

Physik nicht-trivialer Kopplungen in dielektrischen Wellenleiterstrukturen

Julian Schulz

Physik nicht-trivialer Kopplungen in dielektrischen Wellenleiterstrukturen

Dissertation

Julian Schulz

Vom Fachbereich Physik der Rheinland-Pfälzischen Technischen Universität
Kaiserslautern-Landau zur Verleihung des akademischen Grades „Doktor
der Naturwissenschaften“ genehmigte Dissertation

Betreuer: Prof. Dr. Georg von Freymann

Zweitgutachter: Prof. Dr. Artur Widera

Datum der wissenschaftlichen Aussprache: 14.02.2025

DE-386

1. Zusammenfassung

Viele der optischen und elektrischen Eigenschaften eines Festkörpers lassen sich einfach im Einteilchenbild durch die Bewegung der Elektronen erklären. Die Propagation eines einzelnen Elektrons im Festkörper ist jedoch quasi unmöglich nachzuverfolgen. Daher werden oft die Systeme mit interessanten Phänomenen in einem äquivalenten Modellsystem repliziert und untersucht. Dadurch lässt sich beispielsweise auch der Einfluss einzelner Modellelemente oder von Grenzflächen und Defekten oder Störungen auf die Phänomene getrennt voneinander betrachten.

In dieser Arbeit werden Strukturen aus gekoppelten dielektrischen Wellenleitern als Modellsystem betrachtet. Das Licht in einem Wellenleiter wird hauptsächlich im hochbrechenden Medium geführt, aber da das evaneszente Feld nur exponentiell mit dem Abstand abfällt, gibt es auch außerhalb vom Kern des Wellenleiters eine nicht verschwindende Feldstärke. Wie bei der frustrierten Totalreflexion kann das Licht durch das evaneszente Feld von einem Wellenleiter in einen nahegelegenen überkoppeln bzw. optisch tunneln. Je näher die Wellenleiter zusammen sind, desto schneller koppelt das Licht vom einen zum andern über. Damit koppelt das Licht in einem Gitter aus Wellenleitern analog zu beispielsweise einem Elektron, welches in einem Gitter aus Atomen – einem Festkörper – von einem Atom zum nächsten tunneln. Diese Analogie ist auch mathematisch durch die Äquivalenz der paraxialen Helmholtz-Gleichung und der zweidimensionalen Schrödingergleichung gegeben, wie in Kapitel 4 genauer erläutert wird.

Der Fokus in dieser Arbeit liegt auf Strukturen mit nicht-trivialen Kopplungen, also Kopplungen, die sich nicht durch eine positive Zahl angeben lassen, sondern die negative oder auch komplexe Werte annehmen. Der Betrag einer Kopplung gibt an, wie schnell die Dynamik stattfindet, also wie schnell von einem zu einem anderen Gitterpunkt übergekoppelt wird. Die Phase oder das Vorzeichen der Kopplung bestimmen hingegen, ob die Eigenzustände des Systems wegen dieser Kopplung energetisch angehoben oder abgesenkt werden. In dieser Arbeit wird gezeigt, dass diese nicht-trivialen Kopplungen teilweise „natürlich“ auftreten, wie sie für die Realisierung eines topologischen Systems explizit implementiert wurden und wie sie für eine mögliche Anwendung genutzt werden können.

Um die Dynamik des Lichts in den Wellenleiterstrukturen zu beschreiben, wird zu Beginn von Kapitel 4 das System so weit vereinfacht, dass es durch endlich viele gekoppelte Differenzialgleichungen beschrieben werden kann. Zudem werden in diesem Kapitel die numerischen Methoden erläutert, die verwendet wurden, um mit den Parametern des Experiments die Eigenmoden zu bestimmen und die Propagation des Lichts vorherzusagen. Das direkte Laserschreiben sowie die Schreibstrategien für die Herstellung der Wellenleiterstrukturen und der verwendete Messaufbau werden anschließend im Kapitel 5 beschrieben.

In Kapitel 6 werden die Kopplungen zu weiter entfernten Wellenleitern in einer einfachen eindimensionalen Kette untersucht. Dabei zeigt sich, dass bei einer geraden Anordnung die Kopplung zum übernächsten Wellenleiter negativ ist. Durch eine angewinkelte Anordnung kann der Abstand zum übernächsten Nachbarn verringert und damit die Kopplung auf Null und darüber hinaus in den positiven Bereich erhöht werden. Dass diese Kopplung in diesen Anordnungen sowohl positiv als auch negativ bzw. auch Null sein kann, wird einerseits experimentell demonstriert, aber auch theoretisch vorhergesagt und intuitiv begründet.

In Kapitel 7 wird ein zweidimensionales topologisch nicht-triviales Gitter betrachtet. Nach einer Einführung in topologische Systeme in der Physik zu Beginn des Kapitels wird der Quadrupol topologische Isolator

und dessen topologische Invariante erläutert. Die Symmetrien des Quadrupol topologischen Isolators verlangen, dass das Gitter von einem magnetischen π -Fluss durchströmt wird. Da magnetische Felder das Licht in den Wellenleiterstrukturen nicht beeinflussen, wird im Experiment der Effekt durch ein künstliches Magnetfeld mithilfe negativer Kopplungen realisiert. Diese negativen Kopplungen werden durch die Anordnung von Wellenleitern realisiert, die die Kopplung zwischen verschiedenen Moden ermöglichen.

In Kapitel 8 wird eine ringförmige Kette von Wellenleitern verwendet, die ebenfalls von einem künstlichen Magnetfeld durchflossen wird. In diesem Fall äußert sich das künstliche Magnetfeld in komplexen Kopplungen und darin, dass die Eigenzustände je nach Ausrichtung ihres Drehimpulses energetisch angehoben oder abgesenkt werden. Die Tatsache, dass die Drehimpulszustände energetisch getrennt werden können, wird genutzt, um über eine adiabatische Entwicklung die räumlich getrennten Moden von einzelnen Wellenleitern effizient in konzentrische Moden mit definiertem Drehimpuls zu überführen. Die Struktur kann auch umgekehrt verwendet werden, um Drehimpuls-Moden wieder zu separieren. Damit stellt die Struktur eine Alternative zur Erzeugung oder Dekomposition dieser Drehimpulsstrahlen dar und könnte z.B. zur Erhöhung der Datenübertragungsrate von Glasfasern verwendet werden.

Zum Schluss wird ein kurzes Fazit gezogen. Im anschließenden Ausblick wird begründet, warum für zukünftigen Arbeiten insbesondere Gitter aus Wellenleitern, die höhere Moden führen, interessant sein könnten, und warum das direkte Laserschreiben eine dafür gut geeignete Plattform darstellt. Zudem werden Anstöße gegeben, welche komplexeren Systeme mit diesen Moden realisiert werden könnten.

2. Abstract

Many of the optical and electrical properties of a solid can be explained simply with the single-particle description by the movement of the electrons. However, the propagation of a single electron in a solid is almost impossible to trace. Therefore, systems with interesting phenomena are often replicated and investigated in an equivalent model system. This allows, for example, to investigate the influence of individual model parameters or of interfaces and defects or disorder on the phenomena separately.

In this work, structures of coupled dielectric waveguides are considered as a model system. The light in a waveguide is mainly guided in the highly refractive medium, but since the evanescent field only decreases exponentially with distance, there is also a non-vanishing field strength outside the core of the waveguide. As with frustrated total internal reflection, the evanescent field allows light to couple from one waveguide to a nearby one. The closer the waveguides are together, the faster the light couples from one to another. This means that the light in a lattice of waveguides couples analogously to, for example, an electron tunneling in a lattice of atoms – a solid – from one atom to the next. This analogy is also given mathematically by the equivalence of the paraxial Helmholtz equation and the two-dimensional Schrödinger equation, as explained in more detail in chapter 4.

This thesis focuses on structures with non-trivial couplings. In other words, couplings that cannot be specified by purely positive real numbers, but which take on negative or even complex values. The magnitude of a coupling indicates how quickly the dynamics take place, i.e. how quickly the light is coupled from one site to another. The phase or the sign of the coupling, on the other hand, determines whether the eigenstates of the system are raised or lowered in energy due to this coupling. In this thesis, it is shown that these non-trivial couplings occur sometimes „naturally“, how they were explicitly implemented for the realization of a topological system and how they can be used for a possible application.

In order to describe the dynamics of light in the waveguide structures, the system is simplified such that it can be described by a finite number of coupled differential equations in chapter 4. In addition, this chapter explains the numerical methods used to determine the eigenmodes and predict the propagation of the light for the structures with the parameters of the experiment. The direct laser writing as well as the writing strategies for the fabrication of the waveguide structures and the measurement setup used are then described in the chapter 5.

In chapter 6 the couplings to more distant waveguides are investigated in a simple one-dimensional chain. This shows that with a straight arrangement, the coupling to the next nearest waveguide is negative. An angled arrangement can reduce the distance to the next nearest neighbor and thus increase the coupling to zero and beyond. The fact that this coupling in these arrangements can be both positive and negative or even zero is demonstrated experimentally but also predicted theoretically and justified intuitively.

In chapter 7 a two-dimensional topological non-trivial lattice is considered. After an introduction to topological systems in physics at the beginning of the chapter the quadrupole topological insulator and its topological invariant are explained. The symmetries of the quadrupole topological insulator require that a magnetic π flux flows through the lattice. Since magnetic fields do not influence the light in the waveguide structures, the effect is realized in the experiment by an artificial magnetic field using negative couplings. These negative couplings are implemented by arrangement of waveguides that allow the coupling between different modes.

In chapter 8, a ring-shaped chain of waveguides is used, through which an artificial magnetic field flows. In

this case, the artificial magnetic field manifests itself in complex couplings and in the fact that the eigenstates are raised or lowered in energy depending on the orientation of their angular momentum. The fact that the angular momentum states can be energetically separated is used to efficiently transform the spatially separated modes of individual waveguides into concentric modes with defined angular momentum via an adiabatic evolution. The structure can also be used in reverse to separate angular momentum modes again. The structure thus represents an alternative to the generation or decomposition of these angular momentum beams and could be used, for example, to increase the data transmission rate of optical fibers.

Finally, a brief conclusion is drawn. In the following outlook is explained why lattices made of waveguides carrying higher modes could be of particularly interest for future work and why direct laser writing is a particularly suitable platform for these experiments. In addition, impulses are given as to which more complex systems could be realized with these modes.

Inhaltsverzeichnis

1	Zusammenfassung	1
2	Abstract	3
	Inhaltsverzeichnis	5
3	Einleitung	7
4	Theorie	9
4.1	Wellenleiter als Modell für Quantensysteme	9
4.2	Numerische Methoden	13
4.2.1	Strahl-Propagations-Methode (BPM)	13
4.2.2	Bestimmen der Eigenmoden	16
4.3	Gekoppelte Moden-Gleichungen	18
4.3.1	Gekoppeltes Dimer	20
4.3.2	Einatomige Kette	21
4.4	Skalare Eigenmoden eines Stufenindex Wellenleiters	24
5	Experimentelle Methoden	27
5.1	Direktes Laserschreiben	27
5.2	Herstellungsmethoden von Wellenleiterstrukturen mit DLW	30
5.3	Messaufbau für Wellenleiterstrukturen	33
6	Negative Übernächste-Nachbar-Kopplung	37
6.1	Motivation	37
6.2	Eine einatomige Kette mit höheren Kopplungstermen	38
6.3	Nicht-orthogonale gekoppelte Moden	39
6.4	Experimentelle Demonstration von negativen c_2 -Kopplungen	41
6.5	Übergang zu einem freien Teilchen	46
7	Realisierung eines Quadrupol-topologischen Isolators	49
7.1	Topologische Systeme in der Physik	49
7.1.1	Topologie als Teilgebiet der Mathematik	49
7.1.2	Der erste topologische Isolator	51
7.1.3	Berry Phase	52
7.1.4	Wannier-Funktionen, Wannier-Zentren und Polarisation	56
7.2	Theorie des Quadrupol topologischen Isolators (QTI)	59
7.2.1	Tight-Binding-Modell eines QTI	59
7.2.2	Wilson Loop in entarteten Bändern	61

7.2.3	Symmetrien für die Quadrupol-Polarisation	63
7.3	Realisierung des QTI in einer Wellenleiterstruktur	67
8	Multiplexen von Moden mit verschiedenem OAM	73
8.1	Motivation	73
8.2	Prinzip der Struktur	75
8.2.1	Verdrillen der Struktur	76
8.2.2	Schritte der Struktur	78
8.3	Simulations- und Messergebnisse	81
8.4	Einfluss der Polarisation	86
9	Fazit und Ausblick	91
10	Anhang	93
10.1	Pauli- und Γ -Matrizen	93
10.2	Peierls Substitution	95
	Literatur	101
11	Publikationen	109
12	Curriculum Vitae	111
13	Danksagung	113

3. Einleitung

Festkörper können verschiedenste optische, magnetische, mechanische, akustische, elektrische oder thermische Eigenschaften besitzen. Dabei werden diese Eigenschaften nicht nur durch die Bestandteile der atomaren Zusammensetzung, sondern auch oft ausschlaggebend von der Struktur, also der Anordnung dieser Bausteine, bestimmt. Einige der emergenten Eigenschaften eines Festkörpers lassen sich bereits im Einteilchenbild verstehen. So hängen die optischen und elektrischen Eigenschaften oft hauptsächlich davon ab, wie sich die einzelnen Elektronen in dem Gitterpotenzial des Festkörpers bewegen können. Um im Allgemeinen den Ursprung dieser Eigenschaften nachvollziehen zu können, wäre es praktisch, die Elektronenbewegung bzw. die Zeitentwicklung der Wellenfunktion eines Elektrons zu beobachten. In einem Festkörper sind allerdings viele ununterscheidbare Elektronen sehr nah beieinander, die miteinander wechselwirken und sich zudem relativ schnell bewegen. Daher ist es quasi unmöglich zu beobachten, wie sich die Wellenfunktionen einzelner Teilchen in einem Gitter ausbreiten.

Zum Untersuchen dieser Festkörperphänomene werden in der Physik oft äquivalente Modellsysteme betrachtet. Dafür werden beispielsweise ultrakalte Gase in optischen Gittern verwendet. Während das optische Gitter ein periodisches Potenzial für die Atomwolke erzeugt, verhält sich die Wellenfunktion der Atomwolke wie das Elektron im Festkörper [1]. Unter anderem werden als Modellsysteme auch gekoppelte elektrische Schwingkreise [2, 3], Mikrowellenresonatoren [4, 5], akustische Resonatoren [6], Ringresonatoren [7, 8] oder Plasmonen [9], Magnonen [10] oder wie in dieser Arbeit, Photonen in strukturierten Umgebungen verwendet. Jede dieser Plattformen bietet verschiedene Vor- und Nachteile.

Photonische Systeme besitzen intrinsisch einige robuste und anwendungsfreundliche Eigenschaften. Zum Beispiel werden Photonen, da sie ungeladen sind, nicht von externen elektrischen oder magnetischen Felder beeinflusst. Zudem wechselwirken Photonen fast gar nicht miteinander oder mit ihrer Umgebung, was es erlaubt, viele Experimente unter Normaldruck und bei Raumtemperatur durchzuführen. Diese intrinsische Robustheit ermöglicht ein großes Anwendungspotenzial für neue Entwicklungen im photonischen Bereich. So kann zum Beispiel mit photonischen Kristallen mit einer optischen Bandlücke Licht fast ohne Krümmungsverluste um spitze Ecken gelenkt werden [11]. Alternativ kann auch mit einem photonischen Kristall die Dispersionsrelation in einem Laserresonator so manipuliert werden, dass das aktive Medium in einem Laserresonator einer homogener Intensitätsverteilung ausgesetzt ist. Damit lassen sich höhere Laserleistungen erreichen und gleichzeitig das Anschwingen von mehreren Lasermoden vermeiden [12]. Für Quantentechnologien, wie Quantenkommunikation, Quanten-Sensorik oder ggf. auch Quanten-Computer kann die Tatsache, dass Photonen sich nur wenig von der Umwelt beeinflussen lassen, hilfreich sein [13].

Eine Möglichkeit, zweidimensionale Modelle mit Festkörperphänomenen in der Photonik zu untersuchen, ist mit Strukturen aus gekoppelten Wellenleitern. Ein Wellenleiter ist ein langgezogener Bereich, der einen höheren Brechungsindex hat, als das umgebende Material. Durch den höheren Brechungsindex wird das Licht in diesem Wellenleiter quasi „gebunden“. Die Entwicklung der Wellenfunktion eines Elektrons in dem 2D-Gitter aus Atomen über die Zeit übersetzt sich damit in die Ausbreitung von Licht in dem Gitter aus Wellenleitern über die Propagationsstrecke. Diese Analogie ergibt sich aus der mathematischen Äquivalenz von der paraxialen Helmholtzgleichung und der zweidimensionalen zeitabhängigen Schrödingergleichung. Dadurch, dass die Zeit auf eine räumliche Dimension, die Propagationsrichtung der Wellenleiter, übersetzt wird, kann die Zeit-

entwicklung eines Wellenpakets auch auf einer so kleinen Zeitskala betrachtet werden, in der das Wellenpaket nur die Zeit hatte einige (≈ 10) Gitterplätze weit zu propagieren.

Für diese Wellenleiterstrukturen gibt es verschiedene Herstellungsmethoden. Bei einer Herstellungsmethode wird ein femotsekunden-gepulster Laser in einen Glasquader fokussiert. Im Laserfokus wird lokal die Gitterstruktur des Glases und damit der Brechungsindex geändert. Durch Verschieben des Glasquaders relativ zum Fokus können damit Wellenleiter ins Glas „geschrieben“ werden. Die Trajektorien und Längen der Wellenleiter können unabhängig voneinander in allen drei Raumrichtungen vorgegeben werden. Da allerdings das Laserlicht zum „Schreiben“ der Wellenleiter senkrecht zur Propagationsrichtung ins Glas fokussiert wird, haben die Wellenleiter bei dieser Herstellungsmethode stets einen elliptischen Querschnitt. Eine andere Methode ist durch die Verwendung von nichtlinearen Materialien, wie Lithium-Niobat [14] oder Strontium-Barium-Niobat [15, 16], gegeben. Das nicht-lineare Medium wird einerseits polarisiert und andererseits mit einem Laserstrahl mit relativ hoher Leistung an bestimmten Stellen bzw. aus bestimmten Richtungen belichtet. An den belichteten Stellen wird der Brechungsindex des nicht-linearen Mediums erhöht. Ein zweiter Laserstrahl mit relativ geringer Leistung kann daraufhin verwendet werden, um die Ausbreitung in dem optisch „eingebrennten“ Gitter zu untersuchen. Bei dieser Methode können die Trajektorien der Wellenleiter nur bedingt individuell vorgegeben werden. Eine wiederum andere Methode ist das Ziehen von Glasfasern [17]. Dabei können allerdings auch nicht die Trajektorien der Wellenleiter individuell vorgegeben werden.

In dieser Arbeit wird das direkte Laserschreiben verwendet, um mittels Zwei-Photonen-Absorption aus Polymer die Wellenleiterstrukturen herzustellen. Das direkte Laserschreiben ermöglicht, ähnlich zu einem 3D-Drucker, die Herstellung von dreidimensionalen Strukturen. Entweder durch stärkere Belichtung während dem Herstellungsprozess oder durch anschließende Infiltration mit einem Medium mit höherem Brechungsindex, können verschiedene Geometrien an Wellenleiterstrukturen realisiert werden [18]. So wie bei den in Glas geschriebenen Wellenleitern kann auch bei den Wellenleitern, die mittels direktem Laserschreiben hergestellt werden, die Trajektorie von jedem Wellenleiter individuell gewählt werden. Aber im Gegensatz zu den in Glas geschriebenen Wellenleitern kann auch die Querschnittsfläche vorgegeben werden.

Da die Photonen nicht mit elektrischen oder magnetischen Feldern interagieren, sind Experimente mit Wellenleiterstrukturen bezüglich externer Felder robust. Wenn allerdings die Ausbreitung geladener Teilchen in einem Feld modelliert werden soll, müssen diese Felder künstlich in das Modell integriert werden. Ziel dieser künstlichen Felder ist es daher, dass das Licht sich in den Wellenleiterstrukturen so verhält, wie es ein geladenes Teilchen in einem externen Feld tun würde. Dafür werden die Wellenleiterstrukturen zum Beispiel über die Propagationsstrecke gekrümmt oder verdrillt. Beim Wechsel vom Laborsystem ins mitbewegten Koordinatensystem der Struktur ergeben sich Scheinkräfte, welche die gleiche Wirkung wie ein elektrisches oder ein magnetisches Feld haben. Beispielsweise sorgt eine konstante Krümmung der Wellenleiterstruktur für die konstante Beschleunigung des mitbewegten Bezugssystems und ist daher analog zu einem Gradientenfeld, wie der Gravitation oder einem elektrischen Feld [19–21]. Ein anderes Beispiel ist, dass konstantes Verdrillen der Struktur im mitbewegten Bezugssystem für Corioliskräfte sorgt, welche die Teilchenbewegung wie ein magnetisches Feld beeinflussen [17, 22–24]. Auch wenn die Wellenleiterplattform intrinsisch nur zweidimensionale Modelle erlaubt, können durch die Verwendung von synthetischen Dimensionen auch höherdimensionale Systeme untersucht werden [25].

In dieser Arbeit werden die Kopplungen zwischen den Wellenleitern genauer betrachtet, insbesondere in der Form, in der die Kopplungen nicht einfach durch positive Zahlen beschrieben werden können. In den Kapiteln dieser Arbeit werden diese nicht-trivialen Kopplungen auf verschiedene Weisen betrachtet. In Kapitel 6 wird zum Beispiel gezeigt, wie durch die Anordnung der Wellenleiter die Kopplung zu den übernächsten Wellenleitern auf Null reduziert werden kann. In Kapitel 7 wird durch die Anordnung und die Form der Wellenleiter in einer statischen Struktur ein effektiver magnetischer Fluss induziert. Und in Kapitel 8 werden die komplexen Kopplungen, die aufgrund eines effektiven Magnetfeld existieren, gezielt für eine mögliche Anwendung genutzt.

4. Theorie

Die Inhalte dieser Arbeit basieren auf der mathematischen Äquivalenz der Gleichungen, welche einerseits die räumliche Ausbreitung von Licht und andererseits die Zeitentwicklung quantenmechanischer Wellenfunktionen beschreiben. Wegen dieser Äquivalenz kann die Lichtausbreitung in strukturierten Materialien als Analogon für manche Quantensysteme verwendet werden. So breitet sich Licht in einem Gitter von gekoppelten Wellenleitern analog zu einem Elektron in einem Gitter von Atomen aus.

Im ersten Abschnitt wird diese Analogie zur Schrödingergleichung mit den dafür nötigen Näherungen hergeleitet. Im zweiten Abschnitt werden numerische Methoden vorgestellt, um mit diesen Gleichungen die Lichtausbreitung für beliebige im Experiment verwendete Strukturen vorhersagen zu können. Im dritten Abschnitt wird das System weiter vereinfacht und durch ein endliches System eindimensionaler gekoppelter Differenzialgleichungen beschrieben. Zuletzt werden noch die analytischen Lösungen der Eigenmoden eines Grundbausteins der Strukturen, einem runden Stufenindex-Wellenleiter, vorgestellt.

4.1 Wellenleiter als Modell für Quantensysteme

Bei einem dielektrischen Wellenleiter handelt es sich um eine Struktur, welche Licht hauptsächlich entlang einer vorgegebenen Propagationsrichtung z leitet. Dafür hat der Wellenleiter einen größeren Brechungsindex n_{wg} (engl.: *waveguide*) als das umgebende Material n_c (engl.: *cladding* für Ummantlung), sodass das Licht, wie in Abb. 4.1 (a) strahlenoptisch dargestellt, durch Totalreflexion im Inneren des Wellenleiters geführt wird. In dieser Arbeit werden hauptsächlich runde Stufenindex-Wellenleiter, also solche mit einem stufenartigen Übergang zwischen den Bereichen mit n_{wg} und n_c , betrachtet. Die Ausbreitung von Licht in solchen Strukturen wird nun mathematisch hergeleitet.

Die Wechselwirkung von elektrischen und magnetischen Feldern mit Materie wird dabei im Allgemeinen durch die Maxwell Gleichungen beschrieben.

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (4.1a)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.1b)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \quad (4.1c)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \partial_t \vec{D} \quad (4.1d)$$

Dabei stehen \vec{E} und \vec{H} für die elektrische und die magnetische Feldstärke und \vec{D} und \vec{B} für die jeweilige Flussdichte. Da es sich bei den Wellenleiterstrukturen um Strukturen aus dielektrischem Material handelt, werden im Folgenden die freien Ladungsträger ρ und die freien Ströme \vec{j} auf Null gesetzt. Die Flussdichten stehen über die elektrische und die magnetische Feldkonstante ϵ_0 und μ_0 und die materialabhängige Permeabilität ϵ_r und Permittivität μ_r in Relation mit den Feldstärken. Zwischen den Feldkonstanten und der Lichtgeschwindigkeit c besteht dabei der Zusammenhang $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. Bei doppelbrechenden Materialien müssen Permeabilität ϵ_r und Permittivität μ_r als Tensoren betrachtet werden und bei hohen Feldstärken müssen Terme mit höheren Potenzen der Feldstärken mit betrachtet werden, um nichtlineares Verhalten zu beschreiben. Beides ist bei den

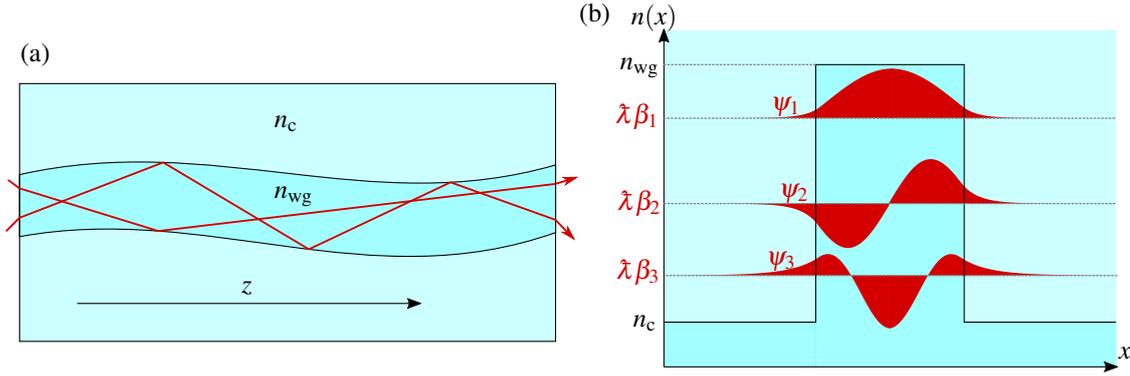


Abbildung 4.1: (a) Ein Stufenindex-Wellenleiter leitet das Licht entlang z , da der Brechungsindex im Inneren n_{wg} größer ist als der des umgebenden Materials n_c . (b) Ein Stufenindex-Wellenleiter $n(x)$ mit seinen Eigenmoden ψ lässt sich analog zu einem endlichen Potenzialtopf aus der Quantenmechanik mit seinen Eigenzuständen beschreiben. Die Größen auf der vertikalen Achse werden bis Gl. (4.16) eingeführt und sind in Tab. 4.1 den Größen der Quantenmechanik gegenübergestellt.

hier betrachteten Wellenleiterstrukturen nicht der Fall, sodass $\epsilon_r(\vec{r})$ und $\mu_r(\vec{r})$ als ortsabhängige skalare Größen betrachtet werden können

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (4.2a)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}. \quad (4.2b)$$

Da das betrachtete Material dielektrisch ist, kann $\mu_r(\vec{r}) \approx 1$ angenommen werden sodass der Brechungsindex $n(\vec{r}) = \sqrt{\epsilon_r(\vec{r}) \mu_r} \approx \sqrt{\epsilon_r(\vec{r})}$ nur von der Permittivität abhängt. Auf diesen Fall reduziert, lassen sich die Maxwell Gleichungen nur mit \vec{E} und \vec{H} wie folgt schreiben:

$$\epsilon_0 \nabla \cdot (\epsilon_r \vec{E}) = 0 \quad (4.3a)$$

$$\mu_0 \nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (4.3b)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \partial_t \vec{H} \quad (4.3c)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon_0 \epsilon_r \partial_t \vec{E}. \quad (4.3d)$$

Um nun daraus die Wellengleichung für das elektrische Feld herzuleiten kann einerseits die Rotation auf Gl. (4.3c) angewendet und Gl. (4.3d) eingesetzt werden.

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \partial_t \nabla \times \vec{H} = -\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \partial_t^2 \vec{E} = -\frac{n^2(\vec{r})}{c^2} \partial_t^2 \vec{E} \quad (4.4)$$

Andererseits kann auch die Graßmann-Identität (auch bekannt als bac-cab-Formel) angewendet werden.

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla (\nabla \ln(n^2(\vec{r})) \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \quad (4.5)$$

Im letzten Umformungsschritt wurde hierbei für $\nabla \cdot \vec{E}$ ein äquivalenter Term eingesetzt, welcher sich nach wenigen Umformungsschritten aus Gl. (4.3a) ergibt.

$$0 = \nabla \cdot (\epsilon_r \vec{E}) = \epsilon_r (\nabla \cdot \vec{E}) + (\nabla \cdot \epsilon_r) \cdot \vec{E} \quad (4.6)$$

$$\Leftrightarrow \nabla \cdot \vec{E} = -\left(\frac{\nabla \cdot \epsilon_r}{\epsilon_r}\right) \cdot \vec{E} = -\nabla \ln(\epsilon_r) \cdot \vec{E} \stackrel{\mu_r \approx 1}{\cong} -\nabla \ln(n^2) \cdot \vec{E} \quad (4.7)$$

Gleichsetzen von Gl. (4.4) und Gl. (4.5) ergibt damit die Wellengleichung für das elektrische Feld [26]:

$$\underbrace{\nabla \left(\nabla \ln(n^2(\vec{r})) \cdot \vec{E} \right)}_{\approx 0} + \nabla^2 \vec{E} = \frac{n^2(\vec{r})}{c^2} \partial_t^2 \vec{E} \quad (4.8)$$

Der erste Term in Gl. (4.8) ist im Vergleich zu den anderen Termen relativ klein und nur ungleich Null, wenn der Brechungsindex sich an dieser Stelle ändert. Bei den betrachteten Stufen-Index-Wellenleitern ist dies nur am Rand der Fall. Daher kann dieser Term in den meisten Fällen vernachlässigt werden. Ohne diesen Term sind die Gleichungen für die vektoriellen Komponenten des Feldes entkoppelt und die Polarisation des Lichtes hat keinen Einfluss¹. Der Einfachheit halber wird in der Regel eine lineare Polarisation angenommen, weshalb die Moden in dieser Näherung als LP-Moden bezeichnet werden. Damit lässt sich das elektrische Feld \vec{E} zu einem skalaren Feld E vereinfachen. Da im Folgenden die Ausbreitung von Licht in einer Wellenleiterstruktur betrachtet werden soll, kann die paraxiale Näherung gemacht werden. Dabei wird das propagierende Feld in zwei Terme, die Einhüllende des Feldes $\psi(\vec{r})$ und eine ebene Welle, separiert

$$E(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) e^{i(\beta z - \omega t)}. \quad (4.9)$$

Dabei wird angenommen, dass die Ausbreitung hauptsächlich in z -Richtung stattfindet und dass sich die Einhüllende des Feldes $\psi(\vec{r})$ nur langsam mit z ändert. Die sogenannte Propagationskonstante β ist dabei eine andere Bezeichnung für den Wellenvektor in Propagationsrichtung k_z welcher vom effektiven Brechungsindex der Mode abhängt $\beta = k_z = n_{\text{eff}} k_0 = n_{\text{eff}} \frac{\omega}{c}$. Wird dieser Ansatz von Gl. (4.9) in die Wellengleichung (4.8) eingesetzt, ergibt sich eine Differenzialgleichung für die Einhüllende des Feldes

$$\nabla^2 \psi + 2i\beta \partial_z \psi - \beta^2 \psi = -\frac{n(\vec{r})^2}{c^2} \omega^2 \psi. \quad (4.10)$$

Da sich ψ sich nur langsam mit z ändert, kann $\partial_z^2 \psi \ll \partial_x^2 \psi$ und $\partial_z^2 \psi \ll \partial_y^2 \psi$ genähert und der Laplace-Operator auf x und y -Komponenten reduziert werden $\nabla_{\perp}^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$. Durch Umstellen von Gl. (4.10) und Division durch $2k_0\beta$ ergibt sich Gl. (4.11)

$$\frac{i}{k_0} \partial_z \psi = -\frac{1}{2\beta k_0} \nabla_{\perp}^2 \psi - \frac{n(\vec{r})^2 \omega^2}{2\beta k_0 c^2} \psi + \frac{\beta^2}{2\beta k_0} \psi. \quad (4.11)$$

Um die Gleichung noch etwas kompakter zu schreiben, wird die reduzierte Wellenlänge $\lambda = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{1}{k_0}$ eingeführt [19]. Zudem wird die Näherung gemacht, dass der effektive Brechungsindex in etwa dem Brechungsindex des umgebenden Materials entspricht $n_{\text{eff}} \approx n_c$ und damit auch $\beta \approx n_c k_0$. Diese Näherung ist gerechtfertigt, wenn nur ein kleiner Teil des Lichts im Kern des Wellenleiters, bei n_{wg} geführt wird, oder der Brechungsindexkontrast zwischen n_{wg} und n_c verhältnismäßig klein ist²

$$i\lambda \partial_z \psi = -\frac{\lambda^2}{2n_c} \nabla_{\perp}^2 \psi - \frac{n(\vec{r})^2}{2n_c} \psi + \frac{n_c}{2} \psi. \quad (4.12)$$

Da im Gegensatz zum Inneren der Wellenleiterstruktur in dem umgebenden Material ein Kontinuum an Moden propagieren kann, wird n_c als Referenzpunkt verwendet, um die Änderung des Brechungsindex zu

¹Einen Fall in dem dieser Term einen relevanten Einfluss hat wird in Kapitel 8 betrachtet.

²Bei den in dieser Arbeit betrachteten Experimenten ist n_{wg} mit 1.59 maximal 3.3% größer als n_c mit 1.54.

Quantenmechanik		Wellenleiteranalgie	
Zeit	t	Propagationsdistanz	z
Potenzial	$V(\vec{r})$	(-) Brechungsindex Differenz	$\Delta n(\vec{r})$
Wellenfunktion	ψ	elektrisches Feld	E bzw. ψ
Masse	m	Brechungsindex	n_c
reduzierte Planck-Konstante	$\hbar = h/2\pi$	reduzierte Wellenlänge	$\tilde{\lambda} = \lambda/2\pi$
Energie	$E = \hbar\omega$	(-) effektiver Brechungsindex	$n_{\text{eff}} = \tilde{\lambda}\beta$
Frequenz	ω	(-) Propagationskonstante	β

Tabelle 4.1: Gegenüberstellung der Größen in der Quantenmechanik und den äquivalenten Größen in der Wellenleiteranalgie.

beschreiben $\Delta n(\vec{r}) = n(\vec{r}) - n_c$

$$i\tilde{\lambda}\partial_z\psi = -\frac{\tilde{\lambda}^2}{2n_c}\nabla_{\perp}^2\psi - \frac{(n_c + \Delta n(\vec{r}))^2}{2n_c}\psi + \frac{n_c}{2}\psi \quad (4.13)$$

$$= -\frac{\tilde{\lambda}^2}{2n_c}\nabla_{\perp}^2\psi - \frac{n_c^2}{2n_c}\psi - \frac{n_c\Delta n(\vec{r})}{n_c}\psi - \underbrace{\frac{\Delta n^2(\vec{r})}{2n_c}}_{\approx 0}\psi + \frac{n_c}{2}\psi \quad (4.14)$$

$$\approx -\frac{\tilde{\lambda}^2}{2n_c}\nabla_{\perp}^2\psi - \Delta n(\vec{r})\psi. \quad (4.15)$$

Im zweiten Rechenschritt wurde hierbei der Term mit $\Delta n^2(\vec{r})$ vernachlässigt, da $\Delta n^2(\vec{r}) \ll n_c\Delta n(\vec{r})$. Nach diesen Umformungsschritten und Näherungen ergibt sich die paraxiale Helmholtz-Gleichung in dieser Form [26]

$$-\tilde{\lambda}\beta\psi = -n_{\text{eff}}\psi = i\tilde{\lambda}\partial_z\psi = -\frac{\tilde{\lambda}^2}{2n_c}\nabla_{\perp}^2\psi - \Delta n(\vec{r})\psi. \quad (4.16)$$

In dieser Form ist die mathematische Äquivalenz zur zweidimensionalen Schrödingergleichung für ein massives Teilchen deutlich zu erkennen

$$\hbar\omega\psi = E\psi = i\hbar\partial_t\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_{\perp}^2\psi + V(\vec{r})\psi. \quad (4.17)$$

Anstatt der Zeitentwicklung der Wellenfunktion kann analog die Änderung der Einhüllenden des elektrischen Feldes entlang der Propagation einer äquivalenten Wellenleiterstruktur betrachtet werden. Daher wird aufgrund der mathematischen Äquivalenz im Folgenden die paraxiale Helmholtz-Gleichung in bra-ket-Notation verwendet. Die Verteilung des Brechungsindex $-\Delta n(\vec{r})$ übernimmt die Rolle eines Potenzials $V(\vec{r})$. Und anstatt Eigenzustände bei verschiedenen Energien sind die Lösungen der paraxialen Helmholtz-Gleichung die Eigenmoden mit verschiedenen Propagationskonstanten bzw. verschiedenen effektiven Brechungsindizes. Die Gegenüberstellung der verschiedenen Größen aus der Quantenmechanik und der Wellenleiteranalgie sind in Tabelle 4.1 aufgeführt. Bei dieser Analogie ist noch das Vorzeichen der Energie bzw. des Potenzials zu beachten. Ein stärker durch das Potenzial gebundener Zustand kommt einer Mode mit höherem effektiven Brechungsindex gleich, wie an dem Beispiel in Abb. 4.1 (b) mit einem Potenzialtopf bzw. einem Stufenindex-Wellenleiter dargestellt ist.

4.2 Numerische Methoden

Nachdem im vorherigen Abschnitt mit Gl. (4.16) ein mathematischer Ausdruck hergeleitet wurde, wie die Ausbreitung von Licht in den Wellenleiterstrukturen beschrieben werden kann, sollen in diesem Abschnitt numerische Methoden vorgestellt werden, um diese Ausbreitung für explizite Fälle berechnen zu können. Damit können vor der Herstellung der Proben Simulationen durchgeführt werden, um geeignete Parameter für die Experimente abzuschätzen. Einerseits wird die Strahl-Propagations-Methode (BPM vom engl.: *beam propagating method*) vorgestellt, die es ermöglicht die Ausbreitung von Licht in Wellenleiterstrukturen vorherzusagen. Andererseits wird ein Algorithmus zum Bestimmen der Eigenmoden einer Wellenleiteranordnung beschrieben.

4.2.1 Strahl-Propagations-Methode (BPM)

Bei dieser Methode wird iterativ aus dem Feld in einer Ebene z das Feld der darauf folgenden Ebene bei $z + \Delta z$ berechnet, bis das Ende des Simulationsbereichs erreicht ist. Dafür wird der Simulationsbereich diskretisiert. Hier wird der einfachste Fall einer äquidistanten Diskretisierung mit Punkten im Abstand Δx , Δy und Δz für die jeweiligen Koordinaten-Richtungen betrachtet. Bei einem Simulationsbereich mit Größe X ergeben sich damit die diskreten Koordinaten $[-\frac{X}{2}, -\frac{X}{2} + \Delta x, \dots, -\Delta x, 0, \Delta x, \dots, -\Delta x + \frac{X}{2}, \frac{X}{2}]$. Dadurch, dass die paraxialen Näherungen Grundlage der Simulationsmethode sind, ist BPM nur für Systeme geeignet, in denen das Licht hauptsächlich in eine Vorzugsrichtung propagiert, wie bei den betrachteten Wellenleiterstrukturen. Große Winkel werden schlechter approximiert und Rückreflexionen werden vernachlässigt. Wird zudem die Polarisation des Lichts vernachlässigt so kann die iterative Berechnung der Feldverteilung $|\psi\rangle$ über die im letzten Abschnitt hergeleitete paraxiale Helmholtz-Gleichung beschrieben werden

$$\partial_z |\psi(z, \vec{r})\rangle = i \underbrace{\frac{\hbar}{2n_c} \nabla_{\perp}^2}_{=\hat{K}} |\psi(z, \vec{r})\rangle + i \underbrace{\frac{\Delta n(z, \vec{r})}{\hbar}}_{=\hat{R}} |\psi(z, \vec{r})\rangle = (i\hat{K} + i\hat{R}) |\psi(z, \vec{r})\rangle. \quad (4.18)$$

Hierbei wurde \hat{K} als Operator für den kinetischen Anteil und \hat{R} als Operator für den potenziellen Anteil eingeführt. Mit \hat{K} wird dadurch die Propagation im freien Raum und mit \hat{R} der Einfluss der Brechungsindexverteilung beschrieben. Damit lässt sich formal die Feldverteilung im nächsten Schritt durch Integration bestimmen

$$|\psi(z + \Delta z, \vec{r})\rangle = \exp(i\Delta z \hat{K} + i\Delta z \hat{R}) |\psi(z, \vec{r})\rangle \quad (4.19)$$

$$\approx \exp(i\Delta z \hat{K}) \exp(i\Delta z \hat{R}) |\psi(z, \vec{r})\rangle. \quad (4.20)$$

Die Näherung, die in der letzten Zeile gemacht wurde, basiert auf der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel³ [26, 27], wobei alle Terme ab der zweiten Ordnung $\mathcal{O}(\Delta z^2)$ vernachlässigt wurden:

$$\exp(i\Delta z \hat{K}) \exp(i\Delta z \hat{R}) = \exp \left(i\Delta z \hat{K} + i\Delta z \hat{R} + \underbrace{\frac{(i\Delta z)^2}{2} [\hat{K}, \hat{R}]}_{\mathcal{O}(\Delta z^2) \approx 0} + \underbrace{\frac{(i\Delta z)^3}{12} [\hat{K} - \hat{R}, [\hat{K}, \hat{R}]]}_{\mathcal{O}(\Delta z^3) \approx 0} + \dots \right) \quad (4.21)$$

Diese Näherung bietet den Vorteil, dass die Einflüsse von \hat{K} und \hat{R} getrennt voneinander betrachtet werden können. So wie Gl. (4.21) beschreibt, wird erst mit \hat{R} der Einfluss des Brechungsindex über die Distanz Δz und anschließend die Propagation im freien Raum mit \hat{K} über die Distanz Δz berechnet. Aus diesem Grund wird diese Umsetzung der BPM als Split-Step-BPM bzw. als Fourier-Transformations BPM bezeichnet. Der

³Die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel besagt, dass allgemein für zwei lineare Operatoren \hat{A} und \hat{B} , gilt:
 $\exp(\hat{A}) \exp(\hat{B}) = \exp(\hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{12} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] - \frac{1}{12} [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] - \frac{1}{24} [\hat{B}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \dots)$

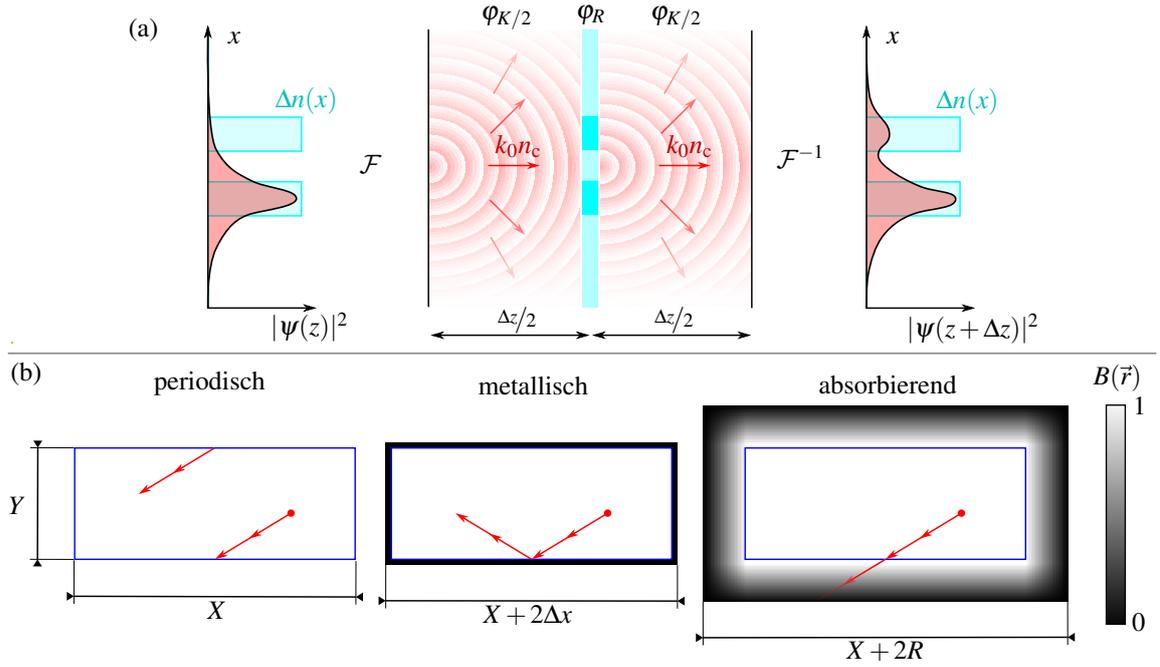


Abbildung 4.2: (a) Schema der Fourier-Transformations BPM. Ein Simulationsschritt über Δz wird aufgeteilt in die Propagation im freien Raum mit n_c über $\Delta z/2$ im Impulsraum, den Einfluss vom $\Delta n(\vec{r})$ über ganz Δz im Ortsraum und anschließend wieder die Propagation über $\Delta z/2$ im Impulsraum. Um zwischen dem Orts- und dem Impulsraum zu wechseln wird die diskrete Fourier-Transformation (\mathcal{F} bzw. \mathcal{F}^{-1}) der Feldverteilung berechnet. (b) Beispielhafte Darstellung der Amplitudenfunktion $B(\vec{r})$ für die Implementierung von periodischen, metallischen und absorbierenden Randbedingungen. Der eigentliche Simulationsbereich hat die Größe X bzw. Y und ist blau markiert.

Fehler dieser Näherung kann noch weiter reduziert werden, wenn die Propagation über Δz nicht in zwei sondern in drei Teilschritte unterteilt wird. Zuerst wird die Propagation über den halben Schritt $\Delta z/2$ mit \hat{K} bestimmt, anschließend der Einfluss des Brechungsindex mit \hat{R} über den gesamten Schritt berücksichtigt und zuletzt nochmals die Propagation über den halben Schritt bestimmt. Diese Unterteilung ist schematisch in Abb. 4.2 (a) dargestellt. Bei dieser Näherung werden die Terme erst ab der dritten Ordnung $\mathcal{O}(\Delta z^3)$ der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel, vernachlässigt:

$$|\psi(z + \Delta z, \vec{r})\rangle \approx \exp\left(i\frac{\Delta z}{2}\hat{K}\right) \exp(i\Delta z\hat{R}) \exp\left(i\frac{\Delta z}{2}\hat{K}\right) |\psi(z, \vec{r})\rangle \quad (4.22)$$

Zur numerischen Berechnung müssen nun die einzelnen Terme bestimmt werden. Zuerst wird der Einfluss von \hat{R} betrachtet. Da $|\psi(z, \vec{r})\rangle$ die Feldverteilung im Ortsraum ist, sorgt dieser Term für eine Phasenentwicklung die lokal vom Brechungsindex abhängt. Dafür wird die Brechungsindexverteilung $\Delta n(z + \Delta z/2, \vec{r})$ in der Mitte des Propagationsschritts verwendet. Der Einfluss dieses Terms $\exp(i\Delta z\hat{R})$ lässt sich damit als ein ortsabhängiger Phasenterm φ_R implementieren:

$$\varphi_R(z, \vec{r}) = \exp(i\Delta z\hat{R}) = \exp\left(i\Delta z \frac{\Delta n(z + \frac{\Delta z}{2}, \vec{r})}{\lambda}\right) \quad (4.23)$$

Nun wird der Einfluss von \hat{K} betrachtet. Anstelle ∇_{\perp}^2 über Differenzenquotienten zu approximieren, kann der Term alternativ vergleichsweise einfach im Impulsraum interpretiert und implementiert werden. Da der Wellenvektor in etwa einen Betrag von $k_0 n_c$ hat, ist die Phase, die eine ebene Welle mit transversalen Wellenvektorkomponenten k_x und k_y über die Propagationsstrecke $\Delta z/2$ aufammelt, durch $\sqrt{k_0 n_c - k_x^2 - k_y^2} \Delta z/2$

gegeben. Bei der paraxialen Näherung wurde vorhin jedoch die Einhüllende ψ von dem schnell in z -Richtung oszillierenden Anteil separiert, sodass auch hier die Phasenentwicklung vom oszillierenden Anteil $k_0 n_c \Delta z/2$ abgezogen werden muss. Damit kann der Term $\exp(i\hat{K}\Delta z/2)$ im Impulsraum ebenfalls als eine lokale Phasenentwicklung $\varphi_{K/2}$ implementieren werden :

$$\varphi_{K/2}(z, \vec{k}) = \exp\left(i\frac{\Delta z}{2}\left(\sqrt{k_0^2 n_c^2 - k_x^2 - k_y^2} - k_0 n_c\right)\right) \quad (4.24)$$

Wenn dieser Phasenterm in der paraxialen Näherung, also nur für kleine k_x und k_y , betrachtet wird, ergibt sich auch explizit der Ausdruck $\exp(i\hat{K}\Delta z/2)$. Hierfür wird das Analogon zum Impulsoperator $\hat{P} = -i\hat{\lambda}\nabla_{\perp}$ und das Analogon zum Impuls $p_{x,y} = \hat{\lambda}k_{x,y}$ eingesetzt:

$$\varphi_{K/2}(z, \vec{k}) = \exp\left(i\frac{\Delta z}{2}\left(\sqrt{k_0^2 n_c^2 - k_x^2 - k_y^2} - k_0 n_c\right)\right) = \exp\left(i\frac{\Delta z}{2}\left(k_0 n_c \sqrt{1 - \frac{k_x^2 + k_y^2}{k_0^2 n_c^2}} - k_0 n_c\right)\right) \quad (4.25)$$

$$\approx \exp\left(-i\frac{\Delta z}{2}\frac{k_x^2 + k_y^2}{2n_c k_0}\right) = \exp\left(-i\frac{\Delta z}{2}\frac{p_x^2 + p_y^2}{2n_c \hat{\lambda}}\right) = \exp\left(i\frac{\Delta z}{2}\frac{\hat{\lambda}\nabla_{\perp}^2}{2n_c}\right) = \exp\left(i\frac{\Delta z}{2}\hat{K}\right) \quad (4.26)$$

Um jeweils vom Orts- in den Impulsraum zu wechseln, wird die diskrete 2D Fourier-Transformation $|\psi(z, \vec{k})\rangle = \mathcal{F}(|\psi(z, \vec{r})\rangle)$ bzw. die inverse diskrete 2D Fourier-Transformation $|\psi(z, \vec{r})\rangle = \mathcal{F}^{-1}(|\psi(z, \vec{k})\rangle)$ des Feldes berechnet. Bei der diskreten Fourier-Transformation ist die Diskretisierung des Impulsraums durch die Diskretisierung im Ortsraum vorgegeben. Damit ergeben sich die Koordinaten im Impulsraum zu $[-\frac{\pi}{\Delta x}, -\frac{\pi}{\Delta x} + \frac{2\pi}{X}, \dots, -\frac{2\pi}{X}, 0, \frac{2\pi}{X}, \dots, -\frac{2\pi}{X} + \frac{\pi}{\Delta x}, \frac{\pi}{\Delta x}]$. Insgesamt lässt sich damit die Gl. (4.22) als Abfolge von Fourier-Transformationen und Multiplikationen mit den lokalen Phasentermen implementieren⁴ [26]

$$|\psi(z + \Delta z, \vec{k})\rangle = \varphi_{K/2}(z, \vec{k})\mathcal{F}^{-1}\left(\varphi_R(z, \vec{r})\mathcal{F}\left(\varphi_{K/2}(z, \vec{k})|\psi(z, \vec{k})\rangle\right)\right). \quad (4.27)$$

Basierend auf dieser Gleichung lässt sich nun iterativ die Ausbreitung von Licht bis zum Ende der Propagation berechnen. Jedoch wurden bisher noch nicht die Randbedingungen der Simulation betrachtet. Werden die Gleichungen so wie bisher beschrieben implementiert, liegen bei der Simulation implizit periodische Randbedingungen vor. Licht, welches den Simulationsbereich am oberen (rechten) Rand verlässt, tritt am unteren (linken) Rand wieder ein und umgekehrt, wie in Abb. 4.2 (b) dargestellt.

Alternativ können beispielsweise auch metallische Randbedingungen implementiert werden, sodass das Licht am Rand des Simulationsbereiches reflektiert wird. Dafür wird in jedem Schritt im Ortsraum die Feldstärke am Rand auf Null gesetzt. Da die Welle in diesen Bereich nicht eindringen kann, kommt dies einem unendlich hohen Potenzial gleich. Für die Implementierung kann $|\psi(\vec{r})\rangle$ in jedem Schritt im Ortsraum mit einer Amplitudenfunktion B multipliziert werden. Für metallische Randbedingungen wird B innerhalb des Simulationsbereiches Eins und am Rand auf Null gesetzt.

Für den Vergleich mit dem Experiment sind jedoch absorbierende Randbedingungen relevant. Um starke Reflexionen wie bei den metallischen Randbedingungen zu vermeiden, wird die Amplitudenfunktion langsam über eine Strecke außerhalb des eigentlichen Simulationsbereiches auf Null abgesenkt. Dafür wird der Simulationsbereich um den entsprechenden Rand R vergrößert und zum Beispiel $B(r) = 1 - \cos(r/R)^2$ als Amplitudenfunktion eingesetzt, wobei r der Abstand zum Rand des Simulationsbereiches ist.

Damit lässt sich die Fourier-Transformations BPM, wie in dem folgenden Pseudo-Code zusammengefasst, implementieren und die Propagation von Licht durch die Wellenleiterstrukturen vorhersagen.

⁴Bei der Implementierung von $\varphi_{K/2}$ ist darauf zu achten, dass die Diskretisierung vom Impulsraum durch den Ortsraum vorgegeben ist und dass es „unphysikalische“ transversale Wellenvektoren geben kann, sodass $\sqrt{k_0^2 n_c^2 - k_x^2 - k_y^2}$ imaginäre Werte annimmt. Daher sollte nur der Realteil beachtet werden $\Re\left(\sqrt{k_0^2 n_c^2 - k_x^2 - k_y^2}\right)$.

Pseudo-Code für die Fouriertransformations Strahl-Propagations-Methode

```

|ψR⟩ ∈ 2D-C-Array   Anfangszustand im Ortsraum vorgeben
B ∈ 2D-R-Array     Randbedingungen im Ortsraum festlegen
φK ← exp(iΔz/2 (ℑc(√(nc2k02 - kx2 - ky2) - nck0))
|ψK⟩ ← ℱ(|ψR⟩)

für z ← Δz/2 bis L - Δz/2 tue
    φR ← exp(iΔzk0Δn(z))   Falls Δn explizit von z abhängt: in jedem Schritt aktualisieren

    |ψK⟩ ← φK/2|ψK⟩   um Δz weiter propagieren
    |ψR⟩ ← ℱ-1(|ψK⟩)
    |ψR⟩ ← φR|ψR⟩
    |ψR⟩ ← B|ψR⟩
    |ψK⟩ ← ℱ(|ψR⟩)
    |ψK⟩ ← φK/2|ψK⟩
|ψR⟩ ← ℱ-1(|ψK⟩)
    
```

4.2.2 Bestimmen der Eigenmoden

Neben der Möglichkeit die Ausbreitung von Licht in willkürlichen Wellenleiterstrukturen mit BPM vorherzusagen kann es insbesondere in statischen Strukturen, bei denen $n(\vec{r}) = n(x, y)$ nicht von z abhängt, hilfreich sein die Eigenmoden sowie deren effektive Brechungsindizes bestimmen zu können. Dafür ist das Eigenwertproblem $-\lambda\beta_n|\phi_n\rangle = H|\phi_n\rangle$ zu lösen, wobei $|\phi_n\rangle$ für die n -te Eigenmode und β_n für die n -te Propagationskonstante steht. Die Eigenwerte seien alle größer Null und absteigend sortiert, sodass β_1 der größte Eigenwert von H ist.

Auch hier wird das Problem wieder im diskretisierten Fall betrachtet. Das Eigenwertproblem hat dabei genau so viele Lösungen wie Punkte im Simulationsbereich $(X/\Delta x) \times (Y/\Delta y)$, wobei lediglich die ersten paar Lösungen mit den größten Eigenwerten relevant sind, da sie den gebundenen Eigenmoden der Wellenleiterstruktur entsprechen. Anstatt nun das Eigenwertproblem exakt aufzustellen und zu lösen wird mit dem Arnoldi-Verfahren ein Algorithmus vorgestellt, um von einer zufälligen Feldverteilung $|\psi\rangle$ aus sich den Eigenmoden iterativ anzunähern [28].

Prinzipiell lässt sich $H|\psi\rangle$ für eine beliebige Feldverteilung $|\psi\rangle$ in der Basis der Eigenmoden entwickeln und berechnen $H|\psi\rangle = H\sum_n|\phi_n\rangle\langle\phi_n|\psi\rangle = \sum_n(-\lambda\beta_n)|\phi_n\rangle\langle\phi_n|\psi\rangle$. Da β_1 der größte Eigenwert ist wird nach wiederholter Anwendung von H auf $|\psi\rangle$ die resultierende Feldverteilung immer ähnlicher zu $|\phi_1\rangle$:

$$H^J|\psi\rangle = \sum_n(-\lambda\beta_n)^J|\phi_n\rangle\langle\phi_n|\psi\rangle \xrightarrow{J \rightarrow \infty} \langle\phi_1|\psi\rangle(-\lambda\beta_1)^J|\phi_1\rangle \quad (4.28)$$

Im Grenzwert wird für alle $n > 1$ das Verhältnis $\lim_{J \rightarrow \infty} (\beta_n/\beta_1)^J = 0$ vernachlässigbar. Wenn nun $|\phi_1\rangle$ bekannt ist und von $|\psi\rangle$ der Anteil dieser Eigenmode abgezogen wird, konvergiert die Feldverteilung für $J \rightarrow \infty$ aus dem gleichen Grund gegen die Eigenmode des zweitgrößten Eigenwerts β_2 :

$$H^J(|\psi\rangle - |\phi_1\rangle\langle\phi_1|\psi\rangle) = \sum_{n \neq 1}(-\lambda\beta_n)^J|\phi_n\rangle\langle\phi_n|\psi\rangle \xrightarrow{J \rightarrow \infty} \langle\phi_2|\psi\rangle(-\lambda\beta_2)^J|\phi_2\rangle \quad (4.29)$$

Durch wiederholte Anwendung von H können auf diese Weise die am stärksten gebundenen Eigenmoden des Systems, von einer beliebigen Feldverteilung $|\psi\rangle$ aus, iterativ angenähert werden [28].

Im konkreten Fall kann die Anwendung von H auf $|\psi\rangle$ ähnlich zur BPM im vorherigen Abschnitt numerisch berechnet werden, indem der kinetische Anteil im Impulsraum und der potenzielle Anteil im Ortsraum berechnet werden. Die Eigenwert-Gleichung $\beta|\psi\rangle = -H/\lambda|\psi\rangle$ lässt sich dann auch mit den Operatoren \hat{K} und

\hat{R} schreiben:

$$\beta |\psi(x, y)\rangle = \hat{K} \psi(k_x, k_y) + \hat{R} |\psi(x, y)\rangle \quad (4.30)$$

$$\frac{n_{\text{eff}}}{\lambda} |\psi(x, y)\rangle = \mathcal{F}^{-1} \left(\sqrt{n_c^2 k_0^2 - k_x^2 - k_y^2} \mathcal{F}(|\psi(x, y)\rangle) \right) + \frac{\Delta n(x, y)}{\lambda} |\psi(x, y)\rangle \quad (4.31)$$

An dieser Stelle wurde für $\hat{K} = \sqrt{n_c^2 k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}$ eingesetzt und nicht noch $n_c k_0$ abgezogen. Würde $n_c k_0$ abgezogen werden, dann wäre der Wert von n_{eff} nur die Brechungsindex-Differenz von n_{eff} zum umgebenden Material n_c .

