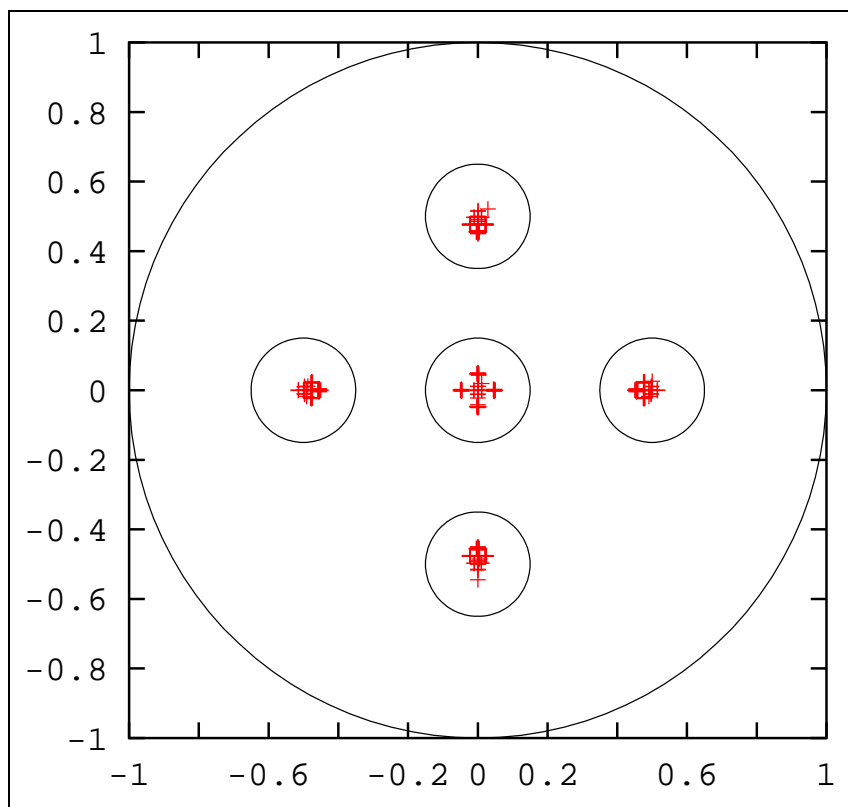
Zuerst werden die Spiegelpole präsentiert, welche zur Berechnung der elektrischen Feldes außerhalb der Anomalien benötigt werden. Die Pole im Außenraum liegen zum Teil sehr weit von der Kreisscheibe weg. Die Kreisscheibe ist in dieser Grafik nur noch als sehr kleiner Fleck in der Mitte zu erkennen.

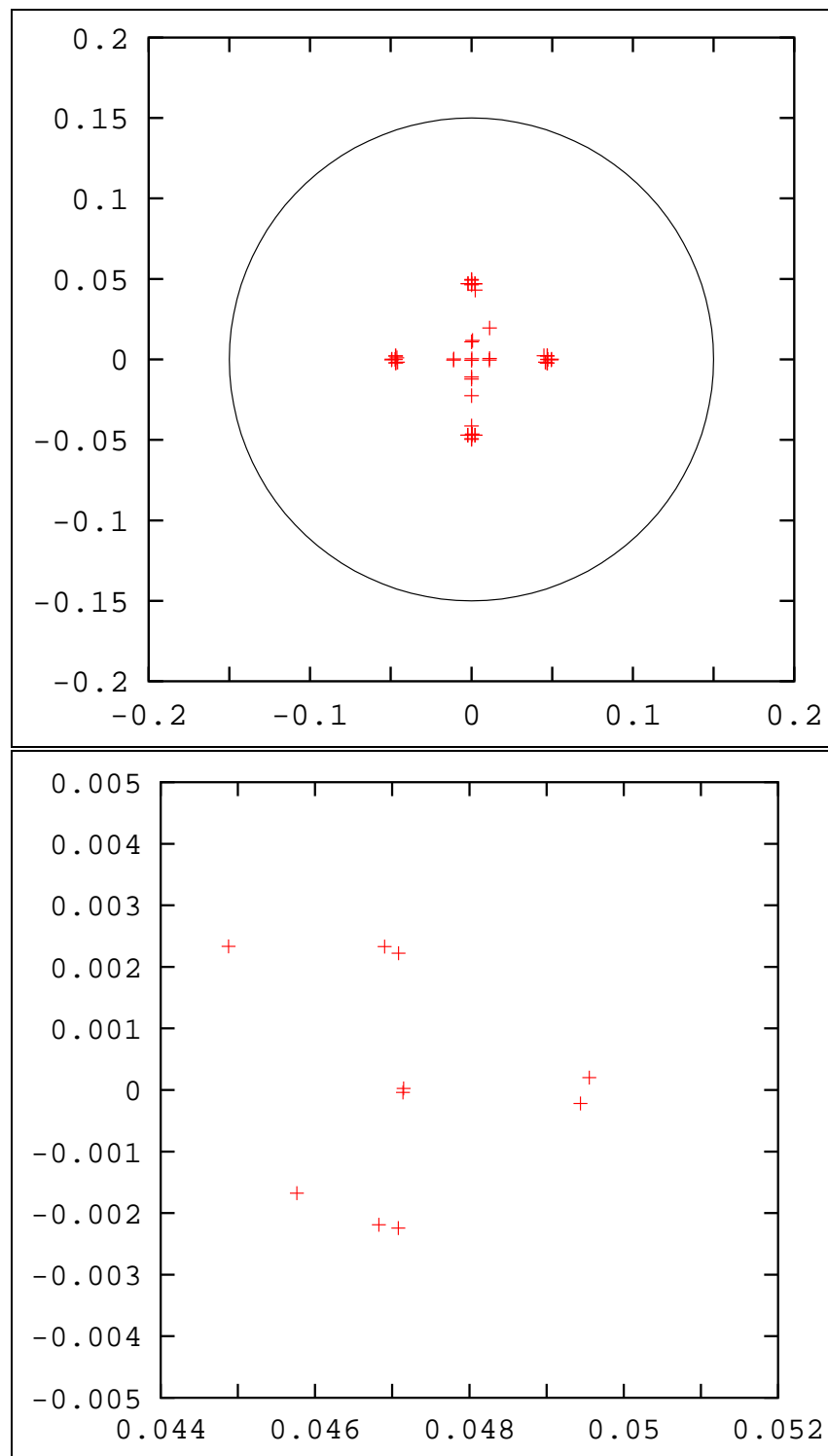


Die vier Kreuze um die Kreisscheibe sind nicht vier einzelne Pole, sondern ganze Anhäufungen von Spiegelpolen, an fast der gleichen Position. In einer leichten Vergrößerung ist zu erkennen, daß diese Pole sehr wohl noch zu unterscheiden sind.



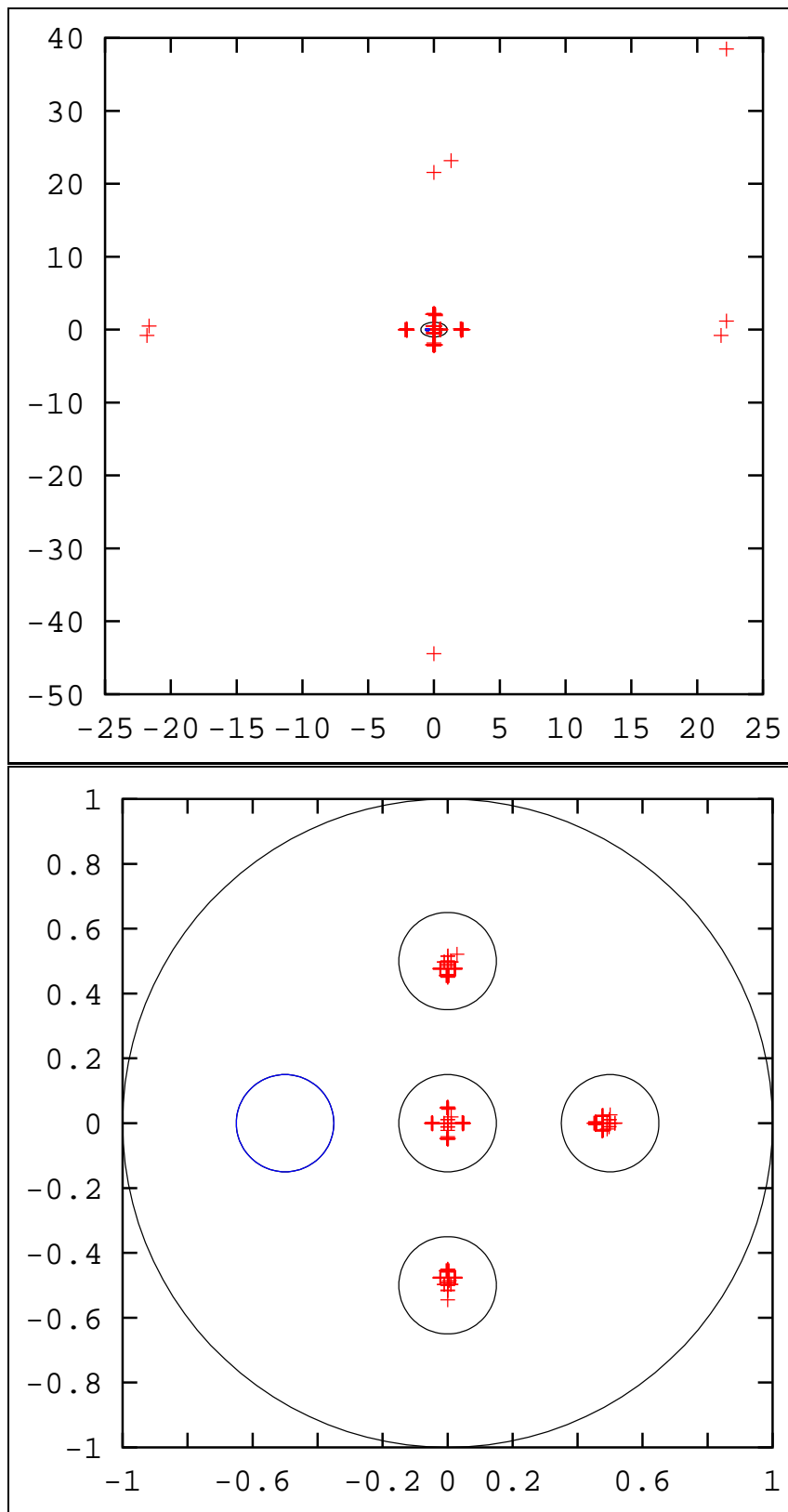
In weiteren Vergrößerungen wird auch die Struktur der Polverteilung in den Anomalien immer besser erkennbar:



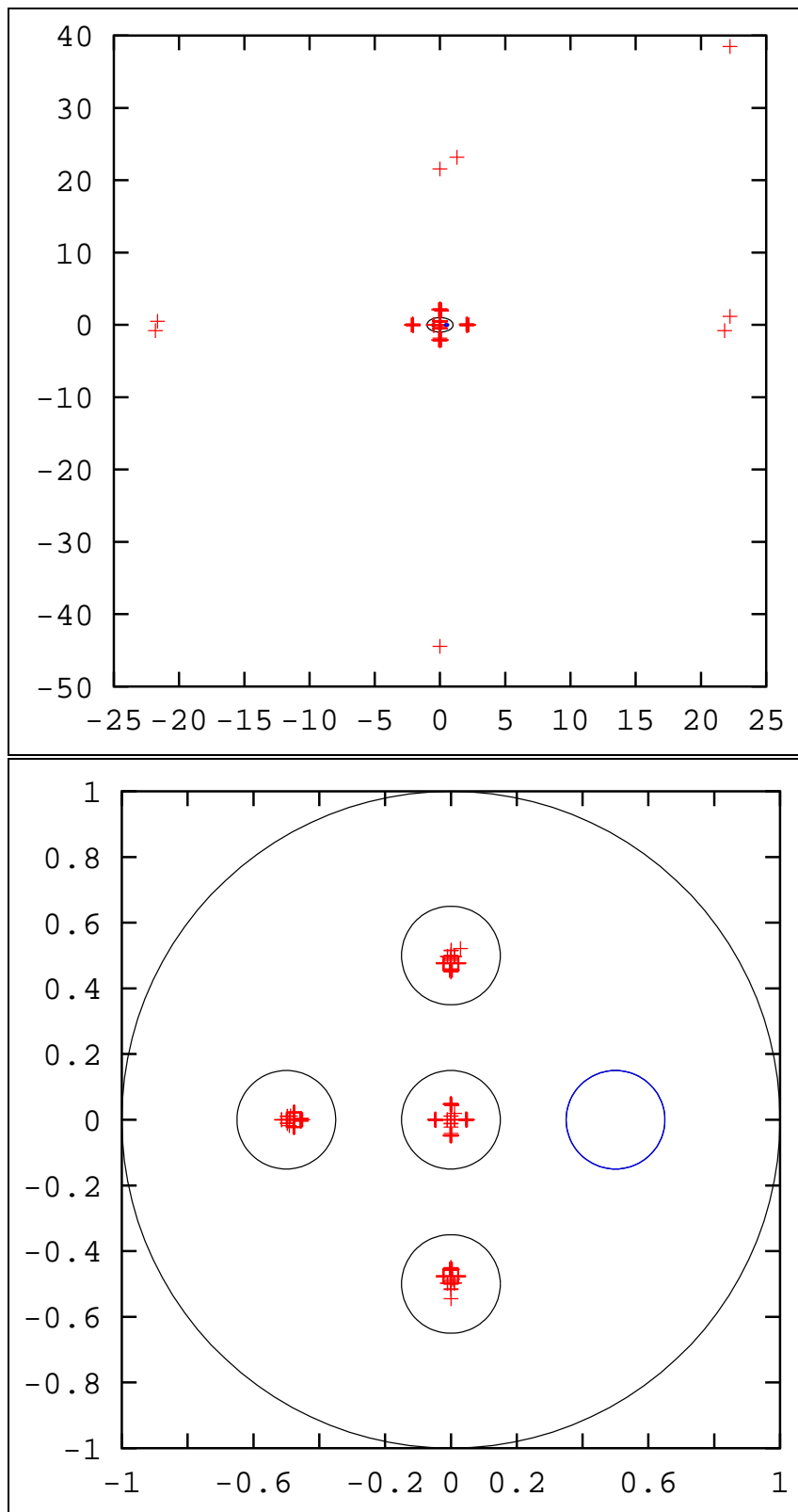


Betrachtet man nun die Polverteilung, die zur Berechnung von Feldern und Potentiale innerhalb von Anomalien benötigt werden, so erkennt man, daß die meisten Pole erhalten bleiben, jedoch solche in den entsprechenden Anomalien entfallen (wegen der Feldgleichung in diesem Gebiet).

Für das Feld in der linken Anomalie erhält man:

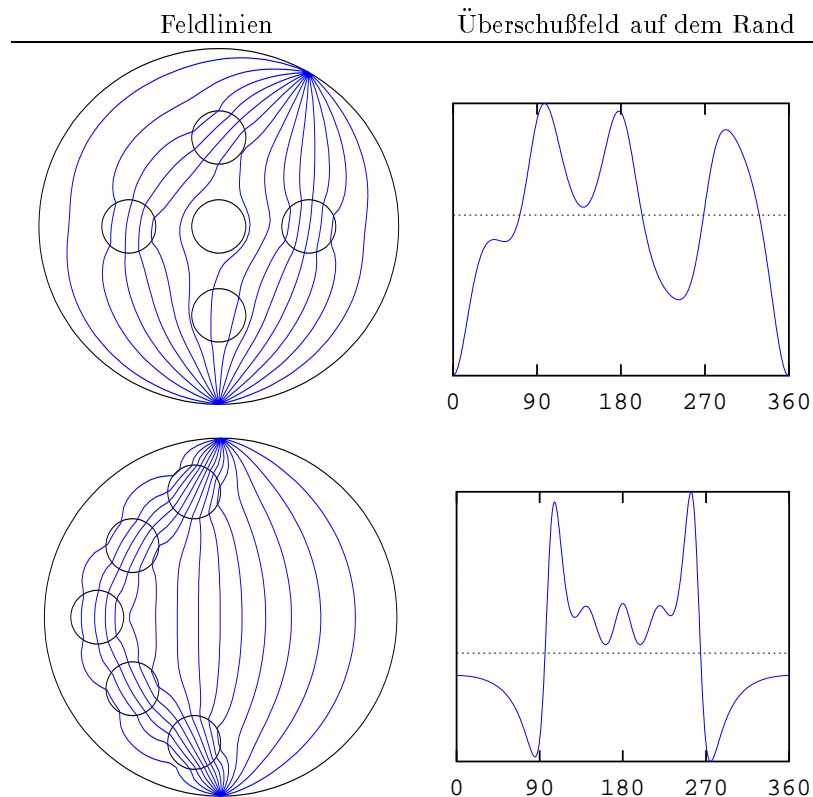


und für die rechte Anomalie



5.3.2 Variation der Zusammenhangszahl

Im allgemeinen äußert sich die spezielle Form einer Leitfähigkeitsverteilung (Anzahl und Position der Anomalien, sowie deren relative Leitfähigkeitsdifferenz zur Umgebung) in einem charakteristischen Feld auf dem Rand. Um wirklich die wesentlichen Anteile der Anomalien zu erhalten betrachtet man nur die Felddifferenz zwischen den Situationen einer homogen leitenden Scheibe und einer homogen leitenden Scheibe mit Anomalien. Da die Kreisscheibe nach außen hin isoliert sein soll, erzwingt die Randbedingung ein zum Kreisrand tangential elektrisches Feld. Somit kann man das Überschuffeld, das durch die Anomalien entsteht, wie eine skalare Funktion (durch Projektion auf die Tangente des Kreisrandes) über den Winkel der den Kreisrand parametrisiert auftragen. In den folgenden Diagrammen, entspricht 0 Grad wie üblich dem Punkt der am weitestens rechts auf dem Kreisrand liegt. Zuerst möchte ich zwei interessante Anomalie-Konfigurationen präsentieren, deren Überschuffelder sich sehr stark voneinander unterscheiden.