Damit lässt sich die Bestimmung von Eigenmoden mit dem Arnoldi-Verfahren, wie in dem folgenden Pseudo-Code zusammengefasst, implementieren. Mit den Eigenmoden $|\phi_n\rangle$ und den effektiven Brechungsindizes β_n lässt sich bei statischen Wellenleiterstrukturen die Feldverteilung am Ende der Propagationsstrecke direkt berechnen. Zudem können Kopplungskonstanten bestimmt werden und die β_n als Potenzial-Werte interpretiert werden, worauf im folgenden Abschnitt genauer eingegangen wird.

Pseudo-Code für die Bestimmung von Eigenmoden mithilfe des Arnoldi Verfahrens

$N \in \mathbb{N}_{>0}$ Anzahl der zu findenden Eigenvektoren
 $J \in \mathbb{N}_{>0}$ Anzahl an Iterationen
 $|\psi_n\rangle \in 2D\text{-}\mathbb{R}\text{-Array}$ N zufällige Anfangsvektoren

$\hat{K} \leftarrow \Re \left(\sqrt{n_c^2 k_0^2 - k_x^2 - k_y^2} \right)$
 $\hat{R} \leftarrow k_0 \Delta n(x, y)$

für $j \leftarrow 1$ **bis** J **tue**

für $n \leftarrow 1$ **bis** N **tue**

$|\psi_n\rangle \leftarrow \mathcal{F}^{-1} (\hat{K} \mathcal{F}(|\psi_n\rangle)) + \hat{R} |\psi_n\rangle$
 $\beta_n \leftarrow |\langle \psi_n | \psi_n \rangle|^2$
 $|\psi_n\rangle \leftarrow |\psi_n\rangle / \beta_n$

für $m \leftarrow 1$ **bis** $(n-1)$ **tue**

$|\psi_n\rangle \leftarrow |\psi_n\rangle - |\psi_m\rangle \langle \psi_m | \psi_n \rangle$ Orthogonalisieren mit dem Gram-Schmidt-Verfahren

4.3 Gekoppelte Moden-Gleichungen

In den vorherigen Abschnitten wurde hergeleitet, wie die Ausbreitung von Licht in Wellenleiterstrukturen analog zu einem 2D quantenmechanischen Teilchen beschrieben werden kann und Methoden vorgestellt, um diese Ausbreitung auch explizit numerisch zu berechnen. In diesem Abschnitt wird mit den gekoppelten Moden-Gleichungen das zu betrachtende Wellenleitersystem weiter vereinfacht. Im Endergebnis kommt diese Vereinfachung der Tight-Binding-Näherung (engl. für enge Bindung) gleich. Die zugrundeliegende Annahme ist, dass das Licht, welches in den Wellenleitern geführt wird, stark an diese gebunden ist. Die Eigenmoden eines Wellenleitersystems lassen sich mit dieser Näherung als Superposition der Eigenmoden der individuellen Wellenleiter beschreiben. Die individuellen Eigenmoden $|\psi_p^{(0)}\rangle$ des p -ten Wellenleiters sind dabei die Lösungen der paraxialen Helmholtz-Gleichung nach Gl. (4.16), wenn nur der Brechungsindex des p -ten Wellenleiters Δn_p beachtet wird

$$-\tilde{\lambda}\beta_p^{(0)}|\psi_p^{(0)}\rangle = \tilde{H}_p|\psi_p^{(0)}\rangle = -\frac{\tilde{\lambda}^2}{2n_c}\nabla_{\perp}^2|\psi_p^{(0)}\rangle - \Delta n_p|\psi_p^{(0)}\rangle. \quad (4.32)$$

$\beta_p^{(0)}$ ist hierbei die Propagationskonstante dieser individuellen Eigenmode. Die individuellen Eigenmoden der Wellenleiter sind ohnehin orthogonal und da angenommen wird, dass das Licht stark an den jeweiligen Wellenleiter gebunden ist, also auch um diesen Wellenleiter lokalisiert ist, ist der Überlapp von Eigenmoden verschiedener Wellenleitermoden auch vernachlässigbar gering $\langle\psi_q^{(0)}|\psi_p^{(0)}\rangle \approx \delta_{q,p}$. Damit bilden, in dieser Näherung, die individuellen Eigenmoden eine vollständige orthogonale Basis⁵. Die Tatsache, dass noch andere Wellenleiter in der Nähe sind und die Propagation der individuellen Eigenmoden beeinflussen, wird nun als Störung $\tilde{H}'_p = \Delta\tilde{n}_p$ betrachtet. Dabei steht $\Delta\tilde{n}_p = \Delta n - \Delta n_p = \sum_{r \neq p} \Delta n_r$ für die Brechungsindex-Differenz bei welcher der p -te Wellenleiter ignoriert wird, wie in Abb. 4.3 beispielhaft dargestellt. Damit lassen sich nun in der Basis der individuellen Eigenmoden die Matrixelemente des Gesamthamiltonoperators $H_p = \tilde{H}_p + \tilde{H}'_p$ bestimmen.

$$\langle\psi_q^{(0)}|H_p|\psi_p^{(0)}\rangle = \langle\psi_q^{(0)}|\tilde{H}_p|\psi_p^{(0)}\rangle - \langle\psi_q^{(0)}|\Delta\tilde{n}_p|\psi_p^{(0)}\rangle \quad (4.33)$$

$$= -\langle\psi_q^{(0)}|\psi_p^{(0)}\rangle\tilde{\lambda}\beta_p^{(0)} - \sum_{r \neq p} \langle\psi_q^{(0)}|\Delta n_r|\psi_p^{(0)}\rangle \quad (4.34)$$

$$= -\delta_{q,p}\tilde{\lambda}\beta_p^{(0)} - \underbrace{\delta_{q,p}\sum_{r \neq p} \langle\psi_p^{(0)}|\Delta n_r|\psi_p^{(0)}\rangle}_{\tilde{\lambda}\beta_p^{(1)}} - \underbrace{\langle\psi_q^{(0)}|\Delta n_q|\psi_p^{(0)}\rangle}_{\tilde{\lambda}c_{q,p}} - \underbrace{\sum_{q \neq r \neq p} \langle\psi_q^{(0)}|\Delta n_r|\psi_p^{(0)}\rangle}_{\approx 0} \quad (4.35)$$

Im letzten Schritt wurde der Störungsterm in drei Terme für drei verschiedene Fälle aufgeteilt. Dabei ist zu beachten, dass $|\psi_r^{(0)}\rangle$ und Δn_r für alle r um den r -ten Wellenleiter lokalisierte Funktionen sind. Der erste Term stellt die Energiekorrektur der Störung erster Ordnung $\beta_p = \beta_p^{(0)} + \beta_p^{(1)}$ dar. Der zweite Term ist ein Kopplungsterm. Dadurch, dass $|\psi_p^{(0)}\rangle$ evaneszenter Anteil über den p -ten Wellenleiter hinaus reicht, gibt es einen kleinen Überlapp der Mode mit dem q -ten Wellenleiter. Beim dritten Term ist der Überlapp der drei an verschiedenen Orten lokalisierten Funktionen so gering, dass dieser Term vernachlässigt werden kann [29].

In der Basis der individuellen Eigenmoden kann nun die Propagation des Lichts durch eine Matrix beschrieben werden. Die Matrix c enthält dabei die Kopplungen auf den Neben-diagonal-Elementen $c_{q,p}$ und $\boldsymbol{\beta}$

⁵Da $\langle\psi_q^{(0)}|\psi_p^{(0)}\rangle \neq \delta_{q,p}$ ist die Basis nur annähernd orthogonal. In Kapitel 6 wird diese Nicht-Orthogonalität genauer betrachtet. Dabei zeigt sich, dass, wenn die Nicht-Orthogonalität berücksichtigt wird, sich teilweise negative Kopplungskonstanten ergeben.

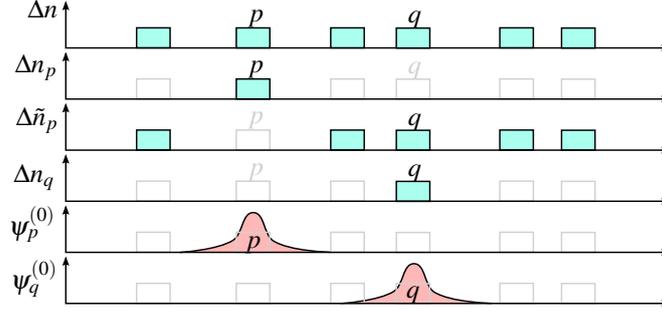


Abbildung 4.3: Beispiel einer Brechungsindex-Verteilung Δn zur Veranschaulichung der Terme $\Delta n_p, \Delta \tilde{n}_p, \Delta n_q, \psi_p^{(0)}$ und $\psi_q^{(0)}$.

die Propagationskonstanten auf der Diagonalen β_p

$$-i\partial_z |\psi\rangle = -\frac{H}{\lambda} |\psi\rangle = -\frac{\tilde{H} + \tilde{H}'}{\lambda} |\psi\rangle = (\boldsymbol{\beta} + \mathbf{c}) |\psi\rangle \quad (4.36)$$

$$-\frac{H}{\lambda} = \begin{pmatrix} \ddots & & \ddots & & \ddots & & \\ & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\ \ddots & & \beta_{p-1} & c_{p-1,p} & c_{p-1,p+1} & & \\ & \ddots & c_{p,p-1} & \beta_p & c_{p,p+1} & & \\ \ddots & & c_{p+1,p-1} & c_{p+1,p} & \beta_{p+1} & & \\ & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\ \ddots & & & & & & \ddots \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

Mit dieser Gleichung lässt sich wie bei der BPM iterativ die Entwicklung der Feldverteilung in Schritten von Δz berechnen, jedoch mit deutlich weniger Rechenaufwand, da das Feld durch einen Vektor und nicht eine stetige 2D Funktion beschrieben wird

$$-i \frac{|\psi(z + \Delta z)\rangle - |\psi(z)\rangle}{\Delta z} \approx -i\partial_z |\psi(z)\rangle = -\frac{H}{\lambda} |\psi(z)\rangle \quad (4.38)$$

$$|\psi(z + \Delta z)\rangle \approx |\psi(z)\rangle - i\Delta z \frac{H}{\lambda} |\psi(z)\rangle. \quad (4.39)$$

Für die numerische Iteration hat allerdings diese Gleichung kleinere Fehler:

$$-i\partial_z \left| \psi \left(z + \frac{\Delta z}{2} \right) \right\rangle = -\frac{H \left(z + \frac{\Delta z}{2} \right)}{\lambda} \left| \psi \left(z + \frac{\Delta z}{2} \right) \right\rangle \quad (4.40)$$

$$-i \frac{|\psi(z + \Delta z)\rangle - |\psi(z)\rangle}{\Delta z} \approx -\frac{H(z + \Delta z) |\psi(z + \Delta z)\rangle + H(z) |\psi(z)\rangle}{2\lambda} \quad (4.41)$$

$$\left(-i\mathbb{1} + \frac{\Delta z}{2\lambda} H(z + \Delta z) \right) |\psi(z + \Delta z)\rangle \approx \left(-i\mathbb{1} - \frac{\Delta z}{2\lambda} H(z) \right) |\psi(z)\rangle \quad (4.42)$$

$$|\psi(z + \Delta z)\rangle \approx \frac{-i\mathbb{1} - \frac{\Delta z}{2\lambda} H(z + \Delta z)}{-i\mathbb{1} + \frac{\Delta z}{2\lambda} H(z)} |\psi(z)\rangle = P_{\Delta z}(z) |\psi(z)\rangle \quad (4.43)$$

Im letzten Schritt wurde hierbei der Propagator $P_{\Delta z}$ um die Distanz Δz eingeführt. Der Propagator P_L über die gesamte Propagationslänge L ergibt sich dabei als das Produkt der einzelnen Propagatoren.

$$|\psi(L)\rangle = P_L |\psi(0)\rangle = \left(\prod_{z=0}^{L-\Delta z} P_{\Delta z}(z) \right) |\psi(0)\rangle = P_{\Delta z}(L - \Delta z) \dots P_{\Delta z}(0) |\psi(0)\rangle \quad (4.44)$$

Die Systeme in dieser Arbeit lassen sich jedoch als statisch $\partial_z H = 0$ betrachten. Bei diesen Systemen muss

die Feldverteilung nach der Propagation nicht iterativ wie in Gl. (4.39) oder Gl. (4.44) angenähert, sondern kann als Superposition der Eigenmoden des Systems $-\hat{\lambda}\beta_n|\phi_n\rangle = H|\phi_n\rangle$ exakt beschrieben werden. Die Besetzung bzw. Intensität der verschiedenen Eigenmoden bleiben über die Propagation erhalten, aber jede Eigenmode sammelt eine vom Eigenwert bzw. von der Propagationskonstante abhängige Phase auf $|\phi_n(z)\rangle = |\phi_n(0)\rangle e^{i\beta_n z}$. Über die Projektion der Feldverteilung am Anfang $|\psi(0)\rangle$ auf die Eigenmoden von H ergibt sich die Feldverteilung nach der Propagationslänge

$$|\psi(L)\rangle = \sum_n |\phi_n(L)\rangle \langle \phi_n(0)|\psi(0)\rangle = \sum_n |\phi_n(0)\rangle e^{i\beta_n L} \langle \phi_n(0)|\psi(0)\rangle. \quad (4.45)$$

4.3.1 Gekoppeltes Dimer

Ein System an dem die Analogie zur Quantenmechanik nochmals deutlich wird, ist das von zwei gekoppelten Wellenleitern. Die zwei Wellenleiter g und e sollen dabei jeweils die Propagationskonstante β_g und β_e haben und sind über c_1 miteinander gekoppelt.

$$-i\partial_z |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \beta_e & c_1 \\ c_1^* & \beta_g \end{pmatrix} |\psi\rangle = \beta_n |\psi\rangle \quad (4.46)$$

Dieses Wellenleitersystem verhält sich analog zu einem Zwei-Niveau-System, bei dem der Grundzustand g an einen angeregten (engl. *excited*) Zustand e gekoppelt wird, sodass Rabi-Oszillation auftreten. Die Eigenmoden des Wellenleitersystems sind hierbei analog zu den *dressed states* des Zwei-Niveau-Systems. Für den Fall von unverstimmten Oszillationen, also dass $\beta_g = \beta_e$, sind die Eigenmoden durch die symmetrische $|\phi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle + |e\rangle) \hat{=} (1,1)^T/\sqrt{2}$ und die anti-symmetrische $|\phi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle - |e\rangle) \hat{=} (1,-1)^T/\sqrt{2}$ Superposition der Zustände g und e gegeben. Die Differenz der Propagationskonstanten der Eigenmoden wird durch die Kopplungsstärke bestimmt $\beta_A - \beta_S = 2c_1$. Wenn, wie in Abb. 4.4 (a) dargestellt, zu Beginn Licht in den Wellenleiter g eingekoppelt wird $|\psi(0)\rangle = |\psi_g\rangle = (0,1)^T = |\phi_S\rangle - |\phi_A\rangle/\sqrt{2}$, wird nach einer Propagationslänge L_c die gesamte Intensität in dem Wellenleiter e über gekoppelt sein $|\psi(L_c)\rangle \hat{=} |\psi_e\rangle = (1,0)^T = |\phi_S\rangle + |\phi_A\rangle/\sqrt{2}$. Die Kopplungslänge L_c ist dabei analog zu der Länge eines π -Pulses und ergibt sich aus der Zeitentwicklung von $|\psi_g\rangle$ nach Gl. (4.45):

$$|\psi_e\rangle \hat{=} |\psi(L_c)\rangle = |\phi_S\rangle e^{i\beta_S L_c} \langle \phi_S|\psi_g\rangle + |\phi_A\rangle e^{i\beta_A L_c} \langle \phi_A|\psi_g\rangle \quad (4.47)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\phi_S\rangle e^{i\beta_S L_c} - |\phi_A\rangle e^{i\beta_A L_c} \right) \quad (4.48)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\phi_S\rangle - |\phi_A\rangle e^{i(\beta_A - \beta_S)L_c} \right) e^{i\beta_S L_c} \quad (4.49)$$

$$\Rightarrow e^{i(\beta_A - \beta_S)L_c} \stackrel{!}{=} -1 \quad \Rightarrow \quad L_c = \frac{\pi}{\beta_A - \beta_S} \stackrel{\beta_g = \beta_e}{=} \frac{\pi}{2c_1} \quad (4.50)$$

Nach zwei Kopplungslängen ist wieder die gesamte Intensität im Wellenleiter g , jedoch mit einem π Phasenversatz, wie an der Phase in Abb. 4.4 (a) zu sehen ist. Bei zwei Wellenleitern mit verschiedenen Propagationskonstanten $\beta_g \neq \beta_e$, wie in Abb. 4.4 (b), haben die beiden Eigenmoden nicht mehr die gleiche Intensität in den beiden Wellenleitern. Daraus folgt, dass die Intensität nicht mehr vollständig von einem in den anderen Wellenleiter überkoppelt und sich die Kopplungslänge verkürzt. Das System verhält sich in dem Fall analog zu verstimmten Rabi-Oszillation [26].

Werden bei festem β_g die Propagationskonstanten für verschiedene β_e aufgetragen, wie in Abb. 4.4 (c) dargestellt, ist am Kreuzungspunkt an dem $\beta_g = \beta_e$ entartet sind, die Differenz der Propagationskonstanten der Eigenmoden β_S und β_A minimal. An dieser Stelle spalten sich die Propagationskonstanten der Eigenmoden des gekoppelten Systems auf und es kommt anstatt zu einer Entartung zu einer typischen vermiedenen Kreuzung (engl.: *avoided crossing*).

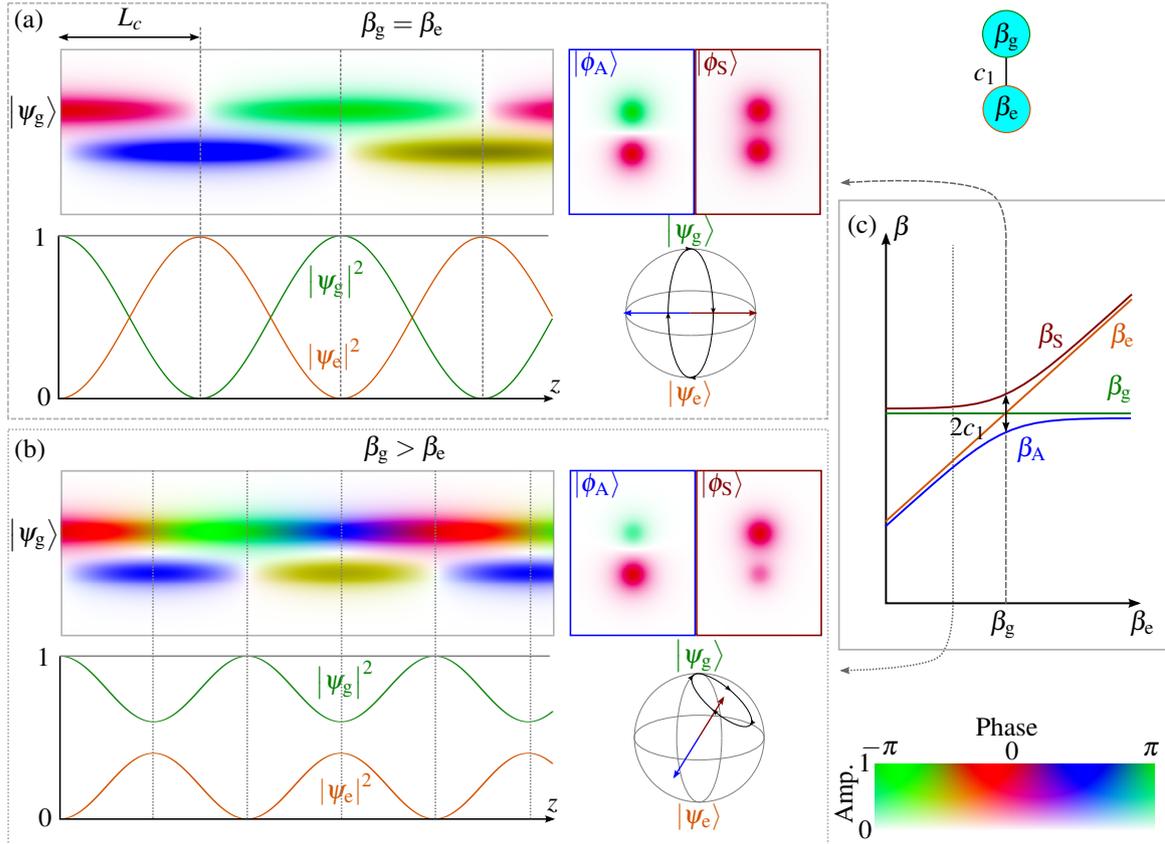


Abbildung 4.4: Ausbreitung von Licht in einem System aus zwei gekoppelten Wellenleitern g und e . Die Phase des elektrischen Feldes ist als Farbe und die Amplitude als Helligkeit dargestellt. Die triviale Phasenentwicklung mit der dynamischen Phase $e^{i(\beta_A + \beta_S)z/2}$ wird nicht dargestellt, da das System im mitbewegten Bezugssystem betrachtet wird. Zu Beginn wird Licht in Wellenleiter g eingekoppelt. (a) Bei zwei gleich starken Wellenleitern ($\beta_g = \beta_e$) ist das Licht nach der Propagationsstrecke L_c vollständig in den Wellenleiter e übergekoppelt. Die Eigenmoden $|\phi_A\rangle$ und $|\phi_S\rangle$ haben gleich starke Besetzung auf den beiden Wellenleitern. Es ergibt sich eine Dynamik analog zu Rabi-Oszillation. (b) Bei verschiedenen Wellenleitern (z.B. $\beta_g > \beta_e$) koppelt das Licht nie vollständig in den andern Wellenleiter über und es zeigt sich ein Verhalten analog zu verstimmt Rabi-Oszillationen. (c) Die Propagationskonstanten der Eigenmoden $|\phi_A\rangle$ und $|\phi_S\rangle$ zeigen ein *avoided crossing*, wobei der minimale Abstand durch die Kopplung $2c_1$ gegeben ist.

4.3.2 Einatomige Kette

In dieser Arbeit werden nicht nur Systeme mit einigen wenigen Wellenleitern untersucht sondern auch Systeme um Phänomene aus der Festkörperphysik zu emulieren. Deshalb wird nun noch das Beispiel einer einfachen periodischen Struktur, das Analogon zu einer einatomigen Kette betrachtet. Die Propagationskonstanten aller Wellenleiter ist hierfür gleich β_0 . Und die Kopplungskonstanten zum jeweils μ -ten Nachbarn können als $c_{p-\mu,p} = c_\mu$ angegeben werden. Zur weiteren Vereinfachung wird hier angenommen, dass $c_1 \gg c_\mu \forall \mu > 2$ so dass alle Kopplungen außer c_1 vernachlässigt werden können. So wie in dem Kapitel zuvor kann der Zustand in der Basis der individuellen Eigenmoden $\psi^{(0)}$ als Vektor geschrieben werden $|\psi\rangle = \vec{u}$, wobei die Einträge des Vektors den Amplituden der Felder in den jeweiligen Wellenleiter entsprechen. Damit lässt sich das System nach Gl. (4.36) als Eigenwertproblem schreiben

$$-i\partial_z \vec{u} = (\boldsymbol{\beta} + \mathbf{c}) \vec{u} = \beta(k_x) \vec{u}. \quad (4.51)$$

Die Lösungen dieses Eigenwertproblems sind durch die Blochfunktionen gegeben. Daher kann für \vec{u} eine ebene Welle eingesetzt werden. Mit diesem Ansatz kann die Eigenwert-Gleichung explizit in Matrixform

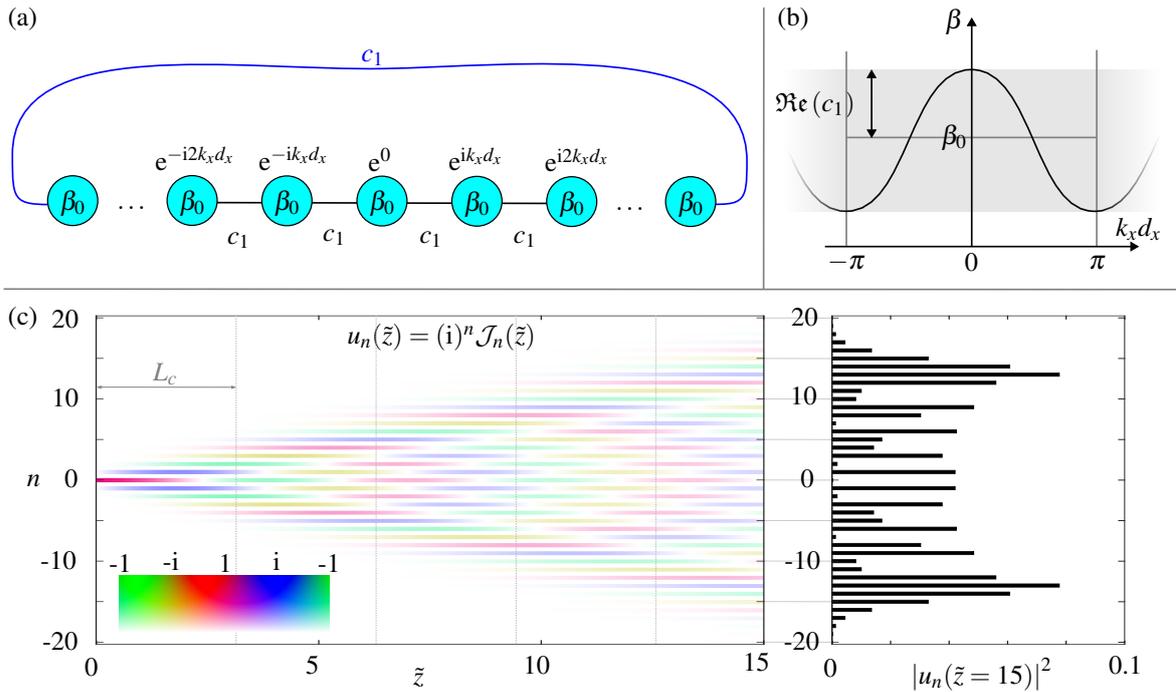


Abbildung 4.5: (a) Schematische Darstellung einer Kette gekoppelter Wellenleiter. Alle Wellenleiter haben die Propagationskonstante β_0 und sind zu den jeweils benachbarten mit c_1 gekoppelt. Für periodische Randbedingungen wird der erste mit dem letzten Wellenleiter gekoppelt (blau hervorgehoben). Über den Wellenleitern steht ein Phasenfaktor, der einer ebenen Welle mit Wellenvektor k_x entspricht. (b) Dispersionsrelation der Kette gekoppelter Wellenleiter. (c) Ausbreitung von Licht in einer Kette gekoppelter Wellenleiter, wenn zu Beginn nur in den 0-ten Wellenleiter eingekoppelt wird. Die Amplitude im n -ten Wellenleiter ist proportional zur Besselfunktion n -ter Ordnung. Nach einer Propagationsstrecke ergibt sich die Verteilung analog zu einem kontinuierlichen *Quantum Walk*[30].

geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & c_1^* \\ \ddots & \beta_0 & c_1 & & & & \ddots \\ \ddots & c_1^* & \beta_0 & c_1 & & & \ddots \\ \ddots & & c_1^* & \beta_0 & c_1 & & \ddots \\ \ddots & & & c_1^* & \beta_0 & c_1 & \ddots \\ \ddots & & & & c_1^* & \beta_0 & \ddots \\ c_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ u(k_x)e^{-i2k_x d_x} \\ u(k_x)e^{-ik_x d_x} \\ u(k_x)e^0 \\ u(k_x)e^{ik_x d_x} \\ u(k_x)e^{i2k_x d_x} \\ \vdots \end{pmatrix} = \beta(k_x) \begin{pmatrix} \vdots \\ u(k_x)e^{-i2k_x d_x} \\ u(k_x)e^{-ik_x d_x} \\ u(k_x)e^0 \\ u(k_x)e^{ik_x d_x} \\ u(k_x)e^{i2k_x d_x} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

Das durch Gl. (4.52) beschriebene System ist schematisch in Abb. 4.5 (a) dargestellt. Im Grenzfall von einer unendlich ausgedehnten periodischen Struktur wäre diese Matrix unendlich groß, um jedoch damit numerisch rechnen zu können, kann auch ein endliches System mit periodischen Randbedingungen betrachtet werden. Dafür wird wie in Gl. (4.52) und Abb. 4.5 (a) blau hervorgehoben der erste und der letzte Gitterpunkt miteinander gekoppelt.

Um nun das Eigenwertproblem zu lösen, werden nun die einzelnen Zeilen von Gl. (4.52) explizit ausge-

geschrieben:

$$\begin{aligned} & \vdots \\ \underline{u(k_x)} e^{-ik_x d_x} (c_1 e^{ik_x d_x} + \beta_0 + c_1^* e^{-ik_x d_x}) &= \beta(k_x) \underline{u(k_x)} e^{-ik_x d_x} \end{aligned} \quad (4.53a)$$

$$u(k_x) e^0 (c_1 e^{ik_x d_x} + \beta_0 + c_1^* e^{-ik_x d_x}) = \beta(k_x) u(k_x) e^0 \quad (4.53b)$$

$$\underline{u(k_x)} e^{ik_x d_x} (c_1 e^{ik_x d_x} + \beta_0 + c_1^* e^{-ik_x d_x}) = \beta(k_x) \underline{u(k_x)} e^{ik_x d_x} \quad (4.53c)$$

\vdots

In jeder Zeile lässt sich $u(k_x)$ mit einem Phasenfaktor ausklammern und es ergibt sich jeweils dieselbe Gleichung welche den Eigenwert $\beta(k_x)$ bestimmt

$$\beta(k_x) = \beta_0 + 2 \Re(c_1) \cos(k_x d_x). \quad (4.54)$$

Wie in Abb. 4.5 (b) dargestellt, ergibt sich für die Kette gekoppelter Wellenleiter die Kosinus-förmige Dispersionsrelation $\beta(k_x)$. Das Band ist zentriert um β_0 und hat eine Breite von $2 \Re(c_1)$. Nach dem hier vorgestellten Prinzip werden auch die Bandstrukturen⁶ in Kapitel 6 und 7 bestimmt.

Neben der Bandstruktur kann auch für dieses Beispiel die Amplitude im n -ten Wellenleiter über die Propagationsstrecke analytisch bestimmt werden, wenn bei $z = 0$ nur in einen 0-ten Wellenleiter eingekoppelt wird. Hierfür wird nun $\beta_0 = 0$ gesetzt, da β lediglich eine globale Phasenentwicklung mit $e^{i\beta_0 z}$ beiträgt. Damit lässt sich die Zeile für den n -ten Wellenleiter aus Gl. (4.52) schreiben:

$$-i\partial_z u_n = c_1 u_{(n-1)} + c_1 u_{(n+1)} \quad (4.55)$$

Durch Reskalieren der Propagation in Einheiten der Kopplungslänge $\tilde{z} = 2c_1 z = \pi z/L_c$ lässt sich die Differenzialgleichung wie folgt schreiben:

$$\partial_{\tilde{z}} u_n = \frac{1}{2} (i u_{(n-1)} + i u_{(n+1)}) \quad (4.56)$$

So hat die Differenzialgleichung große Ähnlichkeit mit der Rekursionsformel der Besselfunktion (BF):

$$\frac{d}{dx} \mathcal{J}_n = \frac{1}{2} (\mathcal{J}_{(n-1)} - \mathcal{J}_{(n+1)}) \quad (4.57)$$

Durch $u_n(\tilde{z}) = (i)^n \mathcal{J}_n(\tilde{z})$ können die Amplituden im jeweils n -ten Wellenleiter mit der BF n -ter Ordnung identifiziert werden. Allerdings erfüllen die BF aller Gattungen die Rekursionsformel. Da jedoch nur für die BF erster Gattung $\forall z \in \mathbb{R} : \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_n^2(z) = 1$ gilt, lösen nur diese die Entwicklung über die Propagation, da die Gesamtintensität erhalten bleibt muss [31]. Damit ergibt sich wie in Abb. 4.5 (c) dargestellt eine Entwicklung über die Propagationsstrecke die einem typischen kontinuierlichen *Quantum Walk* gleich kommt[30].

⁶Da in diesen Kapiteln periodische Strukturen betrachtet werden, werden die Begriffe „Dispersionsrelation“ und „Bandstruktur“ als Synonyme verwendet. Die Dispersionsrelation gibt ganz allgemein die Beziehung zwischen der Frequenz bzw. der Energie und dem Impuls eines Teilchens an. Beim Spezialfall einer Bandstruktur kann aufgrund des Gitterpotenzials der Impuls auf einen Quasiimpuls in der ersten Brillouin-Zone reduziert werden. Daher können in einer Bandstruktur einem Quasiimpuls mehrere Frequenzen aus den verschiedenen Bänder zugeordnet werden.

4.4 Skalare Eigenmoden eines Stufenindex Wellenleiters

In den vorherigen Abschnitten wurde für die Kopplung ein Wert c_1 eingesetzt. Um diesen Wert explizit zu berechnen, müssen nach der Definition der Kopplung in Gl. (4.35) die Brechungsindex-Verteilung und die individuellen Eigenmoden bekannt sein.

$$c_{q,p} = \left\langle \psi_q^{(0)} \left| \frac{\Delta n_q}{\lambda} \right| \psi_p^{(0)} \right\rangle = \frac{1}{\lambda} \iint \psi_q^{(0)*}(x,y) \Delta n_q(x,y) \psi_p^{(0)}(x,y) dx dy \quad (4.58)$$

Die Brechungsindex-Verteilung wird in der Regel im Experiment bei der Probenherstellung vorgegeben. Die Eigenmoden könnten numerisch angenähert werden, allerdings können die Eigenmoden der im Experiment oft verwendeten kreisrunden Stufenindex Wellenleiter auch analytisch bestimmt werden. In diesem Abschnitt werden daher die individuellen Eigenmoden eines kreisrunden Wellenleiters am Koordinatenursprung bestimmt, welcher durch die Brechungsindex-Verteilung $n_0(r)$ beschrieben wird.

$$n_0(r) = \begin{cases} n_{\text{wg}} & r < r_{\text{wg}} \\ n_{\text{c}} & r \geq r_{\text{wg}} \end{cases} \quad (4.59)$$

Um die individuellen Eigenmoden zu bestimmen wird zurück zu Gl. (4.10) gegangen. Kurz vor Gl. (4.10) wurde die paraxiale Näherung gemacht, um das elektrische Feld in eine Einhüllende ψ und einen mit z und t oszillierenden Anteil zu separieren.

$$\nabla^2 \psi + 2i\beta \underbrace{\partial_z \psi}_{=0} - \beta^2 \psi = -k_0^2 n^2(\vec{r}) \psi \quad (4.60)$$

Da sich die Eigenmoden in einem geraden Wellenleiter nicht mit z ändern, ist für den hier betrachteten Fall $\partial_z \psi = 0$. Wegen der Rotationssymmetrie kann die Eigenmode weiter in einen Radialteil $R(r)$ und einen Polarteil $\Phi(\varphi)$ separiert werden $\psi(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$. Aus der Rotationssymmetrie folgt zudem, dass der Polarteil durch $\Phi(\varphi) = e^{i\ell\varphi/\sqrt{2\pi}}$ gegeben ist, wobei $\ell \in \mathbb{Z}$ für den Bahndrehimpuls der Mode steht [32]. Durch Einsetzen des Laplace-Operators in Polarkoordinaten $\nabla^2 = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2$ lässt sich eine Differenzialgleichung aufstellen, welche der Radialteil erfüllen muss

$$\partial_r^2 R\Phi + \frac{1}{r}\partial_r R\Phi + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 R\Phi + (k_0^2 n^2(r) - \beta^2) R\Phi = 0 \quad (4.61)$$

$$\xrightarrow{\partial_\varphi^2 \Phi = -\ell^2} \partial_r^2 R + \frac{1}{r}\partial_r R + \underbrace{\left(k_0^2 n^2(r) - \beta^2 - \frac{\ell^2}{r^2} \right)}_{\equiv k_r^2} R = 0. \quad (4.62)$$

Der Ausdruck in der Klammer von Gl. (4.62) kann als radialer Anteil des Wellenvektors k_r interpretiert werden. Da $\beta^2 = k_0^2 n_{\text{eff}}^2 < k_0^2 n_{\text{wg}}^2$ ist, ist k_r im Wellenleiter positiv und wegen $k_0^2 n_{\text{c}}^2 < \beta^2$ ist k_r im Bereich außerhalb negativ. Für diese beiden Fälle, den Bereich innerhalb des Wellenleiters mit n_{wg} und außerhalb mit n_{c} , wird der Radialteil der Eigenmode getrennt bestimmt und anschließend Stetigkeit an der Grenzfläche gefordert.

Für die weiteren Umformungen ist es praktisch die radiale Koordinate relativ zu r_{wg} anzugeben, sodass r_{wg} bei Eins liegt $\tilde{r} = r/r_{\text{wg}}$. Zudem sollen abkürzend $u = r_{\text{wg}} k_r = r_{\text{wg}} \sqrt{k_0^2 n_{\text{wg}}^2 - \beta^2}$ für den Bereich im Wellenleiter und $w = -r_{\text{wg}} k_r = r_{\text{wg}} \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_{\text{c}}^2}$ für den Bereich im umgebenden Medium verwendet werden. Damit lässt sich Gl. (4.62) für die beiden Fälle kompakt schreiben

$$\frac{\text{innerhalb } \tilde{r} < 1}{\tilde{r}^2 \partial_{\tilde{r}}^2 R + \tilde{r} \partial_{\tilde{r}} R + (\tilde{r}^2 u^2 - \ell^2) R = 0} \quad \Bigg| \quad \frac{\text{außerhalb } 1 < \tilde{r}}{\tilde{r}^2 \partial_{\tilde{r}}^2 R + \tilde{r} \partial_{\tilde{r}} R - (\tilde{r}^2 w^2 + \ell^2) R = 0} .$$

In dieser Form entsprechen die Gleichungen den Besselschen Differenzialgleichungen. Diese werden für den Bereich innerhalb des Wellenleiters von den Besselfunktionen (BF) und für den Bereich außerhalb von den modifizierten Besselfunktionen (mod. BF) gelöst [31, 32].

Besselfunktionen	modifizierte Besselfunktionen
$x^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + f \frac{df}{dx} + (x^2 - v^2)f = 0$	$x^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + f \frac{df}{dx} - (x^2 + v^2)f = 0$

Die Ordnung der jeweiligen Funktion wird durch v vorgegeben. Neben der Ordnung gibt es auch noch zwei Gattungen zwischen denen jeweils unterschieden werden muss. Für den Bereich innerhalb sind nur die BF erster Gattung $\mathcal{J}_v(x)$ relevant, da die BF zweiter Gattung für $x = 0$ gegen $-\infty$ divergieren. Daher ist innerhalb $\psi(r) = A_{\text{wg}} \mathcal{J}_\ell(\tilde{r}u)$ wobei A_{wg} die Amplitude in diesem Bereich ist. Für den Bereich außerhalb hingegen sind nur die mod. BF zweiter Gattung $\mathcal{K}_v(x)$ relevant, da die mod. BF erster Gattung für $x \rightarrow \infty$ gegen ∞ divergieren. Entsprechend ist außerhalb $\psi(r) = A_c \mathcal{K}_\ell(\tilde{r}w)$ mit A_c als Amplitude.

Damit ist nun die generelle Form der Eigenmode in den beiden Bereichen bekannt. Jedoch müssen noch die Amplituden A_{wg} , A_c und die Propagationskonstante β bestimmt werden. Diese folgen aus den Stetigkeitsbedingungen. Da die Tangentialkomponenten des elektrischen und der magnetischen Feldes stetig sein müssen, muss die Eigenmode stetig und stetig differenzierbar sein. Damit ergeben sich die Stetigkeitsbedingungen:

$$A_{\text{wg}} \mathcal{J}_\ell(u) \stackrel{!}{=} A_c \mathcal{K}_\ell(w) \quad \text{und} \quad \frac{A_{\text{wg}}}{u} \frac{d}{dr} \mathcal{J}_\ell(u) \stackrel{!}{=} \frac{A_c}{w} \frac{d}{dr} \mathcal{K}_\ell(w) \quad (4.63)$$

Zusammen ergibt sich aus den beiden Gleichungen eine Bedingung ohne die Amplituden:

$$w \mathcal{J}_\ell(u) \frac{d}{dr} \mathcal{K}_\ell(w) - u \mathcal{K}_\ell(w) \frac{d}{dr} \mathcal{J}_\ell(u) \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.64)$$

Da u und w von β abhängen kann über die Nullstellen des Terms auf der linken Seite von Gl. (4.64) β bzw. n_{eff} bestimmt werden. Ein Beispiel hierfür ist in Abb. 4.6 (a) für mehrere ℓ dargestellt. Je größer r_{wg} ist desto mehr Moden können geführt werden, wie in Abb. 4.6 (b) zu sehen ist. Gibt es für ein ℓ mehrere Nullstellen, so wie in Abb. 4.6 (a) für $\ell = 0$, so haben die dazugehörigen Eigenmoden verschieden viele Knotenpunkte im Radialteil $R_{\ell,n}$. Der Index n in $R_{\ell,n}$ gibt dabei die Anzahl der radialen Intensitätsmaxima der Mode an. Die Moden $\psi_{\ell,n}(r, \varphi) = R_{\ell,n}(r) \Phi_\ell(\varphi)$ stellen dabei eine Basis der LP $_{|\ell|,n}$ -Moden dar. Einige Beispiele dieser Moden sind in Abb. 4.6 (c-f) aufgetragen.

Aus der Bedingung, dass die Eigenmode stetig sein muss ergibt sich das Amplituden Verhältnis $A_{\text{wg}}/A_c = \mathcal{K}_\ell(w)/\mathcal{J}_\ell(u)$. Zudem sollte der Radialteil mit $N = \int_0^\infty r |R_{\ell,n}(r)|^2 dr$ normiert sein. Zusammengefasst lässt sich damit der Radialteil der Eigenmode schreiben als [26, 32]:

$$R_{\ell,n}(\tilde{r}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{cases} \mathcal{J}_\ell(\tilde{r}u) & \tilde{r} < 1 \\ \mathcal{K}_\ell(\tilde{r}w) \frac{\mathcal{J}_\ell(u)}{\mathcal{K}_\ell(w)} & \tilde{r} \geq 1 \end{cases} \quad (4.65)$$

Da für große Abstände die mod. BF annähernd exponentiell abfallen wird häufig vereinfachend angenommen, dass die Kopplung exponentiell mit dem Abstand d zwischen den Wellenleitern abfällt $c_{p,q} \propto e^{-d}$.

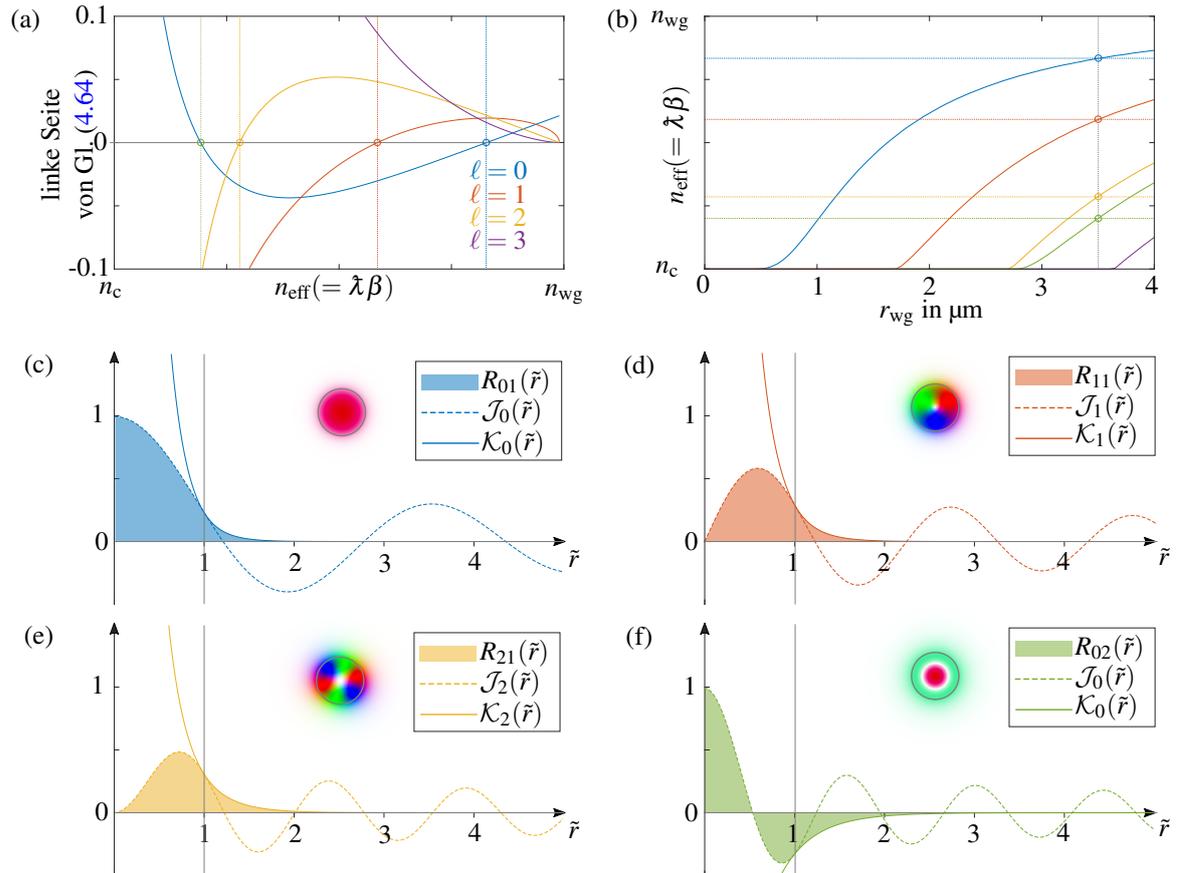


Abbildung 4.6: (a) Die linke Seite von Gl. (4.64) aufgetragen über n_{eff} für verschiedene ℓ bei $r_{\text{wg}} = 3.5 \mu\text{m}$. Die Schnittpunkte mit der x -Achse entsprechen den n_{eff} der Eigenmoden. (b) n_{eff} der Eigenmoden in Abhängigkeit des Wellenleiterradius r_{wg} . (c-f) nicht normierter Radialteil der jeweiligen Eigenmoden, mit den Besselfunktionen und den mod. Besselfunktionen für die (c) LP_{01} (d) LP_{11} (e) LP_{21} (f) LP_{02} -Mode. Für alle Abbildungen wurde die Wellenlänge $\lambda = 0.7 \mu\text{m}$ und die Brechungsindizes $n_c = 1.54$ und $n_{\text{wg}} = 1.548$ gewählt.

5. Experimentelle Methoden

In diesem Kapitel wird zuerst auf die Herstellung und Untersuchung der Proben eingegangen. Dabei wird zuerst allgemein der Prozess des direkten Laserschreibens und der dafür verwendete optische Aufbau erläutert. Anschließend wird auf zwei Schreibstrategien eingegangen, um zu beschreiben wie mithilfe des direkten Laserschreibens explizit Wellenleiterstrukturen hergestellt werden können. Im letzten Abschnitt wird der optische Aufbau für die Untersuchung der Wellenleiter erklärt.

5.1 Direktes Laserschreiben

Das direkte Laserschreiben (engl. *direct laser writing*; DLW) oder mitunter auch Zwei-Photonen-Lithographie genannt, ist ein additives Herstellungsverfahren, welches erlaubt, nahezu beliebige dreidimensionale Strukturen mit Submikrometerauflösung in einem Prozessschritt herzustellen.

Ähnlich zu einem 3D-Harz-Drucker wird bei diesem Verfahren ein Photolack, ein photosensitives Material, in einem vordefinierten Bereich belichtet. Für einen (Negativ-) Photolack liegt der Photolack vorerst in flüssiger Form vor und durch die Belichtung wird lokal eine Reaktion in Gang gesetzt, wodurch der Photolack an dieser Stelle aushärtet. Nach dem Belichten kann der überschüssige Photolack mit Lösungsmitteln entfernt werden.

Ein typischer polymerbasierter Photolack besteht dabei aus einem Photoinitiator, Monomeren und Lösungsmittel. Wie der Name suggeriert, beginnt die Reaktion mit dem Photoinitiator. Das Level-Schema eines Photoinitiators ist schematisch in Abb. 5.1 (a) dargestellt. Der Photoinitiator wird durch Absorption von Strahlung vom Grundzustand S_0 in einen angeregten Zustand S_1^* gebracht. Dieser angeregte Zustand zerfällt dann über Interkombination (ISC; engl. *Intersystem Crossing*) in einen metastabilen Triplettzustand T_1 . Der Triplettzu-

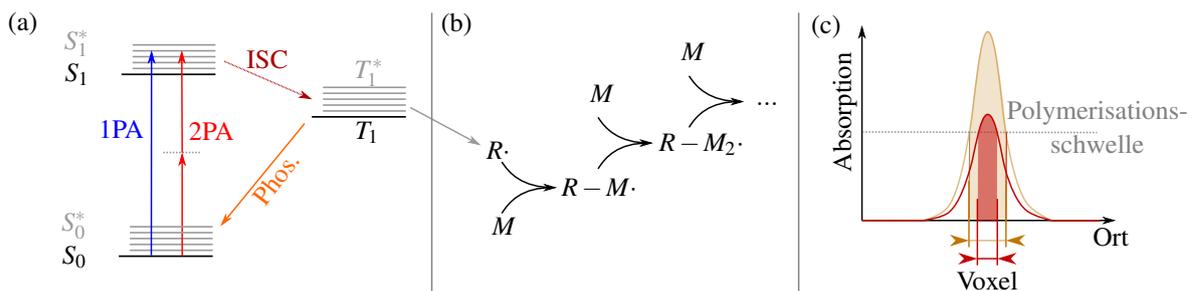


Abbildung 5.1: (a) Vereinfachtes Level-Schema eines typischen Photoinitiators. Durch Ein- oder Zwei-Photonen-Absorption (1PA bzw. 2PA) werden die Photoinitiatormoleküle von dem Grundzustand S_0 in einen angeregten Zustand S_1^* gebracht. Über ISC gehen diese in einen Triplettzustand T_1 über. Von diesem Zustand kann das Molekül entweder über Phosphoreszenz zurück in den Grundzustand zerfallen oder das Molekül zerfällt und bildet Radikale ($R\cdot$). (b) Treffen die Radikale auf Monomere (M) gehen sie mit diesen eine Bindung ein und bilden iterativ lange Ketten aus den Monomeren. (c) Werden im Fokuspunkt (Voxel) genügend Polymerisationsreaktionen gestartet, verknöten und verbinden sich die Monomerketten und bilden ein festes Polymer. Bei einer Intensität knapp oberhalb der Polymerisationsschwelle hat der Voxel die minimale räumliche Ausdehnung (rot dargestellt), welche wegen der Schwellwertbedingung kleiner als die beugungsbegrenzte Strahltaille des Lasers sein kann. Bei höheren Intensitäten ist der Voxel entsprechend größer (gelb dargestellt).

stand zerfällt dann entweder über Phosphoreszenz wieder in den Grundzustand oder das Photoinitiatormolekül zerfällt in Radikale $R\cdot$, welche anschließend eine Polymerisationsreaktion mit den Monomeren starten [33]. Bei einem 3D-Harz-Drucker wird die Reaktion durch die Belichtung mit ultravioletter (UV) Strahlung eingeleitet. Durch die hohe Photonenenergie von UV-Strahlung genügt jeweils Ein-Photonen-Absorption (1PA), um die Photoinitiatormoleküle in den angeregten Zustand zu bringen. Der gesamte belichtete Bereich wird somit ausgehärtet. Das direkte Laserschreiben basiert hingegen auf der Zwei-Photonen-Absorption (2PA). Dafür müssen zwei Photonen mit der halben Energie von einem Photoinitiatormolekül absorbiert werden. Nur in Bereichen in denen die Lichtintensität hoch genug ist, kommt es dann durch die „gleichzeitige“ Absorption von zwei Photonen zu einem hinreichend großen Energieübertrag an die Photoinitiatormoleküle, um die Polymerisationsreaktion zu starten. Die Reaktion findet dann hauptsächlich im Bereich des Fokus statt. Das minimale Polymerisationsvolumen, das als Voxel bezeichnet wird (Kurzform für Volumen-Pixel), definiert das Volumen, in dem genügend Polymerisationsreaktionen stattfinden, damit ein festes Polymer entsteht. Da die Polymerisationsreaktion durch diese Schwellwertbedingung der Intensität räumlich begrenzt wird, kann die Voxelgröße auch kleiner als die zum Belichten verwendete Wellenlänge sein. Im Gegensatz zu anderen typischen Lithographie-Verfahren, die mit UV-Belichtung arbeiten, wie 3D-Harz-Drucker oder Maskenlithographie, bietet das DLW durch die 2PA¹ intrinsisch eine Begrenzung der Photonenabsorption in Strahlrichtung. Um beim DLW in axialer Richtung einen möglichst kleinen Voxel zu erreichen, wird das Licht durch ein Objektiv mit hoher numerischer Apertur in den Photolack fokussiert. Damit sind Voxelgrößen von ca. 300 nm in axialer Richtung (z) und ca. 100 nm in lateraler Richtung (x, y) standardmäßig umsetzbar [35].

Wenn die Radikale mit den Monomeren reagieren, werden die Radikale an die Monomere gebunden und der radikale Anteil wandert an die Spitze der Kette. Trifft diese Kette auf neue Monomere, werden diese wieder gebunden und der radikale Anteil propagiert weiter. Dadurch bilden sich iterativ lange Ketten von Monomeren – Polymere. Diese in Abb. 5.1 (b) dargestellt Kettenreaktion endet entweder, wenn Ketten aufeinander treffen, oder der Prozess durch einen Inhibitor, i.d.R. durch Sauerstoff, abgebrochen wird [36]. Haben sich lokal genügend Monomere verbunden, verknoten und vernetzen sich diese untereinander und es bildet sich ein festes Polymer. Die Polymerisationsschwelle bezeichnet dabei die Intensität ab der über 2PA genügend Polymerisationsreaktionen gestartet werden, sodass ein festes Polymer zurückbleibt, wie in Abb. 5.1 (c) dargestellt. Wird eine Intensität oberhalb der Polymerisationsschwelle verwendet, wird der Voxel entsprechend größer.

Nach dem DLW-Schreib-Prozess werden die Proben entwickelt, dabei wird der überschüssige flüssige Photolack mit Lösungsmitteln entfernt. Beim Entwickeln ziehen sich die Polymerstrukturen etwas zusammen, da Monomere, unvernetzte Polymere und nicht entwickelter Photolack noch aus dem Polymernetz der Struktur heraus diffundieren. Bereiche, die stärker belichtet wurden, sind stärker vernetzt und ziehen sich entsprechend nicht so sehr zusammen wie Bereiche, die nahe der Polymerisationsschwelle geschrieben wurden².

In dieser Arbeit wurde das kommerzielle DLW-System *Photonic Professional GT* der Firma *Nanoscribe* verwendet, dessen Aufbau schematisch in Abb. 5.2 dargestellt ist. Für die Belichtung des Photolacks wird das Licht eines Faserlasers mit einer zentralen Wellenlänge von 780 nm verwendet. Der Laser ist femtosekunden-gepulst, mit Pulslängen unter 150 fs, damit während der Pulse die Feldstärke im Fokus hoch genug ist, um via 2PA die Polymerisation auszulösen, während andere Effekte, wie thermische Polymerisation, vermieden werden. Die Laserintensität kann über einen akusto-optischen Modulator (AOM) variiert werden. Nach dem AOM wird der Strahl aufgeweitet, um die komplette Eintrittspupille des Objektivs auszuleuchten. Anschließend wird der Strahl zirkular polarisiert, um eine Asymmetrie des Voxels in x - und y -Richtungen aufgrund der Polarisation zu vermeiden. Der so präparierte Strahl wird über zwei Galvanometerspiegel ins Objektiv geleitet.

¹Anstatt auf 2PA, kann die Begrenzung in Strahlrichtung beim DLW auch darauf beruhen, dass zwei kurz aufeinander folgende Absorptionsschritte von zwei UV-Photonen stattfinden[34]. Für diese Zwei-Schritt-Absorption sind, wie bei der 2PA, zwei Photonen nötig. Dadurch ist die Absorption intensitätsabhängig und findet hauptsächlich im Bereich des Fokus statt.

²Das Schrumpfen des Photolacks kann durch einen nachfolgenden Prozessschritt, einschließlich einer Flutbelichtung mit UV-Licht, deutlich reduziert werden [37]. Dadurch erhöht sich ebenfalls die mechanische Strukturstabilität. Auf diesen Prozessschritt wurde in dieser Arbeit verzichtet, weil dieser Schritt ggf. die Wellenleiterkanäle beim Infiltrationsverfahren verschieben könnte.

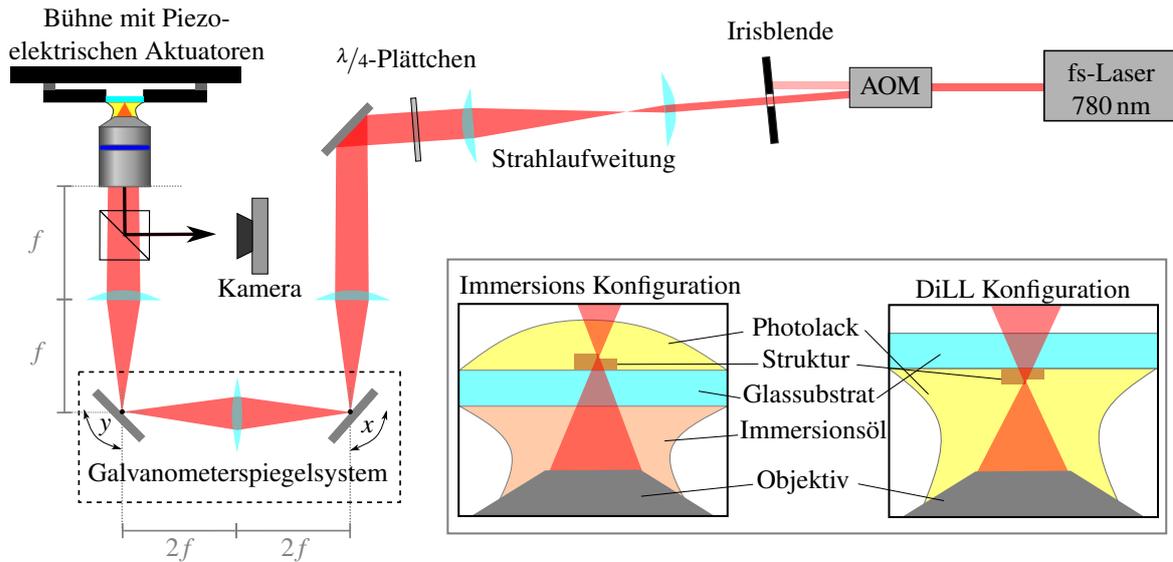


Abbildung 5.2: Schematische Darstellung eines optischen Aufbaus zum direkten Laserschreiben. Die relative Position des Fokuspunkts kann über Bühnen, Piezoelektrische Aktuatoren und Galvanometerspiegel variiert werden. Im Inset sind die Immersions- und die DiLL- (vom engl. *Dip-in Laser Lithography*) Konfiguration dargestellt.

Galvanometerspiegel sind schnell rotierbare Spiegel, die es in diesem Aufbau ermöglichen, den Eintrittswinkel ins Objektiv und damit die Fokusposition in der Brennebene des Objektivs zu variieren. Neben den Galvanometerspiegeln können zudem Bühnen und piezoelektrische Aktuatoren genutzt werden, um die relative Position vom Substrat mit der Struktur zum Fokuspunkt zu verändern. Während des DLW-Prozesses kann der Fortschritt im Bildfeld des Objektivs über eine Kamera beobachtet werden [38].

Das Licht, welches durch das Objektiv in den Photolack fokussiert wird, durchläuft je nach Schreibkonfiguration verschiedenen Medien. Dabei wird oft zwischen Immersions- und der DiLL-Konfiguration unterschieden, welche im Inset von Abb. 5.2 dargestellt sind. In der Immersionskonfiguration durchläuft das Licht bis zum Fokuspunkt ein Immersionsmedium (i.d.R. Immersionsöl), das Glassubstrat und ggf. Teile der bereits geschriebenen Struktur. Um Aberrationen des Fokus zu vermeiden, ist der Brechungsindex vom Glassubstrat und dem Immersionsöl auf das Objektiv angepasst. In dieser Konfiguration ist die maximale Strukturhöhe durch den Arbeitsabstand des Objektivs abzüglich der Substratdicke vorgegeben. In der DiLL-Konfiguration (vom engl. *Dip-in Laser Lithography*) hingegen durchläuft das Licht bis zum Fokuspunkt lediglich den Photolack. Sollen in dieser Konfiguration ebenfalls Aberrationen des Fokus minimal sein, muss der Brechungsindex vom Photolack, wie das Immersionsöl bei der Immersions Konfiguration, auf das Objektiv angepasst sein. Ein Vorteil der DiLL Konfiguration ist zudem, dass die Aberrationen konstant bleiben, während sie bei der Immersions Konfiguration von der Fokustiefe abhängen [38].

5.2 Herstellungsmethoden von Wellenleiterstrukturen mit DLW

In dieser Arbeit wurden zwei Methoden verwendet, um Wellenleiterstrukturen mithilfe von DLW herzustellen. Einerseits kann durch die verwendete Laserleistung während des Schreibprozesses der Brechungsindex vom Photolack beeinflusst werden. Andererseits kann die inverse Wellenleiterstruktur hergestellt und anschließend mit einem Material mit höherem Brechungsindex infiltriert werden. Vorab werden nun die Gemeinsamkeiten beider Methoden angesprochen, und anschließend werden deren Vorteile und Details genauer erläutert.

Gemeinsamkeiten der Herstellungsmethoden

Die Wellenleiterstrukturen sind entlang der Propagationsrichtung ausgedehnt, daher ist in dieser Richtung eine hohe Auflösung nicht zwingend nötig. In lateraler Richtung, also senkrecht zur Propagationsrichtung, ist eine hohe Auflösung nötig, um Wellenleiter mit so kleinen Durchmessern herstellen zu können, dass die Wellenleiter nur die Grundmode führen. Zudem lassen sich die Wellenleiter bei einer hohen lateralen Auflösung näher zusammen positionieren, wodurch sich stärkere Kopplungen realisieren lassen. Da der Voxel in axialer Richtung größer als in lateraler Richtung ist, bietet es sich daher an, die Propagationsrichtung der Wellenleiterstrukturen entlang der z -Richtung zu wählen, sodass die geringere Auflösung nicht ins Gewicht fällt. Da die Wellenleiterstrukturen somit in z -Richtung ausgedehnt sind, wird die DiLL-Konfiguration beim DLW verwendet. Zusammen mit der DiLL-Konfiguration ergibt sich aus diesen Randbedingungen IP-Dip der Firma *Nanoscribe* als geeigneter Photolack. Dieser Photolack ist für das Herstellen von hochauflösenden Strukturen in der DiLL-Konfiguration konzipiert worden und hat daher, wie ein Immersionsöl, einen an das Objektiv angepassten Brechungsindex, um Aberrationen zu minimieren.

Als Substrate werden Deckgläser (Durchmesser 30 mm und Dicke 170 μm) der Firma *Thermo-Scientific* (Menzel-Gläser) verwendet. Die Substrate werden vorab in einem Ultraschallbad gereinigt und dafür für 10 min in jeweils Acetone, dann Isopropanol und zuletzt Reinstwasser getaucht. Anschließend wird mittels Atomlagendeckung (ALD) mit dem Gerät *R-200 Standard* der Firma *Picosun* eine einige Nanometer dicke Schicht Aluminiumoxid (Al_2O_3) aufgebracht [39]. Diese Schicht ist notwendig, um im DLW-System die Position vom Substrat über die Reflexion an der Grenzfläche von Photolack zu Glassubstrat über den *Definite Focus*³ finden zu können. Da der Photolack IP-Dip nahezu den gleichen Brechungsindex wie das Glassubstrat hat, würde ohne diese Schicht keine messbare Reflexion an der Grenzfläche auftreten.

Das verwendete DLW-System bietet mit Bühnen, piezoelektrischen Aktuatoren und Galvanometerscannern drei Möglichkeiten, den Voxel relativ zum Substrat zu bewegen. Die Bühnen haben jedoch eine zu geringe Präzision in lateraler Richtung und die piezoelektrischen Aktuatoren sind einerseits auf eine Distanz von 300 μm begrenzt und andererseits mit maximal 300 $\mu\text{m s}^{-1}$ zu langsam, um in einem vertretbaren Zeitrahmen die Strukturen herstellen zu können. Daher werden hauptsächlich die Galvanometerscanner mit einer Geschwindigkeit von 20 mm s^{-1} verwendet, um die einzelnen Lagen der Strukturen in der x - y -Ebene zu schreiben, während in der z -Richtung der Fokusbetrieb des Mikroskops verwendet wird. Um zu vermeiden, dass durch die Schreibrichtung eine Vorzugsrichtung für die Wellenleiterstrukturen entsteht, wird die Schreibrichtung zwischen zwei orthogonalen Richtungen bei aufeinanderfolgenden Lagen alterniert. Neben der Schreibrichtung wird auch die Schreiborientierung aufeinanderfolgender Linien innerhalb einer Lage alterniert. Dadurch müssen die Galvanometerscanner eine geringere Strecke zurücklegen, was den Schreibprozess verkürzt. Ein kurzer Schreibprozess hat zudem den Vorteil, dass die einzelnen Linien wegen des Proximity-Effekts miteinander verschmelzen [36]. Wenn an einem Ort eine Polymerisationsreaktion gestartet wird, findet die Reaktion durch chemische Diffusion auch in die Umgebung statt. Der Proximity-Effekt beschreibt hier, dass durch die dadurch lokal erhöhte Vernetzungsdichte der Monomere bereits eine geringere deponierte Laserdosis ausreicht, damit sich ein festes

³Dabei wird ein beleuchtetes Gitter auf die Fokusebene des Objektivs abgebildet. Das ggf. an einer Schicht reflektierte Licht wird dann über das Objektiv auf einen schief gestellten Kamerachip abgebildet. Über die Position auf dem Chip an dem das Gitter scharf abgebildet wird kann die Position der Grenzfläche relativ zur Fokusebene ermittelt werden [40].

Polymer bildet. Dadurch verschmelzen nahe nebeneinander belichtete Voxel miteinander. Bei allen Strukturen wurde ein lateraler Linienabstand von 100 nm und ein axialer Lagenabstand von 250 nm gewählt, da dies in etwa den Ausmaßen eines Voxels entspricht [35]. Um unerwünschte Verzerrungen der Strukturen zu vermeiden, werden zusätzliche Stützstrukturen mit höherer Leistung um die eigentliche Struktur geschrieben, die diese stabilisieren und „aufspannen“. Diese Strukturen sind jeweils kreisrund, um keine Vorzugsrichtung für die Spannungen im Photolack zu bieten, die durch das Schrumpfen während des Entwicklungsprozesses auftreten.

Herstellung via Infiltration

Beim Herstellungsverfahren durch Infiltration wird mit dem DLW das Inverse der Wellenleiterstruktur hergestellt. Das heißt, es wird mit dem DLW ein Polymerzylinder hergestellt, welcher an den Stellen, an denen später Wellenleiter sein sollen, Löcher hat. Dieser Polymerzylinder ist, wie schematisch in Abb. 5.3 dargestellt, von dünnen Kanälen der Länge nach durchzogen. Die Strukturen werden für 1 h in Propylenglycolmonomethylätheracetat (PGMEA, CAS No.: 108-65-6) und 1 h in Isopropanol entwickelt. Durch die verhältnismäßig lange Zeit im Entwickler und im Lösungsmittel soll vermieden werden, dass Überreste von unbelichtetem Photolack in den langen Kanälen zurückbleibt. Im anschließendem Prozessschritt muss die hergestellte Struktur mit einem Material gefüllt werden, welches einen höherem Brechungsindex besitzt. Als Infiltrationsmedium wird für die Strukturen SU8 (MicroChem) verwendet. Der Brechungsindex von SU8 liegt mit ca. 1.59 über dem von IP-Dip mit 1.54 [41]. Damit die Strukturen infiltriert werden können, sind sie auf ein Fundament gedruckt, durch welches das Infiltrationsmedium an das untere Ende der Wellenleiterkanäle gelangen kann. Das Infiltrationsmedium wird von dort aus über Kapillarkräfte bis ans andere Ende der Wellenleiterkanäle transportiert. Es zeigte sich, dass diese direkte Infiltration mit SU8 über Kapillarkräfte nicht immer gelingt. Dies könnte mitunter an ungewollten Polymerfäden in den dünnen Kanälen liegen, wie in Abb. 5.3 (b) gezeigt. Die Polymerfäden könnten das SU8 beim Infiltrationsschritt verlangsamen oder stoppen. Um diese Polymerfäden zu vermeiden, muss die Struktur mit einer Leistung sehr nahe an der Polymerisationsschwelle geschrieben werden. Das Prozessfenster, in dem die Leistung hoch genug ist, dass sich eine feste Struktur bildet und niedrig genug ist, dass der Infiltrationsschritt gelingt, ist klein. Erschwerend kommt hinzu, dass das verwendete SU8 an der Luft innerhalb von wenigen Minuten deutlich viskoser wird und damit die dünnen Kanäle verstopft [39].

Um diese Probleme zu umgehen wurden die Strukturen zuvor mit γ -Butyrolacton (CAS No.: 96-48-0) infiltriert. γ -Butyrolacton ist ein Lösungsmittel für SU8, welches nur langsam bei Raumtemperatur verdampft. Dadurch, dass die Struktur zuerst mit γ -Butyrolacton gefüllt werden, ist der erste Infiltrationsschritt weniger stark zeitlich limitiert und es kann abgewartet werden, bis das γ -Butyrolacton an alle Stellen der Struktur vorgedrungen ist. Überschüssiges γ -Butyrolacton wird dann vom Substrat entfernt und anschließend SU8 zugegeben. Das SU8 muss nun nicht mehr alleine über die Kapillarkräfte in kurzer Zeit die Struktur durchdringen sondern muss lediglich durch das γ -Butyrolacton diffundieren und sich gleichmäßig in der Struktur verteilen. Durch diese Vorinfiltration mit γ -Butyrolacton ist die Erfolgsquote des Infiltrationsschritt größer und deutlich toleranter bezüglich der verwendeten Laserleistung während des DLW-Prozesses [42].

Insbesondere bei der Infiltration kann es vorkommen, dass sich die Polymerstrukturen von dem Substrat ablösen. Da der Infiltrationsschritt auf Oberflächenspannung und den Kapillarkräften beruhen, wirken diese Kräfte „schlagartig“ sobald die Flüssigkeit in Kontakt mit der Struktur kommt. Gleichen sich die Kräfte in lateraler Richtung nicht gegenseitig aus, wirkt die in z -Richtung ausgedehnte Struktur zudem als „Hebel“ und löst sich darauf hin vom Substrat. Um dies zu vermeiden, kann eine dünne Schicht Haftvermittler aufgebracht werden. Dafür wird die Oberfläche der mit Al_2O_3 beschichteten Substrate für 10 min in einem Sauerstoffplasma aktiviert. Anschließend werden die Substrate für mindestens 1 h in eine Lösung aus 150 mL Toluol und 50 μL 3-(Methacryloyloxy)propyltrimethoxysilan (CAS No.: 2530-85-0) gelegt, bevor sie nach 10 min in destilliertem Wasser mit Stickstoff getrocknet werden.

Nach dem Infiltrationsschritt wird, um das SU8 auszuhärten, die Struktur ausgebacken. Dafür wird die

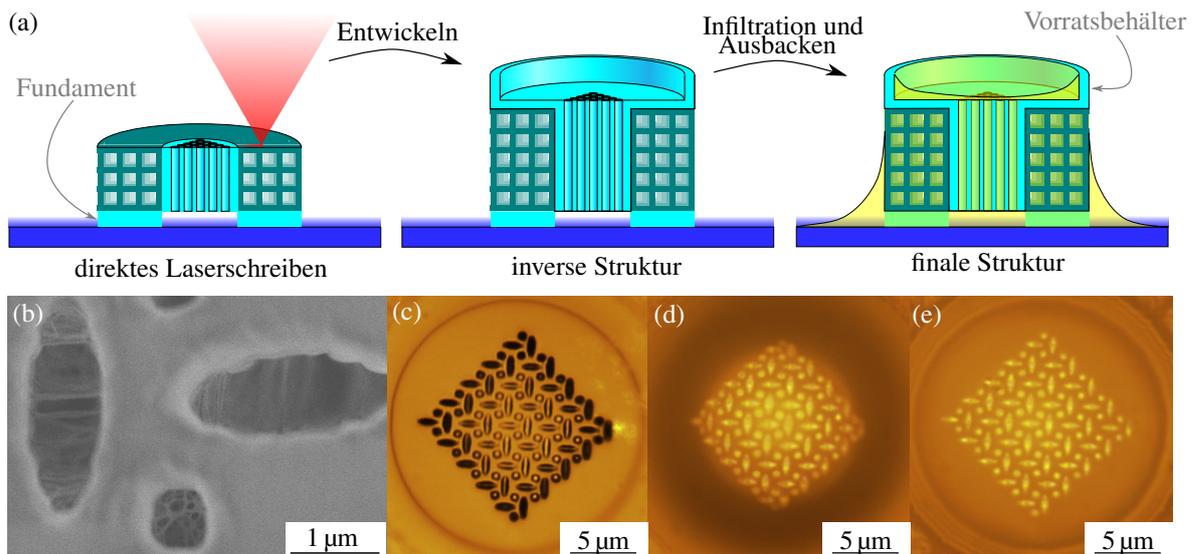


Abbildung 5.3: (a) Schematischer Querschnitt der Wellenleiterstrukturen während der Herstellung mit Infiltration. (b) REM-Aufnahme von Kanälen, die mit unerwünschten Polymerfäden durchzogen sind. (c-e) Lichtmikroskopbilder von Strukturen in Transmissionsbeleuchtung, bei denen (c) sich das SU8 beim Ausbacken in die Wellenleiter zurückgezogen hat, (d) der Meniskus von überschüssigen SU8, welcher die Abbildung der Eintrittsfacette verzerrt und (e) die Struktur erfolgreich infiltrierte wurde.

Probe in 10 K min^{-1} Schritten auf eine Temperatur von 150°C erhitzt und für 5 min die Temperatur gehalten, bevor die Temperatur wieder langsam in 10 K min^{-1} Schritten auf Raumtemperatur abgesenkt wird. Durch das langsame Aufheizen und Abkühlen wird vermieden, dass das SU8 aufreißt [39]. Beim Ausbacken verdampfen jedoch die Lösungsmittel im SU8, wodurch das Volumen etwas abnimmt. Es kann passieren, dass dadurch das SU8 in die Kanäle zurückgezogen wird und die Wellenleiter nicht bis zur anderen Seite der Struktur reichen, wie in Abb. 5.3 (c) an den schwarzen Stellen zu erkennen. Um die Volumenabnahme zu kompensieren, wird auf die Spitze der Struktur eine Art „Vorratsbehälter“ gedruckt, wodurch zusätzliches SU8 während dem Ausbacken von oben nachfließen kann. Der Meniskus des überschüssigen SU8 kann jedoch, wie eine Linse, die Abbildung der Eintrittsfacette der Wellenleiterstruktur verzerren, wie in Abb. 5.3 (d) zu sehen. Um diesen Linseneffekt wiederum zu vermeiden, wird der Durchmesser des Behälters so groß gewählt, dass der Meniskus in der Mitte der Struktur so flach ist, dass die Abbildung nicht oder nur kaum verzerrt wird, wie an einem erfolgreichen Beispiel in Abb. 5.3 (e) zu sehen [42].

Herstellung via direktem Schreiben

Die verwendete Laserleistung beim DLW-Prozess gibt vor, wie stark sich Polymere an dem Ort der Belichtung vernetzen. Eine stärkere Vernetzung sorgt einerseits für höhere mechanische Stabilität aber andererseits auch für einen leicht höheren Brechungsindex [43–45]. Um auf diesem Prinzip basierend Wellenleiterstrukturen herzustellen, wird beim DLW-Prozess an den Orten der Wellenleiter eine hohe Leistung und in dem umgebenden Medium eine niedrige Leistung, nahe der Polymerisationsschwelle, verwendet. Nach dem DLW-Prozess wird überschüssiger Photolack auf der Spitze der Struktur entfernt, da dieser sonst zu einer Verzerrungen der Abbildung führen würde. Dafür wird die Spitze der Struktur für ca. 1 min in PGMEA getaucht. Der Brechungsindexkontrast von ca. $6 \cdot 10^{-3} < \Delta n < 8 \cdot 10^{-3}$, welcher mit diesem Verfahren erreicht werden kann, ist deutlich geringer als mit der Infiltrationsmethode. Entsprechend sind die Radien der Wellenleiter größer und es wird wegen der geringeren Kopplungsstärke für äquivalente Strukturen eine längere Propagationslänge benötigt. Während bei zunehmender Propagationslänge die Erfolgchance des Infiltrationsschritts der Infiltrationsmethode sinkt, ist dies beim direkten Schreiben der Wellenleiterstrukturen keine Einschränkung. So können Strukturen mit mehreren Millimetern Propagationslänge hergestellt werden, wie in Ref. [46] oder Kapitel 8.

5.3 Messaufbau für Wellenleiterstrukturen

Für die Untersuchung von Wellenleiterstrukturen muss sowohl die Eintrittsfacette, über die das Licht in den Wellenleiter eingekoppelt wird, als auch die Austrittsfacette, über die das Licht nach der Propagation durch die Struktur wieder austritt, abgebildet werden. Der allgemeine Messaufbau ist in Abb. 5.4 schematisch dargestellt. Durch die Verwendung eines Weißlichtlasers (*SuperK EVO* von *NKT Photonics*) und das anschließende Herausfiltern einer bestimmten Wellenlänge (*SuperK VARIA tunable filter* von *NKT Photonics*) kann die Wellenlänge, und damit Kopplungsstärke zwischen den Wellenleitern, variiert werden. Der Laserstrahl wird zunächst linear polarisiert und über ein Fernrohr aufgeweitet. Die darauf folgende Irisblende sorgt dafür, dass ein kreisrunder Bereich des räumlichen Lichtmodulators (*engl. spatial light modulator; SLM*) homogen ausgeleuchtet wird. Mithilfe des SLM (*LCOS⁴-SLM Modell: X13267* von *Hamamatsu*) kann über ein Hologramm $\varphi_{\text{SLM}}(\bar{x}, \bar{y})$ die Phasenfront des aufgeweiteten Laserstrahls angepasst werden. Über das SLM-Hologramm lässt sich die Phase und die Intensitätsverteilung auf der Eintrittsfacette der Wellenleiterstruktur vorgeben, wie im nächsten Abschnitt zusammen mit dem Algorithmus genauer erläutert wird. Darauf folgt eine $4-f$ -Abbildung, bei der alles außer der ersten Beugungsordnung des am SLM reflektierten Lichts durch eine Irisblende geblockt wird.

Anschließend wird der Laserstrahl über ein $20\times$ Objektiv (*LD Achroplan 440844* von *Zeiss*, $\text{NA} = 0.4$) auf die Eintrittsfacette der Wellenleiterstruktur fokussiert. Der von der Eintrittsfacette der Struktur reflektierte Anteil des Lichts durchläuft wieder das Objektiv und kann über einen Strahlteiler auf Kamera 1 (*DCC1545M* von *Thorlabs*) abgebildet werden. Der Rest des Lichts propagiert durch die Wellenleiterstruktur. Das Licht tritt dann nach der Propagation an der Austrittsfacette aus und wird über ein zweites $20\times$ Objektiv auf Kamera 2 abgebildet. Die Position der Struktur kann über zwei Translationsbühnen (*Linear Aktuator T-NA08A25* von

⁴Die Abkürzung LCOS steht für *liquid crystal on silicon*. Es handelt sich daher um ein Flüssigkristall-Display, auf einem Silizium-Substrat, also mit reflektierender Rückseite.

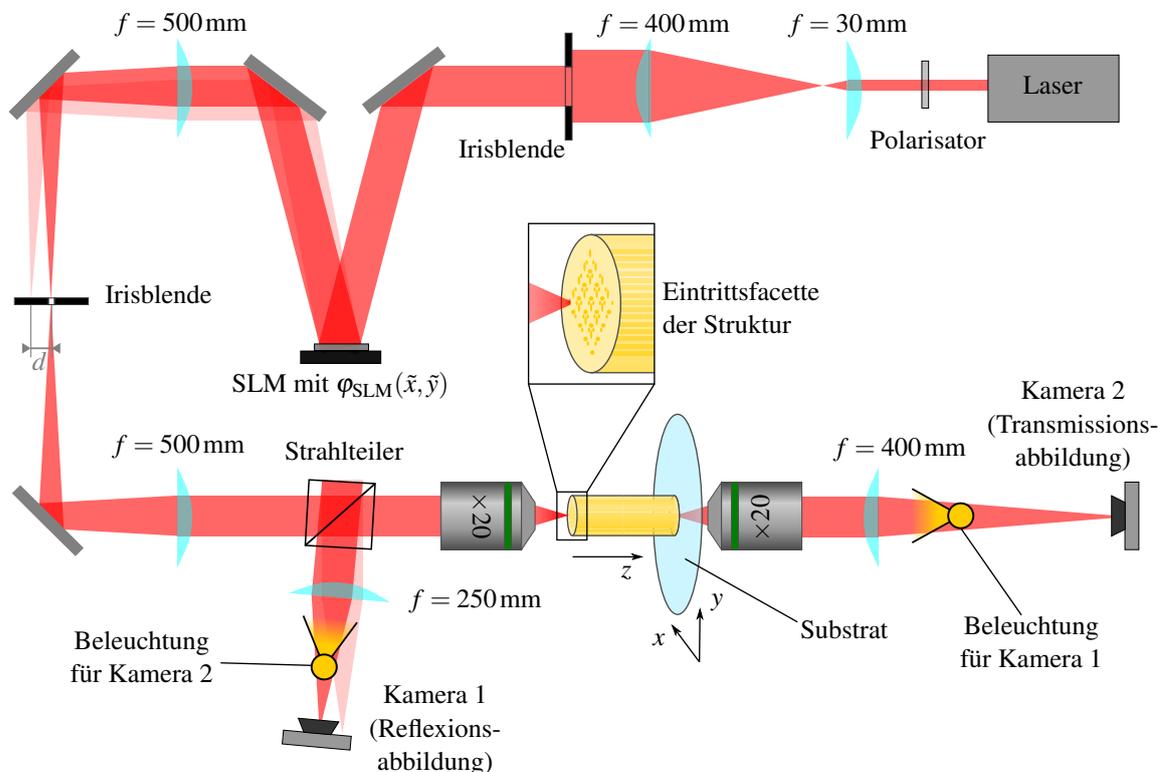


Abbildung 5.4: Schematische Darstellung des Messaufbaus. Über den SLM können beliebige Intensitäts- und Phasenverteilung auf die Eintrittsfacette der Struktur abgebildet werden und über die beiden Kameras die Eintrittsfacette und die Austrittsfacette aufgenommen werden.

Zaber) in x - und y -Richtung angepasst werden [39].

Wie in Abb. 5.4 erkennbar ist, sind der Strahlteilerwürfel und die Kamera für die Abbildung der Eintritts-
facette explizit nicht im 90° Winkel zum Strahl positioniert. Durch diese Ausrichtung wird vermieden, dass
ein ungewollter Reflex des Laserstrahls die Kamera trifft. Wenn der Laserstrahl zum ersten Mal den Strahltei-
ler durchläuft wird er teilweise reflektiert. Dieser Anteil des Laserstrahls ist für diesen Versuchsaufbau nicht
weiter relevant. Es kommt jedoch an der Austrittsfläche des Strahlteilerwürfels an der Grenzfläche von Glas zu
Luft zur Reflexion. Da diese beiden Grenzflächen des Strahlteilerwürfels im Winkel von 45° zueinander ste-
hen, wird der einfallende Strahl durch diese beiden Reflexionen stets um 90° abgelenkt. Diese 90° -Ablenkung
ist unabhängig von der Rotation des Strahlteilers. Dieser ungewollte Reflex ist dabei heller als die eigentlich
interessante Reflexion an der Eintrittsfacette der Struktur. Die Position der Abbildung der Eintrittsfacette hängt
jedoch von der Rotation des Strahlteilers ab, daher kann durch eine kleine Rotation des Strahlteilers vermieden
werden, dass der ungewollte Reflex auf die Kamera trifft.

Algorithmus zum Berechnen des SLM-Hologramms

Bei dem im Aufbau verwendeten SLM handelt es sich um ein Flüssigkristall-Display, welches eine pixel-
weise einstellbare Phasenverzögerung ermöglicht. Durch das auf dem SLM angezeigte Bild, das Hologramm,
kann die Phasenfront des einfallenden Strahls manipuliert werden. Wie alleine durch eine Phasenmodulation
die Phase und die Amplitude des Lichts auf der Eintrittsfacette vorgegeben werden kann, wird im Folgenden
schrittweise erläutert.

Um eine gewünschte Feldverteilung $E(x, y)$ (mit $E \in \mathbb{C}$) für das Einkoppeln in die Wellenleiterstruktur zu
erhalten, muss der SLM durch das angezeigte Hologramm die Feldverteilung so verändern, dass nach Propaga-
tion durch die nachfolgenden Optiken die gewünschte Feldverteilung auf die Eintrittsfacette abgebildet wird.
Wie in Abb. 5.4 zu sehen, liegen zwischen der Eintrittsfacette der Wellenleiterstruktur und dem SLM, mit der
4- f -Abbildung und dem Objektiv, insgesamt drei Linsen. Entsprechend muss der SLM die einfallende ebene
Welle so manipulieren, dass nach der Reflexion am SLM die Feldverteilung dem invers fourietransformierten
der gewünschten Feldverteilung entspricht $\tilde{E}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \mathcal{F}^{-1}(E(x, y))$. Dabei stehen \tilde{x} und \tilde{y} für die Koordinaten
in der Ebene des SLM und \tilde{E} sei so skaliert, dass $\max(|\tilde{E}|) = 1$.

Um die Amplitude des Strahls mit dem SLM zu verändern, kann eine Phasenverteilung $\phi_{\text{blaze}}(\tilde{x})$, wie in
Abb. 5.5 (a) dargestellt, gewählt werden, die einem Sägezahngritter (engl. *blazed grating*) entspricht, um Licht
effektiv in die erste Beugungsordnung des Gitters abzulenken [47]. Der Versatz der ersten Beugungsordnung
 d in der ersten Brennebene nach dem SLM ist von der Wellenlänge des Lichts λ , der Breite eines Sägezahns
 g und der Brennweite der ersten Linse abhängig $d \approx 2f\lambda/g$. Da durch das Sägezahngritter gezielt Licht in die
erste Beugungsordnung abgelenkt werden kann, wird der Strahl nach der Reflexion am SLM durch einen 4- f -
Aufbau geleitet und in der ersten Brennebene alles außer der ersten Beugungsordnung durch eine Irisblende
geblockt. Durch die Modulation der Amplitude des Sägezahngritters, wie in Abb. 5.5 (b), sodass die Phase nicht
von 0 bis 2π sondern nur von 0 bis $M(\tilde{x}, \tilde{y}) \cdot 2\pi$ mit $0 \leq M \leq 1$ durchlaufen wird, kann die räumliche Verteilung
der Feldamplitude angepasst werden. Die Feldamplitude $|\tilde{E}(\tilde{x}, \tilde{y})|$ ist dabei nicht proportional zu $M(\tilde{x}, \tilde{y})$. Durch
eine Zerlegung der Phasenverteilung des modulierten Sägezahngritters in eine Fourierreihe ergibt sich, dass die
Feldamplitude in der n -ten Beugungsordnung $|\tilde{E}(\tilde{x}, \tilde{y})| = \text{sinc}(\pi(n - M(\tilde{x}, \tilde{y})))$ entspricht [47, 48]. Umgekehrt
gilt: um in der ersten Beugungsordnung die gewünschte Amplitudenverteilung zu erhalten, muss daher die
Modulation des Sägezahngritters als $M(\tilde{x}, \tilde{y}) = 1 - \text{arcsinc}(|\tilde{E}(\tilde{x}, \tilde{y})|)/\pi$ gewählt werden, wobei arcsinc die
lokale Umkehrfunktion vom sinc ist [47].

Um die Phase des Strahls lokal zu manipulieren, wird die gewünschte Phase addiert, wodurch sich, wie in
Abb. 5.5 (c) dargestellt, das Sägezahnmuster verschiebt. Zusammen ergibt sich somit die Möglichkeit durch
die Phasenverteilung auf dem SLM, wie in Abb. 5.5 (d) dargestellt, gleichzeitig die Amplitude und die Pha-
se des abgelenkten Strahls räumlich vorzugeben. Für die Umsetzung im Experiment ist noch zu beachten,

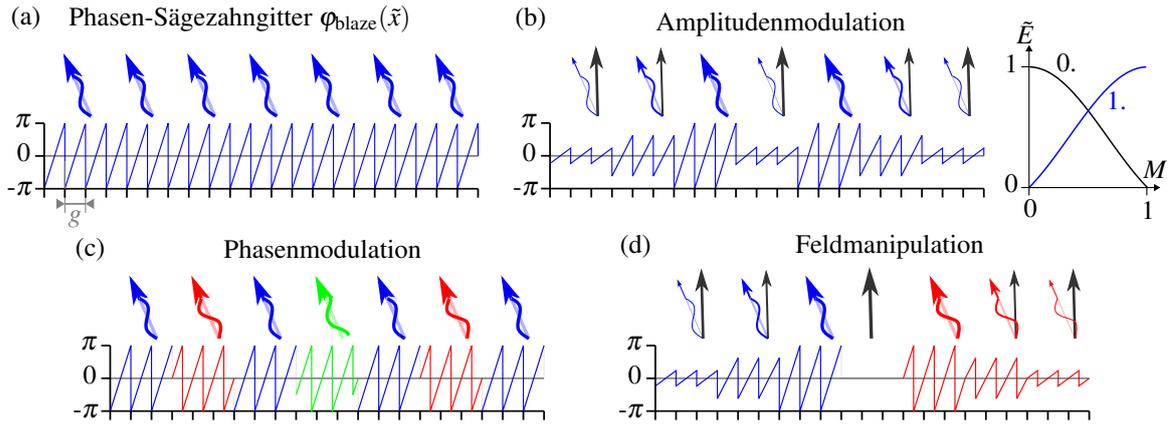


Abbildung 5.5: Über das Hologramm auf dem SLM kann das elektromagnetische Feld, welches in die erste Beugungsordnung abgelenkt wird, pixelweise manipuliert werden. (a) Wird die Phase wie mit einem Sägezahngitter bis 2π moduliert, wird maximal viel Licht in die erste Beugungsordnung abgelenkt. (b) Eine Modulation der Amplitude des Sägezahngitters führt zu einer Modulation der Amplitude des Feldes in den Beugungsordnungen. Die Amplitude der Feldstärke in der n -ten Beugungsordnung wächst dabei proportional zum sinc der Modulationsfunktion: $|\tilde{E}| = \text{sinc}(\pi(n - M))$. (c) Ein Phasenversatz des Sägezahngitters wirkt sich proportional auf die Phase des abgelenkten Feldes aus. (d) Durch Kombination von (b) und (c) lässt sich allgemein das Feld in der ersten Beugungsordnung vorgeben (nach [47]).

dass die Phase nur in einem etwa 2π großen Bereich moduliert werden kann, weshalb die Phase mithilfe der Modulo-Funktion $\text{mod}(\tilde{x}, 2\pi) \in [0, 2\pi]$ auf diesen Bereich beschränkt wird. Zudem ist der Phasenversatz des Flüssigkristall-Displays wellenlängenabhängig. Daher wird für das Hologramm $\varphi_{\text{SLM}}(\tilde{x}, \tilde{y})$ auf dem SLM die Phasenverteilung um den Faktor $\alpha(\lambda)/2\pi$ reskaliert, wobei $\alpha(\lambda)$ der Pixelwert ist, welcher bei einer Wellenlänge λ einem 2π Phasenversatz entspricht. Insgesamt ergibt sich damit für das Hologramm $\varphi_{\text{SLM}}(\tilde{x}, \tilde{y}) \in [0, \alpha(\lambda)]$ auf dem SLM:

$$\varphi_{\text{SLM}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(\underbrace{\left(\text{mod}(\arg(\tilde{E}(\tilde{x}, \tilde{y})) + \varphi_{\text{blaze}}(\tilde{x}), 2\pi) - \pi \right)}_{\text{Beugungsgitter und Phasenmodulation} \in [-\pi, \pi]} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\text{arcsinc}(|\tilde{E}(\tilde{x}, \tilde{y})|)}{\pi} \right)}_{\text{Amplitudenmodulation} \in [0, 1]} + \pi \right) \cdot \frac{\alpha(\lambda)}{2\pi}. \quad (5.1)$$

6. Negative Übernächste-Nachbar-Kopplung

6.1 Motivation

Die Tight-Binding-Näherung ermöglicht es, die Komplexität eines Systems so weit zu reduzieren, dass das System durch endlich viele gekoppelte Moden-Gleichungen beschrieben werden kann. Damit lassen sich interessante theoretische Modelle, oft von Gitterstrukturen, in verschiedensten experimentellen Plattformen wie kalten Gasen [1], elektrischen Schwingkreisen [2], evaneszent gekoppelten plasmonischen [9], magnonischen [10], dielektrischen Wellenleitern und vielen anderen umsetzen.

Grundannahme dieser Näherung ist, dass die Zustände des Gittersystems sich linear aus den Zuständen der individuellen Gitterpunkte zusammensetzen lassen. Die Kopplungen zwischen den Gitterpunkten ergeben sich dabei aus dem verhältnismäßig kleinen Überlapp der Zustände der individuellen Gitterpunkte. Oft werden zur Vereinfachung in diesen Systemen alle Kopplungen außer den zu den nächsten Gitterpunkten c_1 vernachlässigt, wie in Kapitel 4.3.2 beschrieben. Diese Vereinfachung ist allerdings nur gerechtfertigt, wenn der Abstand zwischen den Gitterpunkten deutlich größer ist als die Ausdehnung der Zustände. Bei kleinen Abständen werden die Kopplungsterme zu den anderen Gitterpunkten zunehmend relevant. In diesem Kapitel werden diese Kopplungen zu weiter entfernten Gitterpunkten und insbesondere die Kopplung zu den jeweils übernächsten Nachbarn c_2 genauer betrachtet. Dabei wird sich zeigen, dass c_2 nicht nur positive, sondern konterintuitiver Weise auch negative Werte annehmen kann.

Negative c_1 -Kopplungen wurden bereits realisiert, indem das Potenzial von Gitterpunkten verstimmt [49–52], das System dynamisch moduliert [53, 54] oder, wie auch in Kapitel 7, die teilweise negativen oder komplexen Amplituden von höheren Moden ausgenutzt wurden [55]. In dem hier betrachteten System ist dies alles nicht der Fall, denn es wird eine Kette von statischen, äquivalenten einmodigen Wellenleitern betrachtet. Bei anderen experimentellen Untersuchungen der c_2 -Kopplungen war entweder die Geometrie stärker eingeschränkt [4, 56] oder es wurde nur die Amplitude der Kopplung bestimmt [57, 58] und angenommen, dass die Kopplung positiv ist. Eine natürlich auftretende negative c_2 -Kopplung kann allerdings relevant werden, wenn die c_2 -Kopplung der Parameter ist, welcher entscheidend für einen Übergang von einer topologisch trivialen zu einer nicht-trivialen Phase ist [1, 7, 59, 60].

6.2 Eine einatomige Kette mit höheren Kopplungstermen

Um die höheren Kopplungen zu weiter entfernten Wellenleitern, insbesondere die Kopplung zum übernächsten Nachbarn c_2 , zu untersuchen wird, wie in Abb. 6.1 (a) dargestellt, eine angewinkelte Kette äquivalenter Wellenleiter betrachtet. Durch den Winkel α kann der Abstand zum übernächsten Wellenleiter d_2 und damit auch die Kopplung c_2 variiert werden, ohne den Abstand zum nächsten Wellenleiter d_1 und damit auch die Kopplung c_1 zu verändern. Es wird nur der Bereich $\alpha \in [0^\circ, 60^\circ]$ betrachtet, da in diesem Bereich die Reihenfolge der Abstände $d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq \dots$ erhalten bleibt. Die Breite der Einheitszelle wird mit d_x bezeichnet. Die Struktur hat zwar nur eine Translationsinvarianz nach $2d_x$, aber da die zwei Wellenleiter in dieser Einheitszelle gleich gekoppelt sind, kann die Einheitszelle auf die effektive Breite von d_x reduziert werden.

Wie bereits in Kapitel 4.3.2 beschrieben, kann die Entwicklung des Lichts in einer Kette von evaneszent gekoppelten Wellenleitern in der Basis der individuellen Eigenmoden $\psi_p^{(0)}$ durch gekoppelte Moden-Gleichungen beschrieben werden:

$$-i\partial_z \vec{u} = (\boldsymbol{\beta} + \mathbf{c}) \vec{u} \quad (6.1)$$

Die Elemente $c_{q,p}$ der Kopplungsmatrix \mathbf{c} geben dabei die Kopplungen zwischen zwei Wellenleitern p und q an. Diese lassen sich nach Gl. (4.35) über das Überlappintegral mit den in Kapitel 4.4 bestimmten Eigenmoden $\psi_q^{(0)}$ und $\psi_p^{(0)}$ berechnen [19, 26, 56]:

$$c_{q,p} = \left\langle \psi_q^{(0)} \left| \frac{\Delta n_q}{\lambda} \right| \psi_p^{(0)} \right\rangle = \frac{1}{\lambda} \iint \psi_q^{(0)*}(x,y) \Delta n_q(x,y) \psi_p^{(0)}(x,y) dx dy \quad (6.2)$$

Damit ergibt sich für die Kette an Wellenleitern eine Kopplungsmatrix \mathbf{c} . In \mathbf{c} steht auf der jeweils μ -ten Nebendiagonalen die Kopplung zum jeweils μ -nächsten Wellenleiter $c_\mu = c_{p \pm \mu, p}$. Für die im später beschriebenen Experiment verwendeten Parameter ergeben sich die in Abb. 6.1 (b) gepunktet eingezeichneten Kopplungskonstanten. Dadurch, dass die Funktionen $\psi_q^{(0)}(x,y)$, $\Delta n_q(x,y)$ und $\psi_p^{(0)}(x,y)$ im Integral von Gl. (6.2) jeweils nur positive Werte annehmen, sind alle Kopplungen positiv und hängen hauptsächlich vom Abstand zwischen den Wellenleitern ab.

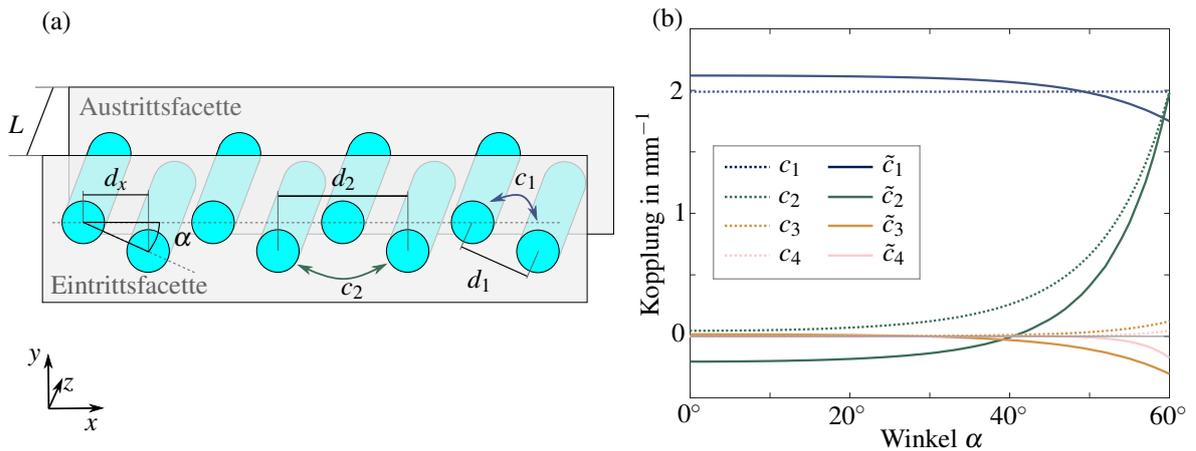


Abbildung 6.1: (a) Schematische Darstellung einer angewinkelten Kette von Wellenleitern mit einem Winkel α , der Kopplung zum nächsten Nachbarn c_1 und der Kopplung zum übernächsten Nachbarn c_2 . Der Abstand d_x ist die Größe einer Einheitszelle und d_1 und d_2 sind die Abstände zum nächsten bzw. übernächsten Nachbarn. (b) Kopplungskonstanten für unterschiedlich angewinkelte Wellenleiterketten. Nach dem herkömmlich verwendeten Überlappintegral in Gl. (6.2) ergeben sich die Kopplungen c_1 , c_2 , c_3 und c_4 zum jeweils ersten, zweiten, dritten bzw. vierten Nachbarn (gepunktete Linien). Durch Berücksichtigung der Nicht-Orthogonalität dieser Moden ergeben sich die jeweils korrigierten Kopplungen \tilde{c}_1 , \tilde{c}_2 , \tilde{c}_3 und \tilde{c}_4 (durchgezogene Linien).

6.3 Nicht-orthogonale gekoppelte Moden

Die Näherungen, die bis hierhin gemacht wurden, beruhen auf der Annahme, dass die individuellen Eigenmoden $\psi^{(0)}$ eine geeignete Approximation für eine orthogonale Basis sind. Zwar fallen die individuellen Eigenmoden exponentiell mit dem Abstand ab, aber gerade bei kleinen Abständen, wenn höhere Kopplungsterme ins Gewicht fallen, haben diese Moden einen nicht mehr zu vernachlässigenden Überlapp $\kappa_{q,p}$:

$$\kappa_{q,p} = \left\langle \psi_q^{(0)} \middle| \psi_p^{(0)} \right\rangle = \iint \psi_q^{(0)*}(x,y) \psi_p^{(0)}(x,y) dx dy. \quad (6.3)$$

Um die Nicht-Orthogonalität der individuellen Eigenmoden zu berücksichtigen, muss bei der Herleitung der gekoppelten Moden-Gleichungen in Gl. (4.35) anstatt dem Kronecker-delta $\delta_{q,p}$ jeweils $\kappa_{q,p}$ eingesetzt werden:

$$\left\langle \psi_q^{(0)} \middle| H_p \middle| \psi_p^{(0)} \right\rangle = -\delta_{q,p} \tilde{\lambda} \beta_p^{(0)} - \delta_{q,p} \underbrace{\sum_{r \neq p} \left\langle \psi_p^{(0)} \middle| \Delta n_r \middle| \psi_p^{(0)} \right\rangle}_{\tilde{\lambda} \beta_p^{(1)}} - \underbrace{\left\langle \psi_q^{(0)} \middle| \Delta n_q \middle| \psi_p^{(0)} \right\rangle}_{\tilde{\lambda} c_{q,p}} - \underbrace{\sum_{q \neq r \neq p} \left\langle \psi_q^{(0)} \middle| \Delta n_r \middle| \psi_p^{(0)} \right\rangle}_{\approx 0} \quad (6.4)$$

$$\xrightarrow{\delta_{q,p} \rightarrow \kappa_{q,p}} = -\kappa_{q,p} \tilde{\lambda} \left(\beta_p^{(0)} + \beta_p^{(1)} \right) - \tilde{\lambda} c_{q,p} \quad (6.5)$$

Damit lässt sich die gekoppelte Moden-Gleichung (6.1) unter Berücksichtigung der Nicht-Orthogonalität wie folgt schreiben [26, 61, 62]:

$$-i \mathbf{\kappa} \partial_z \vec{u} = (\mathbf{\kappa} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{c}) \vec{u}. \quad (6.6)$$

Diese Gleichung beschreibt nun das System zwar akkurater, allerdings mit der zusätzlichen Matrix $\mathbf{\kappa}$ und nach wie vor in der nicht-orthogonalen Basis der individuellen Eigenmoden $\psi^{(0)}$. Daher wird nun eine Basis-Transformation durchgeführt, sodass $\mathbf{\kappa}$ in der neuen Basis der Einheitsmatrix entspricht. Nach der Definition von $\kappa_{q,p}$ bilden die neuen Basisvektoren damit eine normierte und orthogonale Basis.

Die Transformationsmatrix \mathbf{T} in die neue orthogonale Basis $\vec{b} = \mathbf{T} \vec{u}$ ist durch die Wurzel¹ von $\mathbf{\kappa} = \mathbf{T}^\dagger \mathbf{T}$ gegeben. Durch Einsetzen von $\mathbf{\kappa} = \mathbf{T}^\dagger \mathbf{T}$ in Gl. (6.6) folgt mit einigen Umformungen [63]:

$$-i \mathbf{T}^\dagger \mathbf{T} \partial_z \vec{u} = (\mathbf{T}^\dagger \mathbf{T} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{c}) \vec{u} \quad (6.7)$$

$$-i \mathbf{T}^\dagger \partial_z \mathbf{T} \vec{u} = (\mathbf{T}^\dagger \mathbf{T} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{c}) \mathbf{T}^{-1} \mathbf{T} \vec{u} \quad (6.8)$$

$$\xrightarrow{\vec{b} = \mathbf{T} \vec{u}} -i \mathbf{T}^\dagger \partial_z \vec{b} = (\mathbf{T}^\dagger \mathbf{T} \boldsymbol{\beta} \mathbf{T}^{-1} + \mathbf{c} \mathbf{T}^{-1}) \vec{b} \quad (6.9)$$

$$\xrightarrow{\mathbf{T}^\dagger \rightarrow \mathbf{1}} -i \mathbf{T}^{\dagger-1} \mathbf{T}^\dagger \partial_z \vec{b} = (\mathbf{T}^{\dagger-1} \mathbf{T}^\dagger \mathbf{T} \boldsymbol{\beta} \mathbf{T}^{-1} + \mathbf{T}^{\dagger-1} \mathbf{c} \mathbf{T}^{-1}) \vec{b} \quad (6.10)$$

$$-i \partial_z \vec{b} = \left(\underbrace{\mathbf{T} \boldsymbol{\beta} \mathbf{T}^{-1}}_{\stackrel{\text{def.}}{=} \tilde{\boldsymbol{\beta}}} + \underbrace{\mathbf{T}^{\dagger-1} \mathbf{c} \mathbf{T}^{-1}}_{\stackrel{\text{def.}}{=} \tilde{\mathbf{c}}} \right) \vec{b} \quad (6.11)$$

$$-i \partial_z \vec{b} = (\tilde{\boldsymbol{\beta}} + \tilde{\mathbf{c}}) \vec{b}. \quad (6.12)$$

Nach Gl. (6.11) ergeben sich die korrigierten Kopplungskonstanten $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{T}^{\dagger-1} \mathbf{c} \mathbf{T}^{-1}$ und Propagationskonstanten $\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{T} \boldsymbol{\beta} \mathbf{T}^{-1}$. Da alle Wellenleiter der Kette äquivalent sind, ist $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ sowie $\boldsymbol{\beta}$ proportional zur Einheitsmatrix und bei $\tilde{\mathbf{c}}$ sowie bei \mathbf{c} sind jeweils die Elemente auf den Nebendiagonalen gleich². Von den Nebendiagonalen von $\tilde{\mathbf{c}}$ können die korrigierten Kopplungskonstanten \tilde{c}_μ entnommen werden. Diese Korrektur sorgt dafür, dass \tilde{c}_1 negativ ist. Um die korrigierten Werte besser mit andern Arbeiten zu vergleichen, werden im

¹Da $\mathbf{\kappa}$ eine symmetrische positiv definite Matrix ist, ist die Quadratwurzel eindeutig definiert.

²Für das explizite Ausrechnen der Kopplungen wurde eine endliche Kette mit periodischen Randbedingungen angenommen.

Folgendes die Werte von \tilde{c} alle relativ zum Vorzeichen von \tilde{c}_1 betrachtet. Dadurch ist im Einklang zur häufig verwendeten Konvention die Kopplung zum nächsten Nachbarn positiv $\tilde{c}_1 \stackrel{!}{>} 0$ [49–52]. Diese korrigierten Kopplungskonstanten sind in Abb. 6.1 (b) als durchgezogene Linien eingezeichnet.

Durch die Korrektur ergeben sich im Vergleich zu \tilde{c}_1 teilweise negative Kopplungskonstanten. So folgt beispielsweise im Gegensatz zu Gl. (6.2), dass \tilde{c}_2/\tilde{c}_1 für den Bereich $\alpha \lesssim 40^\circ$ negative Werte annimmt, dies wird auch im nächsten Abschnitt mit experimentellen Messungen belegt. Zudem sind die korrigierten Kopplungskonstanten nun nicht mehr ausschließlich vom Abstand zwischen den Wellenleitern abhängig, da \tilde{c}_1 nicht konstant ist, obwohl d_1 konstant gehalten wird.

Es ist zudem erwähnenswert, dass nach $\vec{b} = \mathbf{T}\vec{u}$ aus den Elementen von \mathbf{T} zusammen mit den individuellen Eigenmoden $\psi^{(0)}$ die Feldverteilung der neuen Basiszustände $\psi^{(1)}$ konstruiert werden können:

$$\psi_p^{(1)}(x, y) = \sum_q T_{q,p} \psi_q^{(0)}(x, y) \quad (6.13)$$

Die Feldverteilungen von $\psi^{(0)}$ und $\psi^{(1)}$ sind in Abb. 6.2 gegenübergestellt. Beide Verteilungen fallen exponentiell mit dem Abstand ab, aber bei $\psi^{(1)}$ ist zudem ein oszillierendes Verhalten mit Periodenlängen von $\approx 2d_1$ zu erkennen. Durch diese teilweise negativen Feldverteilungen ist ersichtlich, dass die Kopplungen, die sich aus dem Überlappintegral mit den neuen Basiszuständen ergeben, ebenfalls teilweise negative Werte annehmen:

$$\tilde{c}_{q,p} = \left\langle \psi_q^{(1)} \left| \frac{\Delta n_q}{\lambda} \right| \psi_p^{(1)} \right\rangle = \frac{1}{\lambda} \iint \psi_q^{(1)*}(x, y) \Delta n_q(x, y) \psi_p^{(1)}(x, y) dx dy. \quad (6.14)$$

Die konstruierten Feldverteilungen $\psi^{(1)}$ besitzen drei charakteristische Eigenschaften: Sie sind räumlich lokalisiert, sie sind durch Translation ineinander überführbar: $\psi_p^{(1)}(x + 2d_x, y) = \psi_{p+2}^{(1)}(x, y)$, und sie bilden eine vollständige orthogonale Basis für den Raum der Moden, die von der Wellenleiterstruktur geführt werden: $\iint \psi_q^{(1)*} \psi_p^{(1)} dx dy = \delta_{q,p}$. Diese drei charakteristischen Eigenschaften teilen die $\psi^{(1)}$ mit den Wannier-Funktionen, den Fourier-transformierten der Blochzustände. Dadurch sind die $\psi^{(1)}$ eine bessere Näherung für die Wannier-Funktionen als die $\psi^{(0)}$ und können daher das System besser beschreiben. Auf die Wannier-Funktionen und wie sich die Topologie des Systems auf diese auswirkt wird in Kapitel 7 noch genauer eingegangen.

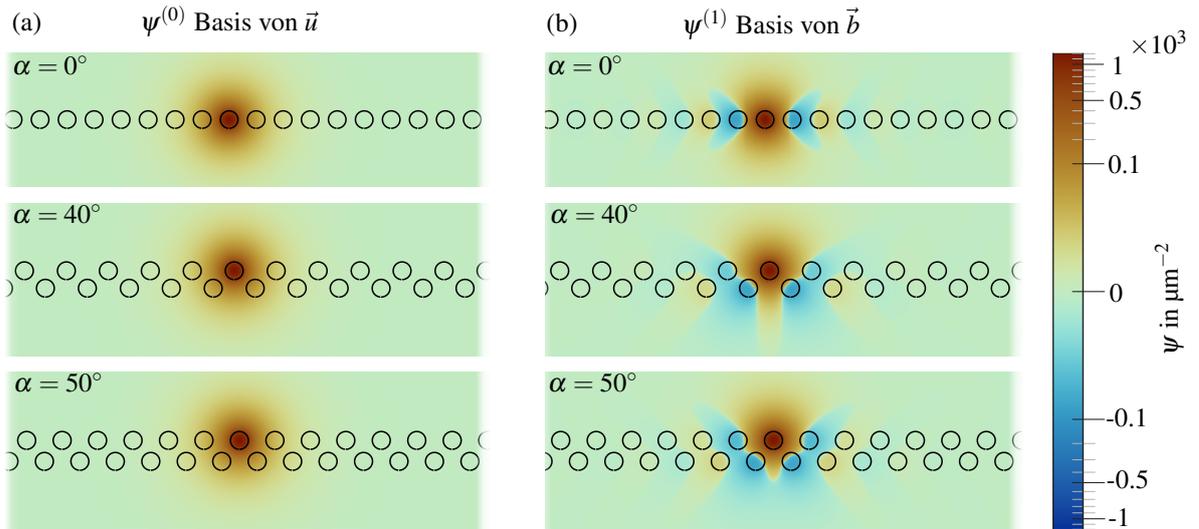


Abbildung 6.2: Normalisierte räumliche Feldverteilung der Basiszustände für unterschiedlich angewinkelte Wellenleiterketten. (a) Die ursprünglichen Basiszustände $\psi^{(0)}$ sind rein positiv und werden durch nahe gelegene Wellenleiter nicht beeinflusst. (b) Im Gegensatz dazu bilden die neuen Zustände $\psi^{(1)}$ eine orthogonale Basis. Die räumlichen Felddichten $\psi^{(1)}$ werden durch die Überlagerungen der ursprünglichen Eigenmoden $\psi^{(0)}$, gewichtet mit den Matrixelementen von \mathbf{T} , berechnet.

6.4 Experimentelle Demonstration von negativen c_2 -Kopplungen

Um experimentell zu demonstrieren, dass c_2 negative Werte annehmen kann, wurde die Probe in Abb. 6.3 mit dem direkten Schreib-Verfahren, welches in Kapitel 5.2 vorgestellt wurde, hergestellt. In dieser Probe sind verschiedene angewinkelte Wellenleiterketten enthalten, von denen beispielhaft die Ketten mit $\alpha = 0^\circ$ für $c_2 < 0$, $\alpha = 40^\circ$ für $c_2 \approx 0$ und $\alpha = 50^\circ$ für $c_2 > 0$ entsprechend der Vorhersage der nicht-orthogonalen gekoppelten Moden-Gleichungen betrachtet werden.

Wie in Kapitel 4.3.2 gezeigt, lässt sich die Entwicklung der Feldverteilung analytisch beschrieben, wenn zu Beginn, bei $z = 0$, nur in den zentralen Wellenleiter eingekoppelt wird. Dies lässt sich auch für eine Kette mit Kopplungen bis zum M -ten Nachbarn verallgemeinern [64]. Im vereinfachten Fall, dass $M = 2$, lässt sich die Entwicklung der Feldverteilung im n -ten Wellenleiter $u_n(z)$ wie folgt angeben:

$$u_n(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^{(n-m)} \mathcal{J}_{n-2m}(2c_1z) \mathcal{J}_m(2c_2z). \quad (6.15)$$

Basierend auf dieser Gleichung sind die in Abb. 6.4 (a) dargestellten Intensitätsverteilungen berechnet worden. Die Verteilungen sehen bei $c_2 = \pm 0.2$ gleich aus und laufen nur etwas weiter auseinander als bei $c_2 = 0$. Das negative Vorzeichen von c_2 zeigt sich daher nicht unbedingt in der Intensitätsverteilung, da es lediglich die Phasenverteilung beeinflusst. Damit werden zwei Schwierigkeiten bezüglich der experimentellen Demonstration einer negativen c_2 -Kopplung deutlich. Einerseits muss aus den im Experiment zugänglichen Intensitätsverteilungen eine Information über die Phase extrahiert werden. Andererseits wird der Einfluss, welchen die c_2 -Kopplung auf die Entwicklung hat, stets von dem Einfluss der betragsmäßig viel größeren c_1 -Kopplung überlagert.

Nach dem in Kapitel 4.3.2 vorgestellten Prinzip ergibt sich die Dispersionsrelation $\beta(k_x)$ für eine Kette

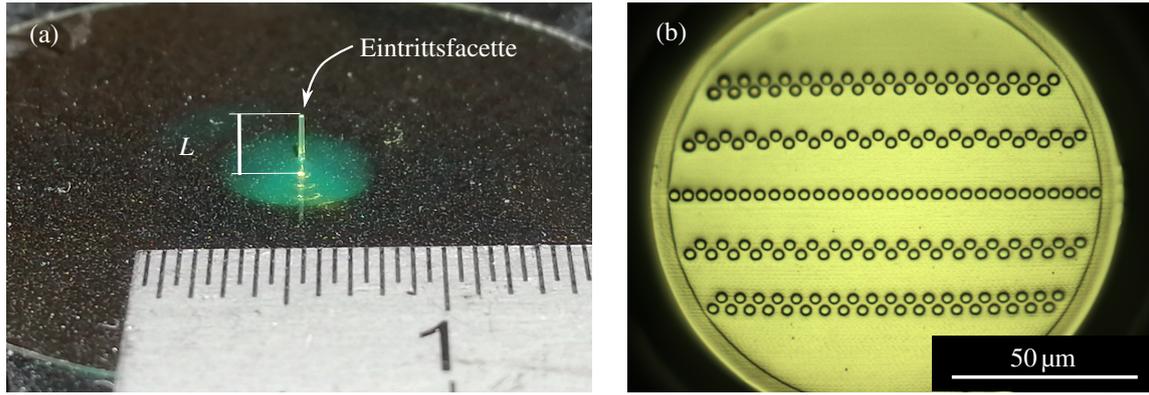


Abbildung 6.3: (a) Foto der hergestellten Wellenleiterstruktur mit einem 1 cm Maßstab. (b) Lichtmikroskopbilder der Eintrittsfacette der hergestellten Struktur mit fünf angewinkelten Ketten von gekoppelten Wellenleitern mit $\alpha = 45^\circ, 30^\circ, 0^\circ, 40^\circ, 50^\circ$. Der Radius eines Wellenleiters ist $1.3 \mu\text{m}$, der Abstand von Mitte zu Mitte zum nächsten Wellenleiter ist $d_1 = 4 \mu\text{m}$ und die Propagationslänge ist $L = 2 \text{ mm}$.

unter Berücksichtigung aller Kopplungen bis zum M -ten Nachbarn [20, 57, 64]:

$$\beta(k_x) = 2 \sum_{\mu=1}^M c_\mu \cos(\mu k_x d_x) \quad (6.16)$$

$$\xrightarrow{M=2} \beta(k_x) = 2c_1 \cos(k_x d_x) + 2c_2 \cos(2k_x d_x). \quad (6.17)$$

Die Dispersionsrelation von Gl. (6.17) ist in Abb. 6.4 (b) für $c_1 = 1$ und verschiedene c_2 dargestellt. Das negative Vorzeichen von c_2 ist daher in der Bandstruktur $\beta(k_x)$ klar erkennbar.