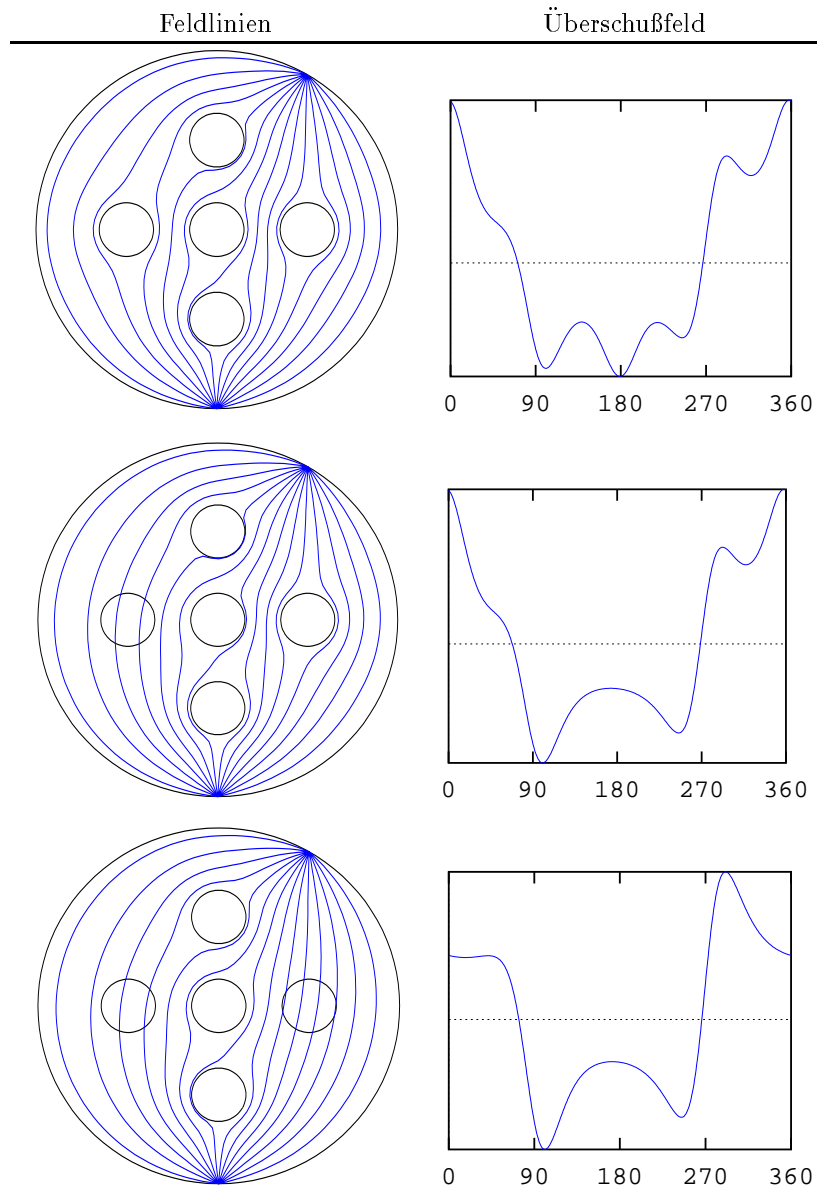


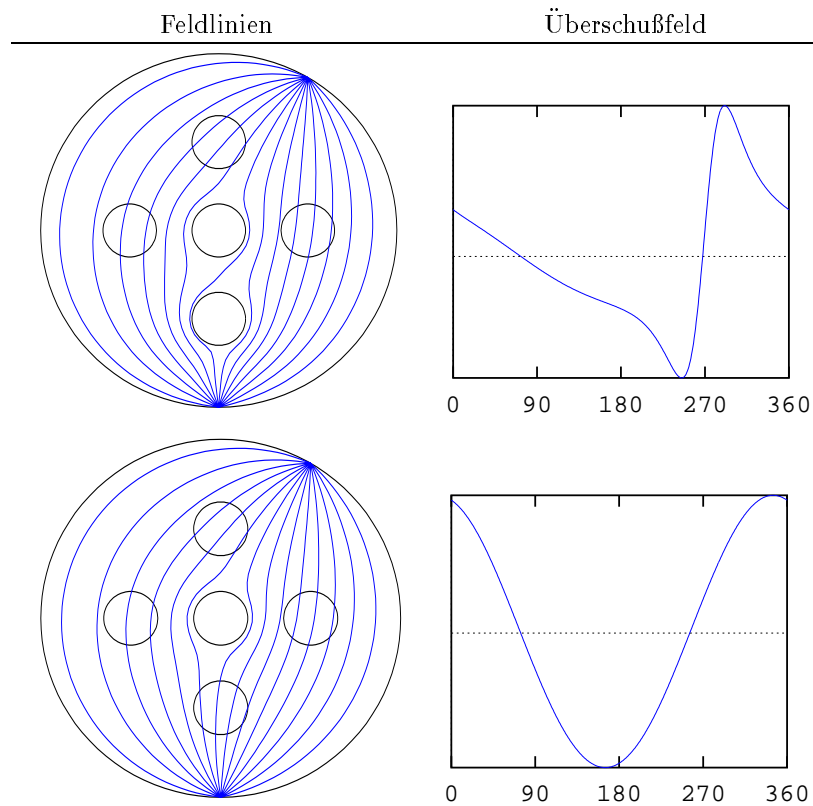
In den Überschuffeld-Diagrammen können die einzelnen Anomalien sehr gut identifiziert werden. Zu beachten ist dabei, daß sowohl Anomalien mit höherer Leitfähigkeit ($0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$) als auch solche mit niedrigerer Leitfähigkeit im Vergleich zu der Umgebung (270° Mitte) zu erkennen sind. Man sieht, daß die Anomalie in der Mitte ihren Einfluß über den ganzen Winkelbereich verteilt hat. Da diese Anomalie von ihrer Position her keine Richtung auszeichnet, ist dies auch sinnvoll. In den Diagrammen der zweiten Anomalie-Konfiguration wurden 5 gute Leiter ähnlich einer Kette angeordnet. Wiederum sind die zugehörigen Strukturen im Überschuffeld an den erwarteten Positionen deutlich zu erkennen.

Aus topologischer Sicht haben Anomalien mit Leitfähigkeit Null (Isolator) und solche mit relativer Leitfähigkeitsdifferenz Null (entartete Anomalien – sie haben keine Wirkung) eine besondere Bedeutung. Im Falle eines Isolators, spaltet die Anomalie die Feldlinienschar in zwei Klassen auf, die nicht mehr durch stetige Transformationen (Homotopien) ineinander übergeführt werden können. Verschwindet hingegen der Leitfähigkeitsunterschied einer Anomalie zur Umgebung, so reduziert sich die analytische Struktur der Lösung. Dabei ist zu beachten, daß der Parameter, der die

unterschiedliche Situationen bestimmt (die relative Leitfähigkeitsdifferenz η) ein kontinuierlicher Parameter ist.