Im vorhandenen Wellenleiter-Experiment gibt es jedoch nicht die Möglichkeit, die Bandstruktur direkt abzubilden. Um trotzdem Informationen über die Bandstruktur zu extrahieren, wird die Entwicklung eines Wellenpakets mit einem definierten k_x betrachtet. Dafür wird Licht in mehrere Wellenleiter über die Eintrittsfacette der Struktur eingekoppelt, wobei benachbarte Wellenleiter einem Phasenversatz von $\Delta\varphi = k_x d_x$ zueinander haben [65]. Um ein Wellenpaket einzukoppeln, welches eine annähernd gaußförmige Intensitätsverteilung hat, wird eine normierte Binomialverteilung der Breite $b = 7$ für die Amplitude verwendet. Damit lässt sich die einzukoppelnde Feldverteilung a_n am Anfang der Propagation vorgeben:

$$a_n = \sqrt{\frac{1}{2^{(b-1)}} \binom{n + \lfloor \frac{b}{2} \rfloor}{b}} \exp(in\Delta\varphi) \stackrel{b=7}{=} \sqrt{\frac{1}{2^6} \binom{n+3}{7}} \exp(in\Delta\varphi) \quad (6.18)$$

Da das System sich linear verhält, lässt sich die Entwicklung des Wellenpakets als Superposition bekannter Lösungen berechnen. Dafür wird das Anfangsfeld a_n mit der Entwicklung nach Gl. (6.15), bei der nur in den zentralen Wellenleiter eingekoppelt wird, gefaltet:

$$u_n(z) = a_n \otimes \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} i^{(n-m)} \mathcal{J}_{n-2m}(2c_1 z) \mathcal{J}_m(2c_2 z) \right) \quad (6.19)$$

$$= \sum_{l=-\lfloor b/2 \rfloor}^{+\lfloor b/2 \rfloor} a_l \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^{(n-m-l)} \mathcal{J}_{n-2m-l}(2c_1 z) \mathcal{J}_m(2c_2 z). \quad (6.20)$$

Mit Gl. (6.20) ergeben sich die in Abb. 6.4 (c) dargestellten Intensitätsverteilungen für eine Kette von Wellenleitern mit positiver Kopplung $c_1 = 1$ und negativer Kopplung $c_2 = -0.2$. Wird in diese Kette ein Wellenpaket mit $\Delta\varphi = 0$ eingekoppelt, werden hauptsächlich Moden mit $k \approx 0$, also Moden in der Mitte der Brillouin-

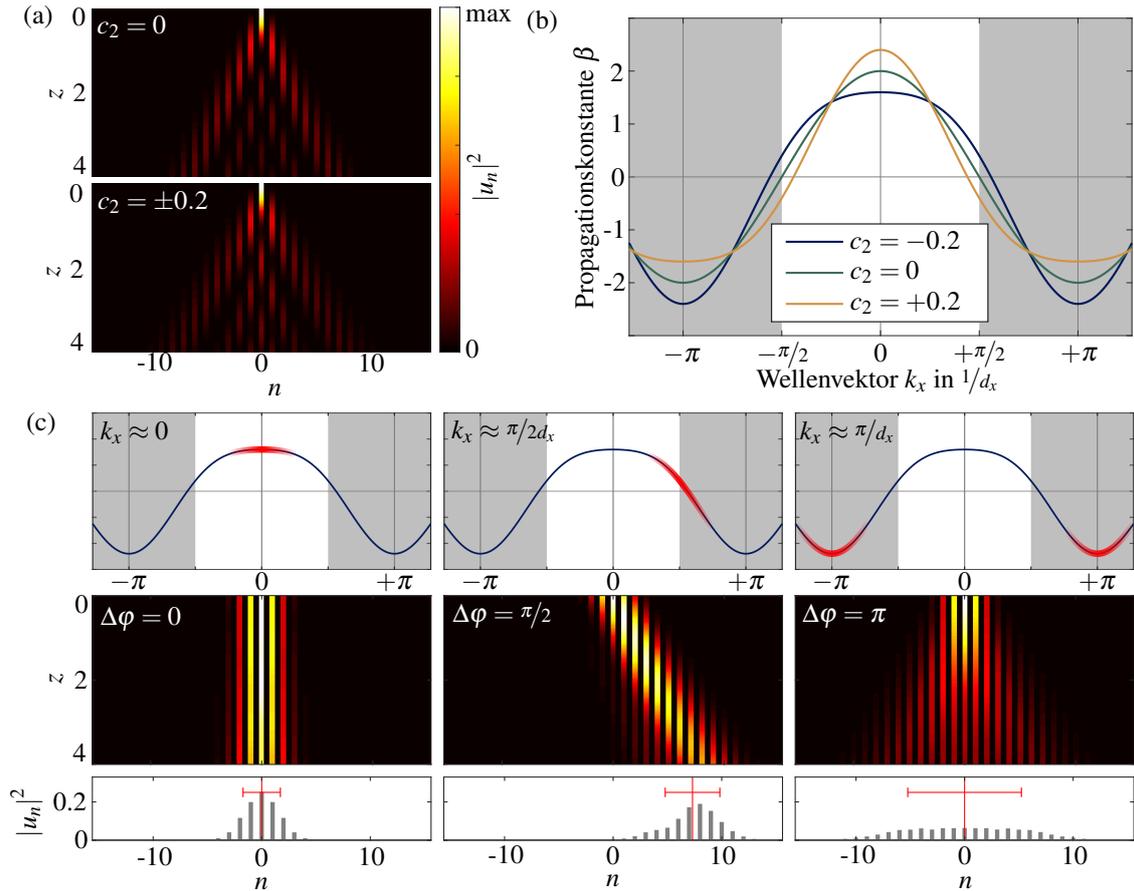


Abbildung 6.4: (a) Propagation durch eine Kette von Wellenleitern mit $c_1 = 1$ wenn zu Beginn, bei $z = 0$, nur in den zentralen Wellenleiter Licht eingekoppelt wird. Das Vorzeichen von c_2 hat keinen Einfluss auf die Intensitätsverteilung. (b) Bandstruktur einer Kette mit Kopplung $c_1 = 1$ und verschiedenen Werten von c_2 . (c) Propagation eines gaußförmigen Wellenpakets in einer Kette mit $c_1 = 1$ und $c_2 = -0.2$ nach Gl. (6.20). Abhängig von dem Phasenunterschied $\Delta\phi$ beim Einkoppeln zwischen benachbarten Wellenleitern wird nur ein bestimmter Teil der Moden im Impulsraum besetzt. In den unteren Diagrammen sind die Intensitätsverteilungen nach der Propagation sowie deren Mittelwerte und Standardabweichungen aufgetragen.

Zone (BZ), angeregt. Aufgrund der flachen Dispersionsrelation bleibt das Wellenpaket am gleichen Ort und zerläuft kaum. Bei $\Delta\phi = \pi/2$, also einem Wellenpaket mit $k \approx \pi/2d_x$, verschiebt sich der Schwerpunkt der Verteilung wegen der schrägen Dispersionsrelation mit konstanter Geschwindigkeit über die Propagationsstrecke. Bei $\Delta\phi = \pi$, einem Wellenpaket am dem Rand der BZ, läuft das Wellenpaket aufgrund der starken Krümmung der Dispersionsrelation auseinander.

Qualitativ ausgedrückt gibt der Schwerpunkt der Verteilung, also der Mittelwert \bar{n} , Auskunft über die Gruppengeschwindigkeit des Wellenpakets und damit die erste Ableitung der Dispersionsrelation. Analog lässt sich die Divergenz des Wellenpakets über die Standardabweichung σ_n quantifizieren. Die Standardabweichung steigt dabei proportional zum Betrag der zweiten Ableitung der Dispersionsrelation über die Propagationsstrecke an [19]. Die Standardabweichung σ_n hat dabei mindestens den Wert der Standardabweichung σ_a der Feldverteilung a_n , die eingekoppelt wird. Explizit auf die Bandstruktur mit $c_1 \neq 0$ und $c_2 \neq 0$ von Gl. (6.17) bezogen ergeben sich die folgenden Proportionalitäten für \bar{n} und σ_n für Wellenpakete mit k_x nach einer gewissen

Propagationsstrecke:

$$\bar{n}(k_x) = \langle n | u_n(k_x) |^2 \rangle \propto \frac{\partial \beta(k_x)}{\partial k_x} \stackrel{(6.17)}{=} -2d_x c_1 \sin(k_x d_x) - 4d_x c_2 \sin(2k_x d_x), \quad (6.21)$$

$$\sigma_n(k_x) = \sqrt{\langle (n - \bar{n}(k_x))^2 | u_n(k_x) |^2 \rangle} \propto \left| \frac{\partial \beta^2(k_x)}{\partial^2 k_x} \right| + \sigma_a \stackrel{(6.17)}{=} |-2d_x^2 c_1 \cos(k_x d_x) - 8d_x^2 c_2 \cos(2k_x d_x)| + \sigma_a. \quad (6.22)$$

Wie in Abb. 6.4 (b) erkennbar ist, gibt es insbesondere am Rand und in der Mitte der BZ deutliche Unterschiede in der Krümmung der Dispersionsrelation für $c_2 > 0$ und $c_2 < 0$. Wie in Abb. 6.4 (c) zu sehen ist, zeigt sich die Krümmung an diesen Stellen in der BZ ebenso deutlich in der Divergenz des Wellenpakets. Die Differenz der Standardabweichungen dieser beiden Wellenpakete kann daher Aufschluss über die Stärke und das Vorzeichen von c_2 geben:

$$\sigma_n(0) - \sigma_n(\pi/d_x) \propto \left(2d_x^2 |-c_1 - 4c_2| + \sigma_a \right) - \left(2d_x^2 |c_1 - 4c_2| + \sigma_a \right) \quad (6.23)$$

$$\stackrel{|c_1| \geq 4|c_2|}{=} 2d_x^2 (c_1 + 4c_2 - c_1 + 4c_2) = 16 d_x^2 c_2. \quad (6.24)$$

Wie Gl. (6.24) zeigt, heben sich bei diesem Vergleich die Einflüsse von c_1 und σ_a auf. Zudem ist der Einfluss, den c_2 auf σ_n hat, um ein Vierfaches gegenüber dem Einfluss von c_1 verstärkt, da die zweite Ableitung der Dispersionsrelation betrachtet wird. Zusammenfassend kann festgehalten werden: Wenn $\sigma_n(0) < \sigma_n(\pi/d_x)$ ist $c_2 < 0$ und wenn $\sigma_n(0) > \sigma_n(\pi/d_x)$ ist auch $c_2 > 0$.

Basierend auf diesen Vergleichen wurden Wellenpakete mit verschiedenen $\Delta\varphi$ in die hergestellten Strukturen eingekoppelt. Dafür wurde Laserlicht mit einer Wellenlänge von 600nm verwendet. Das Licht wurde über ein SLM-Hologramm so manipuliert, dass die gewünschte Feldverteilung über mehrere Fokuspunkte mit einem relativen Phasenversatz von $\Delta\varphi$ auf der Eintrittsfläche der Struktur in die Wellenleiter eingekoppelt wurde. Die Intensitätsverteilungen an der Austrittsfläche der Struktur wurden mit einer CMOS-Kamera aufgenommen und sind für die Fälle $\Delta\varphi = 0$ und $\Delta\varphi = \pi$ in Abb. 6.5 (a) dargestellt. Dabei zeigt sich, wie mit den nicht-orthogonalen Moden vorhergesagt, dass die Kopplung c_2 bei $\alpha = 0^\circ$ negativ sein muss, da das Wellenpaket am Rand der BZ stärker divergiert als das Wellenpaket im Zentrum der BZ. Umgekehrtes Verhalten zeigt sich bei der Messung mit $\alpha = 50^\circ$, bei der demnach die Kopplung c_2 positiv sein muss. Die kleinste Differenz ist, ebenfalls wie vorhergesagt, bei $\alpha = 40^\circ$ zu finden, wobei c_2 hierbei etwas zum Negativen tendiert.

Die Standardabweichungen der Intensitätsverteilungen bei den anderen präparierten Phasendifferenzen sind in Abb. 6.5 (b) zusammengefasst. Diese Verläufe weichen aus zwei Gründen von Gl. (6.22) ab. Erstens gibt Gl. (6.22) die Divergenz eines Wellenpakets mit einem Wellenvektor an, aber da die eingekoppelte Feldverteilung a_n eine endliche Ausdehnung hat, werden auch andere Moden mit ähnlichen Wellenvektoren angeregt. Zweitens gewinnen insbesondere bei $\alpha = 40^\circ$ und $\alpha = 50^\circ$ höhere Kopplungsterme wie c_3 und c_4 an Gewicht, die in Gl. (6.22) nicht berücksichtigt werden. Mit der Berücksichtigung der Nicht-Orthogonalität der Moden ergeben sich für $\alpha = 40^\circ$ Kopplungsverhältnisse von $|\tilde{c}_3/\tilde{c}_1| < 3\%$ und $|\tilde{c}_4/\tilde{c}_1| < 0.3\%$ und bei $\alpha = 50^\circ$ von $|\tilde{c}_3/\tilde{c}_1| < 8\%$ und $|\tilde{c}_4/\tilde{c}_1| < 0.6\%$.

Für einen geeigneten Vergleich werden basierend auf den gekoppelten Moden-Gleichungen die Intensitätsverteilungen vorhergesagt und analog zu den Kameraaufnahmen ausgewertet. Für die Vorhersage werden die diskreten Zustände nach der Propagation $\vec{u}(z=L)$ mit den individuellen Eigenmoden der Wellenleiter $\psi^{(0)}$ gefaltet, um die räumliche Feldverteilung zu erhalten. Für die Berechnungen wurde ein Brechungsindexkontrast von $\Delta n = 6 \cdot 10^{-3}$ zwischen n_{wg} und n_c angenommen. Bei der Vorhersage in Abb. 6.5 (c) wurde bei den gekoppelten Moden-Gleichungen die Nicht-Orthogonalität der Moden vernachlässigt und die Kopplungsmatrix \mathbf{c} verwendet. Bei der Vorhersage in Abb. 6.5 (d) hingegen wurde mit der korrigierten Kopplungsmatrix $\tilde{\mathbf{c}}$ gearbeitet und damit durch teilweise negative Kopplungen die Nicht-Orthogonalität berücksichtigt.

Die gemessenen Intensitätsverteilungen zeigen eine leicht geringere Divergenz der Wellenpakete als die

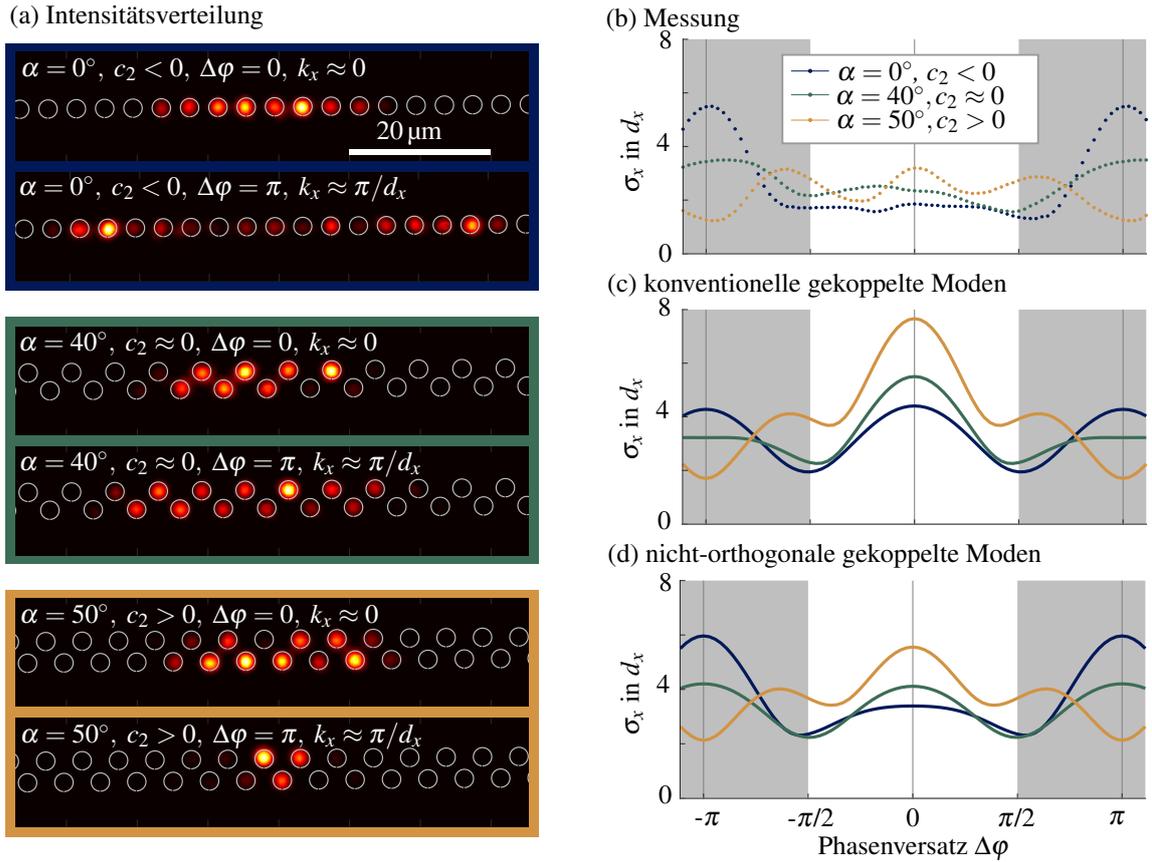


Abbildung 6.5: (a) Gemessene Intensitätsprofile an der Austrittsfläche der Wellenleiterstruktur [66]. Die Intensitätsprofile sind auf ihren jeweiligen Maximalwert normiert. Eine stärkere Dispersion des Wellenpakets am Rand der Brillouin-Zone bei $k_x = \pi/d_x$ im Vergleich zu einem in der Mitte bei $k_x = 0$ weist auf eine negative c_2 -Kopplung hin. Der Brechungsindexkontrast des Wellenleiters zum umgebenden Material ist ungefähr $\Delta n = 0.006$ und die verwendete Wellenlänge ist 600 nm. (b-d) Ein Wellenpaket wird in eine Kette von Wellenleitern mit $c_2 < 0, \alpha = 0^\circ$; $c_2 \approx 0, \alpha = 40^\circ$ bzw. $c_2 > 0, \alpha = 50^\circ$ eingekoppelt. Die Standardabweichung des Wellenpakets mit dem Phasenversatz $\Delta\varphi$ nach einer Propagationslänge von 2 mm ist (b) aus der gemessenen Intensitätsverteilung extrahiert, (c) über die konventionellen gekoppelten Moden-Gleichungen mit der Matrix \mathbf{c} berechnet und (d) unter Berücksichtigung der Nichtorthogonalität mit der Matrix $\tilde{\mathbf{c}}$ berechnet.

gekoppelten Moden-Gleichungen vorhersagen. Dieser Unterschied wurde vermutlich durch einen zu gering abgeschätzten Brechungsindexkontrast verursacht. Die Messung ist zudem leicht asymmetrisch, was einerseits durch unterschiedlich gutes Einkoppeln von Licht in die verschiedenen Wellenleiter hervorgerufen werden könnte. Andererseits könnte dies auch durch Herstellungsfehler beim DLW-Prozess, wie zum Beispiel Vignettierung oder den Proximity-Effekt [36] verursacht worden sein.

Trotz dieser Anomalien ist qualitativ zu erkennen, dass die Messung (b) größere Ähnlichkeit zu der Vorhersage (d) mit teilweise negativen Kopplungen hat als zu (c), in der alle Kopplungen strikt positiv sind. Insbesondere bei $\alpha = 0^\circ$ kann die negative c_2 -Kopplung, die sich auch in der Messung zeigt, nur mit der Nicht-Orthogonalität beschrieben werden.

6.5 Übergang zu einem freien Teilchen

Dass die c_2 -Kopplung in einer gerade Kette negative Werte annimmt, kann auch auf eine intuitive Weise verstanden werden. Je näher sich die Wellenleiter kommen, desto größer werden die Kopplungskonstanten und desto wichtiger werden auch höhere Kopplungsterme. Gleichzeitig wird das System zunehmend ähnlicher zu einem freien Teilchen, welches in Richtung der Kette nicht eingeschränkt ist. Daher muss sich die Dispersionsrelation im Grenzfall für kleine Abstände zwischen den Wellenleitern derjenigen eines freien Teilchens bzw. von Licht in einem homogenen Medium annähern, wie in Abb. 6.6 dargestellt. In diesem Grenzfall ergibt sich für Licht, welches in einem homogenen Medium mit Brechungsindex n_{wg} geführt wird, nach der paraxialen Näherung ($k_x \ll k_z$) eine Dispersionsrelation, die quadratisch mit k_x ansteigt [19]

$$\beta(k_x) = \sqrt{k_0^2 n_{\text{wg}}^2 - k_x^2} \approx k_0 n_{\text{wg}} - \frac{k_x^2}{2k_0 n_{\text{wg}}}. \quad (6.25)$$

Im anderen Grenzfall, in dem das Licht stark an die Wellenleiter gebunden ist, kann die Dispersionsrelation von Lichts in einer Kette von Wellenleitern allgemein mit den Kopplungen bis zum M -ten Nachbarn angegeben werden [64]:

$$\beta(k_x) = 2 \sum_{\mu=1}^M c_\mu \cos(\mu k_x d_x). \quad (6.26)$$

An dieser Stelle wird ausgenutzt, dass $\sqrt{d_x/\pi} \cos(\mu k_x d_x)$ mit $\mu \in \mathbb{N}_{>0}$ eine (unvollständige) orthogonale Basis für den Raum der symmetrischen und d_x -periodischen Funktionen darstellt, wobei das Integral über die BZ als Skalarprodukt fungiert:

$$\frac{d_x}{\pi} \int_{-\pi/d_x}^{\pi/d_x} \cos(\mu_1 k_x d_x) \cos(\mu_2 k_x d_x) dk_x = \delta_{\mu_1, \mu_2}. \quad (6.27)$$

Anders ausgedrückt können die Kopplungen c_μ als Integrale von $\beta(k_x)$ über die BZ bestimmen werden. Wird dabei für $\beta(k_x)$ die Dispersionsrelation eines freien Teilchens eingesetzt, ergeben sich die Kopplungskonstanten, die für diesen Grenzfall zu erwarten sind:

$$c_\mu = \frac{d_x}{2\pi} \int_{-\pi/d_x}^{\pi/d_x} \beta(k_x) \cos(\mu k_x d_x) dk_x \quad (6.28)$$

$$\xrightarrow{\beta(k_x)=\text{Gl. (6.25)}} = \frac{d_x}{2\pi} \int_{-\pi/d_x}^{\pi/d_x} \left(k_0 n_{\text{wg}} - \frac{k_x^2}{2k_0 n_{\text{wg}}} \right) \cos(\mu k_x d_x) dk_x \quad (6.29)$$

$$= \frac{d_x}{2\pi} k_0 n_{\text{wg}} \underbrace{\int_{-\pi/d_x}^{\pi/d_x} \cos(\mu k_x d_x) dk_x}_{=0} - \frac{d_x}{2\pi} \frac{1}{2k_0 n_{\text{wg}}} \int_{-\pi/d_x}^{\pi/d_x} k_x^2 \cos(\mu k_x d_x) dk_x \quad (6.30)$$

$$= - \frac{d_x}{4\pi k_0 n_{\text{wg}}} \frac{4\pi \mu \cos(\mu \pi)}{d_x^2 \mu^2} \stackrel{\mu \in \mathbb{N}}{=} - \frac{1}{d_x^2 k_0 n_{\text{wg}}} \frac{(-1)^\mu}{\mu^2} \quad (6.31)$$

Damit ergibt sich für diesen Grenzfall, dass $c_2/c_1 = -1/4$ ist. Solange eine gerade Anordnung äquivalenter Wellenleiter betrachtet wird, stellt damit $-1/4$ die untere Grenze für das Verhältnis dieser Kopplungskonstanten dar [66]. Werden keine äquivalenten Wellenleiter betrachtet, sondern die Propagationskonstanten gegeneinander verstimmt, können auch höhere negative Kopplungen realisiert werden, wie in Ref. [49, 51] oder Kapitel 7 diskutiert.

Im Bild eines quasi-freien Teilchens kann auch verstanden werden, warum in Abb. 6.1 (b) bei $\alpha = 60^\circ$ nach den nicht-orthogonalen Moden-Gleichungen $|c_1| < |c_2|$, obwohl in diesem Fall $d_1 = d_2$. Die Kopplung c_2 wirkt stets in x -Richtung entlang der Kette, während c_1 bei großen α zunehmend in y -Richtung wirkt. Im Grenzfall kleiner Abstände wird das Potenzial zunehmend ähnlicher zu einem in x -Richtung unendlich ausgedehnten

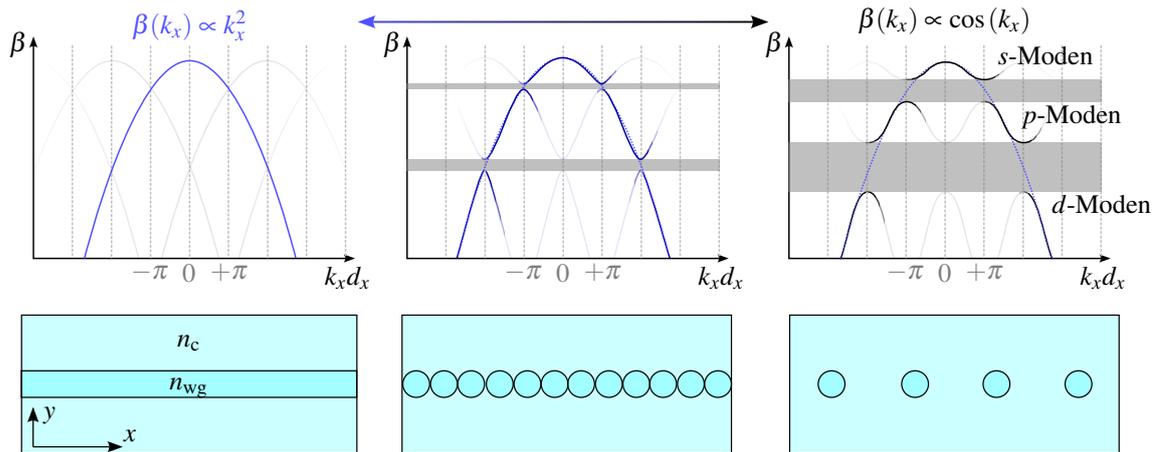


Abbildung 6.6: Schematische Dispersionsrelationen für Wellenleiterstrukturen mit den darunter dargestellten Querschnitten. Im Grenzfall von kleinen Abständen zwischen den Wellenleitern muss die Dispersionsrelation einer Kette zunehmend ähnlicher zu derjenigen eines freien Teilchens werden. Im Fall rechts, in dem die Wellenleiter weit voneinander entfernt sind, ergibt sich eine Bandstruktur, bei welcher der Einfluss der c_1 -Kopplung dominiert. Die Bänder haben eine $\cos(k_x d_x)$ -Form. Im Fall links ist das Licht in x -Richtung nicht mehr eingeschränkt. Entsprechend verhält sich das Licht wie ein freies Teilchen und hat eine parabelförmige Dispersionsrelation. Der Fall dazwischen, in dem höhere Kopplungsterme relevant werden, muss diese beiden Grenzfälle stetig miteinander verbinden (nach [14]).

Kastenpotenzial. Das Licht kann sich daher einfacher in x -Richtung als in y -Richtung ausbreiten, was sich darin niederschlägt, dass $|c_1| < |c_2|$ ist.

Fazit

In diesem Kapitel wurden die Kopplungen zu weiter entfernten Wellenleitern genauer betrachtet und durch die nicht-orthogonalen gekoppelten Moden-Gleichungen akkurat beschrieben. Dabei wurde experimentell gezeigt und erklärt, dass die Kopplungen zum übernächsten Nachbarn c_2 im Vergleich zu c_1 negative Werte annehmen können. Durch die Anordnung in einer angewinkelten Kette kann über den Winkel α die c_2 -Kopplung kontinuierlich vom Negativen ins Positive variiert werden. Diese Erkenntnisse könnten einerseits für experimentelle Plattformen interessant sein. Wenn explizit der Winkel verwendet wird, bei dem $c_2 \approx 0$ ist, könnten die Gitterpunkte im Experiment näher zusammen positioniert und damit größere c_1 -Kopplungen genutzt werden, ohne ggf. ungewollte Effekte von c_2 -Kopplungen in Kauf nehmen zu müssen. Andererseits könnte in theoretischen Modellen explizit der Bereich des Parameterraums, in dem $c_2 < 0$ ist, auf interessante Phasen untersucht werden, da dieser Bereich auch in Experimenten durchaus zugänglich ist. Diese Erkenntnisse lassen sich wegen der breiten Anwendung der Tight-Binding-Näherung für diskrete Systeme auf einer Vielzahl von experimentellen Plattformen anwenden.

Während in diesem Kapitel gezeigt wurde, dass die Kopplung zum übernächsten Nachbarn negativ sein kann, wird im nächsten Kapitel explizit eine negative Kopplung zum nächsten Nachbarn konstruiert. Durch die Kopplung zwischen verschiedenen Moden lässt sich dadurch ein künstlicher magnetischer Fluss erzeugen, welcher, nach den Symmetrie-Bedingungen für die Realisierung eines Quadrupol-topologischen Isolators zwingend notwendig ist.

7. Realisierung eines Quadrupol-topologischen Isolators

In diesem Kapitel wird ein topologischer Isolator höherer Ordnung (HOTI engl. *higher order topological insulator*) betrachtet. Bei den meisten bisher untersuchten topologischen Isolatoren, besitzen die N -dimensionalen Systeme in der topologisch nicht-trivialen Phase geschützte $(N-1)$ -dimensionale Randzustände. Bei HOTIs sind die Randzustände hingegen um mehr als eine Dimension reduziert. In dem hier betrachteten Fall ist das System ein 2D-Gitter welches in der topologisch nicht-trivialen Phase geschützte 0D-Zustände besitzt. Die Invariante, welche hierbei die topologische Phase vorgibt, ist die Quadrupol-Polarisation. Um die aufeinander aufbauenden Konzepte bis zur Quadrupol-Polarisation zu erläutern ist das Kapitel in drei Abschnitte unterteilt.

Im ersten Abschnitt werden von Grund auf die Konzepte von Topologie und die Eigenschaften von topologischen Isolatoren erläutert. Anschließend werden die für die Topologie relevanten physikalischen Größen eingeführt und an Beispielen veranschaulicht. Im zweiten Abschnitt wird dann explizit auf die Theorie und die Eigenschaften des betrachteten Quadrupol topologischen Isolators eingegangen. Dabei werden die Rechnungen bis zur charakterisierenden topologischen Invariante und die nötigen Symmetrie-Bedingungen gezeigt. Im letzten Abschnitt geht es um die Umsetzung dieses Systems in einer Struktur aus gekoppelten dielektrischen Wellenleitern und den experimentellen Nachweis der topologischen Eigenschaften.

7.1 Topologische Systeme in der Physik

7.1.1 Topologie als Teilgebiet der Mathematik

Die Topologie an sich ist ein Teilgebiet der Mathematik, welches sich mit den Eigenschaften, die durch die Lage und Anordnung von Elementen in mathematischen Strukturen entstehen, beschäftigt. Als topologisch äquivalent oder homöomorph gelten dabei Strukturen, welche stetig durch Strecken, Stauchen, Verdrehen, etc. ineinander überführbar sind. Bei diesen stetigen Abbildungen bleiben die relativen Beziehungen der Elemente in den Strukturen und damit auch die topologischen Eigenschaften der Struktur erhalten. Bei einer solchen homöomorphen Abbildung muss daher die Umgebung aller Elemente erhalten bleiben und kann nicht auf mehrere separate Bereiche abgebildet werden. Das wohl bekannteste und anschaulichste Beispiel hierfür sind 2D Oberflächen im 3D-Raum. Unter homöomorphen Abbildungen können diese Flächen quasi gummiartig auseinandergezogen, komprimiert, verbogen verzerrt und verdrillt werden, ohne dass sich die lokale Umgebung der Punkte auf diesen Flächen ändert. Nach diesen Regeln kann zum Beispiel die Oberfläche einer Tasse homöomorph in die eines Torus überführt werden aber nicht in die einer Kugel oder einer Teekanne, wie in Abb. 7.1 (a) dargestellt. Für eine solche Verformung müsste anschaulich gesprochen die Oberfläche der Tasse an einer Stelle „aufgeschnitten“ und anders „zusammengeklebt“ werden. Allerdings ändert gerade dieses Aufschneiden und Zusammenkleben die Umgebung der Punkte an den Schnitt- bzw. Klebe-Kanten. In diesem geometrischen Beispiel ist die topologische Invariante, welche angibt, welche Oberflächen homöomorph sind, anschaulich durch die Anzahl der Löcher in der Struktur gegeben. Jedoch ist diese Invariante in abstrakteren Räumen nicht immer so offensichtlich, weshalb im Allgemeinen andere Hilfsmittel verwendet werden um die topologische Invariante zu ermitteln.

Eine Möglichkeit, Informationen über die Topologie der zugrundeliegenden Struktur zu erlangen, ist ge-

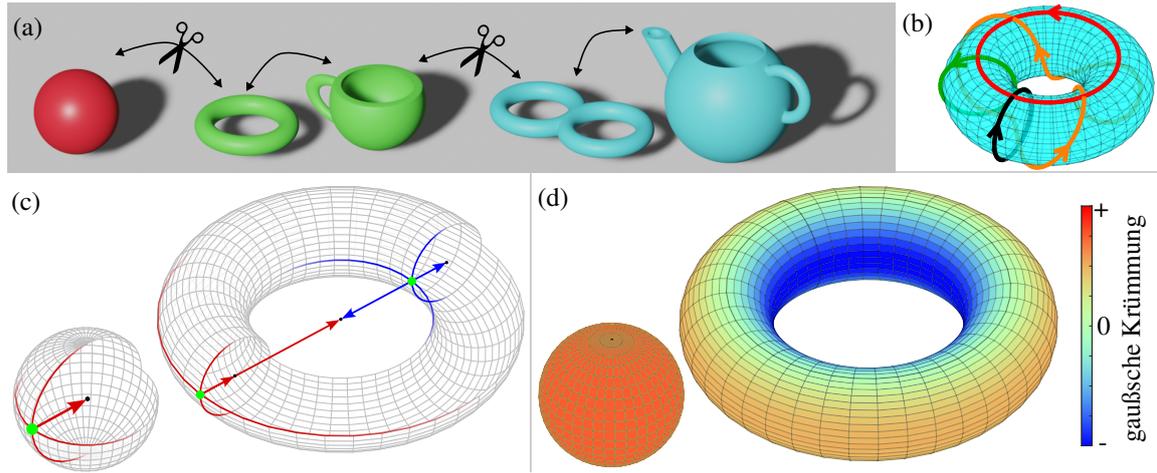


Abbildung 7.1: (a) 2D-Oberflächen im 3D-Raum. Homöomorphe Oberflächen sind mit der gleichen Farbe dargestellt und nicht-homöomorphe Verformungen sind mit einer Schere gekennzeichnet. (b) Verschiedene nicht-kontrahierbare Pfade auf einem Torus. Nur der orangene und der rote Pfad sind ineinander überführbar. (c) Eine Kugel und ein Torus. Für die drei grün markierten Punkte sind die Krümmungsradien als Pfeile eingezeichnet. Die roten (blauen) Pfeile gehören zu einer positiven (negativen) Gaußsche Krümmung. (d) Eine Kugel und ein Torus, auf denen farblich die Gaußsche Krümmung dargestellt ist.

geschlossene Pfade in diesen Strukturen zu betrachten. Um bei dem geometrischen Beispiel zu bleiben, werde ein beliebiger geschlossener Pfad auf der Oberfläche einer Kugel betrachtet. Dieser Pfad kann nach den Regeln der Topologie stetig auf der Oberfläche verformt oder verschoben werden. Wenn der Pfad auf einen beliebigen Punkt zusammengezogen werden kann, wird von einem kontrahierbaren Pfad gesprochen. Sind alle geschlossenen Pfade kontrahierbar, wie in dem Fall der Oberfläche einer Kugel, dann wird von einem einfach zusammenhängenden Gebiet gesprochen. Die Oberfläche eines Torus hingegen ist nicht einfach zusammenhängend. Denn es gibt Pfade auf dem Torus, welche zum Beispiel einmal um das Loch in der Mitte verlaufen und daher nicht auf einen Punkt zusammengezogen werden können. Auf dem Torus gibt es auch Pfade, die mehrmals um dieses Loch oder in die entgegengesetzte Richtung verlaufen. Keiner der genannten Pfade ist stetig in die jeweils anderen überführbar, nur Pfade, welche sich gleich oft in die gleiche Richtung um dieses Loch winden, können stetig ineinander überführt werden, wie an einigen Beispielen in Abb. 7.1 (b) veranschaulicht wird [67].

Eine andere Möglichkeit, die Topologie der zugrundeliegenden Struktur zu ermitteln, ist es, global die Krümmung zu bestimmen. Um auch hier bei dem Beispiel zu bleiben, werden die Oberflächen der geometrischen Strukturen betrachtet. An einem Punkt auf der Oberfläche \mathcal{S} kann senkrecht zur Normalen die Krümmung durch die zweite Richtungsableitung bestimmt werden. An jedem Punkt gibt es dabei eine Richtung, in welche die Krümmung maximal ist. Senkrecht dazu ist die Krümmung minimal. Die (Gaußsche) Krümmung $K_{\mathcal{S}}$ an diesem Punkt ist hierbei definiert als das Produkt dieser beiden Krümmungen. Auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius R entspricht die Gaußsche Krümmung daher auf der gesamten Oberfläche $1/R^2$, wie in Abb. 7.1 (c) dargestellt ist. Bei einem Torus hingegen gibt es auch Bereiche mit einer negativen Gaußschen Krümmung. Anschaulich bedeutet das, dass die zwei Krümmungsradien, wie auf der „Innenseite“ des Torus, anti-parallel zueinander ausgerichtet sind. Auf der „Außenseite“ des Torus oder auf einer Kugel, also bei einer positiven Krümmung, sind die Krümmungsradien parallel zueinander.

Nun lässt sich hier am Beispiel der Kugeloberfläche \mathcal{S} die mittlere Gaußsche Krümmung als Integral über die gesamte Oberfläche ermitteln.

$$\text{Bsp. Kugel: } \int_{4\pi} \frac{1}{R^2} \cdot R^2 dA = \frac{1}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi \quad (7.1)$$

$$\text{Allgemein: } \iint_{\mathcal{S}} K_{\mathcal{S}} dA = 2\pi\chi(\mathcal{S}) \quad (7.2)$$

Im letzten Schritt wurde hier noch die Eulercharakteristik χ einer Oberfläche eingeführt, die für Oberflächen homöomorph zu einer Kugel den Wert 2 hat. Homöomorphe Verformungen wie eine Delle oder eine Beule sorgen an einigen Stellen für mehr aber gleichermaßen an anderen Stellen für weniger Krümmung sodass sich die Krümmungsdichte genau ausgleichen. Das gleiche Integral ergibt bei einem Torus hingegen 0, da sich die negativ gekrümmte „Innenseite“ des Torus und die positiv gekrümmte „Außenseite“ genau ausgleichen. Auch hier ändern homöomorphe Verformungen z.B. zu einer Tasse nicht den Wert des Integrals.

Die Tatsache, dass allgemein über die globale Krümmung dieser glatten Oberflächen nach Gl. (7.2) auf die Anzahl der Löcher zurückgeschossen werden kann, ist bekannt als der Satz von Gauß-Bonnet [68].

7.1.2 Der erste topologische Isolator

Wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, beschäftigt sich Topologie mit den Eigenschaften, welche durch die globale Struktur des Systems vorgegeben sind. Lokale Veränderungen verändern die Struktur und damit die topologischen Eigenschaften nicht. Insofern die Störungen nicht die Struktur des Systems ändern können sie als homöomorph betrachtet werden. Physikalische Systeme, deren Eigenschaften auf der zugrundeliegenden Topologie beruhen, haben daher intrinsisch eine gewisse Robustheit gegen lokale Schwankungen. Für physikalische Effekte oder Anwendungen bedeutet das, dass diese nicht oder nur wenig anfällig auf Störungen wie zum Beispiel thermische Fluktuationen, Fabrikationsungenauigkeiten oder Defekte sind.

Das Feld der topologischen Physik begann 1980 mit der Entdeckung des Quanten Hall Effekts [69]. Beim klassischen Hall Effekt wird ein Festkörper, welcher senkrecht von einem Magnetfeld B_z durchströmt wird als zweidimensionales Elektronengas in der x - y -Ebene betrachtet. Fließt durch diesen Festkörper ein Strom in x -Richtung I_x werden die Ladungsträger durch die Lorentzkraft abgelenkt. Dadurch kommt es zum Aufbau der Hall-Spannung U_y senkrecht zum Strom I_x und zum Magnetfeld B_z . Dabei steigt der Hall-Widerstand $R_{xy} = U_y/I_x$ proportional mit dem Magnetfeld an. Beim Quanten-Hall-Effekt ist das Magnetfeld deutlich stärker und die Temperatur deutlich niedriger¹. Unter diesen Bedingungen ist der Hall-Widerstand nach wie vor abhängig vom Magnetfeld, aber wie in Abb. 7.2 (a) dargestellt, auf Plateaus quantisiert. Bei diesen Plateaus liegt die Leitfähigkeit ($1/R_{xy}$) unabhängig von Material oder der Form jeweils bei ganzzahligen² Vielfachen von e^2/h . Kurz nach dieser Entdeckung wurde gezeigt, dass die Elektronen-Zustände im Festkörper eine topologisch nicht-triviale Struktur haben. Daraus konnte gefolgert werden, dass die Leitfähigkeit quantisiert sein muss [70] und ein quantisierter Teilchentransport vorliegt [71]. Vereinfacht gesagt werden die Elektronen in der Mitte des Festkörpers durch das Magnetfeld lokalisiert, wie in Abb. 7.2 (b) dargestellt. Die Energie der Elektronen ist dabei hauptsächlich von ihrem Drehimpuls ℓ abhängig. Durch das starke Magnetfeld ist der Drehimpuls der Elektronen quantisiert, sodass die Energie der Elektronen nur gewisse Energie-Niveaus, sogenannte Landau-Niveaus annehmen kann. Der Energieabstand zwischen den Landau-Niveaus ist dabei proportional zur Zyklotronfrequenz ω_c . Bei den Magnetfeldstärken, bei denen der Hall-Widerstand auf einem Plateau ist, liegt die Fermi-Energie E_F , wie in Abb. 7.2 (c) dargestellt, zwischen zwei Landau-Niveaus und das Innere des Festkörpers ist effektiv ein Isolator. Im Gegensatz zu den Bändern in herkömmlichen Isolatoren haben die Landau-Niveaus eine topologisch nicht-triviale Struktur. Wegen des topologischen Übergangs am Rand des Festkörpers zur topologisch trivialen Umgebung, gibt es Zustände, die am Rand lokalisiert sind, deren Energien zwischen den Landau-Niveaus liegen. Diese Zustände müssen wegen der von Null verschiedenen Gruppengeschwindigkeit am Rand entlang propagieren. Da es in der Bandlücke keine weiteren Zustände gibt, in welche ein Defekt die Elektronen streuen könnte, ist der Elektronentransport durch diese Randzustände absolut störungsfrei. Die Anzahl der propagierenden Randzustände ist dabei durch die topologische Invariante bestimmt.

¹Die thermischen Anregungen sind kleiner als die Energie-Aufspaltung der Landau-Niveaus $\hbar\omega_c \gtrsim k_B T$.

²Wenn die Elektron-Elektron-Wechselwirkung nicht vernachlässigt werden kann, kann es auch zu rationalen Vielfachen kommen. In diesem Fall spricht man vom fraktionalen Quanten-Hall-Effekt.

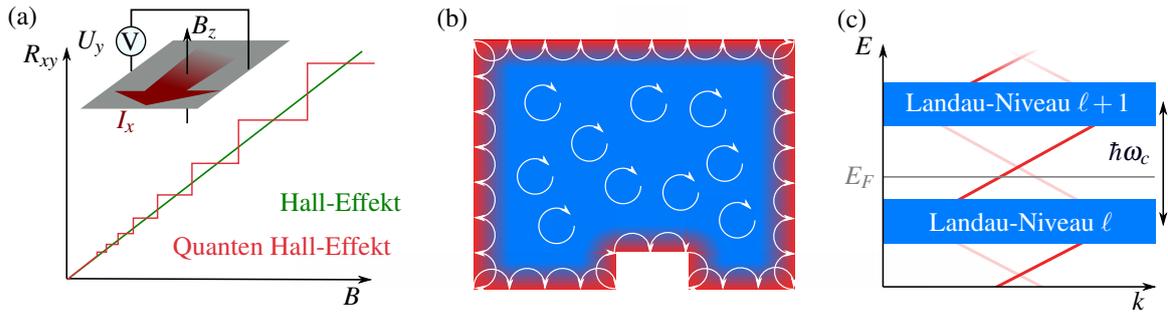


Abbildung 7.2: (a) Schematische Darstellung der Abhängigkeit des Hall-Widerstands vom Magnetfeld. (b) Die Elektronen werden durch das Magnetfeld auf Kreisbahnen gezwungen. In der Mitte des Festkörpers sind die Elektronen wie in einem Isolator lokalisiert, während sie am Rand an der Grenzfläche entlang propagieren müssen. (c) Ausschnitt des Level-Schemas des Quanten-Hall-Effekts. Die Energien der Randzustände liegen zwischen den Landau-Niveaus.

7.1.3 Berry Phase

Nach der kurzen Einführung der Topologie und der historischen Einleitung topologischer Isolatoren kann sich durchaus die Frage stellen, inwiefern diese beiden Bereiche zusammenhängen. Um hier die Verbindung herzustellen, müssen die mathematischen Konzepte auf Strukturen in der Festkörperphysik übertragen werden. Der Raum, welcher in der Regel in der Festkörperphysik betrachtet wird, ist der Impulsraum und die Strukturen und Elemente darin sind jeweils durch die Bandstruktur und die Blochzustände gegeben. Der Impulsraum kann dabei in der Regel auf die erste Brillouin-Zone (BZ) reduziert werden. Nun ist es aber nicht offensichtlich, wie bei den Oberflächen in Abschnitt 7.1.1, dass es zum Beispiel Löcher in den Bändern gäbe. Schließlich gibt es für jeden Impuls \vec{k} in jedem Band n einen Zustand $|\psi_n(\vec{k})\rangle$ mit der Energie $E_n(\vec{k})$. Stattdessen wirkt sich die Topologie des Bandes auf die relativen Phasen der Zustände in den Bändern aus.

Jedoch ist die Phase der Blochzustände nicht eindeutig bestimmt, sondern ein freier Parameter. Daher wird im Folgenden angenommen, dass eine Eichung gewählt wurde, sodass die Phase der Blochzustände sich nur stetig mit dem Impuls ändert und keine Phasensprünge auftreten. Werde nun ein Zustand in einem nicht-entarteten Band betrachtet, welcher adiabatisch auf einem Pfad \mathcal{P} im Impulsraum in einen anderen Zustand überführt wird. Je nachdem wie die zugrundeliegende Topologie ist, kann dieser Zustand auf dem Pfad eine Phase $\gamma_{\mathcal{P}}$ auf sammeln. Allerdings hängt diese Phase nicht nur von dem Pfad, sondern hauptsächlich von der Eichung des Anfangs- und des Endzustands ab. Diese Willkür fällt weg, wenn ein geschlossener Pfad betrachtet wird, da damit Anfangs- und Endzustand auf die gleiche Phase geeicht sein müssen. Somit ist die Phase, welche auf einem geschlossenen Pfad aufgesammelt wird, eichinvariant [72].

Eine solche geometrische Phase, die beim Durchlaufen eines geschlossenen Pfads nur durch die zugrundeliegende Geometrie bzw. Topologie verursacht wird, wird im Allgemeinen als Berry-Phase bezeichnet³. Um diese nun zu berechnen sei $|\psi(\vec{k})\rangle$ ein Zustand auf dem geschlossenen Pfad \mathcal{P} , dann wird ein Zustand in dessen unmittelbarer Umgebung $|\psi(\vec{k} + d\vec{k})\rangle$ diesem sehr ähnlich sein und die relative Phase $e^{-i\Delta\gamma}$ zwischen den beiden Zuständen lässt sich berechnen:

$$e^{-i\Delta\gamma} = \frac{\langle \psi(\vec{k}) | \psi(\vec{k} + d\vec{k}) \rangle}{|\langle \psi(\vec{k}) | \psi(\vec{k} + d\vec{k}) \rangle|} \quad (7.3)$$

Im Grenzfall $d\vec{k} \rightarrow \vec{0}$ geht auch die Berry-Phase gegen Null, sodass für kleine $\Delta\gamma$ der Imaginärteil der

³Ein anderes Beispiel, bei dem sich der Effekt einer geometrischen Phase zeigt, wird in Kapitel 8.4 angesprochen. Dabei zeigt sich eine geometrische Phase direkt als Rotation der Polarisation von Licht, welches in einem helixförmigen Wellenleiter propagiert. In diesem Beispiel ist die Phase nicht durch die periodischen Randbedingungen beschränkt, sondern kann kontinuierliche Werte annehmen.

Exponentialfunktion geschrieben werden kann:

$$-\Im(e^{-i\Delta\gamma}) = \sin(\Delta\gamma) \stackrel{\vec{k} \rightarrow \vec{0}}{=} \Delta\gamma = i \langle \psi(\vec{k}) | \nabla_k \psi(\vec{k}) \rangle d\vec{k} \stackrel{\text{def.}}{=} \vec{A}(\vec{k}) d\vec{k} \quad (7.4)$$

Im letzten Umformungsschritt wurde dabei die Berry-Verbindung $\vec{A}(\vec{k}) = i \langle \psi(\vec{k}) | \nabla_k \psi(\vec{k}) \rangle$ eingeführt, welche stetig die Änderung der relativen Phase angibt. Mit dieser lässt sich kontinuierlich die Phasenänderung auf einem Pfad integrieren und damit die Berry-Phase bestimmen [73]:

$$\gamma_{\mathcal{P}} = i \oint_{\mathcal{P}} \langle \psi(\vec{k}) | \nabla_k \psi(\vec{k}) \rangle d\vec{k} = \oint_{\mathcal{P}} \vec{A}(\vec{k}) d\vec{k} \quad (7.5)$$

Als alternative Herangehensweise kann auch mit einem sogenannten Wilson Loop das Produkt der Projektionen aus Gl. (7.3) gebildet werden, wodurch sich die relativen Phasen aufaddieren. Dafür wird der Pfad \mathcal{P} in N Schritte \vec{k}_j mit $j \in [1, N]$ aufgeteilt.

$$\mathcal{W}_{\mathcal{P}} = \mathcal{W}_{k_N \rightarrow k_1} = \langle \psi(\vec{k}_N) | \psi(\vec{k}_{N-1}) \rangle \dots \langle \psi(\vec{k}_3) | \psi(\vec{k}_2) \rangle \langle \psi(\vec{k}_2) | \psi(\vec{k}_1) \rangle \quad (7.6)$$

Die Berry-Phase ist hierbei als Phase des Wilson Loops $\gamma_{\mathcal{P}} = \arg(\mathcal{W}_{\mathcal{P}})$ gegeben. In dem diskreten Fall mit endlichem N ist zwar $|\mathcal{W}_{\mathcal{P}}| \leq 1$ aber im Grenzfall gilt wieder $\lim_{N \rightarrow \infty} |\mathcal{W}_{\mathcal{P}}| = 1$ [72].

Allgemein sollten für die Berechnung der Berry-Phase die zu betrachtenden geschlossenen Pfade nicht kontrahierbar sein, sonst könnten sie stetig auf einen Punkt zusammengezogen werden und würden demnach immer eine Berry-Phase von Null ergeben. Dadurch, dass die Zustände am Rand der BZ identisch sind, ist zum Beispiel in 1D die BZ äquivalent zu einem Ring und in 2D zu einem Torus. Entsprechend sind Pfade, die einmal durch die BZ verlaufen, sowohl geschlossen als auch nicht kontrahierbar.

1D Beispiel: Su-Schrieffer-Heeger Modell

Im Folgenden wird das Su-Schrieffer-Heeger Modell (SSH) als kurzes Beispiel betrachtet, bei dem es zu der Aufsammlung einer Berry-Phase ungleich Null kommt. Beim SSH-Modell handelt es sich um das einfachste System eines topologischen Isolators, der aus einem 1D Gitter mit einer zweiatomigen Einheitszelle besteht. Die zwei Gitterpunkte sind innerhalb der Einheitszelle mit der Kopplungsstärke v und zwischen den Einheitszellen mit w gekoppelt (siehe Abb. 7.3 (a)). Unter periodischen Randbedingungen sind die Lösungen des SSH-Modells die Blochmoden, welche sich als ebene Wellen über das gesamte Gitter erstrecken. Im Gegensatz zur einatomigen Kette aus Kapitel 4.3.2, sind hier wegen der Struktur in der Einheitszelle die Amplituden u_1 und u_2 an den jeweiligen Gitterpunkten verschieden. Diese Amplitudenverteilung in der Einheitszelle kann in $|u(k)\rangle \hat{=} (u_1(k), u_2(k))^T$ zusammengefasst werden. Damit können die Blochmoden $|\psi(k)\rangle$ als Produktzustand bzw. als Faltung von ebenen Wellen über das Gitter, mit $|u(k)\rangle$ als Amplitudenfunktion in der Einheitszelle, geschrieben werden:

$$|\psi(k)\rangle = |e^{ikx}\rangle \otimes |u(k)\rangle \in \mathcal{H}_{\text{Gitter}} \otimes \mathcal{H}_{\text{Einheitszelle}} \quad (7.7)$$

Mit diesem Ansatz lassen sich analog zu Gl. (4.52) die gekoppelten Moden-Gleichungen für das SSH-

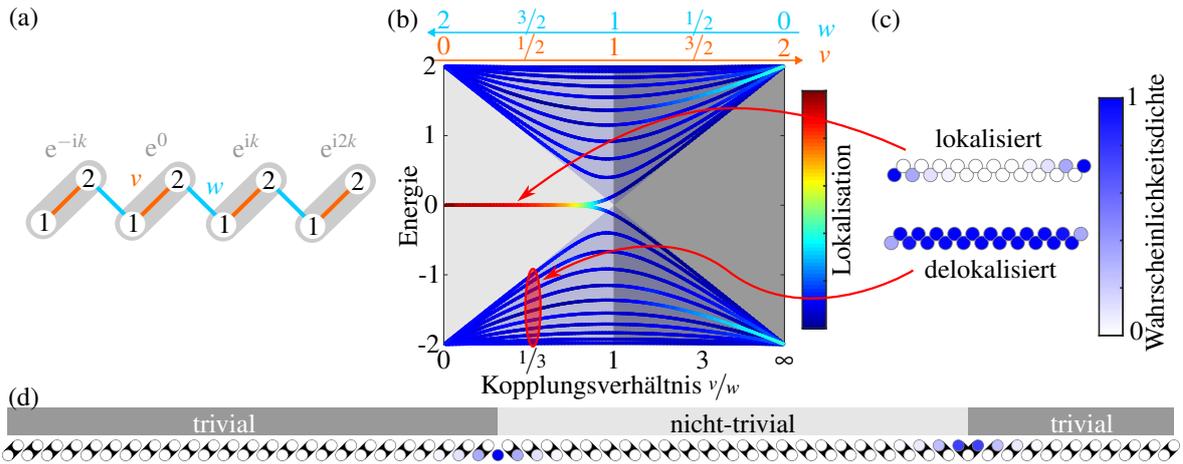


Abbildung 7.3: (a) Skizze des SSH-Modells mit der Kopplung innerhalb der Einheitszelle v und zwischen zwei Einheitszellen w . (b) Spektrum eines endlichen SSH-Gitters mit $v + w = 2$ abhängig vom Kopplungsverhältnis v/w . Die Lokalisierung der Zustände ist als Farbe dargestellt. (c) Summe der Wahrscheinlichkeitsdichten der Zustände (oben) in der Bandlücke und (unten) im unteren Band. (d) Ein SSH-Gitter welches abschnittsweise in der trivialen und der nicht-trivialen Phase ist. Dargestellt ist die Summe der lokalen Wahrscheinlichkeitsdichten der Zustände in der Bandlücke.

Modell schreiben:

$$\begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & 0 & w & & \ddots & \ddots \\ \ddots & w^* & 0 & v & & \ddots \\ \ddots & & v^* & 0 & w & \ddots \\ \ddots & & & w^* & 0 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ u_2(k)e^{-ik} \\ u_1(k)e^0 \\ u_2(k)e^0 \\ u_1(k)e^{ik} \\ \vdots \end{pmatrix} = H(k) \begin{pmatrix} \vdots \\ u_2(k)e^{-ik} \\ u_1(k)e^0 \\ u_2(k)e^0 \\ u_1(k)e^{ik} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

Wie bei der einatomigen Kette kann in jeder Zeile nun jeweils ein Phasenfaktor ausgeklammert werden und es ergibt sich jeweils das selbe Eigenwertproblem. Werden hierfür nur die mittleren zwei Zeilen von Gl. (7.8) betrachtet, lässt sich das Eigenwertproblem aufstellen, wobei die Amplituden $u_1(k)$ und $u_2(k)$ durch die Eigenvektoren gegeben sind.

$$H(k) \begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{pmatrix} = E(k) \begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad H(k) = \begin{pmatrix} 0 & v + we^{-ik} \\ v + we^{ik} & 0 \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

Diese Gleichung hat zwei Lösungen die aufgrund der Inversionssymmetrie bei den Energien $\pm E(k)$ liegen. Diese zwei Lösungen bilden die zwei Bänder des Isolators im SSH-Modell zwischen denen, insofern $v \neq w$, eine Bandlücke liegt. Für ein endliches SSH-Gitter ist das Spektrum in Abhängigkeit des Kopplungsverhältnisses in Abb. 7.3 (b) aufgetragen. Nur in dem metallischen Fall $v = w$ ist die Bandlücke geschlossen. Die topologisch nicht-triviale Phase $v < w$ unterscheidet sich von der topologisch trivialen Phase $v > w$ erkennbar darin, dass es Zustände in der Bandlücke bei $E = 0$ gibt. Diese Zustände sind wie in Abb. 7.3 (c) zu sehen, an den Enden der Kette lokalisiert. Diese Randzustände sind, wie beim Quanten-Hall-Effekt in Abschnitt 7.1.2, ein direktes Resultat davon, dass lokal ein topologischer Übergang von dem nicht-trivialen Struktur der Kette zu der trivialen Struktur der Umgebung stattfindet. Da die relativen Phasen der Zustände in den beiden Gebieten topologisch verschieden sind können nicht alle Zustände homöomorph von dem nicht-trivialen Gitter in die triviale Umgebung übergehen. Als Folge dieser Unstetigkeit befinden sich, wie in Abb. 7.3 (d) dargestellt, jeweils an den

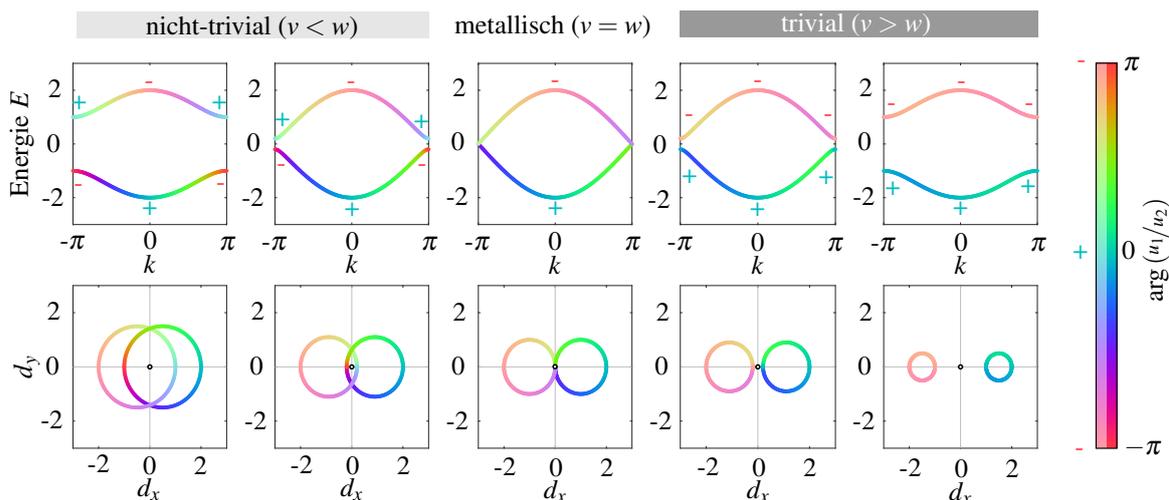


Abbildung 7.4: (oben) Bandstruktur in der nicht-trivialen, metallischen und trivialen Phase des SSH-Modells. Die Phase des Amplitudenverhältnisses u_1/u_2 ist farbkodiert und bei den Zuständen, bei denen $u_1/u_2 = \pm 1$, ist die Parität durch das Zeichen \pm angegeben. Für die Zustände des oberen Bands ist die Farbskala ausblat dargestellt. (unten) Darstellung von allen $\vec{d}(k)$ in der BZ ebenfalls für die drei Fälle.

Grenzflächen topologisch verschiedener Phasen lokalisierte Zustände.

Eine alternative Schreibweise, die hilfreich ist, um die relative Phase zwischen den Zuständen und damit den Unterschied zwischen den topologischen Phasen zu visualisieren, ist die Zerlegung des Hamilton-Operators in die Paulimatrizen σ :

$$H(k) = \underbrace{(v + w \cos(k))}_{\text{def. } d_x(k)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \underbrace{w \sin(k)}_{\text{def. } d_y(k)} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = d_x(k) \sigma_x + d_y(k) \sigma_y = \vec{d}(k) \hat{\sigma} \quad (7.10)$$

Die Amplitude des Vektors \vec{d} ist dabei proportional zur Energie der Blochmode:

$$E(k) = \pm \sqrt{v^2 + w^2 + 2vw \cos(k)} = \pm \sqrt{d_x^2(k) + d_y^2(k)} = \pm \|\vec{d}(k)\| \quad (7.11)$$

Die Richtung von \vec{d} gibt während dessen die relative Phase zwischen den Amplituden $\arg(u_1/u_2)$ an. Wie in Abb. 7.4 zu sehen ist, sind die Bandstrukturen vom trivialen und nicht-trivialen Fall energetisch gleich. Jedoch sind die beiden Fälle durch Auftragen der $\vec{d}(k)$ in ein d_x - d_y -Diagramm klar unterscheidbar. Im nicht-trivialen Fall winden sich die Zustände um den Ursprung, aber im trivialen Fall tun sie dies nicht. Der Ursprung ist hierbei ein charakteristischer Punkt, denn ein Isolator liegt nur vor, wenn die Bandlücke geöffnet ist, also der d -Vektor nicht durch den Ursprung verläuft. Wird der Ursprung ausgeschlossen, dann liegen die Zustände im trivialen Fall im d_x - d_y -Diagramm auf einem kontrahierbaren Pfad, während sie das im nicht-trivialen Fall nicht tun. Um von dem einen in den anderen Fall überzugehen, muss jeweils beim Punkt $v = w$ die Bandlücke geschlossen werden. Das Schließen der Bandlücke kommt damit dem „Aufschneiden und Zusammenkleben“ aus Abschnitt 7.1.1 gleich. Aus Abb. 7.4 ist bereits visuell ersichtlich, dass nur im nicht-trivialen Fall die Berry-Phase ungleich Null sein kann:

$$\gamma_{\text{BZ}} = i \oint_{\text{BZ}} \langle u(k) | \partial_k u(k) \rangle dk = \begin{cases} 0 & v > w \quad (\text{trivial}) \\ \pi & v < w \quad (\text{nicht-trivial}) \end{cases} \quad (7.12)$$

Ein Wilson Loop über die BZ $\mathcal{W}_{-\pi \rightarrow \pi}$ liefert natürlich das gleiche Ergebnis. Aber aufgrund der Inversions-Symmetrie des SSH-Modells $\hat{H}(k) \hat{\Gamma}^\dagger = H(-k)$ kann der Wilson Loop auch berechnet werden, indem nur die

Parität der Zustände an zwei Punkten betrachtet wird. Bei der Inversionssymmetrie wird ein Zustand entsprechend invertiert, was heißt, dass sich einerseits der Wellenvektor der ebenen Welle als auch das Amplitudenverhältnis umkehrt. Ein Zustand $|e^{ikx}\rangle \otimes |u_1, u_2\rangle$ wird daher durch \hat{I} auf den Zustand $|e^{-ikx}\rangle \otimes |u_2, u_1\rangle$ abgebildet. Interessant sind dabei die zwei Punkte $k = \{0, \pi\}$, an denen der Zustand bis auf das Vorzeichen auf sich selbst abgebildet wird. Je nach Parität $B_k \in \{1, -1\}$ bzw. Amplitudenverhältnis bleibt das Vorzeichen des Zustands durch \hat{I} gleich oder wird umgekehrt. Ein Wilson-Loop über die ganze BZ kann dann in zwei Wilson-Linien jeweils über die halbe BZ aufgeteilt werden. Wegen der Inversionssymmetrie müssen sich die Phasen der beiden Wilson-Linien ausgleichen, sodass der Wilson-Loop nur von den Paritäten an den beiden Punkten $k \in \{0, \pi\}$ abhängt.

$$\mathcal{W}_{-\pi \rightarrow \pi} = \mathcal{W}_{-\pi \rightarrow 0} \mathcal{W}_{0 \rightarrow \pi} \quad (7.13)$$

$$= \langle \psi(-\pi) | \psi(-\pi + dk) \rangle \dots \langle \psi(-dk) | \psi(0) \rangle \langle \psi(0) | \psi(dk) \rangle \dots \langle \psi(\pi - dk) | \psi(\pi) \rangle \quad (7.14)$$

$$= \langle \psi(-\pi) | \hat{I}^\dagger \hat{I} | \psi(-\pi + dk) \rangle \dots \langle \psi(-dk) | \hat{I}^\dagger \hat{I} | \psi(0) \rangle \langle \psi(0) | \psi(dk) \rangle \dots \langle \psi(\pi - dk) | \psi(\pi) \rangle \quad (7.15)$$

$$= \langle \psi(\pi) | B_\pi | \psi(\pi - dk) \rangle \dots \langle \psi(dk) | B_0 | \psi(0) \rangle \langle \psi(0) | \psi(dk) \rangle \dots \langle \psi(\pi - dk) | \psi(\pi) \rangle \quad (7.16)$$

$$= B_\pi \mathcal{W}_{\pi \rightarrow 0} B_0 \mathcal{W}_{0 \rightarrow \pi} = B_\pi B_0 \mathcal{W}_{\pi \rightarrow 0} \mathcal{W}_{0 \rightarrow \pi} = B_\pi B_0 \quad (7.17)$$

Auch dieses Ergebnis kann in Abb. 7.3 verifiziert werden. Im trivialen Fall haben die beiden Bänder an den Punkten $k = \{0, \pi\}$ jeweils die gleiche und im nicht-trivialen Fall jeweils verschiedene Parität [72].

2D: Berry Curvature und Chern-Zahl

Wird anstatt eines eindimensionalen Gitters ein zweidimensionales Gitter betrachtet, können ähnliche Herangehensweisen verwendet werden, um die topologischen Eigenschaften zu ermitteln. Die Berry-Verbindung $\vec{A}(\vec{k})$, die in 1D nur eine skalare Funktion ist, ist in 2D ein Vektorfeld, welches angibt in welche Richtung sich die relative Phase am schnellsten ändert. Wie zuvor stellt sich für die Topologie des Bandes die Frage, ob beim Durchqueren der BZ die Zustände eine Phase ungleich Null aufsammeln. Falls im Vektorfeld $\vec{A}(\vec{k})$ Wirbel sind, würde ein Pfad um das Zentrum dieses Wirbels zu einer von Null verschiedenen Berry-Phase führen. Anstatt nun alle möglichen Pfade über die Berry-Verbindung zu betrachten, wird stattdessen die sogenannte Berry-Krümmung $\mathcal{B}(\vec{k})$ betrachtet, welche als Rotation der Berry-Verbindung die Wirbelstärke des Vektorfeldes angibt:

$$\mathcal{B}(\vec{k}) = \nabla_{\vec{k}} \times \vec{A}(\vec{k}) \quad (7.18)$$

Die Berry-Krümmung ist in 2D ein Skalarfeld und das Vorzeichen gibt an, ob der „Phasen-Wirbel“ sich im oder gegen den Uhrzeigersinn dreht. Das Integral der Berry-Krümmung über die BZ ist somit direkt proportional zur Anzahl der „Phasen-Wirbel“ in einem Band und bestimmt damit die topologische Invariante, die sogenannte Chern Zahl C [72]:

$$C = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\text{BZ}} \mathcal{B}(\vec{k}) d\vec{k} \quad (7.19)$$

Entsprechend kann die Chern-Zahl auch nur ganzzahlige Werte annehmen. Die Chern-Zahl ist auch die topologische Invariante, die beim Quanten-Hall-Effekt angibt, auf welches Vielfache von e^2/h die Leitfähigkeit quantisiert ist. An dieser Stelle sei zudem noch auf die mathematische Ähnlichkeit zum Satz von Gauß-Bonnet (7.2) hingewiesen. Während für die Eulercharakteristik die Gaußsche Krümmung über die gesamte Oberfläche integriert wurde, wird bei der Chern-Zahl die Berry-Krümmung über die gesamte BZ integriert.

7.1.4 Wannier-Funktionen, Wannier-Zentren und Polarisation

In der bisherigen Betrachtung der topologischen Eigenschaften wurden hauptsächlich die Blochmoden betrachtet. Dabei zeigt sich in den Amplitudenfunktionen $|u(k)\rangle$, also dem Anteil der Blochmoden aus dem Hil-

bertraum $\mathcal{H}_{\text{Einheitszelle}}$, die topologische Struktur des Bandes. Der Anteil im Hilbertraum $\mathcal{H}_{\text{Gitter}}$ wurde bisher immer nur als ebene Welle beschrieben. Nun soll die Basis gewechselt werden und anstatt Zustände zu betrachten, die sich gleichmäßig über das Gitter erstrecken, werden die Wannier-Funktionen betrachtet. Wie bereits in Kapitel 6.3 angeschnitten, sind die Wannier-Funktionen im Ort maximal lokalisiert. Es wird sich zeigen, dass sich die Topologie des Bandes auf die Wannier-Funktionen auswirkt.

Hierfür soll nun ein eindimensionales endliches Gitter mit N Einheitszellen und periodischen Randbedingungen betrachtet werden, was $\mathcal{H}_{\text{Gitter}}$ zu einem N -dimensionalen Hilbertraum macht. Was zuvor schlicht als ebene Welle eingeführt wurde kann nun sauber als $|e^{ikx}\rangle = \sum_{x=1}^N |x\rangle e^{ikx}/\sqrt{N}$ beschrieben werden, wobei $|x\rangle$ ein Vektor ist, der überall Null ist außer an der Stelle $x \in [1, N]$, an der er den Wert Eins hat. Eine Wannier-Funktion $|w(j)\rangle$, die an der j -ten Einheitszelle lokalisiert ist, ergibt sich als Fouriertransformierte der Blochmoden:

$$|w(j)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikj} |\psi(k)\rangle dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_x e^{ik(x-j)} |x\rangle \otimes |u(k)\rangle dk \quad (7.20)$$

Da die Wannier-Funktionen durch die Fouriertransformation, also eine unitäre Basistransformation, aus den Blochmoden folgen, übernehmen sie von ihnen einige Eigenschaften. So bilden sie eine orthogonale Basis, die den gleichen Raum aufspannt, wie die Blochmoden aus denen sie gebildet wurden $\langle w(j') | w(j)\rangle = \delta_{j,j'}$. Aber im Gegensatz zu den Blochmoden lassen sich die Wannier-Funktionen durch Translation um eine Einheitszelle ineinander überführen $\langle m | w(j)\rangle = \langle m+1 | w(j+1)\rangle$. Als Demonstration, dass die Wannier-Funktion $|w(j)\rangle$ in der Tat um j lokalisiert ist, wird der Orts-Operator definiert.

$$\hat{X} = \sum_x x |x\rangle \langle x| \otimes \mathbb{1} \quad (7.21)$$

Anwendung des Orts-Operators auf die Wannier-Funktion ergibt

$$\hat{X} |w(j)\rangle = \frac{1}{2\pi\sqrt{N}} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_x \sum_{x'} x e^{ik(x'-j)} |x\rangle \langle x|x'\rangle \otimes |u(k)\rangle dk = \frac{1}{2\pi\sqrt{N}} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_x x e^{ik(x'-j)} |x\rangle \otimes |u(k)\rangle dk \quad (7.22)$$

Um in den nächsten Rechenschritten den Ausdruck in Gl. (7.22) weiter umzuschreiben wird im Integral ein neuer Term $(+\xi)$ addiert und in ausgeschriebener Form wieder abgezogen $(-\xi)$. Darauf hin gleichen sich zwei Terme aus:

$$\hat{X} |w(j)\rangle = \frac{1}{2\pi\sqrt{N}} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_x x e^{ik(x'-j)} |x\rangle \otimes |u(k)\rangle + \underbrace{+\xi - \xi}_{=0} \right) dk \quad (7.23)$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{N}} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_x x e^{ik(x-j)} |x\rangle \otimes |u(k)\rangle + \underbrace{\frac{\partial}{\partial k} \left(-i \sum_x e^{ik(x-j)} |x\rangle \otimes |u(k)\rangle \right)}_{=+\xi} \right. \\ \left. - \sum_x x e^{ik(x-j)} |x\rangle \otimes |u(k)\rangle + \sum_x j e^{ik(x-j)} |x\rangle \otimes |u(k)\rangle + i \sum_x e^{ik(x-j)} |x\rangle \otimes |\partial_k u(k)\rangle \right) dk \quad (7.24)$$

$$= \underbrace{\frac{-i}{2\pi\sqrt{N}} \left[\sum_x e^{ik(x-j)} |x\rangle \otimes |u(k)\rangle \right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2\pi\sqrt{N}} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_x j e^{ik(x-j)} |x\rangle \otimes |u(k)\rangle dk}_{=j|w(j)\rangle} \\ + \frac{i}{2\pi\sqrt{N}} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_x e^{ik(x-j)} |x\rangle \otimes |\partial_k u(k)\rangle dk \quad (7.25)$$

In der letzten Umformung kann der erste Term Null gesetzt werden, da $|u(\pi)\rangle = |u(-\pi)\rangle$. Damit lässt sich das

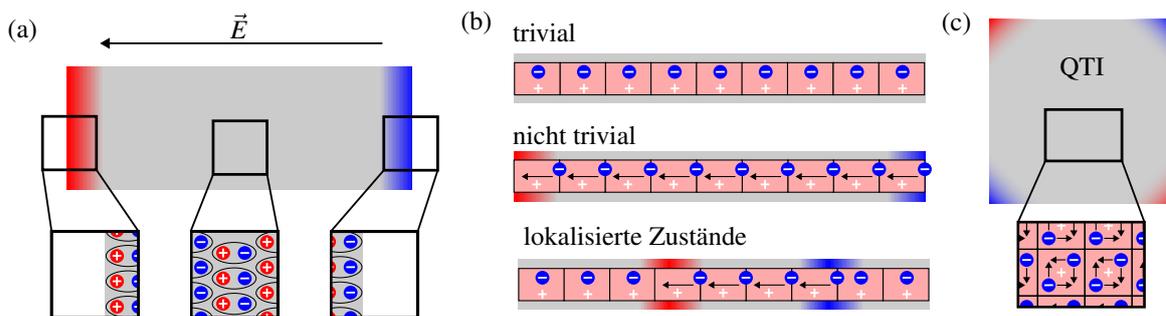


Abbildung 7.5: (a) Bei der Polarisation eines dielektrischen Materials durch ein elektrisches Feld richten sich die Ladungsträger im Material zu Dipolen entlang dieses E-Felds aus. An den Grenzflächen des Materials senkrecht zum E-Feld kommt es dadurch zu einer nicht-verschwindenden Ladungsdichte. (b) Die Orte von Ladungsansammlungen lassen sich mit topologischen Randzuständen identifizieren. Jeweils an den Übergängen von der trivialen Phase mit $P_{el} = 0$ zur nicht-trivialen Phase mit $P_{el} \neq 0$ kommt es zu Ladungsansammlungen bzw. lokalisierten Randzuständen. (c) In 2D sind für den Fall einer Quadrupol-Polarisation lokalisierte Zustände an den Ecken des Gitters zu erwarten.

Zentrum der Wannier-Funktion bestimmen:

$$\langle w(j) | \hat{X} | w(j) \rangle = \langle w(j) | j | w(j) \rangle + \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{N} \sum_{x'} \sum_x \underbrace{e^{ik(x'-j)} e^{-ik(x-j)} \langle x' | x \rangle}_{=1} \otimes \langle u(k) | \partial_k u(k) \rangle dk \quad (7.26)$$

$$= j + \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \langle u(k) | \partial_k u(k) \rangle dk \quad (7.27)$$

Es zeigt sich, dass die Wannier-Funktion $|w(j)\rangle$ um die j -te Einheitszelle lokalisiert ist, jedoch gibt es noch einen weiteren Term, der einen Versatz innerhalb der Einheitszelle darstellt. Um die Bedeutung dieses Terms zu interpretieren, kann die Wannier-Funktion als Elektronenwellenfunktion im Festkörper betrachtet werden. Während das positiv geladene Ionen-Gitter des Festkörpers starr ist, beschreibt die Elektronenwellenfunktion die negative Ladungsverteilung. Die Einheitszelle sei der Einfachheit so gewählt, dass der Ladungsschwerpunkt der positiven Ladungsträger im Mittelpunkt der Einheitszelle liegt. Bei unpolarisierten Materialien stimmt der Ladungsschwerpunkt der negativen Ladungsträger mit dem der positiven überein und alle externen Felder heben sich gegenseitig auf. Der Ladungsschwerpunkt der negativen Ladungsträger ist jedoch, wie eben gezeigt, durch das Zentrum der Wannier-Funktionen gegeben, welche ggf. einen Versatz vom Mittelpunkt der Einheitszellen haben können. Im Inneren der Einheitszelle kommt es also ggf. durch die Trennung der Ladungsträgerschwerpunkte zur Bildung eines Dipolmoments. Im klassischen Sinn entspricht diese homogene Verteilung von Dipolmomenten der elektrischen Polarisation eines Festkörpers. Daher wird der Versatz innerhalb der Einheitszelle, welcher auch als die Berry-Phase dividiert durch 2π identifiziert werden kann, als die elektrische Polarisation bezeichnet [72].

$$P_{el} = \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \langle u(k) | \partial_k u(k) \rangle dk = \frac{\gamma_{BZ}}{2\pi} \quad (7.28)$$

Im klassischen Sinn bilden sich als Folge dieser Polarisation an den Enden des Materials Bereiche mit erhöhter Ladungsträgerdichte, wie in Abb. 7.5 (a) dargestellt. Zusammen mit den Ergebnissen des vorherigen Abschnitts über das SSH-Modell kann mit Gl. (7.12) direkt gefolgert werden, dass in der trivialen Phase des SSH-Modells die Wannier-Zentren im Mittelpunkt der Einheitszelle liegen und die Polarisation verschwindet. In der topologischen Phase sind die Wannier-Zentren um eine halbe Einheitszelle versetzt und es gibt eine nicht-verschwindende Dipol-Polarisation. Übertragen auf das klassische Bild können, wie in Abb. 7.5 (b), die durch die Polarisation induzierten Ladungsträgeransammlungen mit den Orten der topologischen Randzustände identifiziert werden.

7.2 Theorie des Quadrupol topologischen Isolators (QTI)

Im Folgenden soll das Konzept der topologischen Dipol-Polarisation in einer Dimension auf die Quadrupol-Polarisation in zwei Dimensionen erweitert werden. Dabei ergeben sich jedoch für die Quadrupol-Polarisation gewisse Einschränkungen. Damit die Quadrupol-Polarisation die topologischen Eigenschaften bestimmt, müssen niedrigere Terme der Multipolentwicklung und damit die Dipol-Polarisation verschwinden. Im klassischen Sinn besteht ein Quadrupol jedoch aus zwei Dipolen, die entgegengesetzt ausgerichtet sind, sodass das Gesamtdipolmoment verschwindet, wie schematisch in Abb. 7.5 (c) dargestellt. Auf topologische Isolatoren übertragen heißt das, dass mindestens zwei besetzte (entartete) Bänder betrachtet werden müssen, welche entgegengesetzte Dipol-Polarisationen besitzen. Zudem werden durch die Symmetrien des Systems die Dipol- und Quadrupol-Momente quantisiert [74, 75].

Da nun im Gegensatz zu den vorherigen Abschnitten explizit entartete Bänder betrachtet werden, sind die Größen, um diese Topologie der Bänder zu charakterisieren, auch etwas komplexer. Die Berry-Verbindung, welche sich für ein Band als Vektorfeld $\vec{A}(\vec{k})$ schreiben lässt, ist für entartete Bänder eine matrixwertige nicht-kommutierende Größe. Auch der Wilson-Loop, der für ein Band in einem Skalar resultierte, dessen Phase proportional zur Berry-Phase bzw. der Polarisation $P_{e1} = \arg(\mathcal{W})/2\pi = \gamma_{BZ}/2\pi$ ist, wird für entartete Bänder zu einem Tensor zweiter Ordnung [75–77].

Als erstes wird nun das Tight-Binding-Modell des später betrachteten Quadrupol topologischen Isolators (QTI) und ein ähnliches Modell ohne Quadrupol-Eigenschaften vorgestellt, um während der Herleitung der Quadrupol-Polarisation diese Gitter an einigen Stellen als Beispiele zu verwenden. Anschließend wird, um die Quadrupol-Polarisation zu charakterisieren, in zwei Schritten vorgegangen: Im ersten Schritt wird die BZ in k_x Richtung mit einem Wilson-Loop durchquert. Die Eigenwerte des Wilson-Loops geben die Dipol-Polarisationen in x -Richtung der entarteten Bänder an. Unter der Voraussetzung, dass für jeden Impuls in der BZ die hybriden Wannier-Funktionen anhand ihrer x -Polarisation eindeutig in positive und negative Dipol-Polarisation unterteilt werden können, kann zum zweiten Schritt übergegangen werden. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, kann aufgrund der Symmetrie keine Quadrupol-Polarisation vorliegen. In anderen Worten wird damit gefordert, dass die Zustände durch ihre x -Polarisation eindeutig in zwei separate „(hybride) Wannier-Bänder“ unterteilt werden können und dass sich die Dipol-Polarisationen dieser Bänder gegenseitig ausgleichen. Zusammen mit den Eigenvektoren des Wilson-Loops werden aus den Blochzuständen der entarteten Bänder hybride Wannier-Funktionen erstellt. Im zweiten Schritt wird der Wilson-Loop in k_y -Richtung über diese hybriden Wannier-Funktionen berechnet. Dieser zweite verschachtelte Wilson-Loop ist skalarwertig und gibt die y -Polarisation der x -polarisierten Wannier-Bänder an. Wenn das betrachtete System, wie im durchgeführten Experiment, zudem C_4 -symmetrisch ist, entspricht dies bereits der topologischen Quadrupol-Invariante.

7.2.1 Tight-Binding-Modell eines QTI

Das Tight-Binding-Modell des später betrachteten QTI ist in Abb. 7.6 (a) schematisch skizziert. Es wird ein Quadrat-Gitter betrachtet mit vier Gitterpunkten pro Einheitszelle, die innerhalb der Einheitszelle mit γ und außerhalb mit λ gekoppelt sind. Zudem können die Gitterpunkte 1 und 2 zu den Gitterpunkten 3 und 4 mit einem Potenzial $\pm\delta$ zueinander verstimmbar werden. Wie in der Skizze durch die gestrichelten Linien angedeutet, sind einige der Kopplungen negativ. Durch diese negativen Kopplungen ist das System äquivalent zu einem Gitter mit rein positiven Kopplungen welches jedoch in jeder Plakette von einem magnetischem Fluss der Stärke π durchströmt wird. Eine Plakette ist dabei die Fläche in einem geschlossenen Pfad, der über jeden der vier Gitterpunkte genau einmal geht, wie der Pfad $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ in der Einheitszelle. Entlang aller Pfade um Plaketten in diesem Gitter gibt es entweder eine oder drei negative Kopplungen, die einen Phasensprung

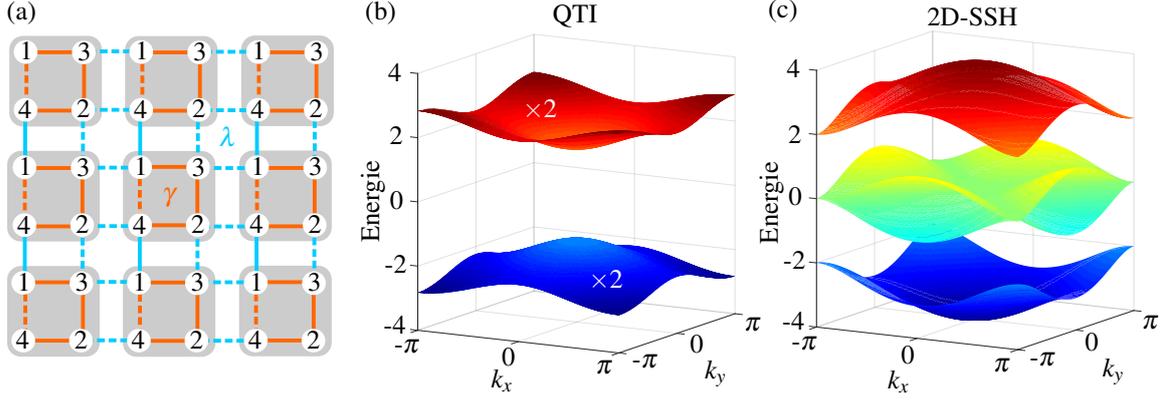


Abbildung 7.6: (a) Skizze des QTI-Modells bzw. des 2D-SSH-Gitters mit der Kopplung innerhalb der Einheitszelle γ und außerhalb λ . Beim 2D-SSH-Gitter sind alle Kopplungen positiv beim QTI hingegen sind die gestrichelt dargestellten Kopplungen negativ. Bandstruktur des (b) QTI und (c) des 2D-SSH-Gitters bei $\lambda = 1.5$ und $\gamma = 0.5$. Bei QTI sind die beiden Bänder jeweils zweifach entartet.

von $e^{i\pi}$ bzw. $e^{i3\pi} = e^{i\pi}$ verursachen, was einem magnetischen Fluss von π entspricht⁴. Der Hamilton-Operator $H_{\text{QTI}}(\vec{k}, \delta)$ dieses Systems lässt sich schreiben als:

$$\begin{aligned}
 H_{\text{QTI}}(\vec{k}, \delta) &= [\gamma - \lambda \cos(k_x)] \Gamma_{10} + \lambda \sin(k_x) \Gamma_{23} + [\gamma - \lambda \cos(k_y)] \Gamma_{22} + \lambda \sin(k_y) \Gamma_{21} + \delta \Gamma_{30} \\
 &= \begin{pmatrix} \delta & 0 & \gamma - \lambda e^{ik_x} & -\gamma + \lambda e^{-ik_y} \\ 0 & \delta & \gamma - \lambda e^{ik_y} & \gamma - \lambda e^{-ik_x} \\ \gamma - \lambda e^{-ik_x} & \gamma - \lambda e^{-ik_y} & -\delta & 0 \\ -\gamma + \lambda e^{ik_y} & \gamma - \lambda e^{ik_x} & 0 & -\delta \end{pmatrix}. \quad (7.29)
 \end{aligned}$$

Dabei wurden die Matrizen $\Gamma_{ij} = \sigma_i \otimes \sigma_j$ mit $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ als Kronecker-Produkt der Pauli-Matrizen eingeführt. Diese Matrix-Schreibweise ist üblich bei der Beschreibung von Dirac-Halbleitern und wird später bei der Betrachtung der Symmetrien hilfreich [78]. Eine Aufstellung aller Γ -Matrizen ist im Anhang 10.1 zu finden. Dieses System wird mit einem Gitter ohne magnetischen Fluss, also mit rein positiven Kopplungen verglichen. Dieses System ohne negative Kopplungen $H_{\text{SSH}}(\vec{k}, \delta)$ wird im Folgenden als 2D-SSH-Gitter bezeichnet:

$$\begin{aligned}
 H_{\text{SSH}}(\vec{k}, \delta) &= [\gamma + \lambda \cos(k_x)] \Gamma_{10} - \lambda \sin(k_x) \Gamma_{23} + [\gamma + \lambda \cos(k_y)] \Gamma_{11} + \lambda \sin(k_y) \Gamma_{12} + \delta \Gamma_{30} \\
 &= \begin{pmatrix} \delta & 0 & \gamma + \lambda e^{ik_x} & \gamma + \lambda e^{-ik_y} \\ 0 & \delta & \gamma + \lambda e^{ik_y} & \gamma + \lambda e^{-ik_x} \\ \gamma + \lambda e^{-ik_x} & \gamma + \lambda e^{-ik_y} & -\delta & 0 \\ \gamma + \lambda e^{ik_y} & \gamma + \lambda e^{ik_x} & 0 & -\delta \end{pmatrix} \quad (7.30)
 \end{aligned}$$

In Abb. 7.6 (b,c) sind die Bandstrukturen der beiden Gitter dargestellt. Für den QTI sind in Abb. 7.6 (b) zwei doppelt entartete Bänder mit einer Bandlücke zu sehen, während bei den 2D-SSH-Gitter in Abb. 7.6 (c) vier Bänder zu sehen sind, bei denen sich die zwei bei $E = 0$ überlagern.

Offensichtlich sind die Bandstrukturen der beiden Gitter verschieden, allerdings ist im Experiment die Bandstruktur nicht einfach zugänglich. Stattdessen werden im Experiment die in den Ecken lokalisierten Zustände nachgewiesen. Dafür wird wie in Abb. 7.7 ein endliches Gitter betrachtet. Für beide Gitter gibt es nur in der nicht-trivialen Phase $\gamma < \lambda$ lokalisierte Zustände. Bei beiden Systemen sind allerdings die Intensitätsverteilungen der lokalisierten Moden und die Energien sehr ähnlich. Um im Experiment nachzuweisen, dass ein QTI realisiert wurde, muss daher nicht nur die Existenz von in den Ecken lokalisierten Moden gezeigt werden,

⁴In der ersten Publikation zu QTI von Benalcaza *et al.* [74] hat der Pfad um jede Plakette nur eine negative Kopplung. Der einzige Unterschied, der sich dadurch ergibt, ist, dass die Bandstruktur in dieser Publikation diagonal um die halbe BZ versetzt ist.

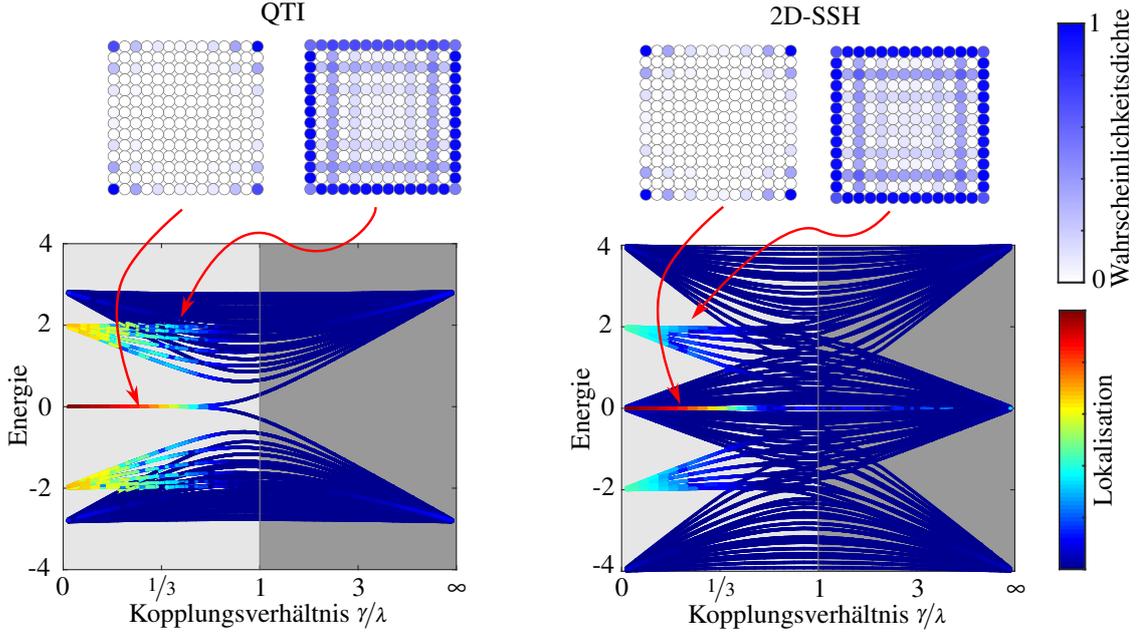


Abbildung 7.7: Spektren der beiden Gitter für 7×7 Einheitszellen mit $\gamma + \lambda = 2$. Die Lokalisierung der Zustände ist farbkodiert dargestellt. Sowohl für den QTI als auch das 2D-SSH-Gitter sind in der trivialen Phase $\gamma > \lambda$ alle Zustände über das Gitter delokalisiert. In der nicht-trivialen Phase $\gamma < \lambda$ hingegen sind Zustände bei $E = 0$ an den Ecken und um $E = \pm 2$ am Rand lokalisiert. Die lokale Summe der Wahrscheinlichkeitsdichten der an den Ecken bzw. am Rand lokalisierten Eigenmoden ist darüber dargestellt (bei $\lambda = 3/2$ und $\gamma = 1/2$).

sondern auch, dass diese in einer Bandlücke liegen. Im 2D-SSH-Gitter handelt es sich bei den Eck-Moden um BICs (vom engl. *bound states in continuum*) [79], also um lokalisierte Moden, die, obwohl sie die gleiche Energie haben wie ein umgebendes Kontinuum an delokalisierten Zuständen, nicht mit diesen hybridisieren. Zwar ist die Existenz dieser BIC-Zustände durch die Topologie vorgegeben, aber dass die Zustände an den Ecken lokalisiert sind, ist durch die Symmetrie des Systems bedingt. Bereits kleine Abweichungen, welche die chirale oder Rotations-Symmetrie des Systems brechen, sorgen für eine Hybridisierung der BICs mit den über das Gitter delokalisierten Moden [80].

Die Eckzustände des QTI hingegen liegen wegen der Quadrupol-Polarisation in einer Bandlücke [74]. Durch die spektrale Isolation sind die Eckzustände robuster und bleiben bei den gleichen Störungen des Systems in den Ecken lokalisiert.

7.2.2 Wilson Loop in entarteten Bändern

Das Konzept eines Wilson Loops von Gl. (7.6) soll nun auf entartete Bänder erweitert werden. Dafür sei N_B die Anzahl der betrachteten entarteten Bänder. Anstatt einen skalaren Wert für die Projektion von einem Zustand bei \vec{k} auf einen Zustand bei \vec{k}' , muss nun eine $N_B \times N_B$ Überlapp-Matrix betrachtet werden, deren Elemente $[F(\vec{k}, \vec{k}')]_{nm}$ jeweils die Projektoren der N_B orthogonalen Blochzustände $|u(\vec{k})\rangle$ an den beiden Impulsen aufeinander beinhalten.

$$[F(\vec{k}, \vec{k}')]_{mn} = \langle u_m(\vec{k}) | u_n(\vec{k}') \rangle \quad \text{mit } n, m \in [1, N_B]. \quad (7.31)$$

Um nun einen Wilson-Loop entlang k_x durch die BZ zu berechnen, wird für ein festes k_y ein Startpunkt k_1 gewählt. Dann werden entlang des Pfads $k_1 \rightarrow k_1 + 2\pi$ an den N_k Punkten die Überlapp-Matrizen bestimmt. Der Wilson-Loop $\mathcal{W}_x(\vec{k})$ entlang k_x , der bei $\vec{k} = (k_1, k_y)^T$ beginnt, ergibt sich als Produkt dieser Matrizen.

$$\mathcal{W}_x(\vec{k}) = F(k_1, k_{N_k}) F(k_{N_k}, k_{N_k-1}) \dots F(k_3, k_2) F(k_2, k_1) \quad (7.32)$$

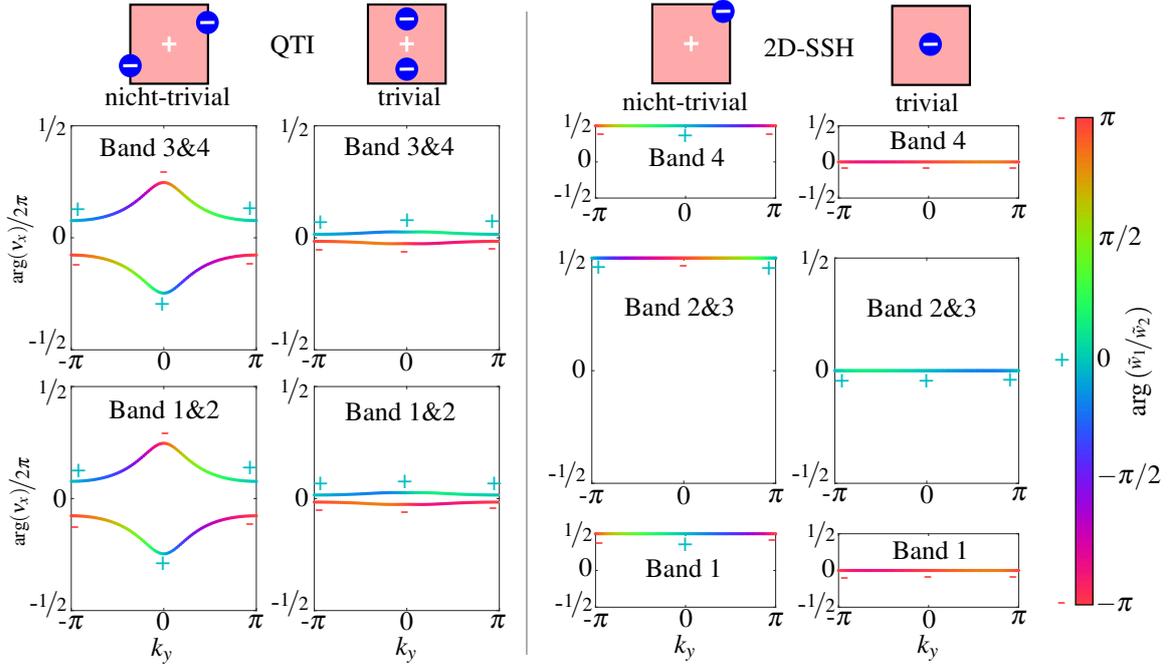


Abbildung 7.8: Wannier-Zentren der Bänder im QTI (links) und dem 2D-SSH-Gitter (rechts) in der nicht-trivialen und der trivialen Phase. Die energetisch entarteten Bänder müssen jeweils gemeinsam betrachtet werden. Farblich ist $\arg(\tilde{w}_1/\tilde{w}_2)$ dargestellt. Dies entspricht der Phasendifferenz zwischen den Gitterpunkten 1 zu 2 der hybriden Wannier-Zustände. Für den QTI sind die Wannier-Bänder getrennt und beim 2D-SSH-Gitter sind die Wannier-Zentren wegen der kommutierenden Spiegelsymmetrien entweder in der Mitte oder am Rand der Einheitszelle lokalisiert.

Entsprechend ist der Wilson-Loop $\mathcal{W}_x(\vec{k})$ im entarteten Fall kein Skalar, sondern auch eine $N_B \times N_B$ Matrix. Um aus diesem Wilson-Loop die Wannier-Zentren der N_B Bänder zu berechnen, muss das Eigenwertproblem von $\mathcal{W}_x(\vec{k})$ gelöst werden:

$$\mathcal{W}_x(\vec{k}) \left| v_{x,j}(\vec{k}) \right\rangle = v_{x,j}(k_y) \left| v_{x,j}(\vec{k}) \right\rangle \quad \text{mit } j \in [1, N_B] \quad (7.33)$$

Aus den j Eigenwerten v_x lassen sich dann die Wannier-Zentren bestimmen. Wie im nicht-entarteten Fall ergeben sich hier die Wannier-Zentren bzw. die Polarisation als die Phasen der Eigenwerte $\arg(v_{x,j}(k_y))$. Mithilfe der dazugehörigen Eigenvektoren $|v_{x,j}\rangle$ werden im nächsten Abschnitt die hybriden Wannier-Funktionen zu diesen Eigenwerten konstruiert. Obwohl der Wilson-Loop und dessen Eigenvektoren von der Wahl des Startpunkts abhängen, sind dessen Eigenwerte nur von k_y abhängig [72, 76].

Die Wannier-Zentren entlang x der des QTI und des 2D-SSH-Gitters sind in Abb. 7.8 für die triviale und die nicht-triviale Phase dargestellt. Nur für die entarteten Bänder des QTI sind die Wannier-Zentren in zwei separate „Wannier-Bänder“ unterteilbar, wobei diese beiden „Wannier-Bänder“ jeweils eine entgegengesetzte x -Polarisation aufzeigen. Dies entspricht anschaulich den zwei entgegengesetzten Dipolen, aus denen sich ein Quadrupol zusammensetzt, sodass sich insgesamt die Dipolpolarisation aufhebt. Nur für den QTI und die triviale Phase des 2D-SSH-Modells ergibt sich damit eine verschwindende Dipolpolarisation [74].

Hybride Wannier-Funktionen

Für die weitere Rechnung wird vorausgesetzt, dass die „Wannier-Bänder“ entgegengesetzte x -Polarisation haben. Anders ausgedrückt soll das Spektrum des Wilson-Loops sich für jeden Impuls eindeutig in zwei Sektoren unterteilen lassen, nämlich in den Sektor mit positiver $\arg(v_{xj}(k_y)) \in (0, \pi)$ und negativer $\arg(v_{xj}(k_y)) \in (-\pi, 0)$ x -Polarisation. Wie bereits in Abb. 7.8 gezeigt, ist dies nur für den QTI erfüllt. Dadurch, dass im betrachteten

Beispiel des QTI $N_B = 2$ ist und sich das Spektrum in die zwei Sektoren zerlegen lässt, wird im Folgenden der Index j durch \pm ersetzt, um die Polarisation des zugehörigen Sektors anzuzeigen. Nun können aus den Elementen der Eigenvektoren $\left[v_{x,\pm}(\vec{k}) \right]_n$ und den Blochmoden $\left| u_n(\vec{k}) \right\rangle$ die hybriden Wannier-Funktionen $\left| \tilde{w}_{v_x}^\pm(k_y) \right\rangle$ der beiden „Wannier-Bänder“ konstruiert werden

$$\left| \tilde{w}_{v_x}^\pm(k_y) \right\rangle = \sum_{n=1}^{N_B} \left[v_{x,\pm}(\vec{k}) \right]_n \left| u_n(\vec{k}) \right\rangle. \quad (7.34)$$

Im Gegensatz zu den Wannier-Funktionen $|w(j)\rangle$ aus Abschnitt 7.1.4 beschreiben hier die konstruierten Wannier-Funktionen $\left| \tilde{w}_{v_x}^\pm(k_y) \right\rangle$ lediglich die Amplitudenverteilung in einer Einheitszelle. Diese hybriden Wannier-Funktionen sind lokalisiert in x aber delokalisiert in y [72, 74, 75].

$$\left| x \right\rangle \otimes \left| e^{ik_y} \right\rangle \otimes \left| \tilde{w}_{v_x}^\pm(k_y) \right\rangle \in \mathcal{H}_{x\text{-Gitter}} \otimes \mathcal{H}_{y\text{-Gitter}} \otimes \mathcal{H}_{\text{Einheitszelle}} \quad (7.35)$$

$|x\rangle$ steht hier für einen um x lokalisieren Vektor. x kann dabei frei gewählt werden, da die Wannier-Funktionen durch Translation ineinander überführbar sind.

Verschachtelter Wilson-Loop

Da nun die energetisch entarteten Bänder anhand ihrer x -Polarisation aufgeteilt wurden, kann nun auch über diese „Wannier-Bänder“ ein Wilson-Loop berechnet werden. Der Wilson-Loop \mathcal{W}_{y,v_x}^\pm entlang k_y über die positiv bzw. negativ x -polarisierten Wannier-Bänder ergibt sich zu

$$\mathcal{W}_{y,v_x}^\pm = \prod_{k_y \rightarrow k_y + 2\pi} F_{v_x}^\pm(\vec{k} + d\vec{k}_y, \vec{k}) \quad \text{mit} \quad F_{v_x}^\pm(\vec{k}, \vec{k}') = \left\langle \tilde{w}_{v_x}^\pm(\vec{k}) \left| \tilde{w}_{v_x}^\pm(\vec{k}') \right. \right\rangle. \quad (7.36)$$

Für den betrachteten QTI mit $N_B = 2$ sind diese verschachtelten Wilson-Loops skalar und die Polarisation ist wieder durch die Phase gegeben.

$$P_{y,v_x}^\pm = \arg(\mathcal{W}_{y,v_x}^\pm) / 2\pi = \begin{cases} 0 & \gamma > \lambda \\ 1/2 & \gamma < \lambda \end{cases} \quad (7.37)$$

Wie bei der Auftragung vom SSH-Modell in Abb. 7.4 ist für den QTI in Abb. 7.8 an den relativen Phasen oder auch an den Parität erkennbar, dass nur im nicht-trivialen Fall der Wilson-Loop eine Berry-Phase aufammelt. Durch Vertauschen von x und y ergibt sich mit der gleichen Rechnung P_{x,v_y}^\pm und aus den beiden Polarisationen die Quadrupol-topologische Invariante Q_{xy} [74].

$$Q_{xy} = 2P_{y,v_x}^\pm P_{x,v_y}^\pm = \begin{cases} 0 & \gamma > \lambda \quad (\text{trivial}) \\ 1 & \gamma < \lambda \quad (\text{nicht-trivial}) \end{cases} \quad (7.38)$$

7.2.3 Symmetrien für die Quadrupol-Polarisation

Zuerst wird in diesem Abschnitt gezeigt, inwiefern die Spiegel-Symmetrien des Systems einschränken, welche Werte die Polarisationen annehmen können. Dann wird hergeleitet, welche Kommutator-Eigenschaften die Spiegel-Symmetrien erfüllen müssen, sodass es eine Quadrupol-Polarisation gibt. Zuletzt werden die beiden Gitter-Modelle bezüglich ihrer Symmetrie-Eigenschaften der betrachtet.

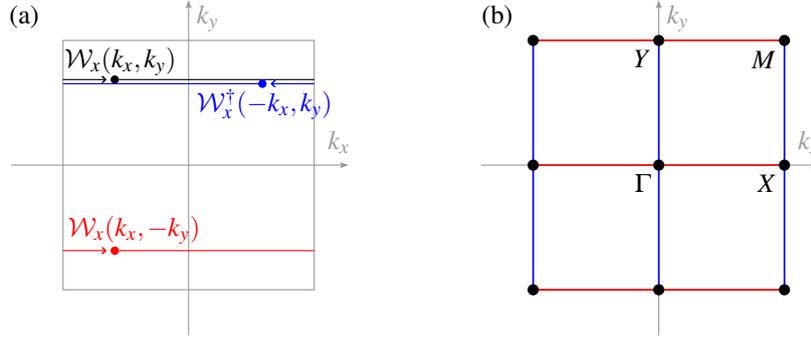


Abbildung 7.9: (a) Ein Wilson-Loop \mathcal{W}_x mit Startpunkt (k_x, k_y) in der BZ, sowie dessen Spiegelungen durch \hat{M}_x und \hat{M}_y . (b) Orte in der BZ, an denen die Zustände durch \hat{M}_x (blau), \hat{M}_y (rot) bzw. \hat{I} (schwarz) auf sich selbst abgebildet werden (nach [74]).

Quantisierungen der Polarisation aufgrund der Spiegel-Symmetrien

Bei Spiegelsymmetrie entlang x werden die Zustände jeweils auf die Zustände mit negierter k_x Komponente abgebildet $\hat{M}_x |k_x, k_y\rangle = |-k_x, k_y\rangle$. Aus einem Wilson-Loop in k_x -Richtung wird durch die Spiegelung, wie in Abb. 7.9 (a) dargestellt, ein Wilson-Loop entgegen k_x -Richtung

$$\hat{M}_x \mathcal{W}_x(k_x, k_y) \hat{M}_x^\dagger = \mathcal{W}_{-x}(-k_x, k_y) = \mathcal{W}_x^\dagger(-k_x, k_y). \quad (7.39)$$

Da die Eigenwerte nur von k_y und nicht vom Startpunkt abhängen, müssen die Spektren von $\mathcal{W}_x(k_x, k_y)$ und $\mathcal{W}_x^\dagger(-k_x, k_y)$ gleich sein. Entsprechend gibt es für jeden Eigenwert im Spektrum auch einen komplex konjugierten Eigenwert $\{v_x(k_y)\} = \{v_x^*(k_y)\}$. Damit lassen sich im Allgemeinen zwei Fälle unterscheiden: entweder ist der Eigenwert reell und damit ± 1 . Alternativ ist der Eigenwert komplex, aber dann muss es auch den komplex konjugierten Eigenwert im Spektrum geben. Insgesamt schränkt dies das Spektrum auf $v_x \in \{\pm 1, (e^{i\varphi}, e^{-i\varphi})\}$ ein. Ist $v_x = 1$ liegt der triviale Fall vor. Das Wannier-Zentrum liegt in der Mitte der Einheitszelle und es gibt keine Polarisation. Ist $v_x = -1$ liegt das Wannier-Zentrum am Rand der Einheitszelle und es gibt eine nicht verschwindende Dipol-Polarisation. Für die Quadrupol-Polarisation ist der Fall $v_x \in \{e^{i\varphi}, e^{-i\varphi}\}$ relevant. In dem Fall liegen die Wannier-Zentren in Paaren vor, die symmetrisch um das Zentrum der Einheitszelle versetzt sind. Nur in diesem Fall sind Wannier-Bänder entgegengesetzt polarisiert, um einen Quadrupol zu bilden und es ist garantiert, dass die Gesamt-Dipol-Polarisation verschwindet. Umgekehrt folgt daraus, dass für eine Quadrupol-Polarisation nur der Fall $v_x = \{e^{i\varphi}, e^{-i\varphi}\}$ vorliegen kann. Daher müssen die Wannier-Bänder strikt getrennt sein, da nirgendwo der Fall $v_x = \pm 1$ auftreten darf.

Unter der Annahme, dass die Wannier-Bänder getrennt sind, kann der Wilson-Loop auch über die Wannier-Bänder berechnet werden. Die Spiegelsymmetrie entlang y wirkt sich nicht auf die Wilson-Loops entlang x aus

$$\hat{M}_y \mathcal{W}_x(k_x, k_y) \hat{M}_y^\dagger = \mathcal{W}_x(k_x, -k_y). \quad (7.40)$$

Für die Spiegelsymmetrie entlang y ergibt sich, dass der verschachtelte Wilson-Loop in k_y -Richtung auf einen Wilson-Loop entgegen k_y -Richtung abgebildet wird.

$$\hat{M}_y \mathcal{W}_{y, v_x}^\pm(k_x, k_y) \hat{M}_y^\dagger = \mathcal{W}_{y, v_x}^{\pm*}(k_x, -k_y) \quad (7.41)$$

Da $\mathcal{W}_{y, v_x}^\pm(k_x, k_y)$ in dem betrachteten Fall ein Skalar ist, kann er nur die Werte $\{-1, 1\}$ annehmen. Die Polarisation der Wannier-Bänder ist daher auf $P_{y, v_x}^\pm \in \{0, 1/2\}$ quantisiert [74].

Kommutator-Bedingung der Spiegel-Symmetrien für eine Quadrupol-Polarisation

Wie eben erläutert, müssen für eine Quadrupol-Polarisation die Wannier-Bänder getrennt sein. Dies wurde bisher immer vorausgesetzt, aber auch diese Voraussetzung lässt sich durch Symmetrie-Eigenschaften vorgeben. Wie beim SSH-Modell in Gl. (7.13) lässt sich der Wilson-Loop über die Parität der Zustände an Punkten bestimmen, die unter der Symmetrie auf sich selbst abgebildet werden. Im Fall von entarteten Bändern sind die Paritäten $B_{\vec{k}}$ aber durch Matrizen gegeben, deren Eigenwerte entweder 1 oder -1 sind, je nachdem ob die Zustände bezüglich der Symmetrie symmetrisch oder anti-symmetrisch sind. Für den Fall von zwei entarteten Bändern lassen sich die Paritätsmatrizen in zwei Kategorien unterteilen. Entweder sind die zwei Eigenwerte gleich, dann ist $B_{\vec{k}}$ bis auf eine unitäre Basistransformation proportional zur Einheitsmatrix σ_0 , oder sie sind verschieden, dann ist $B_{\vec{k}}$ bis auf eine unitäre Basistransformation proportional zu σ_3 . Ein Wilson-Loop in k_x -Richtung lässt sich hier wieder in zwei Wilson-Linien unterteilen, welche aufgrund der Symmetrie \hat{M}_x die gleiche Phase aufsammeln müssen:

$$\mathcal{W}_x = \mathcal{W}_{-X \rightarrow X} = \mathcal{W}_{-X \rightarrow \Gamma} \mathcal{W}_{\Gamma \rightarrow X} \stackrel{\hat{M}_x}{=} B_X \mathcal{W}_{X \rightarrow \Gamma} B_\Gamma \mathcal{W}_{\Gamma \rightarrow X}. \quad (7.42)$$

Wenn B_Γ bis auf eine Basisrotation proportional zu σ_0 ist, kommutiert B_Γ mit den Wilson-Linien und das Spektrum des Wilson-Loops ist das von $\pm B_X$. Analog folgt: Wenn B_X proportional zu σ_0 ist, ist das Spektrum des Wilson-Loops das von $\pm B_\Gamma$. In diesen Fällen ist $v_x \in \{\pm 1\}$ und es kann keine Quadrupol-Polarisation vorliegen. Für den Fall $v_x = \{e^{i\varphi}, e^{-i\varphi}\}$ dürfen daher die Paritätsmatrizen nicht mit den Wilson-Linien kommutieren, also sowohl B_Γ als auch B_X müssen bis auf eine Basisrotation proportional zu σ_3 sein. Anders ausgedrückt müssen an den Punkten, an denen die Zustände durch die Symmetrie auf sich selbst abgebildet werden, immer ein symmetrischer und ein anti-symmetrischer Zustand existieren, damit auch an diesen Punkten der Fall $v_x = \{e^{i\varphi}, e^{-i\varphi}\}$ vorliegt und die Wannier-Bänder getrennt sind [81].

Diese Bedingung muss für alle Symmetrien des Systems erfüllt sein, also auch für die Spiegelsymmetrie \hat{M}_y und die Inversionssymmetrie \hat{I} . Daraus folgt, dass für den Fall $v_x = \{e^{i\varphi}, e^{-i\varphi}\}$ die Spiegelsymmetrien nicht kommutieren dürfen. Um dies zu zeigen sei nun einmal angenommen, dass die Spiegel-Operatoren kommutieren $[\hat{M}_x, \hat{M}_y] = 0$, dann ist die Inversionssymmetrie durch $\hat{I} = \hat{M}_x \hat{M}_y$ gegeben und alle drei Symmetrien kommutieren. Wie in Abb. 7.9 (b) dargestellt, folgt daraus insbesondere, dass die Zustände an den Punkten $\{\Gamma, X, Y, M\}$ diese Bedingung für alle Symmetrien gleichzeitig erfüllen müssen. An den Punkten $k = \{\Gamma, X, Y, M\}$ müssen demnach jeweils zwei Zustände ($|k_+\rangle, |k_-\rangle$) existieren, von denen jeweils einer symmetrisch $\hat{M}|k_+\rangle = +|k_+\rangle$ und einer anti-symmetrisch $\hat{M}|k_-\rangle = -|k_-\rangle$ bezüglich $\hat{M} \in \{\hat{M}_x, \hat{M}_y, \hat{I}\}$ ist. Die Symmetrie bezüglich \hat{I} ist dabei durch das Produkt der beiden Spiegelsymmetrien vorgegeben. Werden nun symmetrische Zustände mit + abgekürzt und anti-symmetrische mit - ergibt sich für die Symmetrien der Zustände die folgende Tabelle:

\hat{M}_x	\hat{M}_y	$\hat{I} = \hat{M}_x \hat{M}_y$
+	+	+
+	-	-
-	+	-
-	-	+

In dieser Tabelle lassen sich jedoch keine Zustandspaare finden, welche bezüglich aller Symmetrien jeweils einen symmetrischen Zustand und einen anti-symmetrischen Zustand beinhalten. Daraus kann gefolgert werden, dass die Wannier-Bänder nur getrennt sein können, und damit eine Quadrupol-Polarisation nur vorliegen kann, wenn die Spiegel-Symmetrien nicht kommutieren [74].

Symmetrien der beiden Gitter-Systeme

Nun werden die beiden Gitter-Systeme unter Berücksichtigung dieser Symmetrie-Eigenschaften betrachtet. Intuitiv ergibt sich für das 2D-SSH-Gitter, dass die Spiegelsymmetrien durch $\hat{M}_x = \Gamma_{10}$ und $\hat{M}_y = \Gamma_{11}$ gegeben

sind. Was durch die Anwendung von Γ_{10} effektiv passiert, ist, dass die Amplituden an den Gitterpunkten $1 \leftrightarrow 3$ und $2 \leftrightarrow 4$ vertauscht werden und damit das Gitter in Abb. 7.6 (a) entlang der y -Achse gespiegelt wird. Analog vertauscht Γ_{11} die Amplituden bei $1 \leftrightarrow 4$ und $2 \leftrightarrow 3$.

$$\Gamma_{10}H_{\text{SSH}}(k_x, k_y)\Gamma_{10}^\dagger \stackrel{\delta=0}{=} H_{\text{SSH}}(-k_x, k_y) \quad \text{und} \quad \Gamma_{11}H_{\text{SSH}}(k_x, k_y)\Gamma_{11}^\dagger \stackrel{\delta=0}{=} H_{\text{SSH}}(k_x, -k_y) \quad (7.43)$$

Da die beiden Spiegel-Operatoren kommutieren $[\hat{M}_x, \hat{M}_y] = [\Gamma_{10}, \Gamma_{11}] = \Gamma_{01} - \Gamma_{01} = 0$ sind die Wannier-Bänder nicht getrennt, sondern liegen bei $\arg(v_x)/2\pi = \{0, 1/2\}$ wie schon in Abb. 7.8 zu sehen war. Entsprechend kann das Gitter nur Dipol- aber keine Quadrupol-Polarisation besitzen.

Bei dem QTI ist Γ_{11} auch noch eine \hat{M}_y -Symmetrie, da das Gitter in Abb. 7.6 (a) auch unter Berücksichtigung der negativen Kopplungen bezüglich der x -Achse symmetrisch ist. Solange die Potenzialdifferenz $\delta = 0$ ist, hat der Hamilton-Operator \hat{M}_y -Symmetrie.

$$\hat{M}_y H_{\text{QTI}}(k_x, k_y) \hat{M}_y^\dagger = h_{10}\Gamma_{10} + h_{23}\Gamma_{23} + h_{22}\Gamma_{22} - h_{21}\Gamma_{21} - \delta\Gamma_{30} \stackrel{\delta=0}{=} H_{\text{QTI}}(k_x, -k_y) \quad (7.44)$$

Hierbei wurden abkürzend die h_{ij} als Koeffizienten von $H_{\text{QTI}}(k_x, k_y)$ vor den jeweiligen Γ_{ij} verwendet. $h_{21} = \lambda \sin(k_y)$ ist der einzige Koeffizient, der antisymmetrisch bezüglich einer Spiegelung in y ist. Für die Spiegelsymmetrie in x -Richtung lässt sich zeigen, dass Γ_{13} die Bedingungen für \hat{M}_x erfüllt.

$$\hat{M}_x H_{\text{QTI}}(k_x, k_y) \hat{M}_x^\dagger = \Gamma_{13} (h_{10}\Gamma_{10} + h_{23}\Gamma_{23} + h_{22}\Gamma_{22} + h_{21}\Gamma_{21} + \delta\Gamma_{30}) \Gamma_{13} \quad (7.45)$$

$$= \Gamma_{13} (h_{10}\Gamma_{03} - ih_{23}\Gamma_{30} + h_{22}\Gamma_{31} - h_{21}\Gamma_{32} + i\delta\Gamma_{23}) \quad (7.46)$$

$$= h_{10}\Gamma_{10} - h_{23}\Gamma_{23} + h_{22}\Gamma_{22} + h_{21}\Gamma_{21} - \delta\Gamma_{30} \stackrel{\delta=0}{=} H_{\text{QTI}}(-k_x, k_y) \quad (7.47)$$

Da die Spiegelsymmetrien im Fall von H_{QTI} nicht kommutieren $[\hat{M}_x, \hat{M}_y] = -2i\Gamma_{02} = 2\hat{I}$ sind die Wannier-Bänder getrennt und das Gitter kann eine nicht-verschwindende Quadrupol-Polarisation besitzen. Diese Bedingung ist nur notwendig aber nicht hinreichend. Während das 2D-SSH-Gitter in der trivialen Phase keine Polarisation und in der nicht-trivialen Phase eine Dipol-Polarisation aufweist, hat der QTI immer getrennte Wannier-Bänder und damit immer eine verschwindende Gesamt-Dipol-Polarisation. Aber nur in der nicht-trivialen Phase sind die beiden Wannier-Bänder auch in y -Richtung polarisiert und es gibt eine Quadrupol-Polarisation.