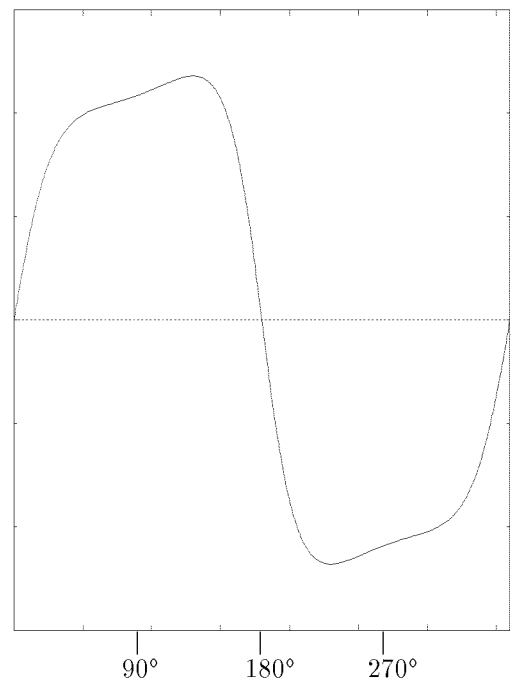
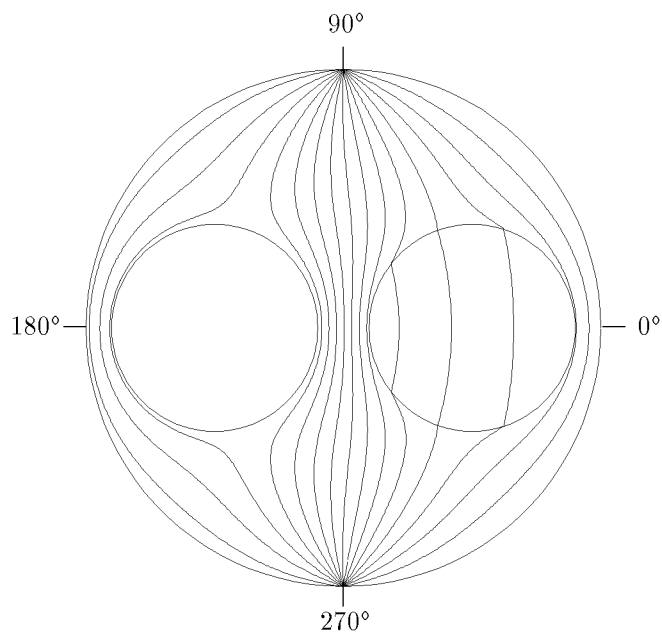
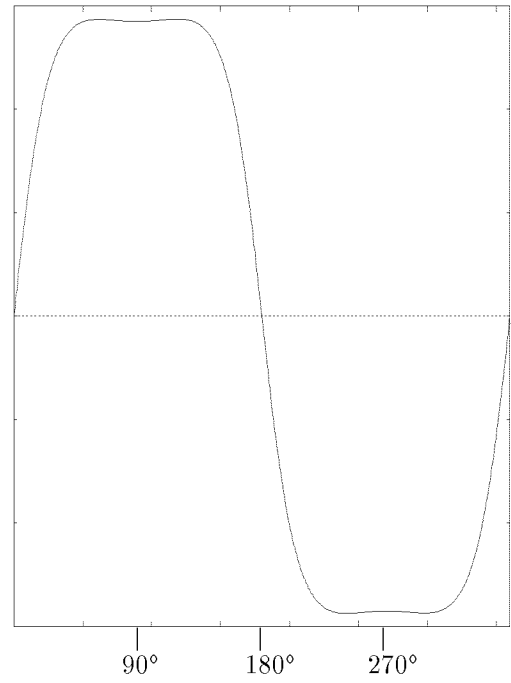
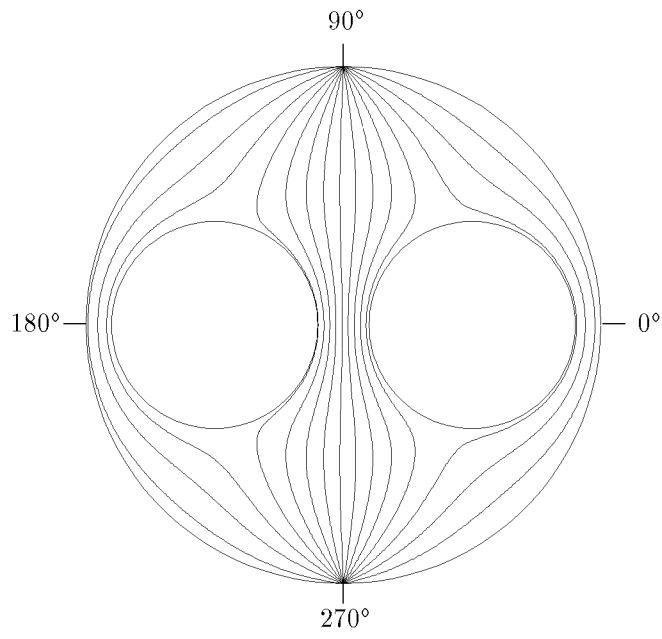
Auf Grund dieser Überlegungen scheint es sinnvoll, Konfigurationen zu untersuchen, bei denen diese beiden extremen η -Werte eine Rolle spielen. Im folgenden wird eine Folge von Anomalie-Konfigurationen dargestellt, für die, ausgehend von 5 isolierenden Anomalien, die relativen Leitfähigkeitsdifferenzen sukzessive für alle Anomalie eliminiert werden.

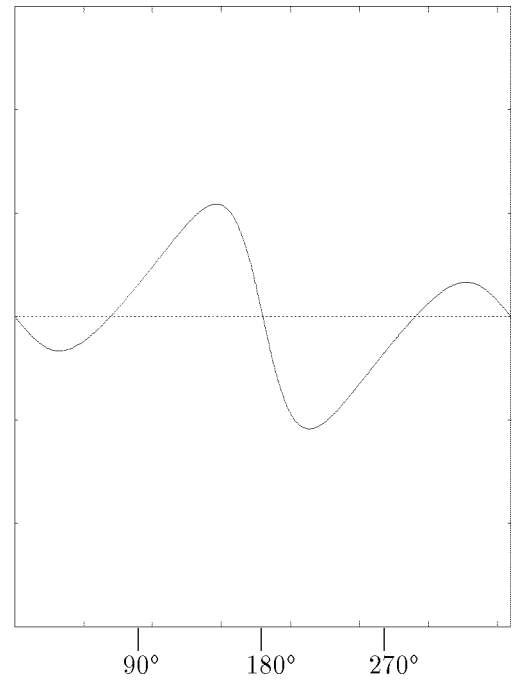
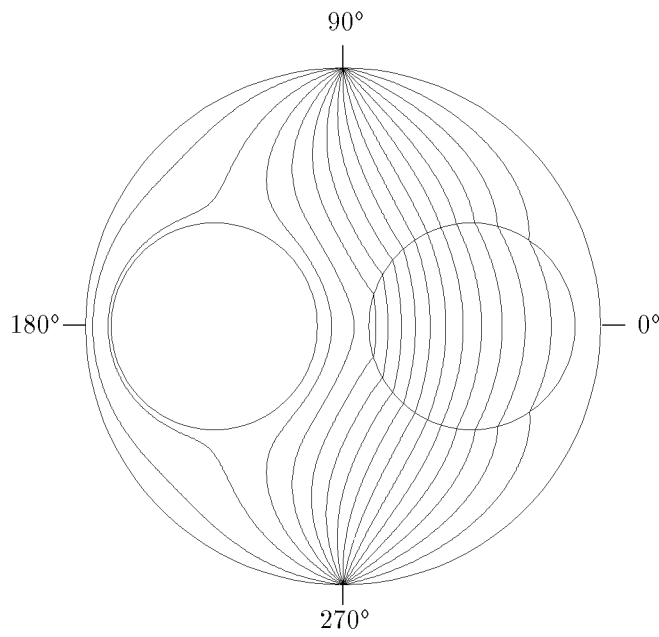
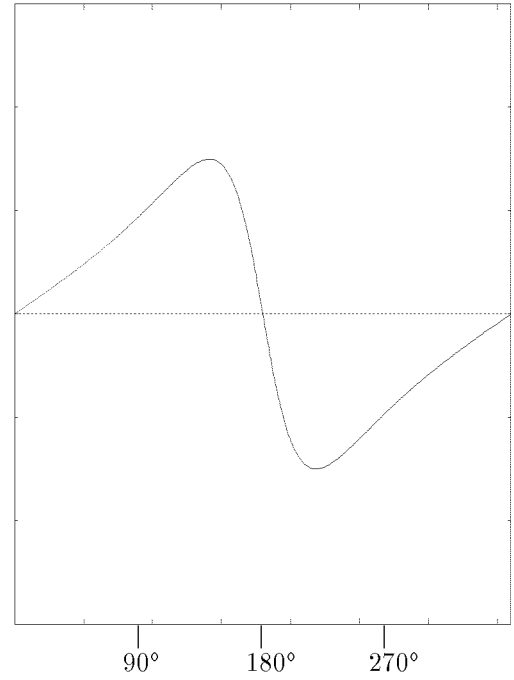
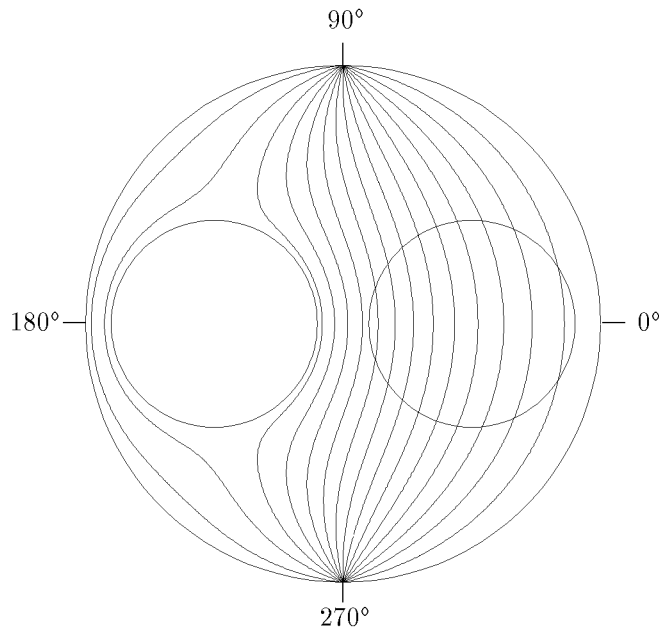