7.3 Realisierung des QTI in einer Wellenleiterstruktur

Wie in den vorhergehenden Rechnungen gezeigt wurde, ist es für die Quadrupol-Polarisation nötig, dass die Spiegelsymmetrien des Systems nicht kommutieren, was sich dadurch erreichen lässt, dass das Gitter des QTI von einem effektiven magnetischen π -Fluss durchströmt wird. Dies wiederum lässt sich durch Einfügen einiger negativer Kopplungen realisieren. Abgesehen von den negativen Kopplungen ist die Anordnung der Gitterpunkte in der Einheitszelle des QTI die gleiche wie die in dem 2D-SSH-Gitter. Bei einigen Plattformen wie Mikrowellenresonatoren [5], Ringresonatoren [8], gekoppelten elektrischen Schwingkreisen [3] oder akustischen [6] oder mechanischen [82] Resonatoren wurde dies bereits demonstriert. Bei diesen makroskopischen experimentellen Plattformen ergibt sich allerdings im Allgemeinen die Möglichkeit, die Kopplung zu bestimmten Gitterpunkten sowie deren Vorzeichen fast frei zu wählen. In den meisten mikroskopischen Plattformen, wie auch im Festkörper, wird die Kopplung jedoch durch den Abstand zum nächsten Gitterpunkt vorgegeben. Auch die Möglichkeit einfach das Vorzeichen zu wählen ist nicht immer gegeben. Die Realisierung des QTI in einem Festkörpersystem könnte es z.B. ermöglichen, die an den Ecken des Festkörpers lokalisierten Zustände, als individuelle Quanten-Systeme mit äquivalenten Eigenschaften zu verwenden.

Für evaneszent gekoppelte Wellenleiter wurde bereits gezeigt, dass durch Einfügen eines weiteren Wellenleiters die Kopplung effektiv negativ gemacht werden kann [51] und die Auswirkungen eines π Fluss durch eine Plakette wurden damit demonstriert [50]. Hierbei muss jedoch das Potenzial dieses neuen Gitterpunkts exakt gewählt werden. Bei der ersten Beschreibung eines QTI von Benalcaza *et al.* wurde mitunter diese Methode vorgeschlagen, um den QTI experimentell in Wellenleiterstrukturen zu realisieren [74]. Jedoch ergeben sich experimentell Schwierigkeiten, da nicht nur negative Kopplungen sondern auch zwei verschiedene Kopplungsstärken für die topologischen Phasen nötig sind. Daher werden mehrere Gitterpunkte mit präzise gewählten Potenzialen für eine starke und eine schwache negative Kopplung benötigt. Durch Einfügen der neuen Gitterpunkte gibt es einen Brechungsindexunterschied, der sich durch die evaneszenten Felder indirekt auf die umgebenden Gitterpunkte auswirkt. Die Potenziale der zusätzlichen Gitterpunkte für die verschiedenen negativen Kopplungen beeinflussen sich gegenseitig so sehr, dass keine geeigneten Parameter gefunden werden konnten, in denen alle Kopplungen die gewünschte Stärke und das gewünschte Vorzeichen haben.

Kopplung von s - und p -Moden

Um dieses Problem zu umgehen wird im hier präsentierten Experiment die Kopplung von verschiedenen geführten Moden verwendet, um den synthetischen magnetischen Fluss zu generieren. Das zum Beispiel durch geführte OAM-Moden ein π -Fluss generiert werden kann, wurde bereits in [55] demonstriert. Um im hier

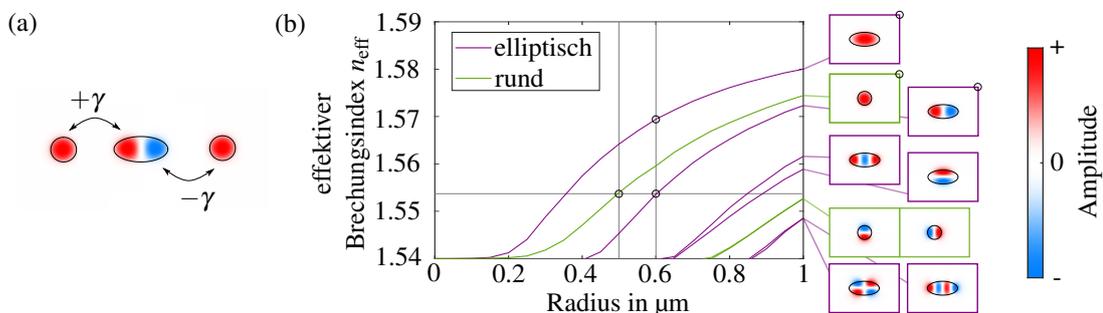


Abbildung 7.10: (a) Das Vorzeichen der Kopplung zwischen s - und p -Mode hängt davon ab, welche Seite der p -Mode näher ist. (b) Effektive Brechungsindizes von elliptischen und runden Wellenleitern mit den Brechungsindizes vom Experiment. Für die elliptischen Wellenleiter wird ein festes Verhältnis der Hauptsachsen gewählt. Die Moden, die im Experiment in der Wellenleiterstruktur propagieren können, sind mit Kreisen markiert.

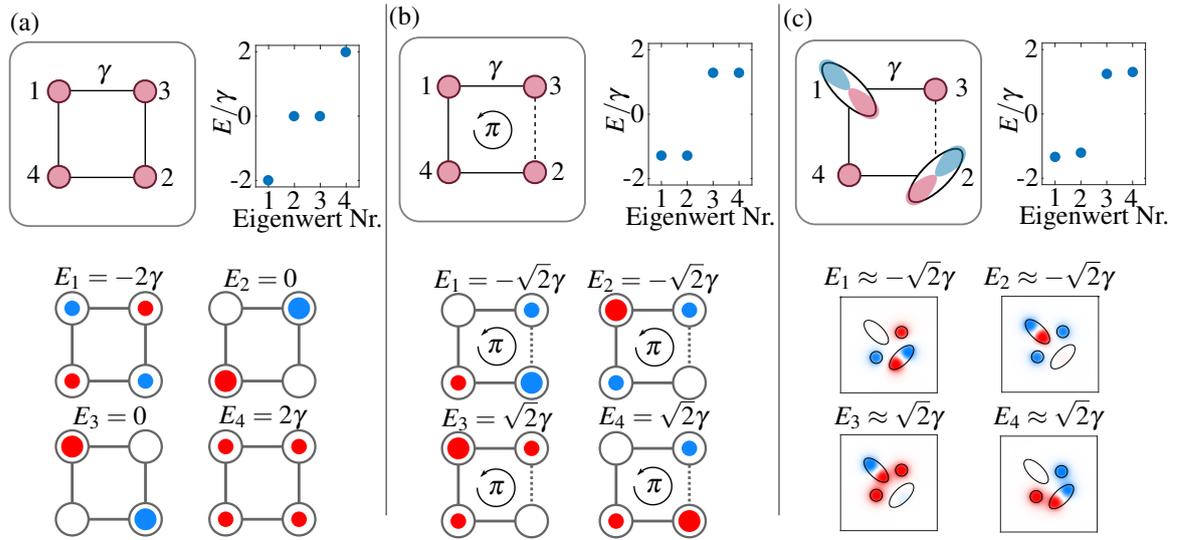


Abbildung 7.11: Schematische Darstellung und entsprechende Eigenwerte und Eigenmoden einer einzelnen Einheitszelle, die (a) nur aus s -Moden ohne synthetischen π -Fluss, (b) mit synthetischem π -Fluss und (c) sowohl aus s - als auch aus p -Moden besteht. Die durchgezogenen und gestrichelten Linien im Schema zeigen die positiven bzw. negativen Kopplungen an. E bezeichnet die Eigenwerte und γ die Kopplungskonstante zwischen den benachbarten Gitterpunkten. Die Flächen und Farben der Kreise geben die Amplituden bzw. Phasen der entsprechenden Eigenmoden an.

präsentierten Experiment die negativen Kopplungen für die Einheitszelle zu realisieren, wird die Kopplung zwischen der Grundmode eines runden Wellenleiters (s -Mode) und der ersten höheren Mode eines elliptischen Wellenleiters (p -Mode) genutzt. Die p -Mode hat dabei eine Knotenebene entlang der kurzen Achse der Ellipse. Daher gibt es einen Phasensprung von π zwischen dem Feld auf der einen Seite der p -Mode im Vergleich zur anderen Seite. Das Überlappintegral und damit die Kopplung von der „negativen“ Seite der p -Mode mit einer benachbarten s -Mode ist negativ [83]⁵, wie in Abb. 7.10 (a) skizziert. Damit die s -Moden der runden Wellenleiter überhaupt effektiv mit den p -Moden der elliptischen Wellenleiter koppeln können, müssen deren Propagationskonstanten, oder äquivalent deren effektive Brechungsindizes, annähernd gleich sein, was über den Radius und die Ellipsenparameter angepasst werden kann, wie Abb. 7.10 (b) für die Parameter im Experiment zeigt.

Um zu zeigen, dass diese Einheitszelle im Experiment effektiv von einem π -Fluss durchströmt wird, wird sie wie in Abb. 7.11 zu sehen, mit tight-binding Modellen mit und ohne π -Fluss verglichen. In den tight-binding Modellen (a) und (b) werden nur die Grund- bzw. die s -Moden der Gitterpunkte betrachtet, welche jeweils über γ miteinander gekoppelt sind. In dem Fall (a) ohne π -Fluss ergeben sich die Eigenenergien $E = \{\pm 2\gamma, 0\}$, wobei die Mode bei $E = 0$ zweifach entartet ist. In dem Fall (b) wird die Kopplung zwischen Gitterpunkt 2 und 3 negativ gewählt, wodurch die Plakette von einem π -Fluss durchströmt wird. Die Eigenmoden sind in diesem Fall jeweils zwei-fach entartet und die Eigenenergien liegen bei $E = \{\pm\sqrt{2}\gamma\}$. Wie in (a) und (b) zu sehen ist, führt die Einführung eines π -Flusses zu einer signifikanten Änderung des Spektrums und der Eigenmoden.

Die runden und elliptischen Wellenleiter werden in der Einheitszelle so angeordnet, dass beim Umlauf einer Plakette jeweils ein elliptischer Wellenleiter entlang der langen Achse durchquert wird, um mit dem Phasensprung vom p -Orbital eine Phase von π aufzusammeln. Eine Einheitszelle besteht dann wie in Abb. 7.11 (c) dargestellt aus vier Wellenleitern, zwei runde an den Gitterpunkten 1 und 2 und zwei elliptische an den Gitterpunkten 3 und 4, wobei die Hauptachse der elliptischen Wellenleiter um $\pm 45^\circ$ gegen die y -Achse verdreht ist. Wenn ein Wellenpaket in (c) das p -Orbital an Ort 3 kreuzt, wird eine π -Phase akkumuliert, da Gitterpunkt

⁵Während der Veröffentlichung der hier dargestellten Ergebnisse über den QTI wurde von der gleichen Gruppe ebenfalls ein durch die Kopplung von s - und p -Moden induzierter magnetischer π -Fluss in [84] demonstriert.

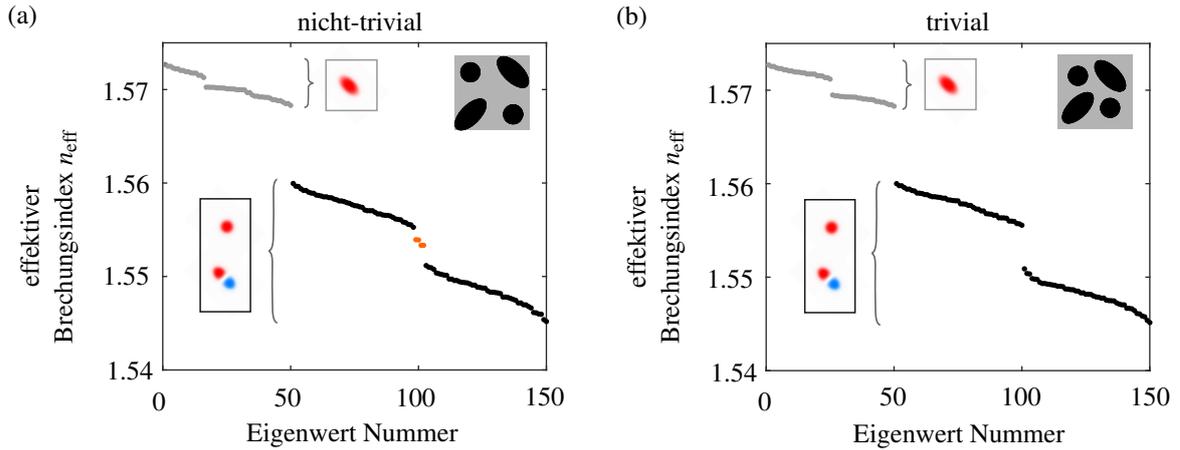


Abbildung 7.12: Eigenenergien der 5×5 -Einheitszellen in der (a) nicht-trivialen Phase und (b) triviale Phase. Die Eigenmoden werden mit Hilfe eines Eigenmode-Solvers berechnet. Die geometrischen Parameter der Struktur für den Eigenmode-Solver sind die gleichen, wie die der für das Experiment hergestellten Wellenleiterprobe. Die Insets zeigen die Anordnung der Wellenleiter in einer Einheitszelle. Die grauen Punkte stehen für die Eigenmoden des Gitters, die aus den s -Moden der elliptischen Wellenleiter bestehen. Die schwarzen Punkte zeigen die über das Gitter delokalisierten Eigenmoden an, die aus den s -Moden der runden und den p -Moden des elliptischen Wellenleiters bestehen. Die orangen Punkte in der nicht-trivialen Phase sind die in den Ecken lokalisierten Eigenmoden.

1 an die „positive“ Seite und Gitterpunkt 2 an die „negative“ Seite der p -Mode koppelt, wodurch insgesamt ein π -Fluss in der Plakette induziert wird. Der elliptische Wellenleiter an Gitterpunkt 4 sorgt dafür, dass auch zwischen den Einheitszellen ein π -Fluss induziert wird. Die in Abb. 7.11 (c) gezeigten Eigenenergien und Eigenmoden dieser Wellenleiteranordnung wurden wie in Abschnitt 4.2.2 beschrieben berechnet. Die Form der Eigenmoden sowie die Eigenenergien stimmen bei der Einheitszelle aus elliptischen und runden Wellenleitern mit denen des tight-binding Modells mit π -Fluss qualitativ überein.

Durch Koppeln mehrerer Einheitszellen werden aus den wenigen Eigenenergien in Abb. 7.11 zunehmend kontinuierliche Bänder. Da die Kopplungsstärke zwischen den Wellenleitern exponentiell mit dem Abstand abnimmt, können die verschiedenen topologischen Phasen durch die Wahl der Abstände der Wellenleiter innerhalb der Einheitszelle zu den Abständen außerhalb der Einheitszelle vorgegeben werden. Bei der nicht-trivialen Phase sind die Abstände für $\gamma < \lambda$ innerhalb der Einheitszelle größer als außerhalb und in der trivialen Phase entsprechend umgekehrt. In Abb. 7.12 sind die Eigenenergie-Spektren endlicher Gitter mit 5×5 Einheitszellen zu sehen. An dem Spektrum ist zu erkennen, dass die Grundmode der elliptischen Wellenleiter so weit verstimmt ist, dass quasi keine Intensität in diese Mode koppelt und sie daher für die Dynamik in den Bändern des QTI vernachlässigt werden kann.

Wellenleitergitter

Um nun experimentell die lokalisierten Eigenmoden nachzuweisen, wurden Wellenleiterstrukturen mit dieser Gitteranordnung hergestellt und Licht in die Wellenleiter an der Ecke eingekoppelt. Die gemessene Intensitätsverteilung an der Austrittsfläche der Wellenleiterstruktur ist in Abb. 7.13 gezeigt. Wenn das Licht in die Ecke der trivialen Struktur (Abb. 7.13 (b)) eingekoppelt wird, werden mehrere über das Gitter delokalisierte Moden angeregt und das Licht verteilt sich über das Gitter. Im Gegensatz dazu gibt es in der nicht-trivialen Struktur (Abb. 7.13 (c)) die an der Ecke lokalisierte 0D-Mode, welche großen Überlapp mit dem eingekoppelten Licht hat. Der Überlapp mit den einzelnen 2D-Moden oder den 1D-Randmoden ist vergleichsweise klein. Daher wird fast nur die in der Ecke lokalisierte Eigenmode angeregt und das Licht bleibt über die Propagationsstrecke lokalisiert. Um noch zu demonstrieren, dass die Lokalisierung nicht durch zu geringe Kopplungsstärke erklär-

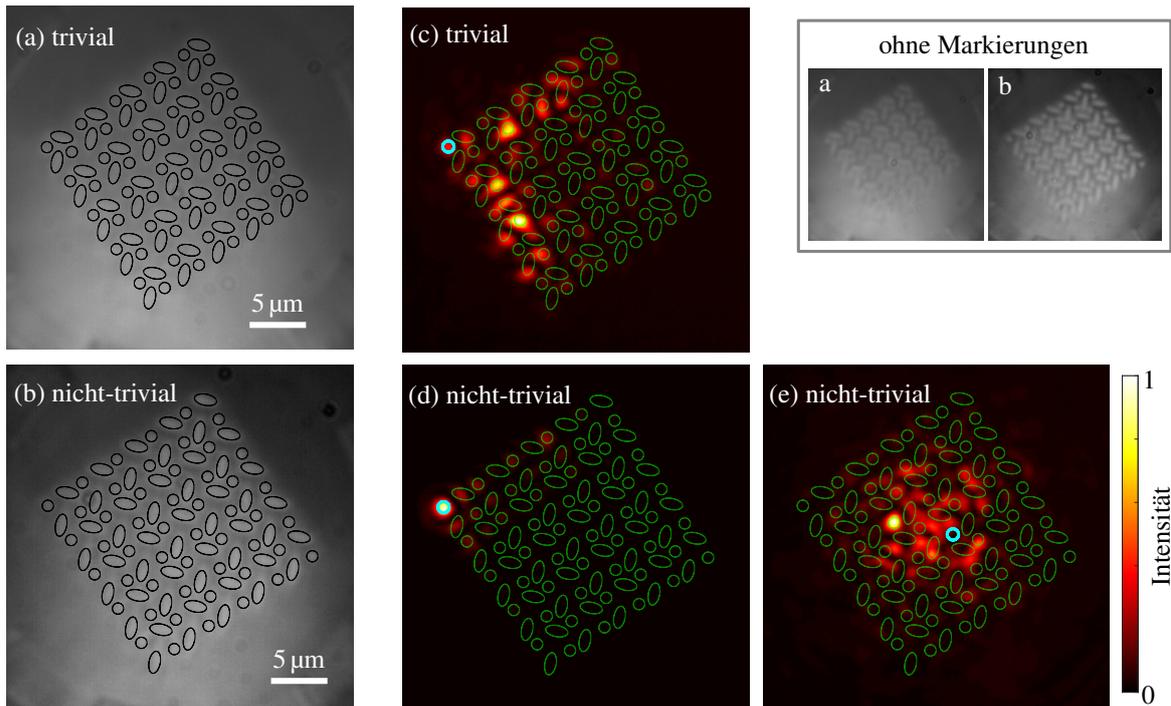


Abbildung 7.13: (a,b) Querschnittsbild der Ausgangsfacette der Wellenleiterstruktur in der trivialen (a) und der nicht-trivialen (b) Phase mit einer homogenen Beleuchtung der Eingangsfacette. (c-e) Gemessene Intensitätsprofile an der Ausgangsfacette der Wellenleiterstrukturen. Wellenleiter, in die Licht an der Eingangsfacette eingekoppelt wird, sind durch dicke cyanblaue Kreise gekennzeichnet. Bei (c,d) wird in einen Wellenleiter an der Ecke und bei (e) in einen Wellenleiter in der Mitte eingekoppelt. Die Intensitätsprofile sind auf ihren jeweiligen Maximalwert normiert. Die Aufnahmen sind mit schwarzen (a,b) bzw. grünen Kreisen/Ellipsen (c-e) überlagert, um die Positionen der Wellenleiter anzuzeigen.

bar wäre, wurde Licht in einen Wellenleiter in der Mitte des Gitters eingekoppelt (Abb. 7.13 (d)). Da in der Mitte des Gitters keine lokalisierten Moden sind, werden damit, wie in der trivialen Struktur, über das Gitter delokalisierten 2D-Moden angeregt und das Licht verteilt sich über die Struktur.

Dies zeigt nun auch experimentell, dass es nur in der nicht-trivialen Phase eine lokalisierte Eigenmode an den Ecken der Struktur gibt. Jedoch genügt das nicht um die Quadrupoleigenschaften der Struktur eindeutig zu belegen. Wie in Abb. 7.7 gezeigt hat ein Gitter ohne π -Fluss ebenfalls nur in der nicht-trivialen Phase eine in der Ecke lokalisierte Mode. Um nun experimentell zu zeigen, dass bei der Wellenleiterstruktur ein synthetischer π -Fluss vorliegt und damit ein QTI realisiert wurde, wurde zusätzlich nachgewiesen, dass die lokalisierten Eckzustände in einer Bandlücke liegen.

Für diesen Nachweis wird ein Hilfswellenleiter eingefügt. Dieser Wellenleiter ist rund und hat den gleichen Radius und damit das gleiche Potenzial wie die anderen runden Wellenleiter in der Gitterstruktur. Ungekoppelt liegt die Eigenenergie der Eigenmode dieses Hilfswellenleiters bei $E = 0$, also in der Bandlücke bzw. bei der Energie der Eckzustände des QTI. Dieser Hilfswellenleiter wird in der Nähe der Ecke der Struktur platziert, sodass dieser schwach an das Gitter gekoppelt ist. Mit schwach gekoppelt ist dabei gemeint, dass sich das Spektrum von Hilfswellenleiter und Gitter nicht deutlich durch die Kopplung ändern. Über Einkopplung in den Hilfswellenleiter können damit gezielt Zustände mit einer Energie um $E = 0$ angeregt werden. Im Abb. 7.14 sind die Messergebnisse für diese Strukturen zu sehen. Während in Abb. 7.14 (b), im nicht-trivialen Gitter das Licht aus dem Hilfswellenleiter in den Eckzustand koppeln kann, bleibt das Licht im trivialen Gitter in Abb. 7.14 (c) in dem Hilfswellenleiter. Letzteres zeigt, dass es im trivialen Gitter keine Moden bei $E = 0$ gibt und somit, dass durch die s - und p -Moden ein π -Fluss induziert wird, welcher die Bandlücke öffnet. Wäre dies nicht der Fall, wie im 2D-SSH-Gitter, würde sich das Licht von dem Hilfswellenleiter über das Gitter verteilen

wie es experimentell schon in Ref. [79] gezeigt wurde.

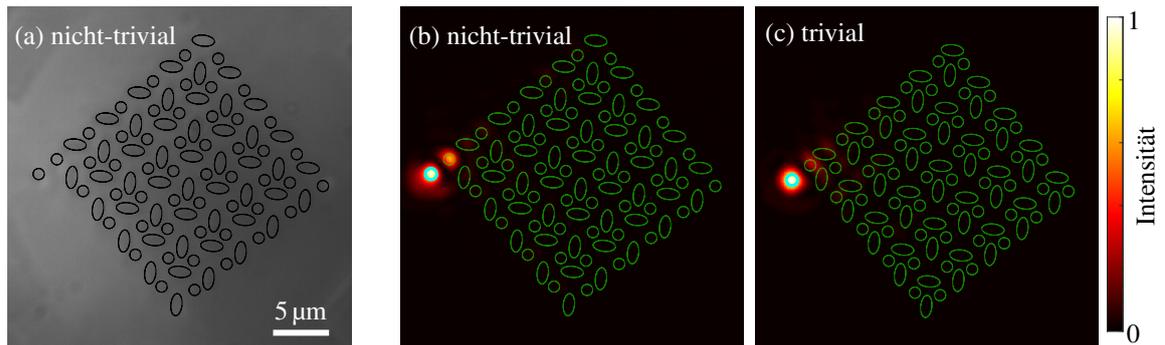


Abbildung 7.14: (a) Querschnittsbild der Ausgangsfacette der Wellenleiterstruktur in der nicht-trivialen Phase mit einem Hilfswellenleiter mit homogener Beleuchtung der Eingangsfacette. (b,c) Licht, gemessen an der Ausgangsfacette, wenn Licht in den Hilfswellenleiter direkt an der linken Ecke der Wellenleiterstruktur in der nicht-trivialen Phase (b) bzw. der trivialen Phase (c) eingekoppelt wird. Die Wellenleiter, in die das Licht an der Eingangsfacette eingekoppelt wird, sind durch dicke cyanblaue Kreise gekennzeichnet. Die Intensitätsprofile sind auf ihren jeweiligen Maximalwert normiert. Die Aufnahmen sind mit schwarzen (a) bzw. grünen Kreisen/Ellipsen (b,c) überlagert, um die Positionen der Wellenleiter anzuzeigen.

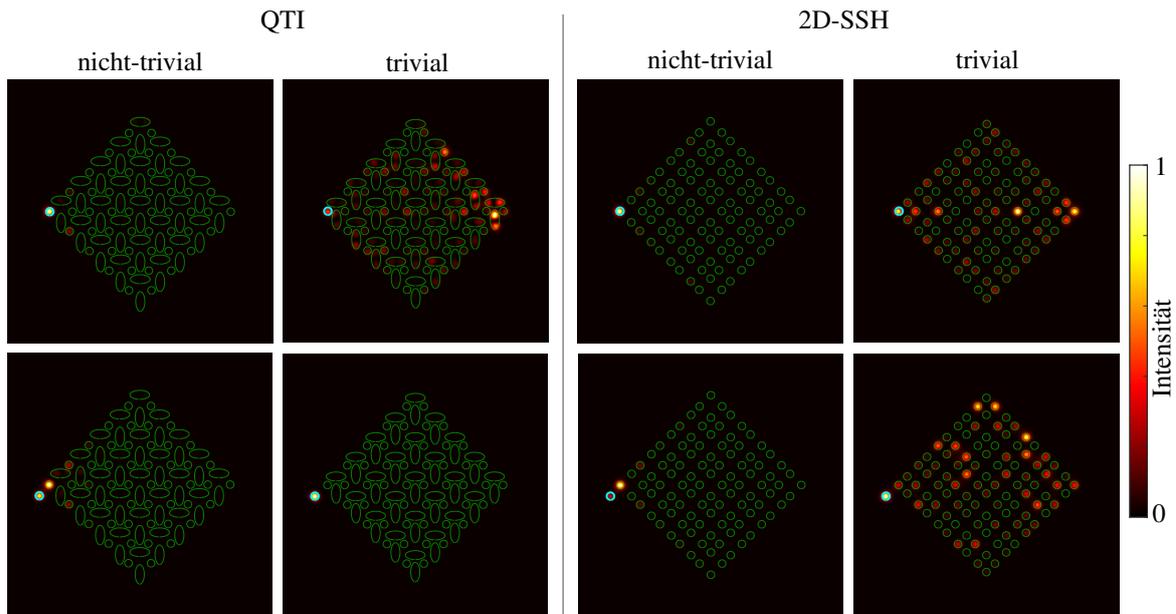


Abbildung 7.15: Simulationsergebnisse einer 1.5 mm langen Wellenleiterstrukturen für das QTI-Gitter (links) und das 2D-SSH-Gitter (rechts), jeweils mit der nicht-trivialen Phase (jeweils links) und der trivialen Phase (jeweils rechts). Licht wird in den Wellenleiter an der linken Ecke eingekoppelt (obere Spalte) oder über den Hilfswellenleiter (untere Spalte). Die Intensität ist in jedem Bild auf den jeweiligen Maximalwert normiert. Die Positionen der Wellenleiter sind mit grünen Kreisen/Ellipsen markiert und der Wellenleiter in den Licht eingekoppelt wird ist dick und cyanblau hervorgehoben.

Probenherstellung

Die Strukturen für diese Experimente wurden mit der Infiltrationsmethode hergestellt, welche in Kapitel 5 beschrieben wurde. Daher haben die Wellenleiter einen Brechungsindex von $n_{wg} = 1.59$ und das umgebende Material von $n_c = 1.54$. Die Propagationslänge in den Strukturen beträgt 1 mm. Bei den Experimenten wurde jeweils Licht mit einer Wellenlänge von 760 nm verwendet. Die runden Wellenleiter haben einen Radius von $0.5 \mu\text{m}$ und die elliptischen Wellenleiter haben einen Radius entlang der langen Halbachse von $1.3 \mu\text{m}$ und entlang der kurzen Halbachse von $0.6 \mu\text{m}$. Die geeigneten geometrischen Parameter wurden mithilfe eines Eigenmoden-Solvers bestimmt und in den hergestellten Strukturen durch REM-Bilder überprüft.

Die Wellenleiter haben ein Abstand (Mittelpunkt zu Mittelpunkt) von $1.6 \mu\text{m}$ für starke Kopplungen und $2.1 \mu\text{m}$ für schwache Kopplungen. Die Hilfswellenleiter haben jeweils einen Abstand von $2.1 \mu\text{m}$ zu dem nächsten Gitterpunkt.

Fazit

Sowohl im QTI als auch im 2D-SSH-Gitter sind nur in der nicht-trivialen Phase an den Ecken lokalisierte Zustände, welche jeweils auch über den Hilfswellenleiter angeregt werden können. Im trivialen Gitter sind alle Moden delokalisiert, weshalb sich das Licht über das Gitter verteilt. Qualitativ stimmen die Messergebnisse mit Simulationsergebnissen, die in Abb. 7.15 zusammenfassend dargestellt sind, überein. Der markante Unterschied ist, dass im trivialen 2D-SSH-Gitter über den Hilfswellenleiter Moden im Gitter angeregt werden können aber im QTI-Gitter nicht.

Zusammenfassend wurde in diesem Kapitel demonstriert, wie durch die Kopplung von verschiedenen Moden in einem Gitter ein künstlicher π -Fluss erzeugt und damit auch komplexe Systeme, wie ein QTI, realisiert werden können. Einerseits ermöglicht dies weitere Effekte der topologischen Zustände höherer Ordnungen zu in Wellenleiter-Gittern zu demonstrieren, wie den Transport der Eckzustände durch Variation der Kopplungen und Potenziale über die Propagationsstrecke [85]. Andererseits kann der Ansatz, verschiedene Moden zu koppeln um einen künstlichen π -Fluss zu generieren, auch auf andere experimentelle Plattformen übertragen werden.

Nachdem in diesem Kapitel die Erzeugung eines künstlichen magnetischen π -Flusses durch Kopplung verschiedener Moden und dessen Einfluss behandelt wurde, wird im nächsten Kapitel ebenfalls ein künstliches Magnetfeld generiert, jedoch auf eine andere Weise, wodurch der Fluss nicht auf π beschränkt ist. Die Struktur im nächsten Kapitel stellt ein konkretes Anwendungsbeispiel vor, dessen Funktion auf dem Vorhandensein eines künstlichen Magnetfeldes beruht.

8. Multiplexen von Moden mit verschiedenem OAM

8.1 Motivation

Der Zustand eines Elektrons in einem Atom kann mitunter über zwei Drehimpulsquantenzahlen angegeben werden. Einerseits der interne Drehimpuls s , der Spin des Elektrons, welcher nur Superpositionen von *up* und *down* annehmen kann, und andererseits der Bahndrehimpuls ℓ , welcher die räumliche Phasenverteilung der Wellenfunktion angibt. Gleiches lässt sich auch für einen Lichtstrahl definieren. Hierbei ist die Polarisation analog zum Spin und kann nur Superpositionen von rechts- und links-zirkular annehmen, und ein Lichtstrahl kann ebenfalls einen Bahndrehimpuls (OAM, von engl.: *orbital angular momentum*) tragen. Dabei hat ein Strahl mit OAM eine spiralförmige Phasenfront. Ein Lichtstrahl mit OAM $\ell \in \mathbb{Z}$ hat im Querschnitt senkrecht zur Ausbreitungsrichtung eine Feldverteilung, bei der beim Umlauf um das Strahlzentrum eine Phase von $2\pi\ell$ aufgesammelt wird, wie in Abb. 8.1 (a) für ein paar Beispiele dargestellt. Aus diesem Grund wird OAM manchmal auch als topologische Ladung eines Strahls bezeichnet, da die Phase jeweils nur ein ganzzahliges Vielfaches von 2π aufsummieren kann. Für $\ell \neq 0$ sorgt die Phasensingularität in der Mitte des Strahls dafür, dass die Intensität auf Null abfällt. Dieser Punkt ohne Intensität ist in diesem Sinne topologisch geschützt, da der Strahl diesen Punkt nur verlieren kann, indem er aus dem Strahlzentrum heraus ins Unendliche verschoben wird oder sich mit einem anderen Phasen-Vortex mit entgegengesetzter topologischer Ladung annihiliert.

Dieser Punkt ohne Intensität wird zum Beispiel bei der Fluoreszenzmikroskopie genutzt, um Abbildungen mit Auflösungen deutlich unterhalb des Abbe-Limits aufnehmen zu können [86]. Bei optischen Pinzetten kann über einen Strahl mit OAM ein Drehmoment auf die gefangenen Objekte übertragen werden [87]. Die Eigenschaften dieser Strahlen finden in vielen Bereichen Anwendung [88, 89]. Eine andere Eigenschaft ist, dass Moden mit verschiedenem ℓ jeweils orthogonal zueinander sind. Aus diesem Grund sind diese Moden im Kommunikations-Bereich interessant geworden, da prinzipiell über Moden mit verschiedenem ℓ parallel Informationen über einen Kanal, wie zum Beispiel eine optische Faser, transportiert werden könnten [89, 90]. Durch unterscheidbare Merkmale mehr Informationen über einen Kanal transportieren zu können, wird als Multiplexen bezeichnet, wobei andere Eigenschaften wie die Wellenlänge oder die Polarisation von Licht bereits so weit wie technisch sinnvoll eingesetzt werden, um die Datenübertragungsrate zu erhöhen.

Um Strahlen mit OAM zu erzeugen, gibt es mehrere Möglichkeiten, oft wird dabei auf einen aufgeweiteten Strahl durch lokale Phasenverzögerungen die spiralförmige Phasenfront quasi aufgeprägt, wie es bei Phasenplatten, defraktiven Phasenhologrammen oder räumlichen Lichtmodulatoren (SLM, vom engl. *spatial light modulator*) gemacht wird. Zudem können Gitter oder Meta-Oberflächen so geformt sein, dass deren gestreutes Licht einen OAM trägt. Eine andere Methode, bei der effektiv mehrere verschiedene OAM-Strahlen nach der geometrischen Optik überlagert werden können, ist in Ref. [91] beschrieben und in Abb. 8.1 (b) vereinfacht dargestellt. Dabei wird mit zwei speziell geformten optischen Elementen der Strahl so verformt, dass die Phasenwindung um die Strahlmitte zu der Phasenfront einer schiefen ebenen Welle wird. Über eine Linse wird diese schiefe ebene Welle, je nach Wellenvektor, auf einen anderen Ort fokussiert. In dieser Richtung kann ein Strahl in seine OAM-Anteile zerlegt werden. In umgekehrter Richtung können damit verschiedene OAM-Strahlen erzeugt und überlagert werden. Bei den genannten Methoden sind die Elemente jeweils für eine bestimmte Wellenlänge konzipiert, um den gewünschten Phasenversatz zu erzeugen.

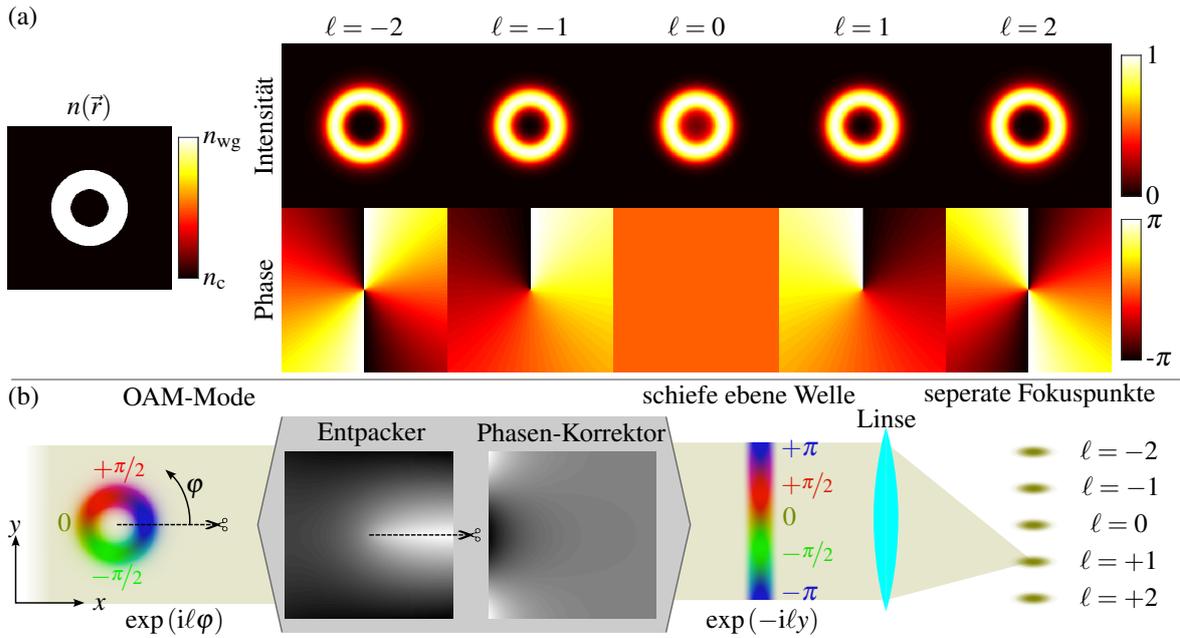


Abbildung 8.1: (a) Skalare OAM-Eigenmoden in einem Wellenleiter mit ringförmigen Brechungsindex-Querschnitt $n(\vec{r})$. Während der Radialteil der Moden sehr ähnlich ist, windet sich im Polarteil $\Phi(\varphi) \propto e^{i\ell\varphi}$ die Phase ℓ -mal um die Strahlmitte. Wegen der Phasensingularität hat nur die $\ell = 0$ -Mode eine Intensität ungleich Null in der Strahlmitte. (b) Vereinfachte Darstellung der Erzeugung/Zerlegung von OAM-Strahlen beschrieben in Ref. [91]. Durch zwei speziell geformte optische Elemente wird die Phasenwindung eines OAM-Strahls $\exp(i\ell\varphi)$ auf die Phasenfront einer schiefen Ebenen Welle $\exp(-i\ell y)$ abgebildet. Anschließend wird diese durch eine Linse auf separate Punkte fokussiert.

Diese Methoden lassen sich jedoch nicht einfach auf optische Fasern übertragen. Wenn die optischen Elemente herunterskaliert werden, nehmen die Beugungseffekte zu und die Effizienz und die Modenreinheit nehmen ab. Zudem müssen die generierten Strahlen in eine Faser eingekoppelt werden, wodurch es zu Einkopplungsverlusten [92] oder durch leichten Strahlversatz zu Modenüberlagerungen kommen kann [93].

Aus diesem Grund wurden verschiedene Methoden entwickelt, OAM-Strahlen direkt in Fasern zu generieren. In Fasern oder Wellenleiterstrukturen gibt es dafür hauptsächlich zwei Ansätze: Einerseits können zwei reell-wertige Eigenmoden (LP-Moden) generiert und dann mit einem Phasenversatz von $\pi/2$ überlagert werden. Dieser gezielte Phasenversatz wird entweder direkt über die Struktur [94–97] oder externe optische Elemente [98–100] erzielt.

Andererseits können durch Verdrehen der Strukturen die effektiven Brechungsindizes von der Grundmode und einer OAM-Mode so manipuliert werden, dass sie übereinstimmen. Dadurch können die Moden effektiv ineinander überkoppeln. Nach einer Kopplungslänge ist dann die Grundmode in die OAM-Mode überführt worden [101–104]. Bei anderen Ansätzen werden mehrere Multimode-Wellenleiter gekoppelt, um OAM-Moden zu kopieren oder zu invertieren [105, 106]. Alle diese Methoden haben zwar eine hohe Effizienz und Modenreinheit, aber beruhen entweder auf einem bestimmten Phasenversatz oder einer präzisen Kopplungslänge, welche jeweils wellenlängenabhängig sind. Zudem können pro Struktur nur eine oder nur wenige OAM-Moden generiert oder überlagert werden [107].

In dem folgenden Kapitel wird eine Wellenleiterstruktur vorgestellt, die sowohl für mehrere Wellenlängen als auch für mehrere OAM-Moden gleichzeitig funktioniert. Diese Eigenschaften folgen direkt daraus, dass bei der Struktur die Moden adiabatisch von lokalisierten Moden in OAM-Moden überführt werden. Um das Grundprinzip zu zeigen, wird eine Struktur für das (De-)Multiplexen von $|\ell| \leq 2$ betrachtet. Das Prinzip kann jedoch auch für mehr Moden erweitert werden¹.

¹Als Beispiel ist die Struktur für $|\ell| \geq 3$ in den ergänzenden Informationen von Ref. [108] gezeigt.

8.2 Prinzip der Struktur

Das Grundprinzip der Struktur beruht darauf, dass die lokalisierten Eigenmoden von getrennten einmodigen Wellenleitern adiabatisch in die OAM-Moden in einem Ringwellenleiter überführt werden, wie an einem Modell der Struktur in Abb. 8.2 (a) dargestellt ist. Bei der adiabatischen Entwicklung eines Systems $H(z)$ bleibt die Besetzung der Eigenzustände über die Propagation erhalten $\partial_z |\psi_n(z)|^2 = \partial_z |\langle \psi(z) | \phi_n(z) \rangle|^2 = 0$ während sich die Eigenzustände $|\phi_n(z)\rangle$ mit dem System ändern. Die Entwicklung eines beliebigen Zustands $|\psi(z)\rangle$ lässt sich damit als Superposition der Eigenzustände beschreiben.

$$|\psi(z)\rangle = \sum_n \psi_n(0) |\phi_n(z)\rangle = \sum_n \psi_n(0) |\phi_n(0)\rangle \exp\left(\frac{i}{\lambda} \int_0^z \beta_n(z') dz'\right) \quad \text{mit} \quad H(z) |\phi_n(z)\rangle = -\lambda \beta_n(z) |\phi_n(z)\rangle \quad (8.1)$$

Damit eine Entwicklung adiabatisch ist, muss die Änderung des Systems deutlich langsamer als die relative Dynamik der Eigenzustände sein [96, 97, 99, 100, 109, 110]:

$$\lambda |\langle \phi_n | \partial_z | \phi_m \rangle| \stackrel{!}{\ll} |\beta_n - \beta_m| \quad \forall n \neq m \quad (8.2)$$

Im Fall der Wellenleiterstruktur ist diese Dynamik durch die Differenz der effektiven Brechungsindizes gegeben. In anderen Worten dürfen die Eigenenergien während der Entwicklung nie entartet sein, da sonst das System sich unendlich langsam ändern müsste, um als adiabatisch zu gelten. Um die Eigenenergien stets getrennt zu halten, werden in der Struktur zwei Mechanismen genutzt: einerseits das individuelle Verstimmen der effektiven Brechungsindizes der Wellenleiter und andererseits das Einführen von komplexen Kopplungen, um die Entartung von Moden mit gleichem $|\ell|$ aufzuheben.

In den beiden vorherigen Kapiteln 6 und 7 wurden jeweils Wellenleiterstrukturen betrachtet, bei denen sich die Position der Wellenleiter über die Propagationsstrecke nicht verändert. Bei solchen endlichen Strukturen statischer Systeme ist der Hamilton-Operator zwangsläufig symmetrisch, da alle Kopplungen nur reelle Werte annehmen können. Daraus folgt auch, dass es immer eine Basis gibt, in der alle Eigenvektoren durch reelle Werte beschrieben werden können. Entsprechend kann keine Eigenmode eines solchen Systems einen Gesamtdrehimpuls ungleich Null haben (außer sie ist entartet). Im Gegensatz dazu müssen OAM-Moden zwangsläufig durch komplexe Amplitudenfunktionen beschrieben werden. Um nun Eigenvektoren zu erhalten, die explizit nur durch komplexe Werte beschrieben werden können, muss also ein System betrachtet werden, bei dem der Hamilton-Operator hermitesch aber nicht symmetrisch ist, also bei dem die Kopplungen komplex sind.

Ein einfaches System, bei dem dies erfüllt ist, ist in Abb 8.2 (b) schematisch dargestellt und wird durch den Hamilton-Operator $H(c_1, \tau, \Delta)$ beschrieben.

$$-\frac{H(c_1, \tau, \Delta)}{\lambda} = \begin{pmatrix} \Delta & c_1 e^{i\tau} & & & c_1 e^{-i\tau} \\ c_1 e^{-i\tau} & -2\Delta & c_1 e^{i\tau} & & \\ & c_1 e^{-i\tau} & 0 & c_1 e^{i\tau} & \\ & & c_1 e^{-i\tau} & 2\Delta & c_1 e^{i\tau} \\ c_1 e^{i\tau} & & & c_1 e^{-i\tau} & -\Delta \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

Dabei ist c_1 die Kopplungsstärke, τ die Phase der Kopplung und Δ eine Potenzialdifferenz. Wenn die Potenzialdifferenz und die Phase der Kopplung Null sind, sind die Eigenmoden reell-wertig und zwei Eigenenergien sind jeweils zweifach entartet. Sobald die Phase der Kopplung jedoch einen Wert $\tau \neq 0$ hat, wird, wie in Abb. 8.2 (c) dargestellt, die Entartung aufgehoben. Die Eigenmoden haben dann an allen Gitterpunkten die gleiche Amplitude und die relative Phase von benachbarten Gitterpunkten ist jeweils durch $2\pi\ell/5$ gegeben. Die Eigenmoden stellen in diesem System den diskreten Fall der OAM-Moden bis $|\ell| \leq 2$ dar. Die Eigenenergien sind für diese Moden für $\Delta = 0$ durch $\beta(c_1, \tau) = c_1 \cos(\tau + 2\pi\ell/5)$ gegeben.

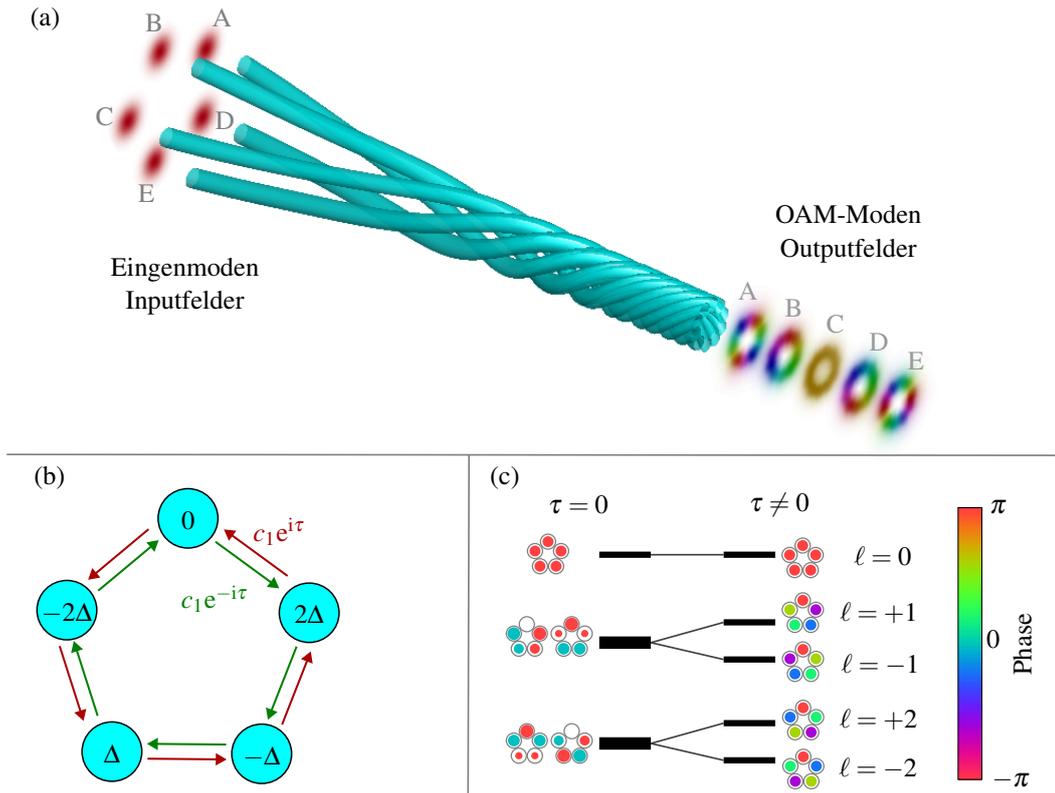


Abbildung 8.2: (a) 3D-Modell der Wellenleiterstruktur. Abhängig davon, in welchen Einmoden-Wellenleiter an der Eingangsfläche Licht eingekoppelt wird, wird das Licht bis zur Ausgangsfläche in eine OAM-Mode mit einem anderen ℓ umgewandelt. (b) Schematische Darstellung eines Rings von gekoppelten Wellenleitern mit komplexen Kopplungen und verschiedenen Potenzialen. (c) Bei reellen Kopplungen $\tau = 0$ sind die Eigenmoden reell-wertig und entartet, aber bei komplexen Kopplungen $\tau \neq 0$ tragen die Eigenmoden einen Drehimpuls ℓ und die Entartung ist aufgehoben. Bei der Darstellung der Eigenmoden steht die Größe des Kreises für die Amplitude und die Farbe für die Phase.

Um das Modell dieses Hamilton-Operators im Experiment anwenden zu können, müssen die Systemparameter c_1, τ und Δ auf Parameter im Experiment übertragen werden. Die Änderung des Potenzials Δ entspricht einer Änderung des effektiven Brechungsindex der Wellenleitermode. Die Kopplungsstärke c_1 ergibt sich aus dem Betrag des Überlappintegrals der Wellenleitermoden und fällt näherungsweise exponentiell mit dem Abstand zwischen den Wellenleitern ab. Und um in der Wellenleiterstruktur die komplexen Kopplungen $\tau \neq 0$ zu realisieren wird die Struktur verdrillt [23, 24].

8.2.1 Verdrillen der Struktur

Um zu erklären, warum und wie durch Verdrillen der Struktur die Kopplungen komplex werden und welche Eigenschaften sich noch ändern, wird als Beispiel die Struktur in Abb. 8.3 betrachtet. Dabei handelt es sich um neun äquivalente Wellenleiter mit spiralförmigen Trajektorien. Alle Wellenleiter umlaufen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω genau einmal die z -Achse und liegen damit auf der Oberfläche eines Zylinders mit einer Höhe von $2\pi/\Omega$. Ein Wellenleiter an der Position $\vec{r}_{\text{wg}} = (x_{\text{wg}}, y_{\text{wg}})^T$ beschreibt dann eine Helix mit einem Radius von $|\vec{r}_{\text{wg}}| = r_{\text{wg}} = \sqrt{x_{\text{wg}}^2 + y_{\text{wg}}^2}$.

$$x_{\text{wg}} = r_{\text{wg}} \cos(\Omega z) \quad (8.4a)$$

$$y_{\text{wg}} = r_{\text{wg}} \sin(\Omega z) \quad (8.4b)$$

$$z_{\text{wg}} = z \quad (8.4c)$$

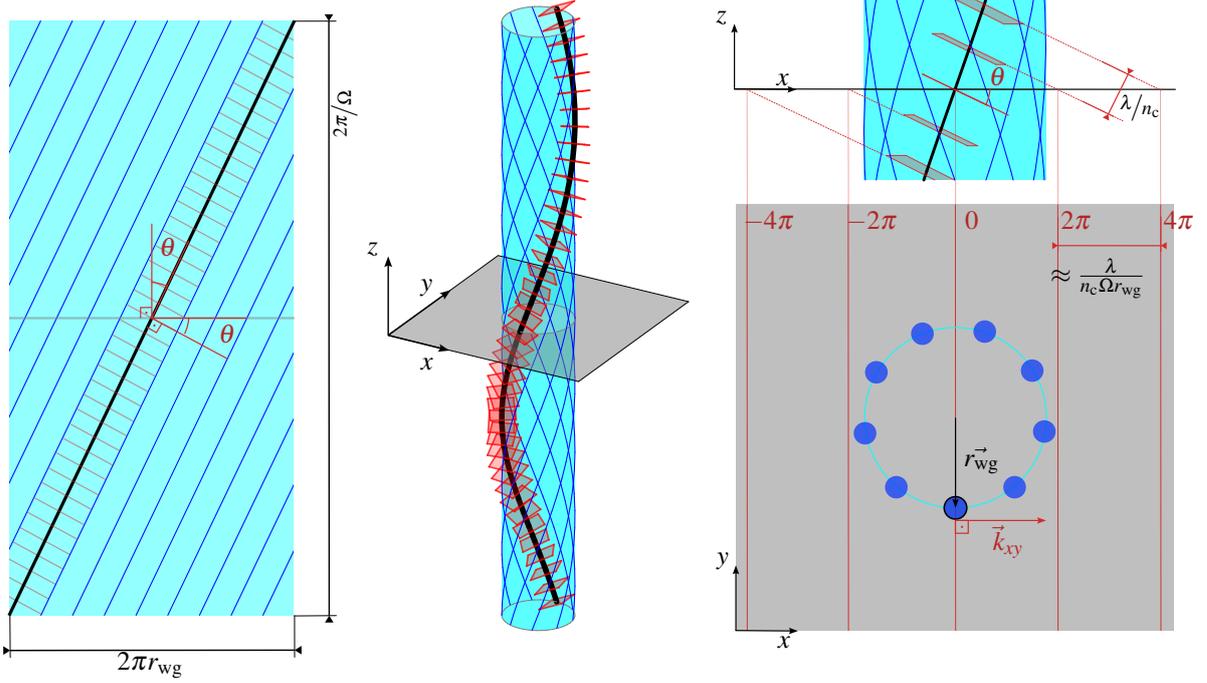


Abbildung 8.3: Schematische Darstellung von äquivalenten Wellenleitern mit einer helixförmigen Trajektorie. In der Mitte ist das 3D-Modell dargestellt, links die Oberfläche des Zylinders und rechts Projektionen entlang der y - bzw. z -Achse. Von einem Wellenleiter (schwarz) sind die Phasenfronten als rote Ebenen dargestellt. Die Phasenfronten stehen jeweils lokal senkrecht zum Wellenleiter und haben am Ort des Wellenleiters jeweils einen Abstand von λ/n_c zueinander. Dadurch, dass die Phasenfronten einen Winkel θ zur x - y -Ebene haben, resultiert das Überlappintegral in einer komplexwertigen Kopplungskonstante.

Eine offensichtliche Änderung ist, dass die Weglänge auf der spiralförmigen Trajektorie länger ist als bei einer unverdrillten Struktur. Da die optische Weglänge durch Verdrillen größer wird, kommt es zu einer Erhöhung des effektiven Brechungsindex. Die Weglängenänderung ergibt sich geometrisch:

$$\Delta L = \frac{\sqrt{(2\pi/\Omega)^2 + (2\pi r_{wg})^2} - 2\pi/\Omega}{2\pi/\Omega} = \frac{2\pi/\Omega \left(\sqrt{1 + \Omega^2 r_{wg}^2} - 1 \right)}{2\pi/\Omega} \quad (8.5)$$

$$\approx \left(1 + \frac{\Omega^2 r_{wg}^2}{2} \right) - 1 = \frac{\Omega^2 r_{wg}^2}{2} \quad (8.6)$$

Der effektive Brechungsindex ändert sich damit in etwa um den Betrag $n_c \Delta L$.

$$n_c \Delta L = \frac{n_c \Omega^2}{2} (x_{wg}^2 + y_{wg}^2) \quad (8.7)$$

Wichtiger für das betrachtete System ist, dass durch Verdrillen die Kopplungen unter den Wellenleitern komplex werden. Nach wie vor ergibt sich die Kopplung aus dem Überlappintegral der Wellenleitermoden in der x - y -Ebene, allerdings haben die Wellenleitermoden durch das Verdrillen in dieser Ebene einen Phasengradienten. Dies wird klarer, wenn die Phasenfronten einer elektromagnetischen Welle betrachtet werden, welche durch einen solchen Wellenleiter propagiert. Dabei müssen die Phasenfronten stets senkrecht zur Propagationsrichtung bzw. der Trajektorie stehen. Die Phasenfronten in einem spiralförmigen Wellenleiter können sich, wie in Abb. 8.3 rot dargestellt, als Ebenen mit einem Winkel θ zur x - y -Ebene vorgestellt werden. Der Winkel

θ lässt sich mit den bereits genannten Maßen für Höhe und Radius der Spirale bestimmen:

$$\theta \approx \tan(\theta) = \frac{2\pi r_{\text{wg}}}{2\pi/\Omega} = \Omega r_{\text{wg}} \quad (8.8)$$

Für kleine θ stellen (quasi-) parallele Ebenen die Phasenfronten dar. Phasenfronten mit der gleichen Phase (modulo 2π) haben jeweils einen Abstand von etwa λ/n_c zueinander. Die Phase der Wellenleitermode in der x - y -Ebene ist dabei die jener Phasenfront, welche an dieser Stelle die x - y -Ebene schneidet. Die Phasen, die sich in der x - y -Ebene ergeben, haben damit die Form einer ebenen Welle, welche mit einem Wellenvektor \vec{k}_{xy} senkrecht zu \vec{r}_{wg} verläuft. Die Schnittgeraden von Phasenfronten gleicher Phasen (modulo 2π) mit der x - y -Ebene haben dabei einen Abstand von $\lambda/n_c \sin(\theta) \approx \lambda/n_c \Omega r_{\text{wg}}$ zueinander. Mit dieser Wellenlänge $2\pi\lambda/n_c \Omega r_{\text{wg}}$ und der Richtung von \vec{k}_{xy} ergibt sich die ebene Welle zu $\exp(i\vec{k}_{xy} \cdot \vec{r}) = \exp\left(\frac{in_c \Omega}{\lambda} (\vec{r}_{\text{wg}} \times \vec{r})_z\right)$ mit \vec{r} als beliebiger Ortsvektor in der x - y -Ebene.

Um nun die Kopplung von einer Wellenleitermode ψ_p von einem Wellenleiter bei $\vec{r}_{\text{wg}} = \vec{r}_p$ zu der Wellenleitermode ψ_q von einem anderen Wellenleiter bei \vec{r}_q zu bestimmen, muss das Überlappintegral berechnet werden. Dabei ist nach Gl. (4.35) hauptsächlich das Produkt der Moden an der Stelle des zweiten Wellenleiters (q) relevant. Wegen des Verdrillens ist die Phase der Mode ψ_p jedoch durch die ebene Welle $\exp\left(\frac{in_c \Omega}{\lambda} (\vec{r}_p \times \vec{r})_z\right)$ gegeben. An der Stelle des zweiten Wellenleiters hat ψ_p demnach einen Phasenversatz τ zu ψ_q , was damit auch der Phase des Überlappintegrals bzw. der Kopplung entspricht.

$$\tau = \frac{n_c \Omega}{\lambda} (\vec{r}_p \times \vec{r}_q)_z \quad (8.9)$$

Neben dieser geometrischen Herleitung der Phase der Kopplung kann die sogenannte Peierls-Phase auch mathematisch rigoros mit einer Basistransformation in das mitbewegte Bezugssystem berechnet werden. Kurz zusammengefasst äußert sich die Transformation in das mitbewegte Bezugssystem in der paraxialen Helmholtz-Gleichung dadurch, dass künstlich ein Vektorpotenzial $\vec{A} = n_c \Omega / \lambda (y, -x, 0)^T$ und ein Zentrifugalpotenzial hinzugefügt werden müssen [22]:

$$i\lambda \partial_z \psi = \frac{\lambda^2}{2n_c} \left(i\nabla_{\perp} - \vec{A} \right)^2 \psi - \Delta n(\vec{r}) \psi - \frac{n_c \Omega^2}{2} (\hat{x}^2 + \hat{y}^2) \psi \quad (8.10)$$

$$= -\frac{\lambda^2}{2n_c} \nabla_{\perp}^2 \psi + \frac{\lambda}{2n_c} \vec{B} \cdot \hat{L}_z \psi - \Delta n(\vec{r}) \psi \quad (8.11)$$

Alternativ kann die Gleichung auch mit einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = -2n_c \Omega / \lambda \hat{e}_z$ und dem Drehimpulsoperator $\hat{L}_z = -i\lambda (\hat{r} \times \nabla_{\perp})$, welcher auf den Zustand wirkt, geschrieben werden. Über dieses künstliche Magnetfeld lässt sich alternativ die Aufspaltung der Moden in Abhängigkeit des OAM des Zustandes erklären oder die Phase der komplexen Kopplung berechnen. Das Zentrifugalpotenzial, welches ebenfalls durch die Basistransformation hinzukommt, beschreibt analog zu Gl. (8.7) die Änderung des effektiven Brechungsindex durch die längere Wegstrecke. Die Gleichungen für die Erhöhung des effektiven Brechungsindex und der Phase der Kopplung führen in beiden Herleitungen auf die gleichen Ergebnisse. Die rigorose Herleitung ist im Anhang 10.2 zu finden.