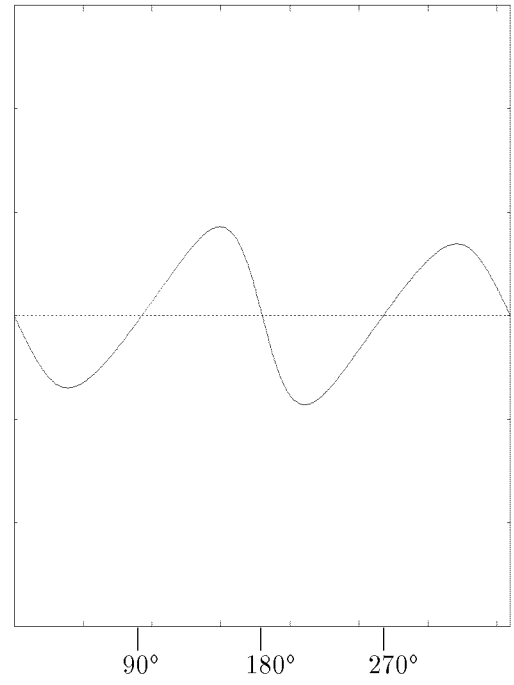
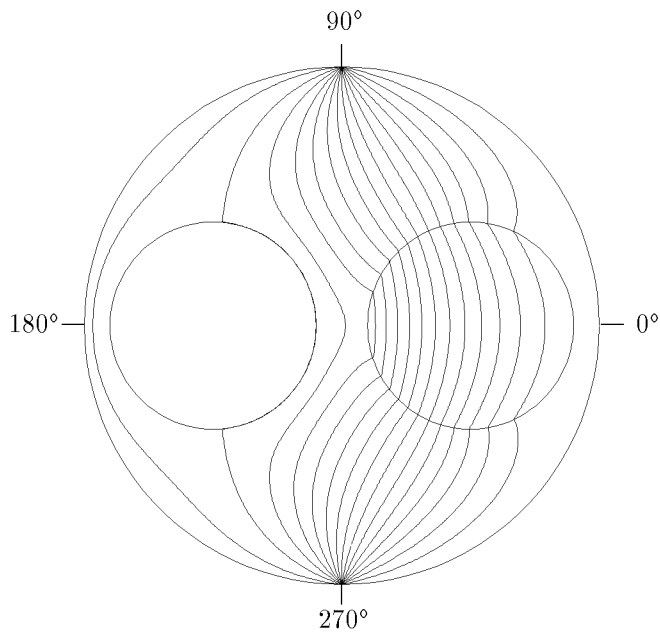


5.3.3 Variation der relativen Leitfähigkeitsdifferenz

Anstatt bei mehreren Anomalien einzelne davon unwirksam zu machen, hat man auch die Möglichkeit wenige Anomalien zu betrachten und dann die relative Leitfähigkeitsdifferenz zu variieren. Um auch hier die Effekte möglichst deutlich hervor zu heben, wähle ich die Anomalien möglichst groß. Ausgehend von zwei Isolatoren wird die Leitfähigkeit einer Anomalie schrittweise erhöht. Als Alternative zur Untersuchung des Überschuffeldes auf dem Rand, wird hier das elektrische Überschupotential auf dem Rand untersucht. In bezug auf eine Meßung ist die Untersuchung von Potentialdifferenzen (Spannung) sogar naheliegender. Selbstverständlich versteht man wieder die Differenz der Randpotentiale mit und ohne Anomalien als Überschupotential. Die Potentiale sind wie vorher über den Winkel von 0 bis 360 Grad aufgetragen.







Anhang A

Mathematische Grundlagen

A.1 Clifford Algebra

Die Clifford Algebra wird wegen ihrer vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten in der Geometrie oft auch geometrische Algebra genannt. Möchte man Geometrie in einem Vektorraum V betreiben, so verwendet man die zugehörige Algebra, welche durch die Elemente einer Basis dieses Vektorraumes erzeugt wird. Durch die Auszeichnung dieser Erzeuger, ist eine Graduierung der Algebra möglich. Für diese Arbeit ist nur die geometrische Algebra des \mathbb{R}^3 und des \mathbb{R}^2 wichtig. (Vergleiche Mechanik, WS 1987/88, Heinz Krüger)

A.1.1 Geometrische Algebra des \mathbb{R}^3 : $\mathcal{G}(3)$

Sei $\{\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_3\}$ eine Basis des \mathbb{R}^3 . Das assoziative Clifford-Produkt für diesen euklidischen Vektorraum, ist durch die Beziehung

$$\vec{\sigma}_r \vec{\sigma}_s + \vec{\sigma}_s \vec{\sigma}_r = 2\delta_{rs} \quad (\text{A.1})$$

gegeben. Nähere Details zur Definition können in [13] nachgelesen werden. Mit dieser elementaren Beziehung können sukzessive alle Elemente der Algebra erzeugt werden. Man kann diese elementare Beziehung in

$$\vec{\sigma}_s \vec{\sigma}_r = -\vec{\sigma}_r \vec{\sigma}_s, \quad r \neq s, \quad \text{Antisymmetrie} \quad (\text{A.2})$$

und

$$\vec{\sigma}_s^2 = 1, \quad \text{euklidische Metrik} \quad (\text{A.3})$$

zerlegen. Mittels der Schiefsymmetrie und $\vec{\sigma}_s^2 = 1$, können Basiselemente eliminiert werden, die mehrfach in einem beliebigen Produkt von Basisvektoren vorkommen. Damit kann die Algebra wie folgt **graduirt** werden:

Grad	Bezeichnung	Basis	Anzahl der Basiselemente
0	Skalar, $A_0 = \alpha = \alpha 1$	$\alpha, 1 \in \mathbb{R}$	$1 = \binom{3}{0}$
1	Vektor, $A_1 = \vec{a} = a_k \vec{\sigma}_k, a_k \in \mathbb{R}^3$	$\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_3 \in \mathbb{R}^3$	$3 = \binom{3}{1}$
2	Bivektor, $A_2 = a_1 \vec{\sigma}_2 \vec{\sigma}_3 + a_2 \vec{\sigma}_3 \vec{\sigma}_1 + a_3 \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 = i\vec{a}$	$\vec{\sigma}_2 \vec{\sigma}_3, \vec{\sigma}_3 \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2$	$3 = \binom{3}{2}$
3	Pseudoskalar $A_3 = \alpha i, i = \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \vec{\sigma}_3$	i	$1 = \binom{3}{3}$

Ein allgemeiner Multivektor $A \in \mathcal{G}(3)$ hat dann die Form $A = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$. Für den **Gradprojektor** verwendet man meist

$$\langle A \rangle_k = A_k \tag{A.4}$$

Grad k eines Multivektors A

Unter der **Reversion** A^\dagger eines Multivektors A versteht man die Umkehrung der Reihenfolge aller Faktoren in jedem Produkt:

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger, \quad (A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger, \quad A, B \in \mathcal{G}(3), \quad \alpha^\dagger = \alpha \in \mathbb{R}, \quad \vec{a}^\dagger = \vec{a} \tag{A.5}$$

Äußeres und inneres Produkt eines q-Vektors $B_q = \langle B_q \rangle_q$ mit einem r-Vektor $A_r = \langle A_r \rangle_r$ sind definiert durch:

$$B_q \wedge A_r = \langle B_q A_r \rangle_{r+q} \quad \text{äußeres Produkt} \tag{A.6}$$

$$B_q \cdot A_r = \langle B_q A_r \rangle_{|r-q|}, \quad r, s > 0, \quad \text{inneres Produkt} \tag{A.7}$$

$$B_q \cdot A_r = 0, \quad rs = 0 \tag{A.8}$$

Für diese Produkte können folgende Formeln bewiesen werden:

$$(A_r \wedge \vec{a}) \cdot B_s = A_r \cdot (\vec{a} \cdot B_s), \quad 0 < r < s \tag{A.9}$$

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} \wedge A_r) = (\vec{b} \cdot \vec{a})A_r - \vec{a} \wedge (\vec{b} \cdot A_r) \tag{A.10}$$

Reduktionsformel

Für das Duale eines k-Vektors A_k , definiert durch $A_k^* = A_k i^\dagger$ gilt die **Dualitätsformel**

$$(A_r \wedge B_s)^* = A_r \cdot (B_s^*) \tag{A.11}$$

A.1.2 Geometrische Algebra des \mathbb{R}^2 : $\mathcal{G}(2)$

Die Algebra des \mathbb{R}^2 ist eine Subalgebra der $\mathcal{G}(3)$. Für sie gelten die gleichen Definitionen wie für die $\mathcal{G}(3)$. Jedoch ändert sich die Tabelle der Basiselemente zu

Grad	Bezeichnung	Basis	Anzahl der Basiselemente
0	Skalar, $A_0 = \alpha = \alpha 1$	$\alpha, 1 \in \mathbb{R}$	$1 = \binom{2}{0}$
1	Vektor, $A_1 = \vec{a} = a_k \vec{\sigma}_k, a_k \in \mathbb{R}^2$	$\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2$	$3 = \binom{2}{1}$
2	Bivektor (Pseudoskalar), $A_2 = \alpha \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 = \alpha i$	$\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 = i$	$1 = \binom{2}{2}$

ab.

A.2 Lemma von Poincaré für Bivektorfelder

Satz: (A.2.1)

Sei F ein differenzierbares Bivektorfeld. Für das $\vec{\partial} \wedge F = 0$ und

$$\lim_{s \rightarrow \infty} e^{2\mu s} F(\vec{r}e^{\mu s}) = 0, \quad \mu \neq 0$$

gilt. Dann ist

$$\vec{\psi}(\vec{r}) = -\mu \int_0^{\infty} ds e^{2\mu s} \vec{r} \cdot F(\vec{r}e^{\mu s})$$

ein Vektorpotential zu F für das

$$F = \vec{\partial} \wedge \vec{\psi}$$

gilt.

Beweis:

$$2F = \vec{\sigma}_k \wedge (\vec{\sigma}_k \cdot F) \tag{A.12}$$

$$\vec{\partial} \wedge [\vec{r} \cdot F(\vec{r}e^{\mu s})] = \vec{\sigma}_k \wedge [\vec{\sigma}_k \cdot F(\vec{r}e^{\mu s})] + \vec{\partial} \wedge [\vec{r} \cdot F] \tag{A.13}$$

$$= 2F + (\vec{r} \cdot \vec{\partial}) F - \vec{r} \cdot \underbrace{[\vec{\partial} \wedge F]}_{=0} \tag{A.14}$$

$$= \left(2 + \frac{1}{\mu} \partial_s\right) F(\vec{r}e^{\mu s}) \tag{A.15}$$

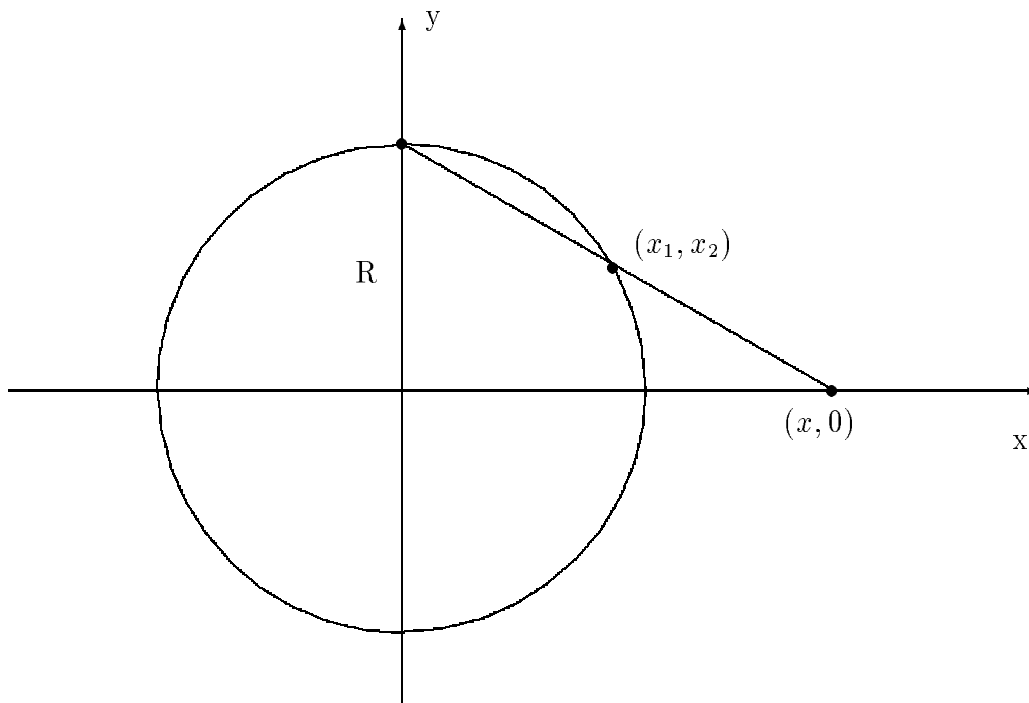
$$\Rightarrow \vec{\partial} \wedge \vec{\psi} = - \int_0^{\infty} ds \partial_s [e^{2\mu s} F(\vec{r}e^{\mu s})] = F(\vec{r}) \tag{A.16}$$

A.3 Möbius Transformationen eines Kreises

A.3.1 Stereographische Projektion

reelle Achse \rightarrow Einheitskreis

Die stereographische Projektion



entsteht durch Berechnen der Nullstelle der Geraden

$$y(x) = R - \frac{R - x_2}{x_1} x \stackrel{!}{=} 0. \quad (\text{A.17})$$

Nach der Nullstelle x aufgelöst, erhält man den gewünschten Zusammenhang zwischen einem Punkt auf dem Kreis und einem Punkt auf der x -Achse.

$$\Rightarrow x = \frac{R x_1}{R - x_2} = \frac{1}{1 - \frac{x_2}{R}} x_1 \quad (\text{A.18})$$

Die Umkehrabbildung läßt sich wie folgt berechnen:

$$x_1^2 = \left(1 - \frac{x_2}{R}\right)^2 x^2 = R^2 - x_2^2 = R^2 \left(1 - \left(\frac{x_2}{R}\right)^2\right) = R^2 \left(1 - \frac{x_2}{R}\right) \left(1 + \frac{x_2}{R}\right) \quad (\text{A.19})$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{x_2}{R}\right) x^2 = R^2 \left(1 + \frac{x_2}{R}\right) \quad (\text{A.20})$$

$$\Rightarrow \frac{x_2}{R} (R^2 + x^2) = x^2 - R^2 \quad (\text{A.21})$$

$$\Rightarrow \frac{x_2}{R} = \frac{x^2 - R^2}{x^2 + R^2} \quad (\text{A.22})$$

$$\Rightarrow x_2 = R \frac{x^2 - R^2}{x^2 + R^2} = \frac{R}{1 + \left(\frac{x}{R}\right)^2} \left(\left(\frac{x}{R}\right)^2 - 1\right) \quad (\text{A.23})$$

Für die x -Komponente gilt:

$$x_1 = \operatorname{sgn}(x) \sqrt{R^2 - R^2 \frac{(x^2 - R^2)^2}{(x^2 + R^2)^2}} \quad (\text{A.24})$$

$$= \operatorname{sgn}(x) R \sqrt{\frac{4x^2 R^2}{(x^2 + R^2)^2}} \quad (\text{A.25})$$

$$= \operatorname{sgn}(x) R \frac{|x| 2R}{x^2 + R^2} = 2R^2 \frac{x}{x^2 + R^2} \quad (\text{A.26})$$

$$= \frac{R}{1 + \left(\frac{x}{R}\right)^2} 2 \frac{x}{R} \quad (\text{A.27})$$

Für den Einheitskreis erhält man als Abbildungen:

1. Kreis \rightarrow reelle Achse

$$(x_1, x_2) \rightarrow x = \frac{1}{1 - x_2} x_1 \quad (\text{A.28})$$

2. reelle Achse \rightarrow Kreis

$$x \rightarrow (x_1, x_2) = \frac{1}{1 + x^2} (2x, x^2 - 1) \quad (\text{A.29})$$

In komplexer Schreibweise hat diese Abbildung die Gestalt

$$w(x) = \frac{1}{1 + x^2} (2x + i(x^2 - 1)) \quad w \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.30})$$

Nach Drehung des Kreises um $-\pi/2$ erhält man:

$$w(x) = \frac{1}{1 + x^2} (x^2 - 1 - i2x) = \frac{x^2 - 1 - 2ix}{(x + i)(x - i)} = \frac{x - i}{x + i} \quad (\text{A.31})$$

Die Umkehrabbildung lautet:

$$x(w) = i \frac{1 + w}{1 - w} \quad (\text{A.32})$$

reelle Achse \rightarrow beliebiger Kreis

Um aus einem Einheitskreis einen Kreis mit beliebigem Radius und Mittelpunkt zu erhalten, muß zuerst eine zentrische Streckung mit dem gewünschten Radius als Streckungsfaktor ausgeführt werden und anschließend muß der erhaltene Kreis mittels einer Translation zum gewünschten Punkt verschoben werden.

$$w(x) = \frac{x - i}{x + i} \quad v(w) = aw + m \quad (\text{A.33})$$

wobei a der Radius und m der Kreismittelpunkt ist. Entsprechend kann auch die Verknüpfung der Umkehrabbildungen berechnet werden.

$$w(v) = \frac{v - m}{a} \quad x(w) = i \frac{1 + w}{1 - w} \quad (\text{A.34})$$

$$x(v) = x(w(v)) = i \frac{1 + w(v)}{1 - w(v)} = i \frac{1 + \frac{v - m}{a}}{1 - \frac{v - m}{a}} = i \frac{a + v - m}{a - v + m} \quad (\text{A.35})$$

$$\Rightarrow v(x) = \frac{x(a + m) - i(a - m)}{i + x} \quad (\text{A.36})$$

reelle Achse auf Kreis mit Radius a und Mittelpunkt m

Diese Abbildungen gehören zu der Klasse der Möbius-Transformationen.

Definition: (A.3.1)

Eine Funktion $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt gebrochen-linear oder Möbius-Transformation genau dann, wenn sie sich schreiben läßt in der Form

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit} \quad ad - bc \neq 0 \quad (\text{A.37})$$

A.3.2 Erzeugende der Möbius-Transformationen

Satz: (A.3.2)

Die Translationen $T : z \rightarrow z + a$, die Drehstreckungen $D : z \rightarrow z \cdot a$ und die Inversionen $I : z \rightarrow 1/z$ erzeugen die Gruppe der gebrochen linearen Transformationen

Beweis:

$$(az + b) : (cz + d) = \frac{a}{c} + \frac{b - da/c}{cz + d} \quad (\text{A.38})$$

$$z \xrightarrow{D} cz \xrightarrow{T} cz + d \xrightarrow{I} \frac{1}{cz + d} \quad (\text{A.39})$$

$$\xrightarrow{D} \frac{b - da/c}{cz + d} \xrightarrow{T} \frac{b - da/c}{cz + d} + \frac{a}{c} \quad (\text{A.40})$$

$$= \frac{cb - da + a(cz + d)}{(cz + d)c} \quad (\text{A.41})$$

$$= \frac{az + b}{cz + d} \quad (\text{A.42})$$

Folglich kann jede beliebige gebrochen-lineare Transformation durch Translationen, Drehstreckungen und Inversionen hergestellt werden.