8.2.2 Schritte der Struktur

Da sich der Abstand der Wellenleiter von der Rotationsachse r_{wg} , die Winkelgeschwindigkeit Ω und die Differenz der Wellenleiterdurchmesser Δd_{wg} jeweils auf die Größen c_1, τ und Δ übertragen lassen, kann die adiabatische Entwicklung von lokalisierten Moden zu OAM-Moden vom Modell auf das Experiment übersetzt werden. Die adiabatische Entwicklung beginnt also bei leicht verstimmtten lokalisierten Moden mit $c_1 \ll \Delta \approx 0$ und $\tau = 0$ und wird dann in ein System mit OAM Moden also $c, \tau > 0$ und $\Delta = 0$ überführt, ohne dass die

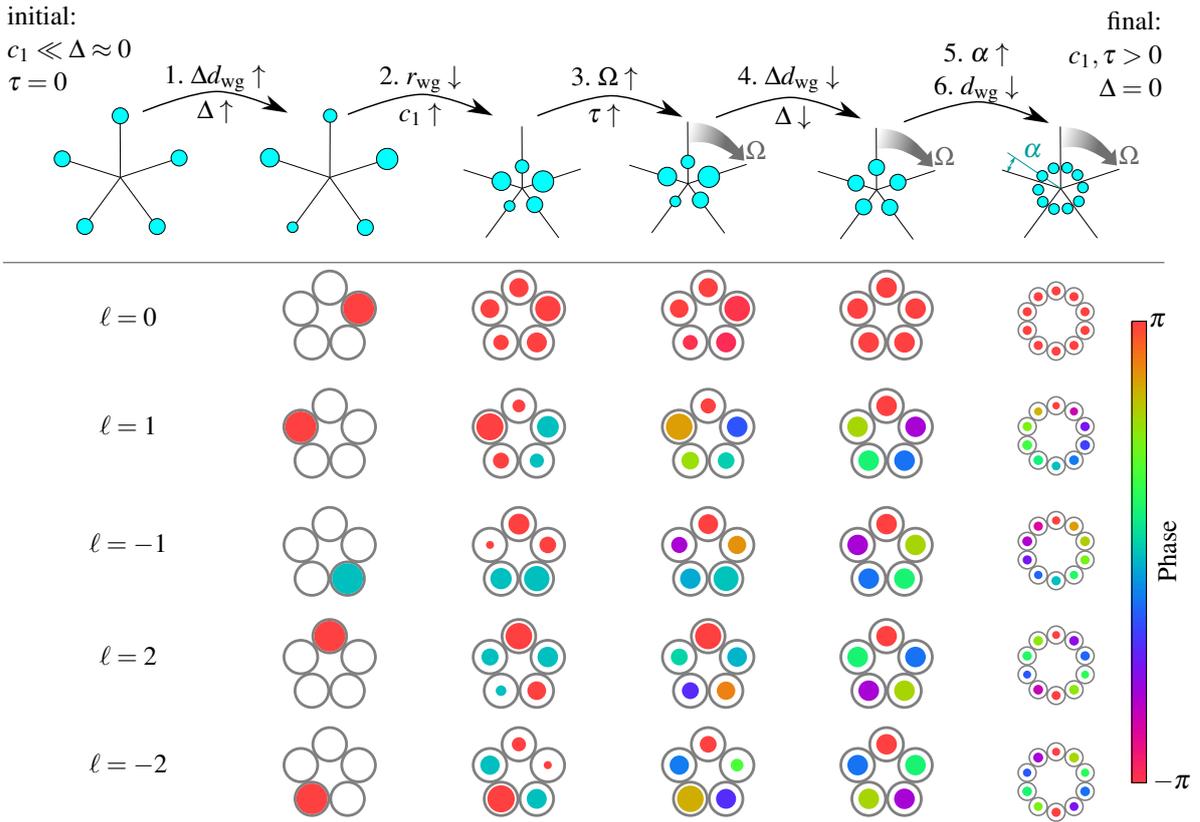


Abbildung 8.4: Schematische Darstellung der Schritte der Struktur während der adiabatischen Entwicklung, sowie der relevanten Eigenmoden des Systems in jedem Schritt. Bei der Darstellung der Eigenmoden steht die Größe des Kreises für die Amplitude und die Farbe für die Phase.

Zustände sich energetisch nahe kommen. Die Entartung wird dafür während $\tau \approx 0$ zeitweise durch $\Delta \neq 0$ aufgehoben. Zu Beginn, wenn r_{wg} noch groß ist, kann Ω auch nicht groß gewählt werden, da sonst das Licht aus der stark verdrillten Struktur heraus gestreut werden würde. Damit ergeben sich die über die Propagationslänge folgenden Schritte, die auch mit den jeweiligen Eigenmoden schematisch in Abb. 8.4 dargestellt sind:

1. Die Differenz der Wellenleiterdurchmesser Δd_{wg} und damit auch die Potenzialdifferenz Δ wird erhöht. Die lokalisierten Eigenmoden werden dadurch energetisch getrennt.
2. Der Abstand der Wellenleiter zur Rotationsachse r_{wg} wird verringert und damit die Kopplung c_1 erhöht. Die Eigenmoden sind nicht mehr lokalisiert, sondern verteilen sich über mehrere Gitterpunkte.
3. Die Winkelgeschwindigkeit Ω und damit die Phase τ der Kopplung wird erhöht. Die Eigenmoden nehmen komplexe Werte an und verteilen sich weiter über die Gitterpunkte. Je nach Vorzeichen des Drehimpuls der Mode ℓ wird die Eigenenergie erhöht oder abgesenkt.
4. Die Differenz der Wellenleiterdurchmesser Δd_{wg} und damit die Potenzialdifferenz Δ wird auf Null abgesenkt. Da die Gitterpunkte nicht mehr gegeneinander verstimmt sind, ist die Intensität aller Eigenmoden über alle Gitterpunkte gleich verteilt. Die Eigenenergien sind nur noch wegen der komplexen Kopplung getrennt.
5. Jeder Wellenleiter wird in zwei aufgeteilt. Hierfür wird der Winkel α von Null soweit erhöht, bis die Gitterpunkte gleichmäßig verteilt sind, wie in der letzten Spalte von Abb. 8.4 skizziert. Durch die zusätzlichen Gitterpunkte soll ein Ringwellenleiter approximiert und die Phasenfronten geglättet werden.

6. Der Durchmesser der Wellenleiter d_{wg} wird verringert, um nur die 5 gewollten Eigenmoden der Struktur zu leiten und ungewollte Anregungen höherer OAM-Moden herauszufiltern [98].

Die Struktur nähert am Ende nicht einen perfekt runden Ringwellenleiter an, da dieser wegen seiner Rotationsymmetrie wieder zur Entartung von $+\ell$ und $-\ell$ Moden führen würde. Da bei einer adiabatischen Entwicklung der genaue Pfad im Parameterraum nicht relevant ist, können die genannten Schritte sich auch zeitlich überlappen, um die Länge der Struktur für das Experiment zu reduzieren. Während der Schritte werden die Parameter s von einem initialen Wert s_i hin zu einem finalen Wert s_f überführt. Damit die Schritte dabei adiabatisch sind, darf jeder Parameter $s(z)$ nur stetig über die Propagationslänge L geändert werden. Dafür würde sich prinzipiell jede Sigmoidfunktion (S-förmige Funktion) eignen, wie zum Beispiel die Gaußsche Fehlerfunktion, logistische Funktion oder der Tangens hyperbolicus. Für die hier vorgestellten Strukturen wurde eine der Fermi-Dirac-Statistik ähnliche Funktion verwendet. Über μ_s kann der relative Zeitpunkt des Schritts und mit T_s die relative Geschwindigkeit des Schritts beschrieben werden:

$$s(z) : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto s_i + \frac{s_f - s_i}{\exp\left(\frac{z/L - \mu_s}{T_s}\right) + 1} \quad (8.12)$$

Die in den folgenden Experimenten und Simulationen verwendeten Parameter sind in Tab. 8.1 aufgelistet und in Abb. 8.5 (a) als Diagramm über die Propagationslänge dargestellt. Aus Abb. 8.5 (b) ist zudem ersichtlich, dass der effektive Brechungsindex sich für diese Parameter näherungsweise linear mit dem Durchmesser d_{wg} der Wellenleiter ändert.

Tabelle 8.1: Parameter der Struktur, die im Experiment und in den Simulationen verwendet wurden:

	Beschreibung	s_i	s_f	μ_s	T_s
1	Δd_{wg} erhöhen	0 μm	0.1602 μm	0.0541	0.0716
2	r_{wg} verringern	10 μm	2.6 μm	0.1219	0.1604
3	Ω erhöhen	0 mm^{-1}	$2\pi/(1748.7 \text{ mm})$	0.6119	0.2158
4	Δd_{wg} verringern	0.1602 μm	0 μm	0.6683	0.0983
5	Wellenleiter aufteilen α	0	$2\pi/20$	0.6794	0.0736
6	d_{wg} verringern	2.6 μm	1.7812 μm	0.8857	0.0858

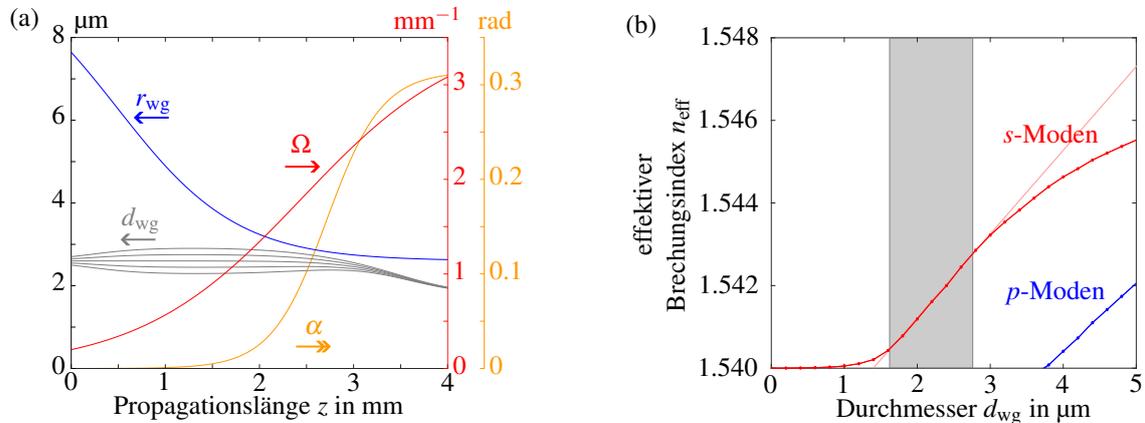


Abbildung 8.5: (a) Änderung der Strukturparameter über die Propagationslänge. (b) Der effektive Brechungsindex kann in einem Bereich als lineare Funktion vom Durchmesser des Wellenleiters genähert werden. Grau hinterlegt ist der im Experiment verwendete Parameterbereich.

8.3 Simulations- und Messergebnisse

Um die generelle Funktion der Struktur zu demonstrieren, wurden, wie in Kap. 5 beschrieben, skalare BPM-Simulationen durchgeführt. Aus den Feldern ψ_ℓ an der Austrittsfläche der Struktur können die relativen Intensitäten der OAM-Moden berechnet werden. Der Index ℓ steht hierbei für das OAM der Mode, in die das Licht hauptsächlich durch Einkoppeln in den jeweiligen Wellenleiter an der Eintrittsfläche konvertiert werden sollte. Um zu quantifizieren, wie viel des Lichts in die richtige OAM-Mode konvertiert wurde, könnte das Überlappintegral mit den in Abb. 8.1 (a) dargestellten Eigenmoden $\phi_{\ell'}(r, \varphi) = R_{\ell',1}(r)\Phi_{\ell'}(\varphi)$ bestimmt werden [94, 98, 99]. Die OAM-Moden bilden für den Unterraum der geführten Moden eine orthogonale Basis. Da das Licht an der Austrittsfläche von der Struktur geführt wurde, muss die Feldverteilung ψ_ℓ eine Superposition der Eigenmoden sein, sodass das Überlappintegral auch wie folgt geschrieben werden kann:

$$\langle \phi_{\ell'} | \psi_\ell \rangle = \langle \phi_{\ell'} | \sum_n \psi_{\ell,n} | \phi_n \rangle = \sum_n \psi_{\ell,n} \underbrace{\langle \phi_{\ell'} | \phi_n \rangle}_{\delta_{\ell',n}} = \sum_n \psi_{\ell,n} \underbrace{\int R_{\ell',1}^*(r) R_{n,1}(r) r dr}_{\approx 1} \underbrace{\int \Phi_{\ell'}^*(\varphi) \Phi_n(\varphi) d\varphi}_{\delta_{\ell',n}} \quad (8.13)$$

Wie in Gl. (8.13) zeigt, genügt es den Polarteil zu betrachten, um $\psi_{\ell,n}$ die Anteile der n -ten OAM-Moden in der Feldverteilung ψ_ℓ zu bestimmen, solange der Radialteil der Eigenmoden positiv ist $R_{\ell',1} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Während der Radialteil von den geometrischen Parametern der Struktur, dem OAM der Mode und der Wellenlänge, abhängt, ist der Polaranteil stets durch $\Phi(\varphi) \propto e^{i\ell\varphi}$ gegeben. Daher werden relative Intensitäten $I_{\ell',\ell}$ mit dem Überlapp von ψ_ℓ mit dem Polarteil $e^{i\ell\varphi}$ berechnet:

$$I_{\ell',\ell} = \frac{|\psi_{\ell',\ell}|^2}{|\psi_\ell|^2} = \frac{|\langle \phi_{\ell'} | \psi_\ell \rangle|^2}{\langle \psi_\ell | \psi_\ell \rangle} \hat{=} \left| \frac{1}{\sqrt{\iint \psi_\ell^* \cdot \psi_\ell r d\varphi dr}} \iint e^{-i\ell'\varphi} \cdot \psi_\ell r d\varphi dr \right|^2 \quad (8.14)$$

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{\iint \psi_\ell^* \cdot \psi_\ell dx dy}} \iint \exp(-i\ell' \arg(x+iy)) \cdot \psi_\ell dx dy \right|^2 \quad (8.15)$$

Damit ergibt sich die Modenreinheit $I_{\ell,\ell}$ bzw. das Übersprechen (engl. *crossstalk*) $\sigma_\ell = 1 - I_{\ell,\ell}$.

Die experimentellen Parameter wie Abstand der Wellenleiter, Winkelgeschwindigkeit und Wellenleiterdurchmesser übertragen sich abhängig von der verwendeten Wellenlänge verschieden auf die Modellparameter c_1, τ und Δ . Da jedoch bei der adiabatischen Entwicklung der genaue Pfad im Parameterraum nicht relevant ist, sondern nur, dass er hinreichend langsam durchlaufen wird, funktioniert die Struktur intrinsisch für ein Spektrum von Wellenlängen. Umgekehrt folgt aus diesem adiabatischen Prinzip auch, dass die Effizienz und die Parametertoleranz bzw. die Breitbandigkeit der Struktur zunehmen, je langsamer die Entwicklung bzw. je länger die Struktur ist. Dies zeigt sich auch in den Simulationsdaten für verschiedene Propagationslängen in Abb. 8.6 (a).

Abgesehen von diesen Daten kann aus den BPM-Simulationen auch der effektive Brechungsindex der jeweiligen Moden über die Propagationsstrecke extrahiert werden, indem die Phase, die das Feld über einen Propagationsschritt Δz aufammelt, bestimmt wird:

$$n_{\text{eff}}(z) = \frac{\lambda}{\Delta z} \arg(\langle \psi(z) | \psi(z + \Delta z) \rangle) = \frac{\lambda}{\Delta z} \arg\left(\iint \psi^*(z) \cdot \psi(z + \Delta z) dx dy\right) \quad (8.16)$$

Wie in Abb. 8.6 (b) zu sehen ist, sind die effektiven Brechungsindizes der Eigenmoden stets getrennt bis zum Ende der Propagationsstrecke, an dem ein zunehmend rotationssymmetrisches Potenzial angenähert wird.

Die in den Simulationen verwendete 4 mm lange Struktur wurde zudem mit dem direkten Schreibverfahren von Kapitel 5 hergestellt, welches einen Brechungsindexkontrast von etwa $\Delta n \approx 8 \cdot 10^{-3}$ erlaubt. Aufnahmen von der Struktur sind in Abb. 8.7 zu sehen.

Für die Messung wurde Licht jeweils in die fünf Wellenleiter auf der Eintrittsfläche eingekoppelt und die

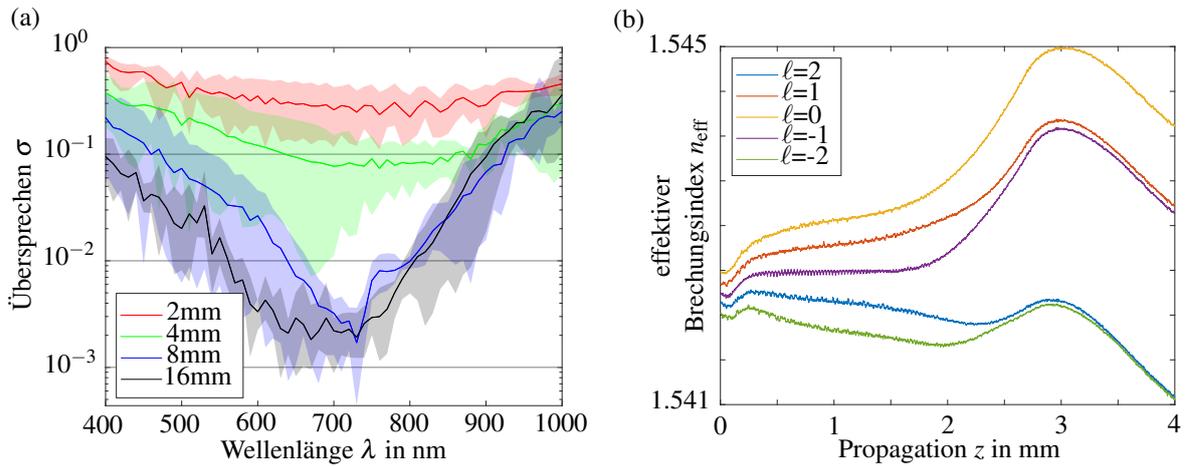


Abbildung 8.6: Simulationsergebnisse. (a) Effizienz der Struktur für verschiedene Längen. Das Modenübersprechen σ ist das Verhältnis der Intensität, die nicht in die gewünschte Mode umgewandelt wird, zur Gesamtintensität. Die Linie stellt das durchschnittliche Übersprechen der fünf Moden dar, während die Ränder der transparenten Bereiche die beste und die schlechteste Modenkonversion anzeigen. Mit der Strukturweite steigt die Adiabaticität und damit sinkt das Übersprechen. (b) Effektiver Brechungsindex für jede Mode entlang der Propagationsstrecke.

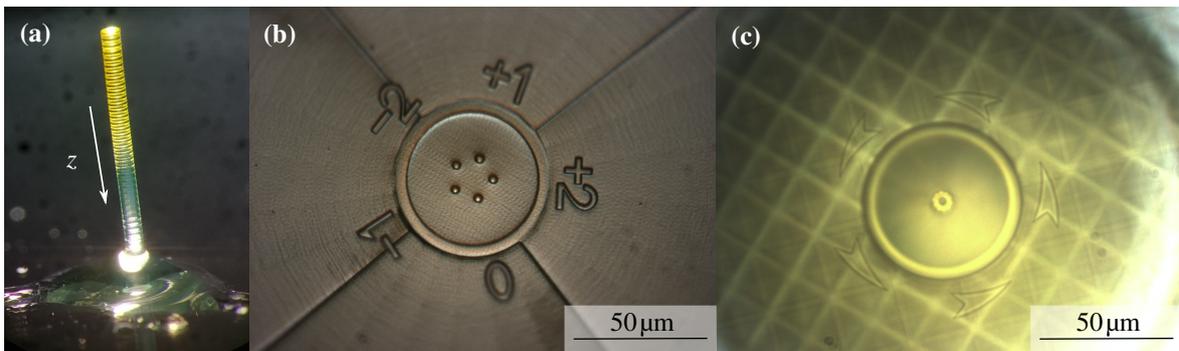


Abbildung 8.7: (a) Foto der 4 mm langen Struktur. (b) Mikroskopbilder der Eintrittsfacetten an der Spitze der Struktur. Die einmodigen Eingangswellenleiter sind mit dem OAM an der Austrittsfacetten beschriftet. (c) Mikroskopbild der Austrittsfacetten, aufgenommen durch das Glassubstrat. Pfeile markieren die Rotationsrichtung der Struktur und damit die Richtung des Phasengradienten für Strahlen mit positiven OAM.

Intensitätsverteilung an der Austrittsfacetten mit einer CMOS-Kamera aufgenommen. Im direkten Vergleich zwischen Simulation und Experiment in Abb. 8.8 (a) sind qualitativ viele Ähnlichkeiten erkennbar². Besonders auffällig ist, dass die Moden mit $|\ell| = 2$ sowohl in der Simulation als auch im Experiment überlagert sind, was an den vier Punkten in der Intensitätsverteilung erkennbar ist. Diese starke Überlagerung könnte mitunter daher kommen, dass die $|\ell| = 2$ Moden weniger aufspalten als die $|\ell| = 1$ Moden, was sowohl der Vorhersage des tight-binding-Modells als auch des effektiven Brechungsindex in Abb. 8.6 (b) entspricht. Abgesehen davon stimmen jedoch die topologischen Ladungen der Strahlen sowohl in der Simulation als auch in der Messung mit den Erwartungen des Modells überein. Das Messverfahren der Phasenverteilung ist dabei von Ref. [111] inspiriert und wird später noch genauer erläutert. Bei den Aufnahmen der Phasenverteilung sind weit von der Strahlmitte entfernt starke Fluktuationen zu sehen, die auf die hohe Messgenauigkeit bei der geringen Intensität zurückzuführen sind. Die Abweichungen in der Mitte des Strahls werden vermutlich durch Herstellungsungenauigkeiten verursacht. Die Abweichungen der Phasenverteilung sind jedoch nicht stark genug, um die topologischen Ladungen der Strahlen zu beeinflussen.

²Messungen bei den Wellenlängen 710 nm und 730 nm sind in den ergänzenden Informationen von Ref. [108] zu finden, zeigen jedoch qualitativ die gleichen Ergebnisse.

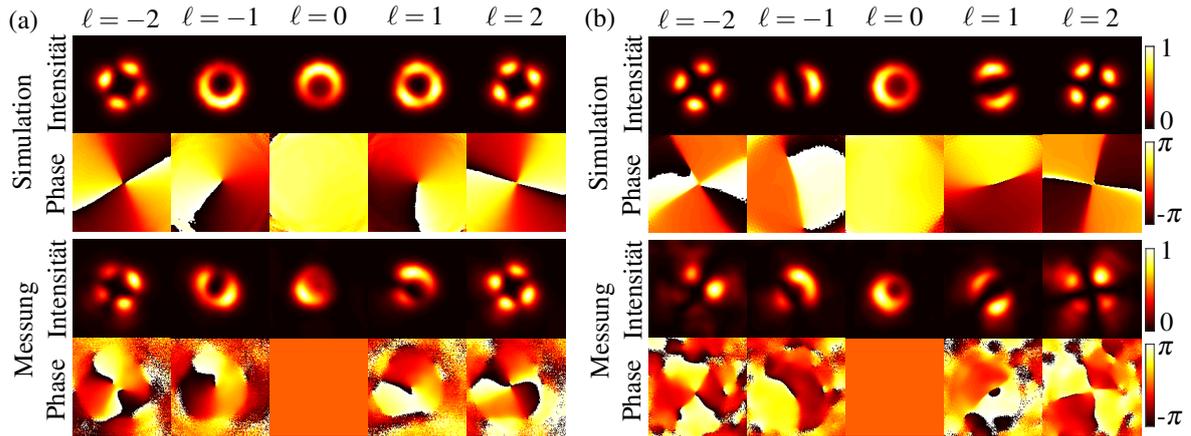


Abbildung 8.8: Vergleich des Ausgangsfeldes der BPM-Simulationen mit den gemessenen Feldern der Struktur im Experiment für Licht, das in verschiedene Eingangswellenleiter mit $\lambda = 750\text{ nm}$ eingekoppelt wird. Die Intensitätsverteilung wird mit einer CMOS-Kamera erfasst. Die Phasenverteilung ist relativ zur $\ell = 0$ Mode durch Interferenz gemessen worden, indem Licht in die beiden Wellenleiter mit unterschiedlichen Phasenverschiebungen eingekoppelt wurde. Für eine Struktur (a) mit und (b) ohne ein effektives Magnetfeld

Für eine nicht verdrillte Struktur, also eine Struktur ohne effektives Magnetfeld, sind an der Austrittsfacetten die reellen LP-Moden zu sehen. Bei diesen LP-Moden sind keine Phasenwirbel erkennbar und lokal benachbarte Bereiche mit nicht verschwindender Intensität haben jeweils einen Phasensprung von π zueinander. Auch hier stimmen Simulation und Messung in Abb. 8.8 (b) qualitativ überein.

Da in jedem Fall nur bei der $\ell = 0$ Mode in der Intensitätsmessung als auch bei der Simulation eine nicht verschwindende Intensität im Strahlzentrum zu finden ist, kann berechtigt angenommen werden, dass an der Austrittsfacetten die $\ell = 0$ Mode eine flache Phasenverteilung hat. Bei dieser Verteilung kann zwar ein Phasengradient aber kein Phasenwirbel vorliegen. Ausgehend von dieser Annahme wurde für die Messung der Phasenverteilungen der relative Phasenversatz zur $\ell = 0$ Mode in Abb. 8.8 bestimmt. Entsprechend wurde die Phasenverteilung der $\ell = 0$ Mode als konstant angenommen und nicht untersucht.

Um die relative Phasenverteilung zu bestimmen, wurde das Hologramm auf dem SLM im Versuchsaufbau so angepasst, dass in zwei Wellenleiter gleichzeitig fokussiert wird. Einer dieser Fokuspunkte liegt stets beim $\ell = 0$ Wellenleiter um als Referenz zu dienen, während der andere Fokus auf einen der $\ell = \{\pm 1, \pm 2\}$ Wellenleiter gerichtet ist. Das Interferenzbild der beiden Moden an der Austrittsfacetten wird mit der CMOS-Kamera aufgenommen. Der Phasenversatz $\Delta\phi$ zwischen den Fokuspunkten kann dabei über das Hologramm auf dem SLM variiert werden. Für die Vermessung der relativen Phase werden, wie beispielhaft in Abb. 8.9 (a) für die $\ell = 2$ Mode zu sehen, mehrere Aufnahmen der Intensitätsverteilung für verschiedene Phasenversätze zwischen den beiden Fokuspunkten gemacht. Für jeden Pixel auf der Kamera kann, wie in Abb. 8.9 (b) beispielhaft an drei Pixeln gezeigt, die Intensität in Abhängigkeit des Phasenversatzes aufgetragen und durch eine Sinuskurve beschrieben werden. Die Phase dieser Sinuskurve entspricht für jeden Pixel der relativen Phase der zu untersuchenden Mode zur $\ell = 0$ Mode und ergibt die in Abb. 8.9 (c) gezeigte Phasenverteilung [111].

Nun könnte anhand der Messdaten in Abb. 8.8 die experimentelle Moden-Selektivität als Maß für das Übersprechen aus den Phasen und Intensitätsverteilungen ermittelt werden. Allerdings wäre diese Auswertung aufgrund der vielen Parameter sehr fehleranfällig. Stattdessen wird, um die experimentelle Moden-Selektivität zu demonstrieren, der Multiplex-Struktur eine äquivalente Demultiplex-Struktur angehängt (MUX/DEMUX) [96, 100]. Da die Struktur auf Prinzipien der adiabatischen Entwicklung und der linearen Optik beruht, sind alle Prozesse linear, informationserhaltend und zeitumkehrbar. Für eine äquivalente DEMUX-Struktur wird daher die adiabatische Entwicklung lediglich rückwärts durchlaufen oder einfacher gesagt, die Struktur wird umgedreht. Damit wandelt die Struktur OAM-Moden an der Eintrittsfacetten der DEMUX-Struktur in lokalisierte Wellen-

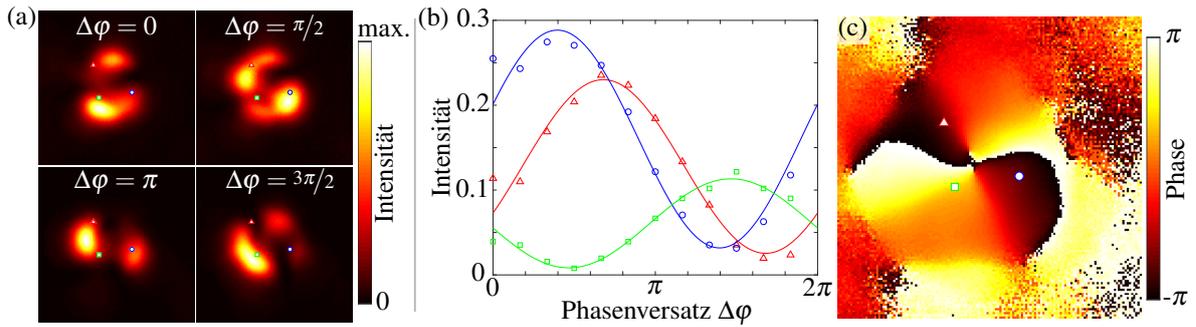


Abbildung 8.9: (a) Gemessene Intensitätsverteilung an der Austrittsfläche der Struktur bei Einkopplung von Licht in die Wellenleiter $\ell = 0$ und $\ell = 2$ mit einer Phasendifferenz von $\Delta\varphi$. Drei Pixel sind beispielhaft markiert, an denen weiter erläutert wird, wie die Phasenverteilung aus den Aufnahmen bestimmt wird. (b) Intensität an den drei in (a) markierten Pixeln für verschiedene Phasenversätze mit ihren jeweiligen Sinus-Fits. (c) Phase der Sinus-Fits für jeden Pixel.

leitermoden an der Austrittsfläche um³. So wie die MUX-Struktur funktioniert die DEMUX-Struktur sowohl für mehrere OAM-Moden als auch bei verschiedenen Wellenlängen gleichzeitig. Damit nicht einfach Licht in einen Wellenleiter eingekoppelt wird und an der Austrittsfläche wieder aus dem gleichen Wellenleiter austritt, wird die DEMUX-Struktur gegenüber der MUX-Struktur um einen Winkel von $2\pi/5$ verdreht. Am Übergang von MUX zu DEMUX sollte das Licht in einer OAM-Mode vorliegen. Diese Moden sind, bis auf einen Phasenversatz, rotationssymmetrisch, sodass die Verdrehung um $2\pi/5$ das Übersprechen der MUX-DEMUX-Struktur nicht sonderlich beeinflusst. Ohne das effektive Magnetfeld hingegen, also für eine unverdrillte Struktur, wird das Licht in die LP-Moden überführt, welche bezüglich einer $2\pi/5$ -Rotation nicht symmetrisch sind, sodass in diesem Fall ein deutliches Übersprechen der Moden zu erwarten ist.

Die MUX/DEMUX-Strukturen, wie in Abb. 8.10 (a,b) skizziert, wurden ebenfalls hergestellt und vermessen. Durch das Drucken der DEMUX- direkt auf die MUX-Struktur kann das Übersprechen aufgrund von fehlerhafter Justage der Strahlmitten ausgeschlossen werden [98]. Die Übersprech-Matrizen in Abb. 8.10 (c-f) beinhalten die relativen Intensitäten in den Wellenleitern an der Austrittsfläche der MUX/DEMUX-Struktur. Auf der y-Achse steht hierbei der Wellenleiter, in den das Licht an der Eintrittsfläche eingekoppelt wurde, und auf der x-Achse verschiedene Wellenleiter des DEMUX an der Austrittsfläche. Da jeweils nur die relativen Intensitäten aufgetragen sind, ist die Summe der Elemente in jeder Reihe Eins. Im Idealfall, in dem alle Moden korrekt in die verschiedenen reinen OAM-Moden und zurück konvertiert werden, würde die Übersprech-Matrix der Einheitsmatrix entsprechen. Ähnlich zum Idealfall zeigt die Simulation in Abb. 8.10 (c) große Ähnlichkeit zur Einheitsmatrix und auch bei der Messung in Abb. 8.10 (e) sind zumindest die größten Elemente auf der Diagonalen zu finden. Ohne das effektive Magnetfeld hingegen gibt es, wie erwartet, in der Simulation in Abb. 8.10 (d) und den Messungen in Abb. 8.10 (f) abseits der Diagonalen Elemente mit Werten über 50%.

Zusammenfassend wurde in diesem Kapitel eine Wellenleiter-Struktur vorgestellt, welche effektiv verschiedene OAM-Moden multiplexen und demultiplexen kann. Ähnlich wie die optischen Elemente in Ref. [91] und Abb. 8.1 (b) kann die Struktur nach der linearen Optik in eine Richtung als Multiplexer und in die andere Richtung als Demultiplexer für mehrere OAM-Moden gleichzeitig verwendet werden. Im Gegensatz zu Ref. [91], ist der Querschnitt der Struktur auf eine Faser reduzierbar, ohne durch Beugungseffekte limitiert zu werden. Zudem basiert die Wellenleiter-Struktur auf dem adiabatischen Prinzip und funktioniert daher für ein Spektrum von Wellenlängen. Die durchgeführten Experimente stimmen qualitativ mit den Simulationen überein und belegen damit die Umsetzbarkeit und das generelle Funktionsprinzip der Struktur.

³Um die Umwandlung der Moden in der MUX/DEMUX-Struktur von lokalisierten Wellenleitermoden zu OAM-Moden und zurück zu lokalisierten Wellenleitermoden zu veranschaulichen, ist eine Videodatei in den ergänzenden Informationen von Ref. [108] zu finden, welche die Felder aus den Simulationen über die Propagationsstrecke zeigt.

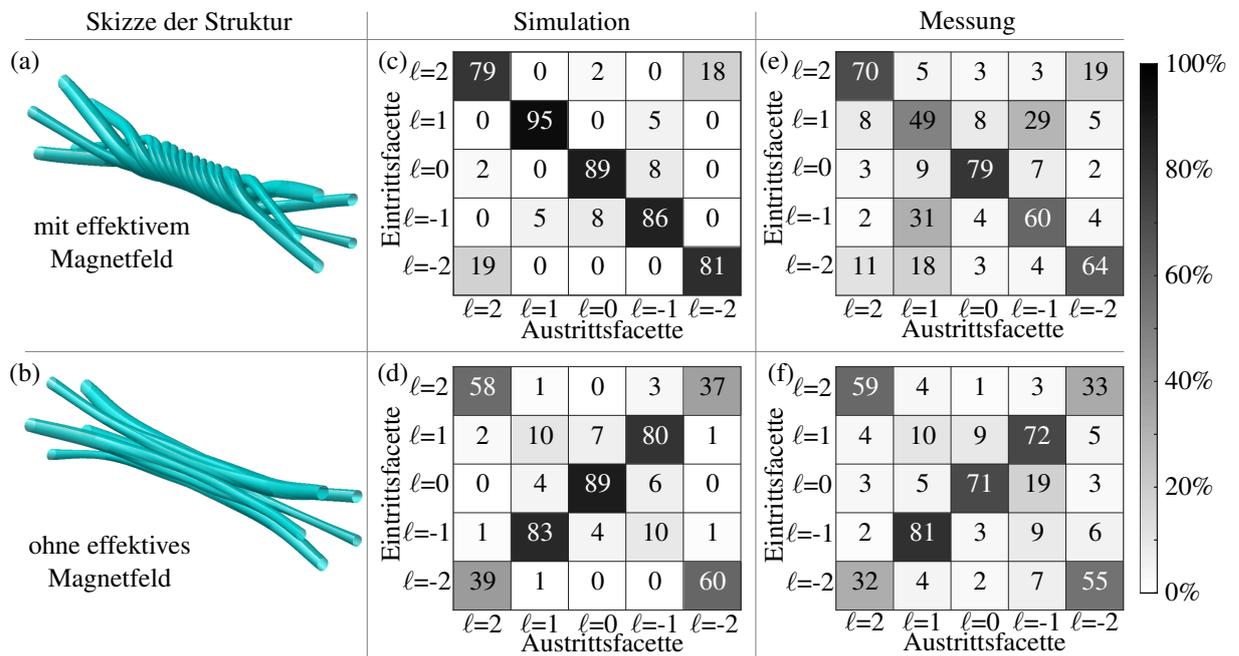


Abbildung 8.10: Charakterisierung der Modenumwandlung durch eine MUX/DEMUX-Struktur. (a,b) Skizzen der Strukturen. Der Demultiplexer ist gegenüber dem Multiplexer um $2\pi/5$ gedreht, was ein Übersprechen für LP-Moden verursacht, während OAM-Moden lediglich einen Phasenversatz erfahren. (c,d) simulierte und (e,f) gemessene Übersprechmatrizen der Strukturen für den Fall mit und ohne ein effektives Magnetfeld bei $\lambda = 710\text{nm}$.

8.4 Einfluss der Polarisierung

In den anderen Kapiteln wurde der Einfluss der Polarisierung nicht betrachtet. Hier wird eine Ausnahme gemacht, da die betrachtete Struktur aus Wellenleitern besteht, deren Trajektorien explizit dreidimensional sind. Es gibt also keine Ebene, in der alle Punkte der Trajektorie eines Wellenleiters liegen. Bei solchen nicht-planaren Strukturen kann es alleine aufgrund der dreidimensionalen Geometrie zu einer Drehung der Polarisierung kommen. Die Drehung der Polarisierung ist dabei proportional zu der aufgesammelten Berry-Phase. Wie schon in Kapitel 7.1.3 beschrieben, ist die Berry-Phase eine geometrische Phase $\gamma_{\mathcal{P}}$, die von einem Zustand ψ beim Durchlaufen eines geschlossenen Pfades \mathcal{P} in einem gekrümmten Parameterraum aufgesammelt wird. Der hier zu betrachtende Parameterraum ist der Impulsraum.

$$\gamma_{\mathcal{P}} = i \oint_{\mathcal{P}} \langle \psi(\vec{k}) | \nabla_{\vec{k}} \psi(\vec{k}) \rangle \cdot d\vec{k} = \oint_{\mathcal{P}} \vec{A}(\vec{k}) \cdot d\vec{k} \quad (8.17)$$

Wie auch in Kapitel 7.1.3 wurde hierbei die Berry-Verbindung $\vec{A}(\vec{k}) = i \langle \psi(\vec{k}) | \nabla_{\vec{k}} \psi(\vec{k}) \rangle$ eingeführt, welche als Vektorfeld die relative Phasenänderung abhängig von der Impulsänderung angibt.

Da sich bei der Propagation durch einen Wellenleiter nicht die Wellenlänge des Lichts, sondern nur dessen Richtung ändert, kann der zu betrachtende Parameterraum auf eine Kugeloberfläche mit Radius $|\vec{k}|$ im Impulsraum reduziert werden. Offensichtlich ist diese Kugeloberfläche bzw. der Parameterraum gekrümmt und die Trajektorie des Wellenleiters gibt den Pfad vor, den der Wellenvektor auf der Kugeloberfläche abläuft. Dabei gibt es an jedem Punkt der Oberfläche zwei zu \vec{k} orthogonale Richtungen für die Polarisierung.

Ein einfaches Beispiel wie es durch Änderung der Richtung in 3D zu einer Drehung der Polarisierung kommen kann, ist in Abb. 8.11 (a) mit einem Wellenleiter dargestellt. Zu Beginn propagiert das Licht in dem Wellenleiter in z -Richtung und ist vertikal polarisiert. Dann wird durch die Trajektorie des Wellenleiters stetig die Propagationsrichtung geändert, von der z -Richtung über x - dann y - und wieder zurück zur z -Richtung. Während der jeweiligen Kurven von einer Koordinatenachse zur anderen bleibt die Polarisierung stets entweder in der Ebene der Krümmung oder senkrecht dazu. Am Ende ist das Licht horizontal polarisiert. Die Änderung des Wellenvektors bzw. der Propagationsrichtung und die 90° -Drehung der Polarisierung lässt sich wie in Abb. 8.11 (b) als Pfad auf der Kugeloberfläche im Impulsraum auftragen.

Da der betrachtete Parameterraum einer Kugeloberfläche entspricht, ist die lokale Krümmung bzw. Berry-Krümmung $\vec{B}(\vec{k}) = \nabla_{\vec{k}} \times \vec{A}(\vec{k})$ für alle Punkte auf der Kugeloberfläche identisch. Die Berry-Krümmung $\vec{B}(\vec{k}) = \hat{n}/k^2$ ist in diesem Fall ein Vektorfeld, dessen Richtung, wie der Normalenvektor \hat{n} , senkrecht zur Kugeloberfläche steht und dessen Betrag $1/k^2$ quadratisch mit dem Abstand abnimmt. Durch Anwendung des Satzes von Stokes lässt sich die Berry-Phase als Flächenintegral über die Fläche \mathcal{S} , welche von dem Pfad \mathcal{P} umschlossen wird, schreiben:

$$\gamma_{\mathcal{P}} = \oint_{\mathcal{P}} \vec{A}(\vec{k}) \cdot d\vec{k} = \iint_{\mathcal{S}} \nabla_{\vec{k}} \times \vec{A}(\vec{k}) \cdot d\vec{A} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{B}(\vec{k}) \cdot d\vec{A} \hat{=} \iint_{\mathcal{S}} \vec{B}(\vec{k}) \cdot \hat{n} \sin(\vartheta) k^2 d\varphi d\vartheta = \iint_{\mathcal{S}} \sin(\vartheta) d\varphi d\vartheta \quad (8.18)$$

Dementsprechend ist die Berry-Phase gleich dem Raumwinkelement von \mathcal{S} . Für den in Abb. 8.11 (a) betrachteten Wellenleiter entspricht das Raumwinkelement dem in Abb. 8.11 (b) gelb hinterlegten Achtel der Kugeloberfläche. Die Berry-Phase bzw. die Drehung der Polarisierung beim Durchlaufen dieses Wellenleiters ergibt sich damit zu $4\pi/8 = \pi/2 = 90^\circ$.

Für einen spiralförmigen Wellenleiter lässt sich die durch einen Umlauf verursachte Drehung der Polarisierung über das eingekreiste Raumwinkelement über den Neigungswinkel der Spirale θ berechnen, wie in Abb. 8.11 (c,d) dargestellt [112].

$$\gamma_{\mathcal{P}} = \int_0^{2\pi} \int_0^\theta \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi = \int_0^{2\pi} (1 - \cos(\theta)) d\varphi \quad (8.19)$$

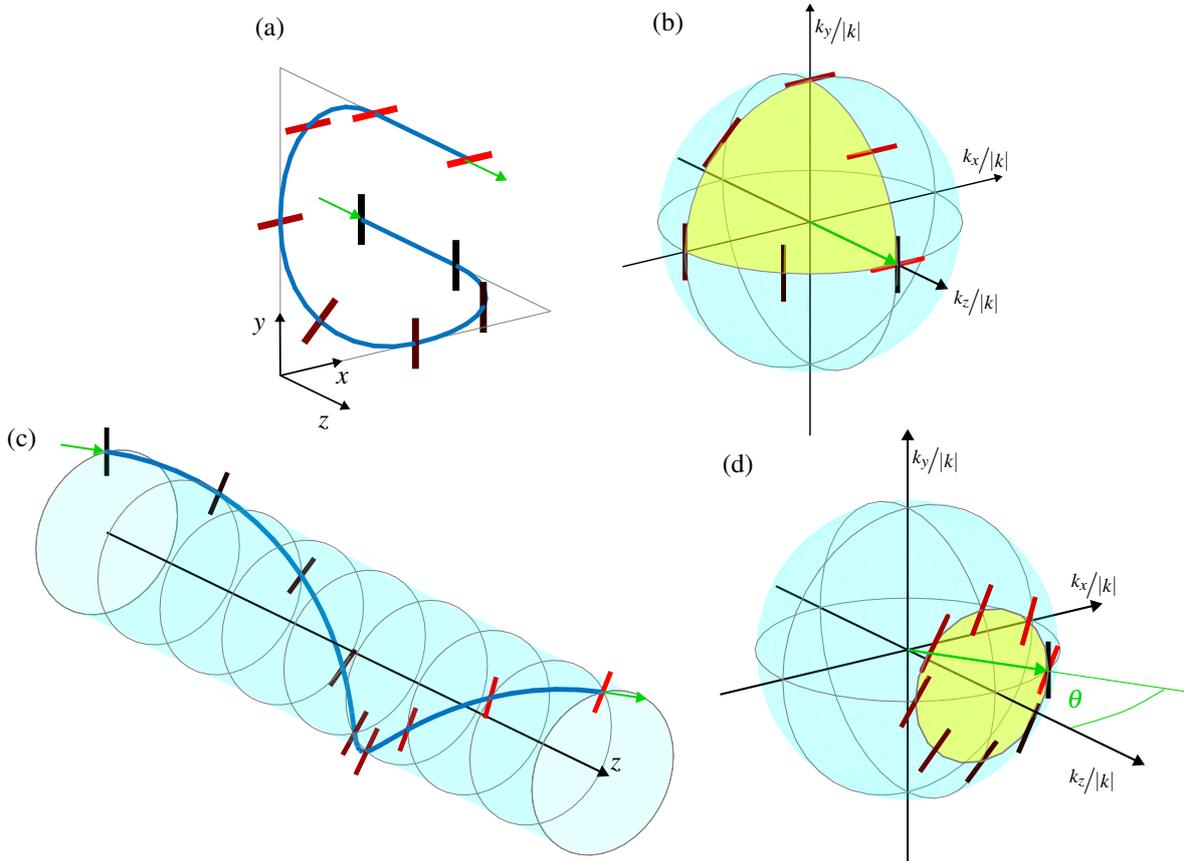


Abbildung 8.11: (a) Schematische Darstellung eines Wellenleiters (blau), der stetig die Propagationsrichtung des Lichts ändert, von der z - über die x - dann y - und wieder zurück zur z -Richtung. Beim Durchlaufen dieses Wellenleiters wird die Polarisation um 90° gedreht. Die Polarisation ist mit schwarz bis roten Balken über die Propagationsstrecke dargestellt. (b) Ein Wellenleiter mit spiralförmiger Trajektorie verursacht ebenfalls eine Polarisationsdrehung beim Durchlaufen. (c,d) Auftragung der Änderung des Wellenvektors beim Durchlaufen der Wellenleiterstruktur von (a) und des Wellenleiters mit spiralförmiger Trajektorie in (b) auf der normierten k -Kugel. Die Polarisationsdrehung, welche das Licht beim Durchlaufen dieser Wellenleiter erfährt, entspricht dem Flächeninhalt des gelb markierten Bereichs, welcher vom Pfad des Wellenvektors eingeschlossen wird. In allen Abbildungen zeigt der grüne Pfeil in die Richtung des Wellenvektors des Anfangs- bzw. Endzustands.

Um mit Gl. (8.19) die Polarisationsdrehung der OAM-Multiplexstruktur abzuschätzen, wird anstatt über φ , über z über die Propagationslänge L integriert. Die Änderung des Polarwinkels ist durch die Winkelgeschwindigkeit $\Omega = \partial\varphi/\partial z$, und der von z abhängige Neigungswinkel der Spirale ist nach Gl. (8.8) durch $\theta(z) = \arctan(\Omega(r)r_{\text{wg}}(z))$ gegeben:

$$\gamma_{\mathcal{P}} = \int_0^L \left(1 - \cos(\theta(z))\right) \frac{d\varphi}{dz} dz = \int_0^L \left(1 - \cos(\arctan(\Omega(z)r_{\text{wg}}(z)))\right) \Omega(z) dz \quad (8.20)$$

Mit den Parametern aus Tabelle 8.1 ergibt sich für die 4 mm lange Struktur eine Polarisationsdrehung um 0.6° , bzw. ist ca. $\sin(0.6^\circ) = 0.01\%$ der Intensität nach der Struktur in der vertikalen Polarisation, wenn in die Struktur horizontal polarisiertes Licht eingekoppelt wird. Die Berry-Phase skaliert bei der OAM-Multiplexer-Struktur linear mit der Propagationslänge. Da die längste Struktur im Experiment 8 mm lang ist, ist die Polarisationsdrehung sehr gering und wurde daher vernachlässigt. Um die Drehung der Polarisation gänzlich zu vermeiden, kann ohnehin alternativ zirkular polarisiertes Licht verwendet werden. Während bei linear polarisiertem Licht die Polarisationsachse um $\gamma_{\mathcal{P}}$ gedreht wird, erfährt zirkular polarisiertes Licht lediglich einen Phasenversatz von $\gamma_{\mathcal{P}}$.

Um den Einfluss von zirkularer Polarisation des eingekoppelten Lichtes auf den OAM-Multiplexer zu un-

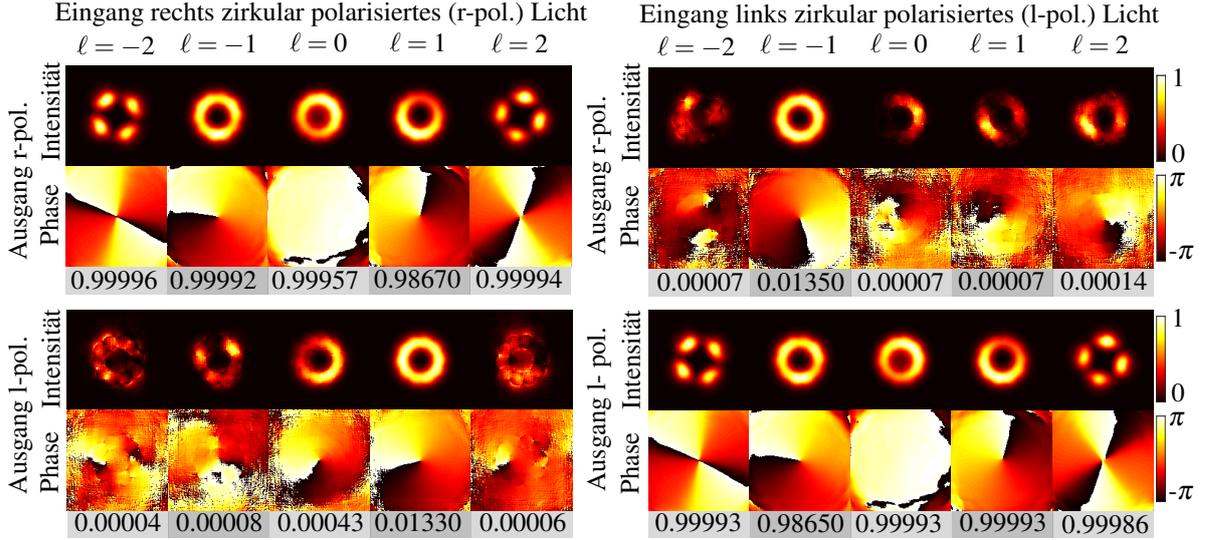


Abbildung 8.12: Simulationsergebnisse von Vollvektor-BPM-Simulationen für zirkular polarisiertes Licht mit einer Wellenlänge von $\lambda=700$ nm. Das Verhältnis der Intensität in dieser Polarisation zur Gesamtintensität ist in den grauen Kästen unter jedem Diagramm angegeben. Mehr als 99,95% des Lichts behält seine Polarisation bei, mit Ausnahme des rechts zirkular polarisierten Lichts im Zustand $\ell = 1$ und des links zirkular polarisierten Lichts im Zustand $\ell = -1$.

tersuchen, wurde die 4 mm lange Struktur mit einer vektoriellen BPM simuliert. Dafür wurde die Software *OptiBPM* der Firma *Optiwave* verwendet. Die Felder an der Austrittsfläche aus dieser Simulation wurden jeweils in rechts- und links-zirkulare Polarisation zerlegt und sind in Abb. 8.12 dargestellt. Die Polarisation des eingekoppelten Lichts bleibt, bis auf zwei Ausnahmen zu über 99,95% erhalten. Nur im Fall der rechts zirkularen $\ell = 1$ und der links zirkularen $\ell = -1$ OAM-Mode wird mehr als 1% der Intensität in die jeweils andere überführt.

Der Grund, weshalb diese beiden Moden ineinander übergehen, ist kein Effekt, der durch die Struktur verursacht wird, sondern tritt bereits bei geraden Wellenleitern mit kreisrundem Querschnitt auf. Dass diese beiden zirkular polarisierten OAM-Moden ineinander übergehen müssen, wird klar, wenn die Eigenmoden dieses Systems betrachtet werden.

Dafür muss noch einmal zurück zu Gl. (4.8) gegangen werden, bei der eine Näherung gemacht wurde.

$$\underbrace{\nabla(\nabla \ln(n^2)) \cdot \vec{E}}_{\neq 0} + \nabla^2 \vec{E} = \frac{n^2}{c^2} \partial_t^2 \vec{E} \quad (8.21)$$

Ohne den Term $\nabla(\nabla \ln(n^2) \cdot \vec{E})$ können die beiden Polarisationen unabhängig voneinander betrachtet werden und damit lassen sich die Eigenmoden als skalare Verteilungen angeben. Da die Polarisation nach der Simulation hier einen Einfluss hat, kann dieser Term in diesem Fall nicht vernachlässigt werden. Genauer gesagt ist gerade der Einfluss dieses Terms ausschlaggebend für das Überkoppeln der Polarisation. Für einen geraden Wellenleiter gilt $n(\vec{r}) = n_{\perp}(x, y)$ und die Eigenmode kann in einen Anteil senkrecht zur Propagationsrichtung $\vec{E}_{\perp}(x, y)$ und eine ebene Welle separiert werden:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_{\perp}(x, y) e^{i(\beta z - \omega t)} \quad (8.22)$$

Damit können auch die partiellen Ableitung aus Gl. (8.21) in $\nabla = \nabla_{\perp} + \partial_z$ separiert werden:

$$\nabla_{\perp} \left(\nabla_{\perp} \ln(n_{\perp}^2) \cdot \vec{E}_{\perp} \right) + \nabla_{\perp}^2 \vec{E}_{\perp} - \beta^2 \vec{E}_{\perp} = -n_{\perp}^2 k_0^2 \vec{E}_{\perp} \quad (8.23)$$

$$\underbrace{\lambda^2 \nabla_{\perp} \left(\nabla_{\perp} \ln(n_{\perp}^2) \cdot \vec{E}_{\perp} \right)}_{\approx \text{Einfluss der Polarisation auf } n_{\text{eff}}} + \lambda^2 \nabla_{\perp}^2 \vec{E}_{\perp} + n_{\perp}^2 \vec{E}_{\perp} = n_{\text{eff}}^2 \vec{E}_{\perp} \quad (8.24)$$

Wie Gl. (8.24) zeigt, wirkt sich der Polarisationszustand auf den effektiven Brechungsindex der Mode aus. Eine Übersicht der ersten paar Eigenmoden in einem kreisrunden Wellenleiter ist in Abb. 8.13 dargestellt. Ganz links sind die skalaren Eigenmoden, die Lösungen der skalaren paraxialen Helmholtz-Gleichung, bei welcher der erste Term in Gl. (8.24) vernachlässigt wird. Aufgrund der Rotationssymmetrie des Wellenleiters sind einige Moden wie die LP_{11} und LP_{21} zweifach entartet. Durch Linearkombination von LP_{11}^o und $\pm iLP_{11}^e$ lassen sich die bisher betrachteten skalaren OAM-Moden beschreiben.

Wenn der Term $\nabla_{\perp} \left(\nabla_{\perp} \ln(n^2) \cdot \vec{E}_{\perp} \right)$ nicht vernachlässigt wird, werden die beiden Polarisationsrichtungen miteinander in Relation gesetzt und es ergeben sich die vektoriellen Eigenmoden, die in der mittleren Spalte von Abb. 8.13 dargestellt sind. Diese Moden sind lokal linear polarisiert, was in der Abbildung mit Pfeilen gekennzeichnet ist. Die Aufspaltung des effektiven Brechungsindex wegen dieses Terms wird am deutlichsten an der TE_{01} und der TM_{01} Mode. Die Aufspaltung ist proportional zu $\left(\nabla_{\perp} \ln(n^2) \cdot \vec{E}_{\perp} \right)$, was dem Skalarprodukt von der Polarisation zu $\nabla_{\perp} \ln(n^2)$ entspricht. Der Term $\nabla_{\perp} \ln(n^2)$ selbst ist ein Vektorfeld, welches nur am Rand des Wellenleiters ungleich Null ist und radial zur Mitte des Wellenleiters zeigt. Da die Polarisation der TE_{01} -Mode immer senkrecht zu diesem Vektorfeld steht, ist der Term $\left(\nabla_{\perp} \ln(n^2) \cdot \vec{E}_{\perp} \right)$ für diese Mode Null. Bei der TM_{01} -Mode hingegen ist er maximal, da die Polarisation immer parallel zu $\nabla_{\perp} \ln(n^2)$ steht. Diese zwei Moden sind jedoch die Ausnahme, denn bei allen anderen HE- und EH-Moden ist der Winkel zwischen Polarisation und $\nabla_{\perp} \ln(n^2)$ positionsabhängig. Bei allen höheren LP_{n1} -Moden mit $n \in \mathbb{N}_{>1}$ findet die Aufspaltung analog zu LP_{21} in $HE_{(n+1),1}$ und $EH_{(n-1),1}$ Moden statt. Dabei sind alle HE- und EH-Moden jeweils zweifach entartet.

Die vektoriellen Eigenmoden lassen sich, wie in der rechten Spalte von Abb. 8.13 dargestellt, durch eine Basisrotation in die Basis zirkular polarisierter OAM-Moden überführen. Die zirkular polarisierten OAM-Moden sind jeweils Linearkombinationen der entarteten HE- bzw. EH-Moden. Die Ausnahme sind OAM_{-1}^L und OAM_{+1}^R , welche sich aus den nicht entarteten TE_{01} und TM_{01} zusammensetzen. Demnach werden diese beiden Moden selbst in einem kreisrunden Wellenleiter ineinander übergehen, wobei die dafür nötige Koppplungslänge nach Gl. (4.50) invers proportional zur Differenz der effektiven Brechungsindizes der TE_{01} - zur TM_{01} -Mode ist $L_c = \pi/(\beta_{TE} - \beta_{TM})$.

Nach dieser Betrachtung kann der Einfluss der Polarisation auf die Funktion der 4 mm und 8 mm langen Strukturen Experiment vernachlässigt werden. Bei längeren Strukturen könnte es jedoch zu einer merklichen Drehung der linearen Polarisation kommen. Für zirkular polarisiertes Licht hingegen bleibt der Polarisationszustand, bis auf die zwei Ausnahmen der OAM_{-1}^L und OAM_{+1}^R erhalten.