A.3.3 Transformation obere Halbebene \rightarrow Kreisscheibe

Bei der Diskussion dieser Transformation gehen wir von

$$z \xrightarrow{T} w(z) = \frac{z - i}{z + i} \quad (\text{A.43})$$

aus. Deren Umkehrabbildung lautet

$$z(w) = i \frac{1 + w}{1 - w}. \quad (\text{A.44})$$

Nun untersucht man die Transformierte, einer implizit durch $f(z, \bar{z}) = 0$ gegebenen Kurve in der oberen Halbebene.

$$w(z) = w(z(\lambda)) \quad (\text{A.45})$$

Die Kurve kann (unter hinreichend günstigen Bedingungen) aufgelöst werden in der Form:

$$\beta(\bar{z}) = z \quad (\text{A.46})$$

Die allgemeine Kreisgleichung lautet:

$$(z - m)(\tilde{z} - \tilde{m}) = r^2 \quad (\text{A.47})$$

$$z(w) = i \frac{1+w}{1-w} \quad \Rightarrow \quad \tilde{z} = i \frac{\tilde{w} + 1}{\tilde{w} - 1} \quad (\text{A.48})$$

$$\left(i \frac{1+w}{1-w} - m \right) \left(i \frac{\tilde{w} + 1}{\tilde{w} - 1} - \tilde{m} \right) = r^2 \quad \left| (1-w)(\tilde{w} - 1) \right. \quad (\text{A.49})$$

$$(i(1+w) - m(1-w))(i(\tilde{w} + 1) - \tilde{m}(\tilde{w} - 1)) = r^2(1-w)(\tilde{w} - 1) \quad (\text{A.50})$$

$$\Leftrightarrow (w(i+m) + i - m)(\tilde{w}(i - \tilde{m}) + i + \tilde{m}) = r^2\tilde{w} - r^2 - r^2w\tilde{w} + r^2w \quad (\text{A.51})$$

$$\Leftrightarrow w\tilde{w}(i+m)(i - \tilde{m}) + w(i+m)(i + \tilde{m}) + \tilde{w}(i - \tilde{m})(i - m) \quad (\text{A.52})$$

$$+ (i - m)(i + \tilde{m}) - r^2\tilde{w} + r^2 + r^2w\tilde{w} - r^2w = 0 \quad (\text{A.53})$$

$$w\tilde{w}((i+m)(i - \tilde{m}) + r^2) - \tilde{w}(-(i - \tilde{m})(i - m) + r^2) \quad (\text{A.54})$$

$$- w(-(i+m)(i + \tilde{m}) + r^2) + (i - m)(i + \tilde{m}) + r^2 = 0 \quad (\text{A.55})$$

$$w\tilde{w} - \tilde{w} \frac{r^2 - (i - \tilde{m})(i - m)}{r^2 + (i + m)(i - \tilde{m})} - w \frac{r^2 - (i + m)(i + \tilde{m})}{r^2 + (i + m)(i - \tilde{m})} + \frac{r^2 + (i - m)(i + \tilde{m})}{r^2 + (i + m)(i - \tilde{m})} = 0 \quad (\text{A.56})$$

Im Vergleich mit

$$(w - M)(\tilde{w} - \tilde{M}) = w\tilde{w} + M\tilde{M} - M\tilde{w} - \tilde{M}w = R^2 \quad (\text{A.57})$$

kann man den Mittelpunkt M ablesen:

$$M = \frac{r^2 - (i - \tilde{m})(i - m)}{r^2 + (i + m)(i - \tilde{m})} \quad (\text{A.58})$$

Es muß noch kontrolliert werden, daß der Term bei $-w$ gleich \tilde{M} ist:

$$\tilde{M} = \frac{r^2 - (-i - m)(-i - \tilde{m})}{r^2 + (-i + \tilde{m})(-i - m)} = \frac{r^2 - (i + m)(i + \tilde{m})}{r^2 + (\tilde{m} - i)(i + m)} \quad \checkmark \quad (\text{A.59})$$

Somit gilt:

$$M\tilde{M} - R^2 = \frac{r^2 + (i - m)(i + \tilde{m})}{r^2 + (i + m)(i - \tilde{m})} \quad (\text{A.60})$$

$$R^2 = \frac{[r^2 - (i - \tilde{m})(i - m)][r^2 - (i + m)(i + \tilde{m})]}{[r^2 + (i + m)(i - \tilde{m})][r^2 + (i + m)(i - \tilde{m})]} - \frac{r^2 + (i - m)(i + \tilde{m})}{r^2 + (i + m)(i - \tilde{m})} \quad (\text{A.61})$$

$$= \frac{r^4 - r^2(i + m)(i + \tilde{m}) - r^2(i - \tilde{m})(i - m) + (i - \tilde{m})(i - m)(i + m)(i + \tilde{m})}{(r^2 - |i + m|^2)^2} \quad (\text{A.62})$$

$$= \frac{r^4 + r^2(i - m)(i + \tilde{m}) + r^2(i + m)(i - \tilde{m}) + (i - m)(i + \tilde{m})(i + m)(i - \tilde{m})}{(r^2 - |i + m|^2)^2} \quad (\text{A.63})$$

$$= \frac{-r^2(i + \tilde{m})(i + m + i - m) - r^2(i - \tilde{m})(i - m + i + m)}{(r^2 - |i + m|^2)^2} \quad (\text{A.64})$$

$$= \frac{-r^2 2i(i + \tilde{m}) - r^2 2i(i - \tilde{m})}{(r^2 - |i + m|^2)^2} \quad (\text{A.65})$$

$$= \frac{4r^2}{(r^2 - |i + m|^2)^2} \quad (\text{A.66})$$

$$\Rightarrow R = \frac{2r}{|r^2 - |i + m|^2|} \quad (\text{A.67})$$

Dies bedeutet, daß ein Kreis in der oberen Halbebene unter der Transformation obere Halbebene \rightarrow Kreisscheibe in einen Kreis in der Kreisscheibe übergeht, wobei der Radius und der Mittelpunkt wie oben berechnet mittransformiert werden.

Anhang B

MKSA und CGS System

In dieser Arbeit wurde nur mit dem Gaußschen Einheitensystem gearbeitet, wodurch die Formeln frei von Zusatzfaktoren ϵ_0 , μ_0 geblieben sind. Beabsichtigt man die theoretischen Ergebnisse mit experimentellen Messungen zu vergleichen, so ist es am günstigsten, die Gleichungen in das in der Technik übliche MKSA System umzuschreiben. Dies kann mit Hilfe der folgenden, aus [14] entnommenen, Umrechnungstabelle durchgeführt werden:

Größe	Gaußsches CGS-System	MKSA-System
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$(\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$
Elektrisches Feld (Potential, Spannung)	$E(\Phi, V)$	$\sqrt{4\pi\epsilon_0} E(\Phi, V)$
Dielektrische Verschiebung	D	$\sqrt{\frac{4\pi}{\epsilon_0}} D$
Ladungsdichte (Ladung, Stromdichte, Stromstärke, Polarisation)	$\rho(q, J, I, P)$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \rho(q, J, I, P)$
Magnetische Induktion	B	$\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} B$
Magnetisches Feld	H	$\sqrt{4\pi\mu_0} H$
Magnetisierung	M	$\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} M$
Leitfähigkeit	σ	$\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}$
Dielektrizitätskonstante	ϵ	$\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$
Permeabilität	μ	$\frac{\mu}{\mu_0}$
Widerstand (Impedanz)	$R(Z)$	$4\pi\epsilon_0 R(Z)$
Induktivität	L	$4\pi\epsilon_0 L$
Kapazität	C	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} C$

Literaturverzeichnis

- [1] Lars V. Ahlfors. *Complex Analysis*. McGraw-Hill Book Company, New York, St. Louis, San Francisco, Toronto, London, Sydney, 1966.
- [2] Constantin Carathéodory. *Funktionentheorie, erster Band*. Birkhäuser, Basel, Stuttgart, 1961.
- [3] Constantin Carathéodory. *Funktionentheorie, zweiter Band*. Birkhäuser, Basel, Stuttgart, 1961.
- [4] Henri Cartan. *Elementare Theorien der Analytischen Funktionen einer oder mehrerer Komplexen Veränderlichen*. BI Hochschultaschenbücher, Band 112, Mannheim, Wien, Zürich, 1966.
- [5] Margaret Cheney, David Isaacson, and Eli L. Isaacson. Exact solutions to linearized inverse boundary value problem. *Inverse Problems*, 6:923–934, 1990.
- [6] Professor Clifford. Applications of Grassmann’s extensive algebra. *American Journal of Mathematics, pure and applied*, pages 350–358, 1878.
- [7] William Kingdon Clifford. *Mathematical Papers*. Chelsea Publishing Company, 1968.
- [8] Jean François Colombeau. *Elementary Introduction to New Generalized Functions*. North Holland, 1985.
- [9] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, and F. G. Tricomi. *Higher Transcendental Functions*, volume 3, chapter XIV Automorphic Functions, pages 1–41. McGraw-Hill Book Company, 1953.
- [10] L. R. Ford. *Automorphic functions*. McGraw-Hill, second (1951) edition, 1929.
- [11] I. M. Gel’fand and G. E. Shilov. *Generalized Functions*, volume 1. Academic Press New York and London, 1964.
- [12] David Hestenes. Grassmann’s vision.
- [13] David Hestenes and Garret Sobczyk. *Clifford Algebra to Geometric Calculus*. D. Reidel Publishing Company, 1984.
- [14] John David Jackson. *Klassische Elektrodynamik*. Walter de Gruyter, 1985.
- [15] Heinz Krüger. Komplexe Form des Vorwärtsproblems in der Ebene. persönliche Mitteilung, 12 1993.
- [16] Heinz Krüger. Exact analytic solutions to a particular class of forward problems in the plane. In *IX International Conference on Electrical Bio-Impedance*, pages 524–525, 1995.
- [17] Heinz Krüger and Martin Menzel. Clifford-analytic vector fields as models for plane electric currents. In *Proceedings of the Symposium, Analytical and Numerical Methods in Quaternionic and Clifford Analysis*, pages 101–111, 1996.

- [18] James Clerk Maxwell. *Lehrbuch der Electricität und des Magnetismus*. Springer, 1883. deutsche Übersetzung.
- [19] Martin Menzel and Heinz Krüger. Numerical studies of field- and potential distributions for particular class of forward problems in two dimensions: Sensitivity estimates for image reconstruction. In *IX International Conference on Electrical Bio-Impedance*, pages 526–527, 1995.
- [20] L. M. Milne-Thomson. *Theoretical Hydrodynamics*. MacMillan, 5th edition, 1968.
- [21] M. K. Pidcock, M. Kuzuoglu, and K. Lebleblicioglu. Analytical and semi-analytical solutions in electrical impedance tomography. *Physiological Measurement*, page ??, 1994.
- [22] H. W. Richmond. Notes on the use of the Schwarz-Christoffel transformation in electrostatics (and hydrodynamics). *Proc. London Math. Soc.*, 22:483–494, 1924.
- [23] Fadil Santosa and Michael Vogelius. A backprojection algorithm for electrical impedance imaging. *SIAM J. Math.*, 50/1:216–243, 1990.
- [24] Geric Scheuermann, Hans Hagen, Heinz Krüger, Martin Menzel, and Alyn Rockwood. Visualization of higher order singularities in vector fields. *Visualization*, -:-, 1997.
- [25] Wilhelm Schneider. *Mathematische Methoden der Strömungsmechanik*. Vieweg, 1978.
- [26] Laurent Schwartz. *Théorie des distributions*. Hermann Paris, 1973.
- [27] W. I. Smirnov. *Lehrgang der Höheren Mathematik*, volume III/2, „Das Verfahren der konjugierten trigonometrischen Reihen“, Seiten 130–137. Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1974.
- [28] Eduard Study. *Hermann Grassmanns gesammelte mathematische und physikalische Werke*, „Die Ausdehnungslehre von 1844 oder die lineale Ausdehnungslehre“, Seiten 1–319. Chelsea Publishing Company, 1969.

Index

- Ampèresche Durchflutungsgesetz, 13
- Äquipotentiallinien, Berechnung der, 83
- Auflösungsvermögen, 63
- Ausgedehnte Stremeinprägungen, 48
- äußeres Produkt, 97

- Back projection Algorithmus, 8
- Bivektor, 96

- Cauchy–Riemann Operator, 23
- Clifford Algebra, 96
- Clifford, William Kingdon, 7
- Clifford–Produkt, 96
- Colombeau, Distributionen, 7

- Dielektrizitäts–Operator, 12
- Dirac–Operator, 23
- Distributionen von Colombeau, 7
- Divergenzfeld, Feldlinien eines, 66
- Divergenzfreiheit des Gesamtstromes, 15
- Drude, Leitfähigkeitsmodell von, 12
- dualer Multivektor, 97
- Dualitätsformel, 97

- eine Anomalie in einer Kreisscheibe, 61
- Elektrische Impedanz Tomographie, 8

- Faradayscher Käfig, 47
- Feldlinie, 65
- Feldlinien, Berechnung der, 82
- Frequenzentwicklung der Maxwellschen Gleichungen, 16

- Gaußsches Einheitensystem, 104
- geometrisches Produkt, 96
- Globalisierung der lokalen „Potentiale“, 76
- Gradprojektor, 97
- Graduierung, 96
- Grassmann Hermann, 7

- Hamiltonsche Quaternionen, 7
- harmonische Zeitabhängigkeit, 14
- Hauptzweig des Logarithmus, 69

- Impedanz Tomographie, 8
- inneres Produkt, 97
- Integralkurve, 65

- Inverses Problem, 8

- Kelvin, Lord, 7
- komplexe Feldgleichung, 23
- komplexe Feldgleichung für h , 24
- Komplexe Leitfähigkeit, 13
- komplexe Leitfähigkeit, 14
- komplexe Leitfähigkeit einer statischen Stromdichte, 14
- komplexe Leitfähigkeit für stationäre Stromdichten, 15
- komplexe Materialgleichungen, 13
- komplexe Maxwellsche Gleichungen, 13
- komplexe Randbedingung, 24
- komplexes Potential, 66
- konstante Leitfähigkeit, 30
- Kontinuitätsgleichung, 11
- Konvergenzverhalten, 73
- Kreisscheibe, Pole außen, 32

- Leitfähigkeit, 12
- Leitfähigkeitsdifferenzen, relative, 42
- Leitfähigkeitsmodell von Drude, 12
- Lemma von Poincaré für Bivektorfelder, 98
- Liftung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, 22

- Möbius–Transformationen, 62
- Materialgleichungen, 10
- Maxwell, James Clerk, 7
- Maxwellsche Gleichungen, 10
- Maxwellsche Gleichungen, Frequenzentwicklung der, 16
- Maxwellsche Gleichungen, komplexe, 13
- Maxwellsche Gleichungen, stationäre, 15
- MKSA Einheitensystem, 104

- N Anomalien in einer Kreisscheibe, 54
- Numerische Algorithmen, 73

- Ohmsche Stromdichte, 13

- Poissonsche Gleichung, 26
- Pseudoskalar, 96

- Quaternionen, Hamilton, 7

- Randbedingung für \mathcal{E}_0 , 19

- Reduktionsformel, 97
- relative Leitfähigkeitsdifferenzen, 42
- Relaxationszeit, 12
- Reversion, 97
- Rotationsfeld, Feldlinien eines, 65

- Schichtdicke, 47
- Skalar, 96
- Spiegelpolverteilungen, 84
- Spinorgleichung für \mathcal{E}_0 , 17
- Spinorgleichung für \mathcal{E}_k , 18
- Spinorgleichung für \mathcal{H}_0 , 17
- Spinorgleichung für \mathcal{H}_k , 18
- stationäre Maxwellsche Gleichungen, 15
- stationäre Stromdichten, 14
- Staupunkt, 61
- stereographische Projektion, 98
- Stromdichte, Ohmsche, 13
- Stromlinien in einer Kreisscheibe mit Anomalien, 69
- symbolische Ergebnisse für Spiegelpolverteilungen, 75

- Überschuffeld, 90

- Variation der Zusammenhangszahl, 90
- Vektor, 96
- Visualisierung von Vektorfeldern, 8

- Wahl der Schmitte, 70

- zwei Halbebenen, 30
- Zwischenschicht, Relevanz einer dünnen, 45

Danksagung

Für die Betreuung bei meiner Arbeit bedanke ich mich herzlichst bei meinem akademischen Lehrer Herrn Prof. Dr. Heinz Krüger. Es war mir eine besondere Freude, während meiner Arbeit stets auf seine wissenschaftliche und freundschaftliche Hilfe zählen zu können. Eine angenehmere und produktivere Zusammenarbeit kann man sich als Doktorand wohl kaum wünschen.

Desweiteren danke ich all meinen Freunden, die mich vor allem gegen Ende der Arbeit, mit ehrlichen und freundschaftlichen Ratschlägen, sowie durch motivierende Gespräche unterstützt haben. Besonders möchte ich mich an dieser Stelle bei Christoph Weis, Andreas Korz, Andrea Horlacher und Markus Brunner bedanken.

Lebenslauf

- 27.01.1966 Geburtstag
Eltern
Adolf Menzel (* 08.03.1937) Finanzbeamter i.R.
Imelda Menzel, geborene Lang (* 23.03.1937)
Verwaltungsangestellte i.R.
- 9/72 – 6/76 Grundschule Pirmasens (Horebschule)
9/76 – 6/85 Hugo Ball Gymnasium Pirmasens
- 14.06.1985 Zeugnis der Allgemeinen Hochschulreife
- WS 85/86 Studienbeginn an der Universität Kaiserslautern
Fachrichtung Physik, Nebenfach Informatik
- 23.01.1986 schwerer Verkehrsunfall, Unterbrechung des Studiums
- SS 86 Urlaubssemester, Begründung: Unfallfolgen
- WS 86/87 Neubeginn des Studiums
- 18.04.1989 Diplom – Vorprüfung in Physik
Beginn des Hauptstudiums, Nebenfach Mathematik
- 20.07.1993 Diplom – Hauptprüfung in Physik
Thema der Diplomarbeit: „Semiklassische Näherung der radialen Dirac-Gleichung“
Betreuer der Diplomarbeit: Prof. Dr. Heinz Krüger
- 01.08.1993 Einstellung als at-Mitarbeiter beim Fachbereich Physik
Beginn der Promotion in Theoretischer Physik
Thema: „Ströme in ebenen Gebieten mit variabler Zusammenhangszahl“
Betreuer: Prof. Dr. Heinz Krüger
- 07.07.1997 Antrag auf Eröffnung des Promotionsverfahrens