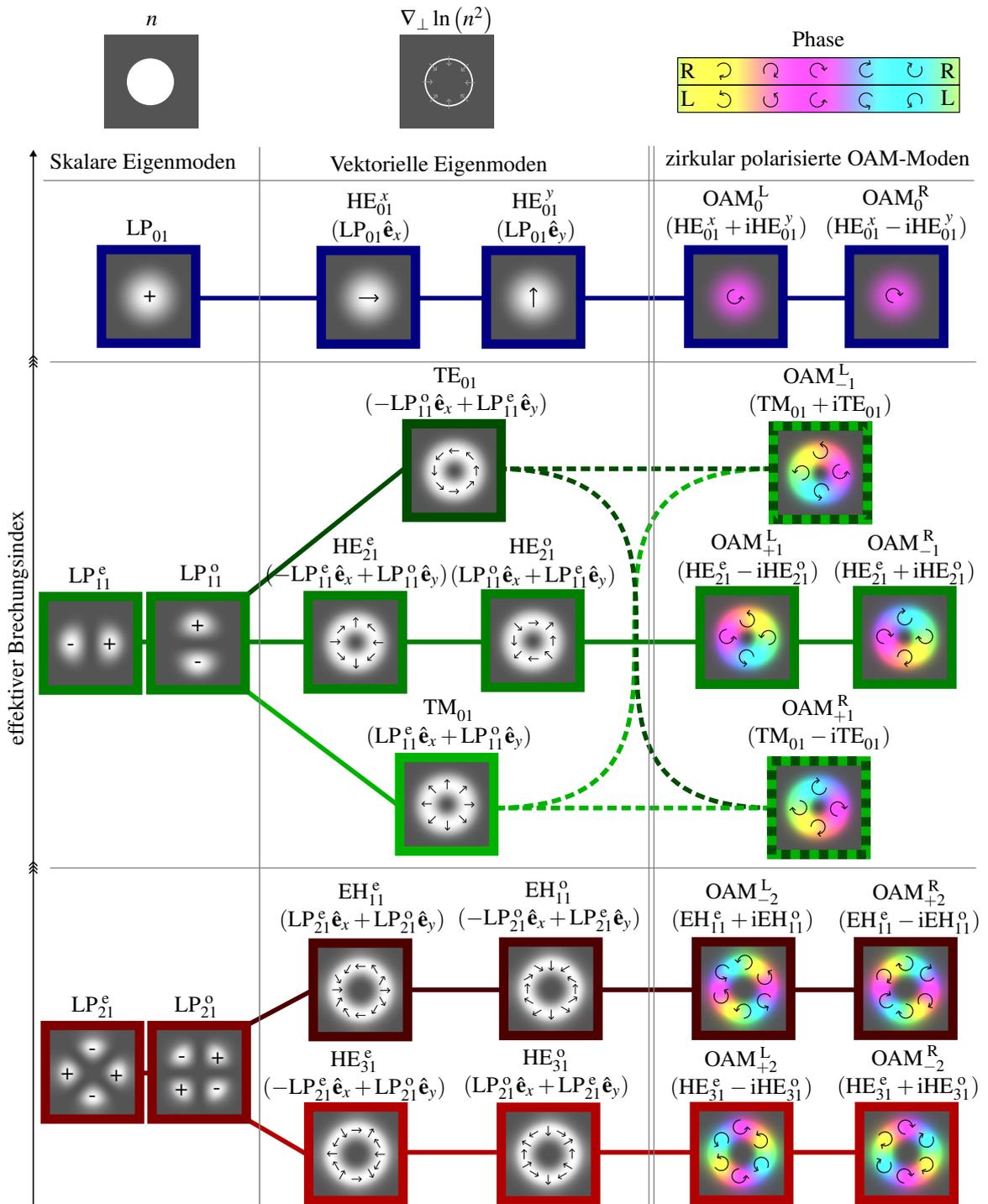


Abbildung 8.13: Darstellung der ersten Eigenmoden in einem kreisrunden Wellenleiter. Wenn die Polarisation vernachlässigt werden kann, ergeben sich die skalaren Eigenmoden in der linken Spalte. Ist die Polarisation nicht vernachlässigbar, ergeben sich vektorielle Eigenmoden, die verschiedene effektive Brechungsindizes besitzen können. Die vektoriellen Eigenmoden sind lokal jeweils linear polarisiert, wobei die Polarisationsrichtung in der mittleren Spalte durch Pfeile gekennzeichnet ist. Die zirkular polarisierten OAM-Moden, welche in der rechten Spalte dargestellt sind, sind Superpositionen der vektoriellen Eigenmoden. Dabei sind nur die OAM_{-1}^L und OAM_{+1}^R Superpositionen aus den nicht-entarteten vektoriellen Eigenmoden TE_{01} und TM_{01} . Die Farbe in dieser Darstellung der OAM-Moden steht, wie der Drehwinkel der Pfeile, für die Phase.

9. Fazit und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurden Wellenleiterstrukturen betrachtet, bei denen die Kopplungen zwischen Wellenleitern nicht nur positive Werte annehmen. Bei der Untersuchung der Kopplung zu weiter entfernten Wellenleitern wurde festgestellt, dass bereits in einer geraden linearen Kette aus äquivalenten Wellenleitern die Kopplung zu den übernächsten Nachbarn negative Werte annimmt. Durch eine angewinkelte Anordnung lies sich zudem zeigen, dass der Einfluss dieser übernächsten-Nachbar-Kopplung im Prinzip auf Null reduziert werden kann. Anschließend wurde ein zweidimensionales Gitter betrachtet, bei dem durch die Kopplung von verschiedenen Moden negative Kopplungen implementiert wurden. Diese negativen Kopplungen sorgen dafür, dass das Gitter effektiv von einem magnetischen Fluss durchströmt wird, wodurch sich ein Quadrupol topologischer Isolator experimentell nachweisen ließ. Und zuletzt wurden durch Verdrillen einer Struktur komplexe Kopplungen erzeugt, um die Entartung der Eigenmoden mit gleichem orbitalen Drehimpuls aufzuheben. Dadurch, dass die Entartung dieser Moden aufgehoben wurde, konnte effektiv mit einer Wellenleiterstruktur Licht von einmodigen Wellenleitern gezielt in Moden mit verschiedenen orbitalen Drehimpulsen transformiert werden.

Es gibt noch viele andere Systeme, für die sich gekoppelte Wellenleiter zur Realisierung eignen. Für topologischen Strukturen haben sich Wellenleiter schon oft als geeignete experimentelle Plattform herausgestellt [18, 21]. Durch Hinzufügen von Absorption konnten auch nicht-hermitesche Systeme untersucht werden [65]. Und zunehmend werden nicht-lineare Materialien und hohe Laserintensitäten verwendet, um über den Kerr-Effekt Wechselwirkungen zwischen den Photonen in die Modelle einfließen lassen zu können [113].

In Anlehnung an diese Arbeit erschließt sich noch eine andere Richtung, in die sich das Feld in Zukunft weiter entwickeln könnte. Die meisten Experimente wurden bisher mit Wellenleitern durchgeführt, die jeweils nur die Grundmode (s -Mode) geführt haben. Wenn auch höhere Moden wie p -Moden oder OAM-Moden in Betracht gezogen werden, führen die komplexeren Phasenfronten dieser Moden auch zu komplexeren Kopplungen in den Systemen [18].

Einen großen Vorteil, den das direkte Laserschreiben gegenüber anderer Herstellungsmethoden für Wellenleiterstrukturen hat, ist, dass sowohl die Trajektorie als auch die Querschnittsfläche der Wellenleiter genau vorgegeben werden können. Beim „Schreiben“ in Glas mit einem femtosekunden-gepulsten Laser kann zwar die Trajektorie individuell vorgegeben werden. Aber da beim „Schreiben“ senkrecht zu Propagationsrichtung fokussiert wird, haben die Wellenleiter einen elliptischen Kern [19]. Daher können keine kreisrunden Wellenleiter hergestellt werden, was für das Leiten von OAM-Moden zwingend notwendig ist. Andere Plattformen, wie das Ziehen von Glasfasern oder Belichten von Lithium-Niobat [14] oder Strontium-Barium-Niobat [15, 16], ermöglichen zwar kreisrunde Querschnittsflächen, bieten aber nicht die Flexibilität beliebiger Gittergeometrien oder die Variation entlang der Propagationsrichtung. Damit bietet nur das direkte Laserschreiben sowohl die Flexibilität als auch die Präzision, um Experimente mit Wellenleitern, die höhere Moden leiten, durchzuführen.

Diese Wellenleiterstrukturen bieten damit eine gute Plattform, um Effekte in dem relativ neuen Forschungsbereich *Orbitronik* zu untersuchen [114]. Bei der Elektronik wird gezielt der Strom von Elektronen manipuliert. Analog wird bei der Spintronik der Strom von Spins manipuliert. Und ebenso wird in der Orbitronik versucht den Strom von orbitalen Drehimpulsen zu steuern. Laut Ref. [114] ließe sich damit auch der Spin-Hall-Effekt

auf den Orbitalen-Hall-Effekt über die Spin-Bahn-Kopplung zurückführen. Damit orbitronische Effekte auftreten können, muss die Spiegelsymmetrie des Festkörpers in eine Richtung gebrochen sein, sodass sich ein orbitaler Strom entlang dieser Richtung bilden kann. Mit Gitterstrukturen aus dielektrischen Wellenleitern, welche OAM-Moden führen, ließen sich orbitronische Systeme untersuchen. Dabei müsste sich zeigen, dass der Drehimpuls der OAM-Moden und der Wellenvektor des Wellenpakets in dem Gitter miteinander verknüpft sind.

Wie in Kapitel 8.4 gezeigt wurde, hat die Polarisation in den betrachteten Strukturen einen vernachlässigbaren Einfluss. Daher kann der Effekt, den der orbitalen Drehimpulse auf die Propagation eines Wellenpakets in einem Gitter hat, unabhängig vom Spin untersucht werden. In einem Festkörper sind diese beiden Eigenschaften der Elektronen durch die Spin-Bahn-Kopplung miteinander fest verknüpft und können daher nur bedingt unabhängig voneinander untersucht werden. Mit OAM-Moden in dielektrischen Wellenleitern ließen sich daher die Effekte der Orbitronik im Einteilchenbild völlig ungestört von Polarisation, Spin oder Coulomb-Wechselwirkungen replizieren.

Es könnten zudem Gitter mit OAM-Moden betrachtet werden, die künstlichen elektrischen oder magnetischen Feldern ausgesetzt sind. Durch helixförmige Wellenleiter könnte das Magnetfeld an jedem Gitterplatz individuell durch die Periodenlänge der Helix vorgegeben werden [103]. Damit ließen sich auch Effekte von Grenzflächen oder Defekte in den künstlichen Feldern auf die Drehimpulszustände untersuchen [115]. Diese Felder und die komplexen Kopplungen könnten auch über die Propagationsstrecke variiert werden, um zeitabhängige Störungen zu simulieren [39].

Für zukünftige Arbeiten steht damit eine große Auswahl an Designmöglichkeiten zur Verfügung, um auch diese komplexeren Modellsysteme in einer photonischen Plattform realisieren zu können.

10. Anhang

10.1 Pauli- und Γ -Matrizen

Die drei Pauli-Matrizen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ bilden zusammen mit der 2×2 Einheitsmatrix σ_0 eine Basis des komplexen Vektorraums aller 2×2 Matrizen:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \quad (10.1)$$

Die Produkte aller Kombinationen der Pauli-Matrizen sind in Tab. 10.1 aufgeführt.

Tabelle 10.1: Multiplikationstabelle für die Pauli-Matrizen

$\sigma_i \sigma_j$	$\sigma_j = \sigma_0$	$\sigma_j = \sigma_1$	$\sigma_j = \sigma_2$	$\sigma_j = \sigma_3$
$\sigma_i = \sigma_0$	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3
$\sigma_i = \sigma_1$	σ_1	σ_0	$i\sigma_3$	$-i\sigma_2$
$\sigma_i = \sigma_2$	σ_2	$-i\sigma_3$	σ_0	$i\sigma_1$
$\sigma_i = \sigma_3$	σ_3	$i\sigma_2$	$-i\sigma_1$	σ_0

Die in Kapitel 7.2 verwendeten Γ -Matrizen ergeben sich als Kronecker-Produkte der Pauli-Matrizen. Alle Kombinationen und damit alle Γ -Matrizen sind in Tab. 10.2 aufgelistet.

Tabelle 10.2: Γ -Matrizen als Multiplikationstabelle der Pauli-Matrizen

$\Gamma_{ij} = \sigma_i \otimes \sigma_j$	$\sigma_i = \sigma_0$	$\sigma_i = \sigma_1$	$\sigma_i = \sigma_2$	$\sigma_i = \sigma_3$
$\sigma_j = \sigma_0$	$\Gamma_{00} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$	$\Gamma_{10} = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$	$\Gamma_{20} = \begin{pmatrix} & -i & & \\ & & -i & \\ i & & & \\ & i & & \end{pmatrix}$	$\Gamma_{30} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$
$\sigma_j = \sigma_1$	$\Gamma_{01} = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$	$\Gamma_{11} = \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$	$\Gamma_{21} = \begin{pmatrix} & -i & & \\ & & -i & \\ i & & & \\ & i & & \end{pmatrix}$	$\Gamma_{31} = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$
$\sigma_j = \sigma_2$	$\Gamma_{02} = \begin{pmatrix} & -i & & \\ i & & & \\ & & -i & \\ & & & i \end{pmatrix}$	$\Gamma_{12} = \begin{pmatrix} & & -i & \\ & & & -i \\ i & & & \\ & -i & & \end{pmatrix}$	$\Gamma_{22} = \begin{pmatrix} & & -1 & \\ & & & -1 \\ -1 & & & \\ & 1 & & 1 \end{pmatrix}$	$\Gamma_{32} = \begin{pmatrix} & -i & & \\ i & & & \\ & & -i & \\ & & & i \end{pmatrix}$
$\sigma_j = \sigma_3$	$\Gamma_{03} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$	$\Gamma_{13} = \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & -1 \\ 1 & & & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$	$\Gamma_{23} = \begin{pmatrix} & -i & & \\ & & -i & \\ i & & & \\ & -i & & \end{pmatrix}$	$\Gamma_{33} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

Um zu zeigen, wie sich die Produkte der Γ -Matrizen ergeben, wird hier das Beispiel $\Gamma_{13}\Gamma_{23}\Gamma_{13} = -\Gamma_{23}$ explizit ausgeschrieben:

$$\Gamma_{13}(\Gamma_{23}\Gamma_{13}) = \Gamma_{13}((\boldsymbol{\sigma}_2 \otimes \boldsymbol{\sigma}_3)(\boldsymbol{\sigma}_1 \otimes \boldsymbol{\sigma}_3)) = \Gamma_{13}(\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_1 \otimes \boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_3) = \Gamma_{13}(-i\boldsymbol{\sigma}_3 \otimes \boldsymbol{\sigma}_0) = \Gamma_{13}(-i\Gamma_{30}) \quad (10.2)$$

$$= -i\Gamma_{13}\Gamma_{30} = -i(\boldsymbol{\sigma}_1 \otimes \boldsymbol{\sigma}_3)(\boldsymbol{\sigma}_3 \otimes \boldsymbol{\sigma}_0) = (-i)(-i)\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_3 \otimes \boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_0 = -\boldsymbol{\sigma}_2 \otimes \boldsymbol{\sigma}_3 = -\Gamma_{23} \quad (10.3)$$

10.2 Peierls Substitution

In diesem Abschnitt wird die Koordinaten-Transformation in das mitrotierende Bezugssystem ausführlich beschrieben. Zuerst wird gezeigt, dass aus Sicht des mitrotierenden Bezugssystems ein effektives Magnetfeld existiert. Anschließend wird gezeigt, wie sich der Einfluss dieses Feldes auf die Phase der Kopplungen in der Tight-Binding-Näherung überträgt. Ausgangspunkt ist die paraxiale Helmholtz-Gleichung (4.16):

$$i\hbar \partial_z \psi = -\frac{\hbar^2}{2n_c} \nabla_{\perp}^2 \psi - \Delta n(\vec{r}) \psi \quad (10.4)$$

Um das verdrillte System zu beschreiben ist es hilfreich, von dem unbewegten Bezugssystem x, y, z in das mitrotierende Bezugssystem x', y', z' zu wechseln. Dabei sei Ω die Rotationsfrequenz. Die Koordinatentransformationen ins mitrotierende Bezugssystem ist, wie in Abb. 10.1 (a) skizziert, durch die Rotation um den Winkel Ωz gegeben:

$$x' = x \cos(\Omega z) + y \sin(\Omega z) \quad (10.5a)$$

$$y' = -x \sin(\Omega z) + y \cos(\Omega z) \quad (10.5b)$$

$$z' = z \quad (10.5c)$$

Die Rücktransformation ist entsprechend die Rotation in die entgegengesetzte Richtung:

$$x = x' \cos(\Omega z) - y' \sin(\Omega z) \quad (10.6a)$$

$$y = x' \sin(\Omega z) + y' \cos(\Omega z) \quad (10.6b)$$

$$z = z' \quad (10.6c)$$

Damit ergeben sich die partiellen Ableitungen im mitrotierenden Bezugssystem [116]:

$$\partial_x = \frac{\partial x'}{\partial x} \partial_{x'} + \frac{\partial y'}{\partial x} \partial_{y'} + \frac{\partial z'}{\partial x} \partial_{z'} = \cos(\Omega z') \partial_{x'} - \sin(\Omega z') \partial_{y'} \quad (10.7)$$

$$\partial_y = \sin(\Omega z') \partial_{x'} + \cos(\Omega z') \partial_{y'} \quad (10.8)$$

$$\partial_z = \Omega (-x \sin(\Omega z) + y \cos(\Omega z)) \partial_{x'} + \Omega (-x \cos(\Omega z) - y \sin(\Omega z)) \partial_{y'} + \partial_{z'} \quad (10.9)$$

$$= \Omega \left(-x' \sin(\Omega z') \cos(\Omega z') + y' \sin(\Omega z)^2 + x' \sin(\Omega z') \cos(\Omega z') + y' \cos(\Omega z)^2 \right) \partial_{x'} \quad (10.10)$$

$$+ \Omega \left(-x' \cos(\Omega z)^2 + y' \sin(\Omega z') \cos(\Omega z') - x' \sin(\Omega z)^2 - y' \sin(\Omega z') \cos(\Omega z') \right) \partial_{y'} + \partial_{z'} \quad (10.11)$$

$$= \Omega \begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{x'} \\ \partial_{y'} \end{pmatrix} + \partial_{z'} = \Omega \begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix} \nabla'_{\perp} + \partial_{z'} \quad (10.12)$$

$$= \frac{\hbar}{n_c} \vec{A} \nabla'_{\perp} + \partial_{z'} \quad (10.13)$$

Im letzten Schritt wurde dabei das Vektorpotenzial \vec{A} eingeführt:

$$\vec{A}(x', y') = \frac{n_c \Omega}{\hbar} \begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix} \quad (10.14)$$

Eine kurze Zwischenrechnung zeigt, dass der Laplace-Operator für die transversalen Koordinaten x, y bei

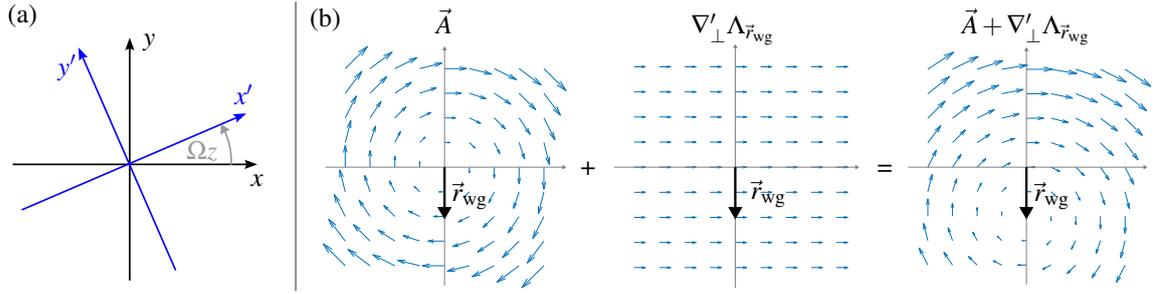


Abbildung 10.1: (a) Koordinatenstransformation vom statischen Bezugssystem (x, y) in das mit Ω mitrotierende Bezugssystem (x', y') . (b) Der Einfluss des Vektorpotenzials \vec{A} (Gl. (10.14)) kann lokal um \vec{r}_{wg} durch den Gradienten des Eichfelds $\nabla'_{\perp} \Lambda_{\vec{r}_{wg}}$ (Gl. (10.47)) ausgeglichen werden.

dieser Transformation ins mitrotierende Bezugssystem x', y' erhalten bleibt:

$$\nabla_{\perp}^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 \quad (10.15)$$

$$= (\cos(\Omega z) \partial_{x'} - \sin(\Omega z) \partial_{y'})^2 + (\sin(\Omega z) \partial_{x'} + \cos(\Omega z) \partial_{y'})^2 \quad (10.16)$$

$$= \cos(\Omega z)^2 \partial_{x'}^2 - 2 \sin(\Omega z) \cos(\Omega z) \partial_{x'} \partial_{y'} + \sin(\Omega z)^2 \partial_{y'}^2 \quad (10.17)$$

$$+ \sin(\Omega z)^2 \partial_{x'}^2 + 2 \sin(\Omega z) \cos(\Omega z) \partial_{x'} \partial_{y'} + \cos(\Omega z)^2 \partial_{y'}^2 \quad (10.18)$$

$$= \partial_{x'}^2 + \partial_{y'}^2 = \nabla'_{\perp}{}^2 \quad (10.19)$$

Durch Einsetzen von $\partial_z = \lambda/n_c \vec{A} \nabla'_{\perp} + \partial_{z'}$ nach Gl. (10.14) auf der rechten Seite und $\nabla_{\perp}^2 = \nabla'_{\perp}{}^2$ nach Gl. (10.19) auf der linken Seite ergibt sich schließlich die paraxiale Helmholtz-Gleichung im mitrotierenden Bezugssystem:

$$i\lambda \partial_z \psi = -\frac{\lambda^2}{2n_c} \nabla_{\perp}^2 \psi - \Delta n(\vec{r}) \psi \quad (10.20)$$

$$i\lambda \left(\frac{\lambda}{n_c} \vec{A} \nabla'_{\perp} + \partial_{z'} \right) \psi' = -\frac{\lambda^2}{2n_c} \nabla'_{\perp}{}^2 \psi' - \Delta n(\vec{r}') \psi' \quad (10.21)$$

$$i\lambda \partial_{z'} \psi' = -\frac{\lambda^2}{2n_c} \nabla'_{\perp}{}^2 \psi' - \frac{i\lambda^2}{n_c} \vec{A} \nabla'_{\perp} \psi' - \Delta n(\vec{r}') \psi' \quad (10.22)$$

$$= -\frac{\lambda^2}{2n_c} \nabla'_{\perp}{}^2 \psi' - \frac{i\lambda^2}{n_c} \vec{A} \nabla'_{\perp} \psi' + \underbrace{\frac{\lambda^2}{2n_c} \vec{A}^2 \psi'} - \Delta n(\vec{r}') \psi' - \underbrace{\frac{\lambda^2}{2n_c} \vec{A}^2 \psi'} \quad (10.23)$$

$$= \frac{\lambda^2}{2n_c} \left(i\nabla'_{\perp} - \vec{A} \right)^2 \psi' - \Delta n(\vec{r}') \psi' - \frac{n_c \Omega^2}{2} (x'^2 + y'^2) \psi' \quad (10.24)$$

Durch den Übergang in das mitbewegte Bezugssystem ist einerseits das Vektorpotenzial \vec{A} hinzugekommen und andererseits der Term in der letzten Zeile ganz rechts, welcher eine alternative Schreibweise von $\lambda^2/2n_c \vec{A}^2$ ist:

$$\frac{\lambda^2}{2n_c} \vec{A}^2 = \frac{\lambda^2}{2n_c} \left(\frac{n_c \Omega}{\lambda} \begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix} \right)^2 = \frac{\lambda^2}{2n_c} \frac{n_c^2 \Omega^2}{\lambda^2} ((-x')^2 + y'^2) = \frac{n_c \Omega^2}{2} (x'^2 + y'^2) \quad (10.25)$$

Dieser Term entspricht einem parabolischen Potenzial, welches auch als Zentrifugalpotenzial bezeichnet wird [116] und bereits bei der geometrischen Herleitung in Gl. (8.7) aufgetaucht ist.

Das zeitlich konstante (aber ortsabhängige) Vektorpotenzial \vec{A} entspricht nach der klassischen Elektrody-

namik einem homogenen Magnetfeld \vec{B} in z -Richtung:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{n_c \Omega}{\lambda} \begin{pmatrix} \partial_{x'} \\ \partial_{y'} \\ \partial_{z'} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y' \\ -x' \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{n_c \Omega}{\lambda} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_{x'} x' + \partial_{y'} y' \end{pmatrix} = -\frac{2n_c \Omega}{\lambda} \hat{e}_z \quad (10.26)$$

Mit dem Magnetfeld \vec{B} und dem Drehimpulsoperator $\hat{L}_{z'} = -i\lambda (\vec{r}' \times \nabla'_{\perp})$ kann der Term $i\lambda^2/n_c \vec{A} \nabla'_{\perp}$ auch anders geschrieben werden:

$$\frac{i\lambda^2}{n_c} \vec{A} \nabla'_{\perp} = \frac{i\lambda^2}{n_c} \frac{n_c \Omega}{\lambda} \begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_{x'} \\ \partial_{y'} \end{pmatrix} = -i\lambda \Omega (x' \partial_{y'} - y' \partial_{x'}) \quad (10.27)$$

$$= -i\lambda \Omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y' \partial_{z'} - z' \partial_{y'} \\ z' \partial_{x'} - x' \partial_{z'} \\ x' \partial_{y'} - y' \partial_{x'} \end{pmatrix} = -i\lambda \Omega \hat{e}_z \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_{x'} \\ \partial_{y'} \\ \partial_{z'} \end{pmatrix} \quad (10.28)$$

$$= -i\lambda \Omega \hat{e}_z \cdot \vec{r}' \times \nabla'_{\perp} = -\frac{\lambda}{2n_c} \left(-\frac{2n_c \Omega}{\lambda} \hat{e}_z \right) \cdot (-i\lambda (\vec{r}' \times \nabla'_{\perp})) = -\frac{\lambda}{2n_c} \vec{B} \cdot \hat{L}_{z'} \quad (10.29)$$

Damit lässt sich die dritte Zeile von Gl. (10.22) anstatt mit dem Vektorpotenzial \vec{A} auch mit dem Magnetfeld \vec{B} schreiben:

$$i\lambda \partial_{z'} \psi' = -\frac{\lambda^2}{2n_c} \nabla'_{\perp}{}^2 \psi' + \frac{\lambda}{2n_c} \vec{B} \cdot \hat{L}_{z'} \psi' - \Delta n(\vec{r}') \psi' \quad (10.30)$$

Durch den Term $\lambda/2n_c \vec{B} \cdot \hat{L}_{z'} \psi'$ ist der effektive Brechungsindex an den Drehimpuls des Zustands ψ' gekoppelt. Je nach Ausrichtung des Drehimpulses des Zustands zum Magnetfeld \vec{B} wird der effektive Brechungsindex dadurch erhöht oder abgesenkt. Eine Erhöhung des effektiven Brechungsindex ist äquivalent zu einer Absenkung der Eigenenergie; die Mode ist somit stärker gebunden.

Beim Übergang in die Tight-Binding-Näherung muss der Einfluss des Vektorfeldes $\vec{A}(x', y')$ berücksichtigt werden. Dafür wird eine Eichtransformation durchgeführt, welche, wie sich zeigen wird, den Einfluss des Vektorfeldes auf die Phase der Zustände überträgt. Da das Magnetfeld $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ durch die Rotation des Vektorfeldes gegeben ist, ist das Vektorfeld nur bis auf die Addition des Gradienten eines skalaren Feldes Λ definiert: $\vec{B} = \nabla \times (\vec{A} + \nabla \Lambda) = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \nabla \Lambda = \nabla \times \vec{A}$. Daher ist $\Lambda(\vec{r})$ ein frei wählbares Eichfeld, welches das Verhalten des Systems nicht beeinflusst. Bei dieser Eichtransformation zu einem Vektorpotenzial mit Skalarfeld $\vec{A}_{\Lambda} = \vec{A} + \nabla \Lambda$ müssen auch die Zustände $\psi'_{\Lambda} = \psi' e^{-i\Lambda}$ entsprechend angepasst werden:

$$i\lambda \partial_{z'} \psi' = \frac{\lambda^2}{2n_c} \left(i\nabla'_{\perp} - \vec{A} \right)^2 \psi' - \Delta n(\vec{r}') \psi' \quad (10.31)$$

$$\Leftrightarrow i\lambda \partial_{z'} \psi'_{\Lambda} = \frac{\lambda^2}{2n_c} \left(i\nabla'_{\perp} - \vec{A}_{\Lambda} \right)^2 \psi'_{\Lambda} - \Delta n(\vec{r}') \psi'_{\Lambda} \quad (10.32)$$

Hier wird nun kurz verifiziert, dass bei der Transformation nach Gl. (10.32) in der Tat eine Äquivalenz vorliegt. Für die Ortsableitungen der Zustände $\psi'_{\Lambda} e^{-i\Lambda}$ gilt:

$$\nabla'_{\perp} \psi'_{\Lambda} = \nabla'_{\perp} \left(\psi' e^{-i\Lambda} \right) = \left(\nabla'_{\perp} \psi' - i(\nabla'_{\perp} \Lambda) \psi' \right) e^{-i\Lambda} \quad (10.33)$$

$$\nabla'_{\perp}{}^2 \psi'_{\Lambda} = \nabla'_{\perp}{}^2 \left(\psi' e^{-i\Lambda} \right) = \left(\nabla'_{\perp}{}^2 \psi' - 2i(\nabla'_{\perp} \Lambda) \nabla'_{\perp} \psi' - (\nabla'_{\perp} \Lambda)^2 \psi' \right) e^{-i\Lambda} \quad (10.34)$$

Für die Zustände ψ'_Λ lässt sich der kinetische Anteil von Gl. (10.32) wie folgt schreiben:

$$i\hbar \partial_{z'} \psi'_\Lambda = \frac{\hbar^2}{2n_c} \left(i\nabla'_\perp - \vec{A}_\Lambda \right)^2 \psi'_\Lambda \quad (10.35)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2n_c} \left(i\nabla'_\perp - \vec{A} - \nabla'_\perp \Lambda \right)^2 \psi'_\Lambda \quad (10.36)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2n_c} \left(-\nabla'^2_\perp + \vec{A}^2 + (\nabla'_\perp \Lambda)^2 - 2i\vec{A}\nabla'_\perp - 2i(\nabla'_\perp \Lambda)\nabla'_\perp + 2\vec{A}(\nabla'_\perp \Lambda) \right) \psi'_\Lambda \quad (10.37)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2n_c} \left(-\nabla'^2_\perp \psi'_\Lambda + 2i(\nabla'_\perp \Lambda)\nabla'_\perp \psi'_\Lambda + (\nabla'_\perp \Lambda)^2 \psi'_\Lambda + \vec{A}^2 \psi'_\Lambda + (\nabla'_\perp \Lambda)^2 \psi'_\Lambda \right. \\ \left. - 2i\vec{A}\nabla'_\perp \psi'_\Lambda - 2\vec{A}(\nabla'_\perp \Lambda)\psi'_\Lambda - 2i(\nabla'_\perp \Lambda)\nabla'_\perp \psi'_\Lambda - 2(\nabla'_\perp \Lambda)^2 \psi'_\Lambda + 2\vec{A}(\nabla'_\perp \Lambda)\psi'_\Lambda \right) \quad (10.38)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2n_c} \left(-\nabla'^2_\perp - 2i\vec{A}\nabla'_\perp + \vec{A}^2 \right) \psi'_\Lambda \quad (10.39)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2n_c} \left(i\nabla'_\perp - \vec{A} \right)^2 \psi'_\Lambda \quad (10.40)$$

Damit ist gezeigt, dass die Zustände ψ'_Λ in der Tat die Gl. (10.24) mit dem Vektorfeld \vec{A}_Λ lösen, falls ψ' die Gl. (10.24) mit \vec{A} löst:

$$i\hbar \partial_{z'} \psi'_\Lambda = \frac{\hbar^2}{2n_c} \left(i\nabla'_\perp - \vec{A}_\Lambda \right)^2 \psi'_\Lambda - \Delta n(\vec{r}') \psi'_\Lambda - \frac{n_c \Omega^2}{2} (x'^2 + y'^2) \psi'_\Lambda \quad (10.41)$$

$$\stackrel{(10.40)}{\iff} i\hbar \partial_{z'} \psi' e^{-i\Lambda} = \frac{\hbar^2}{2n_c} \left(i\nabla'_\perp - \vec{A} \right)^2 \psi' e^{-i\Lambda} - \Delta n(\vec{r}') \psi' e^{-i\Lambda} - \frac{n_c \Omega^2}{2} (x'^2 + y'^2) \psi' e^{-i\Lambda} \quad (10.42)$$

Durch die Wahl von Λ , sodass $\nabla'_\perp \Lambda = -\vec{A}$ gilt, kann der Einfluss des Vektorfelds vom Eichfeld ausgeglichen werden. Somit kann die Helmholtz-Gleichung im mitrotierenden Bezugssystem Gl. (10.22) mit den Zuständen ψ'_Λ auch ohne das Vektorpotential geschrieben werden:

$$i\hbar \partial_{z'} \psi'_\Lambda = \frac{\hbar^2}{2n_c} \left(i\nabla'_\perp - \vec{A}_\Lambda \right)^2 \psi'_\Lambda - \Delta n(\vec{r}') \psi'_\Lambda - \frac{n_c \Omega^2}{2} (x'^2 + y'^2) \psi'_\Lambda \quad (10.43)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2n_c} \left(i\nabla'_\perp - \vec{A} - \nabla'_\perp \Lambda \right)^2 \psi'_\Lambda - \Delta n(\vec{r}') \psi'_\Lambda - \frac{n_c \Omega^2}{2} (x'^2 + y'^2) \psi'_\Lambda \quad (10.44)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2n_c} \nabla'^2_\perp \psi'_\Lambda - \Delta n(\vec{r}') \psi'_\Lambda - \frac{n_c \Omega^2}{2} (x'^2 + y'^2) \psi'_\Lambda \quad (10.45)$$

$\Lambda(\vec{r})$ kann jedoch nicht global definiert werden, da $\nabla'_\perp \times \vec{A} = \vec{B} \neq \vec{0} = \nabla'_\perp \times \nabla'_\perp \Lambda$. Allerdings kann Λ , wie in Abb. 10.1 (b) gezeigt, jeweils in einer Umgebung um einen Punkt $\vec{r}'_{\text{wg}} = (x'_{\text{wg}}, y'_{\text{wg}})^T$ so gewählt werden, dass \vec{A} lokal ausgeglichen wird.

$$\Lambda_{\vec{r}'_{\text{wg}}}(\vec{r}') = - \int_{\vec{r}'_{\text{wg}}}^{\vec{r}'} \vec{A}(\vec{R}) d\vec{R} \quad (10.46)$$

$$\approx \vec{A}(\vec{r}'_{\text{wg}}) \cdot (\vec{r}'_{\text{wg}} - \vec{r}') = \frac{1}{2} \left(\vec{B} \times \vec{r}'_{\text{wg}} \right) \cdot (\vec{r}'_{\text{wg}} - \vec{r}') = -\frac{1}{2} \left(\vec{B} \times \vec{r}'_{\text{wg}} \right) \cdot \vec{r}' \quad (10.47)$$

Dieses skalare Eichfeld ist bereits vorher aufgetaucht. Es entspricht nicht nur der Phase der Zustände $\psi'_\Lambda = \psi' e^{-i\Lambda}$, sondern auch der Phase der ebenen Welle in der x - y -Ebene mit Wellenvektor \vec{k}_{xy} in der geometrischen

Herleitung.

$$\exp\left(-i\Lambda_{r_{\text{wg}}'}\right) = \exp\left(\frac{i}{2}\left(\vec{B} \times r_{\text{wg}}'\right) \cdot \vec{r}\right) = \exp\left(\frac{i}{2}\frac{2n_c\Omega}{\lambda}\left(\hat{\mathbf{e}}_z \times r_{\text{wg}}'\right) \cdot \vec{r}\right) \quad (10.48)$$

$$= \exp\left(i\frac{n_c\Omega}{\lambda}\left(r_{\text{wg}}' \times \vec{r}\right) \cdot \hat{\mathbf{e}}_z\right) = \exp\left(i\vec{k}_{\text{xy}} \cdot \vec{r}\right) \quad (10.49)$$

Aufgrund der diskreten Wellenleiter, welche durch das Potenzial $\Delta n(\vec{r}')$ beschrieben werden, kann nun für die Betrachtung von Gl. (10.45) in die Tight-Binding-Näherung übergegangen werden. Im Vergleich zum statischen Bezugssystem müssen zwei Dinge beachtet werden. Einerseits sorgt das Zentrifugalpotenzial für einen weiteren Potenzial-Term. Andererseits stehen in Gl. (10.45) die ψ'_Λ . Das heißt, für die Kopplung wird das Überlappintegral der $\psi'_\Lambda = \psi' e^{i\Lambda}$ berechnet. Dabei sind ψ' die individuellen Wellenleitermoden. Zwischen den Zuständen ψ'_{Λ_q} und ψ'_{Λ_p} , die vor allem an den Orten $\vec{r}'_q = (x_q, y_q)^T$ und $\vec{r}'_p = (x_p, y_p)^T$ lokalisiert sind, ergibt sich damit eine komplex-wertige Kopplungskonstante $c'_{q,p}$:

$$c'_{q,p} = \frac{1}{\lambda} \langle \psi'_{\Lambda_q} | \Delta n_q | \psi'_{\Lambda_p} \rangle = \frac{1}{\lambda} \iint \psi_q'^* e^{i\Lambda_q} \Delta n_q \psi_p' e^{-i\Lambda_p} d r^2 = \frac{1}{\lambda} \iint \psi_q'^* \Delta n_q \psi_p' e^{i\frac{1}{2}(\vec{B} \times (\vec{r}'_q - \vec{r}'_p)) \cdot \vec{r}'} d r^2 \quad (10.50)$$

$$\approx \frac{1}{\lambda} e^{i\frac{1}{2}(\vec{B} \times (\vec{r}'_q - \vec{r}'_p)) \cdot \vec{r}'_q} \iint \psi_q'^* \Delta n_q \psi_p' d r^2 = \frac{1}{\lambda} \langle \psi'_q | \Delta n_q | \psi'_p \rangle e^{i\frac{1}{2}(\vec{B} \times (\vec{r}'_q - \vec{r}'_p)) \cdot \vec{r}'_q} = c_{q,p} e^{i\tau} \quad (10.51)$$

Damit ergibt sich τ als Phase der Kopplung $c'_{q,p}$ analog zur geometrischen Herleitung nach Gl. (8.9) zu:

$$\tau = \frac{1}{2} \left(\vec{B} \times (\vec{r}'_q - \vec{r}'_p) \right) \cdot \vec{r}'_q = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\left(\vec{B} \times \vec{r}'_q \right) \cdot \vec{r}'_q}_{=0} - \left(\vec{B} \times \vec{r}'_p \right) \cdot \vec{r}'_q \right) \quad (10.52)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2n_c\Omega}{\lambda} \left(\hat{\mathbf{e}}_z \times \vec{r}'_p \right) \cdot \vec{r}'_q = \frac{n_c\Omega}{\lambda} \left(\vec{r}'_p \times \vec{r}'_q \right) \cdot \hat{\mathbf{e}}_z = \frac{n_c\Omega}{\lambda} \left(\vec{r}'_p \times \vec{r}'_q \right)_z \quad (10.53)$$

Die Approximation, die bei dem Kopplungsintegral gemacht wurde, ist, dass Δn_q effektiv als ein Punkt genähert werden kann. Dies ist nur bei kleinen Wellenleiterdurchmessern d_{wg} und kleinen Magnetfeldern \vec{B} gerechtfertigt, da dann der Phasengradient im Inneren des q -ten Wellenleiters klein ist. Da bei der Integration über den Phasengradienten gemittelt wird, ist der Betrag der Kopplung $c'_{q,p}$ in Wirklichkeit kleiner: $\|c'_{q,p}\| \leq \|c_{q,p}\|$. Zudem gelten diese Näherungen nur in einer kleinen Umgebung $\Delta r = \|\vec{r}'_q - \vec{r}'_p\|$, da das Eichfeld jeweils nur lokal das Vektorpotential kompensiert. Daher sind die Näherungen nur gerechtfertigt, wenn $1 \gg \vec{B} \Delta r d_{\text{wg}} = 4\pi n_c \Omega \Delta r d_{\text{wg}} / \lambda$. Eine Abschätzung nach oben mit den maximalen Werten der Struktur im Experiment nach Tab. 8.1 (mit $\Delta r \approx r_{\text{wg}}$) zeigt, dass diese Näherungen für die Struktur gerechtfertigt sind:

$$1 \gg \frac{4\pi n_c \Omega r_{\text{wg}} d_{\text{wg}}}{\lambda} \stackrel{\text{Tab.}}{=} 4\pi \cdot 1.54 \cdot \frac{2\pi}{\Omega} \cdot (10 \cdot 10^{-6} \text{ m}) \cdot (2.6 \cdot 10^{-6} \text{ m}) \cdot \frac{1}{700 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 2.58 \cdot 10^{-3}$$

Literatur

- ¹G. Jotzu, M. Messer, R. Desbuquois, M. Lebrat, T. Uehlinger, D. Greif und T. Esslinger, „Experimental realization of the topological Haldane model with ultracold fermions“, *Nature* **515**, 237–240 (2014).
- ²S. Imhof, C. Berger, F. Bayer, J. Brehm, L. W. Molenkamp, T. Kiessling, F. Schindler, C. H. Lee, M. Greiter, T. Neupert und R. Thomale, „Topoelectrical-circuit realization of topological corner modes“, *Nature Physics* **14**, 925–929 (2018).
- ³S. Imhof, C. Berger, F. Bayer, J. Brehm, L. W. Molenkamp, T. Kiessling, F. Schindler, C. H. Lee, M. Greiter, T. Neupert und R. Thomale, „Topoelectrical-circuit realization of topological corner modes“, *Nature Physics* **14**, 925–929 (2018).
- ⁴M. Bellec, U. Kuhl, G. Montambaux und F. Mortessagne, „Tight-binding couplings in microwave artificial graphene“, *Phys. Rev. B* **88**, 115437 (2013).
- ⁵C. W. Peterson, W. A. Benalcazar, T. L. Hughes und G. Bahl, „A quantized microwave quadrupole insulator with topologically protected corner states“, *Nature* **555**, 346–350 (2018).
- ⁶Y. Qi, C. Qiu, M. Xiao, H. He, M. Ke und Z. Liu, „Acoustic Realization of Quadrupole Topological Insulators“, *Phys. Rev. Lett.* **124**, 206601 (2020).
- ⁷D. Leykam, S. Mittal, M. Hafezi und Y. D. Chong, „Reconfigurable Topological Phases in Next-Nearest-Neighbor Coupled Resonator Lattices“, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 023901 (2018).
- ⁸S. Mittal, V. V. Orre, G. Zhu, M. A. Gorlach, A. Poddubny und M. Hafezi, „Photonic quadrupole topological phases“, *Nature Photonics* **13**, 692–696 (2019).
- ⁹F. Bleckmann, Z. Cherpakova, S. Linden und A. Alberti, „Spectral imaging of topological edge states in plasmonic waveguide arrays“, *Phys. Rev. B* **96**, 045417 (2017).
- ¹⁰Q. Wang, T. Brächer, M. Fleischhauer, B. Hillebrands und P. Pirro, „Stimulated-Raman-adiabatic-passage mechanism in a magnonic environment“, *Applied Physics Letters* **118**, 182404 (2021).
- ¹¹M. I. Shalaev, W. Walasik, A. Tsukernik, Y. Xu und N. M. Litchinitser, „Robust topologically protected transport in photonic crystals at telecommunication wavelengths“, *Nature Nanotechnology* **14**, 31–34 (2019).
- ¹²R. Contractor, W. Noh, W. Redjem, W. Qarony, E. Martin, S. Dhuey, A. Schwartzberg und B. Kanté, „Scalable single-mode surface-emitting laser via open-dirac singularities“, *Nature* **608**, 692–698 (2022).
- ¹³Q. Zhang, M. Li, Y. Chen, X. Ren, R. Osellame, Q. Gong und Y. Li, „Femtosecond laser direct writing of an integrated path-encoded CNOT quantum gate“, *Opt. Mater. Express* **9**, 2318–2326 (2019).
- ¹⁴D. Neshev, A. Sukhorukov, W. Królikowski und Y. Kivshar, „Nonlinear optics and light localization in periodic photonic lattices“, *Journal of Nonlinear Optical Physics & Materials - JNOPM* **16** (2007).
- ¹⁵S. Xia, A. Ramachandran, S. Xia, D. Li, X. Liu, L. Tang, Y. Hu, D. Song, J. Xu, D. Leykam, S. Flach und Z. Chen, „Unconventional Flatband Line States in Photonic Lieb Lattices“, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 263902 (2018).

- ¹⁶Y. Zong, S. Xia, L. Tang, D. Song, Y. Hu, Y. Pei, J. Su, Y. Li und Z. Chen, „Observation of localized flat-band states in Kagome photonic lattices“, *Opt. Express* **24**, 8877–8885 (2016).
- ¹⁷P. S. Russell, R. Beravat und G. K. L. Wong, „Helically twisted photonic crystal fibres“, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **375**, 20150440 (2017).
- ¹⁸J. Schulz, S. Vaidya und C. Jörg, „Topological photonics in 3D micro-printed systems“, *APL Photonics* **6**, 080901 (2021).
- ¹⁹A. Szameit und S. Nolte, „Discrete optics in femtosecond-laser-written photonic structures“, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **43**, 163001 (2010).
- ²⁰G. Wang, J. P. Huang und K. W. Yu, „Nontrivial Bloch oscillations in waveguide arrays with second-order coupling“, *Opt. Lett.* **35**, 1908–1910 (2010).
- ²¹M. C. Rechtsman, J. M. Zeuner, Y. Plotnik, Y. Lumer, D. Podolsky, F. Dreisow, S. Nolte, M. Segev und A. Szameit, „Photonic floquet topological insulators“, *Nature* **496**, 196–200 (2013).
- ²²R. Beravat, G. K. L. Wong, M. H. Frosz, X. M. Xi und P. S. Russell, „Twist-induced guidance in coreless photonic crystal fiber: A helical channel for light“, *Science Advances* **2**, 10.1126/sciadv.1601421 (2016).
- ²³G. K. L. Wong, M. S. Kang, H. W. Lee, F. Biancalana, C. Conti, T. Weiss und P. S. J. Russell, „Excitation of Orbital Angular Momentum Resonances in Helically Twisted Photonic Crystal Fiber“, *Science* **337**, 446–449 (2012).
- ²⁴M. Parto, H. Lopez-Aviles, J. E. Antonio-Lopez, M. Khajavikhan, R. Amezcua-Correa und D. N. Christodoulides, „Observation of twist-induced geometric phases and inhibition of optical tunneling via Aharonov-Bohm effects“, *Science Advances* **5**, 10.1126/sciadv.aau8135 (2019).
- ²⁵E. Lustig, S. Weimann, Y. Plotnik, Y. Lumer, M. A. Bandres, A. Szameit und M. Segev, „Photonic topological insulator in synthetic dimensions“, *Nature* **567**, 356–360 (2019).
- ²⁶K. Okamoto, „Fundamentals of optical waveguides“, Elsevier, ISBN: 978-0-12-525096-2 (2006).
- ²⁷F. Schwabl, „Quantenmechanik“, Springer, Springer-Lehrbuch, ISBN: 978-3-540-52359-8 978-0-387-52359-0 (1992).
- ²⁸W. E. Arnoldi, „The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem“, *Quarterly of Applied Mathematics* **9**, 17–29 (1951).
- ²⁹„Optical waveguides: from theory to applied technologies“, CRC Press, *Optical science and engineering*, hrsg. von M. L. Calvo und V. Lakshminarayanan, OCLC: ocm71005894 (2007).
- ³⁰A. Peruzzo, M. Lobino, J. C. F. Matthews, N. Matsuda, A. Politi, K. Poulios, X.-Q. Zhou, Y. Lahini, N. Ismail, K. Wörhoff, Y. Bromberg, Y. Silberberg, M. G. Thompson und J. L. O'Brien, „Quantum Walks of Correlated Photons“, *Science* **329**, 1500–1503 (2010).
- ³¹P. Schafheitlin, „Die Theorie der Besselschen Funktionen“, B.G. Teubner, *Sammlung Mathematisch-Physikalischer Lehrbücher* (1908).
- ³²G. A. Reider, „Dielektrische Wellenleiter“, Springer Vienna, ISBN: 978-3-7091-1520-6 978-3-7091-1521-3, 179–229 (2012).
- ³³P. Somers, A. Münchinger, S. Maruo, C. Moser, X. Xu und M. Wegener, „The physics of 3d printing with light“, *Nature Reviews Physics* **6**, 99–113 (2023).
- ³⁴V. Hahn, T. Messer, N. M. Bojanowski, E. R. Curticean, I. Wacker, R. R. Schröder, E. Blasco und M. Wegener, „Two-step absorption instead of two-photon absorption in 3d nanoprinting“, *Nature Photonics* **15**, 932–938 (2021).

- ³⁵J. K. Hohmann, M. Renner, E. H. Waller und G. von Freymann, „Three-Dimensional μ -Printing: An Enabling Technology“, *Advanced Optical Materials* **3**, 1488–1507 (2015).
- ³⁶E. H. Waller und G. von Freymann, „Spatio-Temporal Proximity Characteristics in 3D μ -Printing via Multi-Photon Absorption“, *Polymers* **8**, 10. 3390/polym8080297 (2016).
- ³⁷J. S. Oakdale, J. Ye, W. L. Smith und J. Biener, „Post-print UV curing method for improving the mechanical properties of prototypes derived from two-photon lithography“, *Opt. Express* **24**, 27077–27086 (2016).
- ³⁸„Photonic Professional (GT) User Manual“, Nanoscribe GmbH (2017).
- ³⁹C. Jörg, „Interfaces and defects in topological model systems of 3D micro-printed waveguides“, Diss. (Technische Universität Kaiserslautern, Sep. 2019).
- ⁴⁰„Definite Focus from Carl Zeiss“, *Carl Zeiss MicroImaging GmbH* (2008).
- ⁴¹T. Gissibl, S. Wagner, J. Sykora, M. Schmid und H. Giessen, „Refractive index measurements of photoresists for three-dimensional direct laser writing“, *Opt. Mater. Express* **7**, 2293–2298 (2017).
- ⁴²J. Schulz, J. Noh, W. A. Benalcazar, G. Bahl und G. von Freymann, „Photonic quadrupole topological insulator using orbital-induced synthetic flux“, *Nature Communications* **13**, 6597 (2022).
- ⁴³S. Dottermusch, D. Busko, M. Langenhorst, U. W. Paetzold und B. S. Richards, „Exposure-dependent refractive index of Nanoscribe IP-Dip photoresist layers“, *Opt. Lett.* **44**, 29–32 (2019).
- ⁴⁴A. Žukauskas, I. Matulaitienė, D. Paipulas, G. Niaura, M. Malinauskas und R. Gadonas, „Tuning the refractive index in 3D direct laser writing lithography: towards GRIN microoptics“, *Laser & Photonics Reviews* **9**, 706–712 (2015).
- ⁴⁵X. Porte, N. U. Dinc, J. Moughames, G. Panusa, C. Juliano, M. Kadic, C. Moser, D. Brunner und D. Psaltis, „Direct (3+1)D laser writing of graded-index optical elements“, *Optica* **8**, 1281–1287 (2021).
- ⁴⁶A. Grabulosa, J. Moughames, X. Porte, M. Kadic und D. Brunner, „Additive 3D photonic integration that is CMOS compatible“, *Nanotechnology* **34**, 322002 (2023).
- ⁴⁷J. A. Davis, D. M. Cottrell, J. Campos, M. J. Yzuel und I. Moreno, „Encoding amplitude information onto phase-only filters“, *Appl. Opt.* **38**, 5004–5013 (1999).
- ⁴⁸H.-J. Korsch, „Mathematische Ergänzungen zur Einführung in die Physik: empfohlen für FiPS“, Binomi Verl, ISBN: 978-3-923923-61-8 (2007).
- ⁴⁹J. M. Zeuner, M. C. Rechtsman, R. Keil, F. Dreisow, A. Tünnermann, S. Nolte und A. Szameit, „Negative coupling between defects in waveguide arrays“, *Optics Letters* **37**, 533 (2012).
- ⁵⁰M. Kremer, I. Petrides, E. Meyer, M. Heinrich, O. Zilberberg und A. Szameit, „A square-root topological insulator with non-quantized indices realized with photonic Aharonov-Bohm cages“, *Nature Communications* **11**, 907 (2020).
- ⁵¹R. Keil, C. Poli, M. Heinrich, J. Arkininstall, G. Weihs, H. Schomerus und A. Szameit, „Universal Sign Control of Coupling in Tight-Binding Lattices“, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 213901 (2016).
- ⁵²N. Fu, Z. Fu, H. Zhang, Q. Liao, D. Zhao und S. Ke, „Topological bound modes in optical waveguide arrays with alternating positive and negative couplings“, *Optical and Quantum Electronics* **52**, 61 (2020).
- ⁵³J. M. Zeuner, N. K. Efremidis, R. Keil, F. Dreisow, D. N. Christodoulides, A. Tünnermann, S. Nolte und A. Szameit, „Optical Analogues for Massless Dirac Particles and Conical Diffraction in One Dimension“, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 023602 (2012).
- ⁵⁴W. Song, H. Li, S. Gao, C. Chen, S. Zhu und T. Li, „Subwavelength self-imaging in cascaded waveguide arrays“, *Advanced Photonics* **2**, 036001 (2020).

- ⁵⁵C. Jörg, G. Queraltó, M. Kremer, G. Pelegrí, J. Schulz, A. Szameit, G. von Freymann, J. Mompart und V. Ahufinger, „Artificial gauge field switching using orbital angular momentum modes in optical waveguides“, *Light: Science & Applications* **9**, 150 (2020).
- ⁵⁶N. Caselli, F. Riboli, F. La China, A. Gerardino, L. Li, E. H. Linfield, F. Pagliano, A. Fiore, F. Intonti und M. Gurioli, „Tailoring the Photon Hopping by Nearest-Neighbor and Next-Nearest-Neighbor Interaction in Photonic Arrays“, *ACS Photonics* **2**, 565–571 (2015).
- ⁵⁷F. Dreisow, A. Szameit, M. Heinrich, T. Pertsch, S. Nolte und A. Tünnermann, „Second-order coupling in femtosecond-laser-written waveguide arrays“, *Opt. Lett.* **33**, 2689–2691 (2008).
- ⁵⁸R. Keil, B. Pressl, R. Heilmann, M. Gräfe, G. Weihs und A. Szameit, „Direct measurement of second-order coupling in a waveguide lattice“, *Applied Physics Letters* **107**, 241104 (2015).
- ⁵⁹L. Li, Z. Xu und S. Chen, „Topological phases of generalized Su-Schrieffer-Heeger models“, *Phys. Rev. B* **89**, 085111 (2014).
- ⁶⁰M. Li, D. Zhirihin, M. Gorkach, X. Ni, D. Filonov, A. Slobozhanyuk, A. Alù und A. B. Khanikaev, „Higher-order topological states in photonic kagome crystals with long-range interactions“, *Nature Photonics* **14**, 89–94 (2020).
- ⁶¹W.-P. Huang, „Coupled-mode theory for optical waveguides: an overview“, *J. Opt. Soc. Am. A* **11**, 963–983 (1994).
- ⁶²L. J. Maczewsky, S. Weimann, M. Kremer, M. Heinrich und A. Szameit, „Experimental study of non-orthogonal modes in tight-binding lattices“, in *Conference on Lasers and Electro-Optics* (2019), FM1C.6.
- ⁶³H. Haus, W. Huang, S. Kawakami und N. Whitaker, „Coupled-mode theory of optical waveguides“, *Journal of Lightwave Technology* **5**, 16–23 (1987).
- ⁶⁴A. Szameit, T. Pertsch, S. Nolte, A. Tünnermann und F. Lederer, „Long-range interaction in waveguide lattices“, *Phys. Rev. A* **77**, 043804 (2008).
- ⁶⁵S. Weimann, M. Kremer, Y. Plotnik, Y. Lumer, S. Nolte, K. G. Makris, M. Segev, M. C. Rechtsman und A. Szameit, „Topologically protected bound states in photonic parity–time-symmetric crystals“, *Nature Materials* **16**, 433–438 (2017).
- ⁶⁶J. Schulz, C. Jörg und G. von Freymann, „Geometric control of next-nearest-neighbor coupling in evanescently coupled dielectric waveguides“, *Opt. Express* **30**, 9869–9877 (2022).
- ⁶⁷G. Laues und M. Szymik, „Grundkurs Topologie“, *Spektrum, Akad. Verl*, ISBN: 978-3-8274-2040-4 (2009).
- ⁶⁸J. M. Lee, „Riemannian manifolds: an introduction to curvature“, *Springer*, ISBN: 978-0-387-98271-7 978-0-387-98322-6 (1997).
- ⁶⁹K. v. Klitzing, G. Dorda und M. Pepper, „New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance“, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 494–497 (1980).
- ⁷⁰D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale und M. den Nijs, „Quantized Hall Conductance in a Two-Dimensional Periodic Potential“, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 405–408 (1982).
- ⁷¹D. J. Thouless, „Quantization of particle transport“, *Phys. Rev. B* **27**, 6083–6087 (1983).
- ⁷²J. Asbóth, L. Oroszlány und A. Pályi, „A Short Course on Topological Insulators: Band Structure and Edge States in One and Two Dimensions“, *Springer International Publishing*, ISBN: 978-3-319-25607-8 (2016).
- ⁷³M. V. Berry, „Quantal phase factors accompanying adiabatic changes“, *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* **392**, 45–57 (1984).
- ⁷⁴W. A. Benalcazar, B. A. Bernevig und T. L. Hughes, „Quantized electric multipole insulators“, *Science* **357**, 61–66 (2017).

- ⁷⁵S. Vaidya, A. Ghorashi, T. Christensen, M. C. Rechtsman und W. A. Benalcazar, „Topological phases of photonic crystals under crystalline symmetries“, *Physical Review B* **108**, 085116 (2023).
- ⁷⁶R. Yu, X. L. Qi, A. Bernevig, Z. Fang und X. Dai, „Equivalent expression of Z_2 topological invariant for band insulators using the non-Abelian Berry connection“, *Physical Review B* **84**, 075119 (2011).
- ⁷⁷S. Vaidya, M. C. Rechtsman und W. A. Benalcazar, „Polarization and Weak Topology in Chern Insulators“, *Physical review letters* **132**, 116602 (2024).
- ⁷⁸D. Gresch, G. Autès, O. V. Yazyev, M. Troyer, D. Vanderbilt, B. A. Bernevig und A. A. Soluyanov, „Z2Pack: Numerical implementation of hybrid Wannier centers for identifying topological materials“, *Phys. Rev. B* **95**, 075146 (2017).
- ⁷⁹A. Cerjan, M. Jürgensen, W. A. Benalcazar, S. Mukherjee und M. C. Rechtsman, „Observation of a Higher-Order Topological Bound State in the Continuum“, *Phys. Rev. Lett.* **125**, 213901 (2020).
- ⁸⁰W. A. Benalcazar und A. Cerjan, „Bound states in the continuum of higher-order topological insulators“, *Phys. Rev. B* **101**, 161116 (2020).
- ⁸¹A. Alexandradinata, X. Dai und B. A. Bernevig, „Wilson-loop characterization of inversion-symmetric topological insulators“, *Physical Review B* **89**, 155114 (2014).
- ⁸²M. Serra-Garcia, V. Peri, R. Süsstrunk, O. R. Bilal, T. Larsen, L. G. Villanueva und S. D. Huber, „Observation of a phononic quadrupole topological insulator“, *Nature* **555**, 342–345 (2018).
- ⁸³D. Guzmán-Silva, G. Cáceres-Aravena und R. A. Vicencio, „Experimental Observation of Interorbital Coupling“, *Phys. Rev. Lett.* **127**, 066601 (2021).
- ⁸⁴G. Cáceres-Aravena, D. Guzmán-Silva, I. Salinas und R. A. Vicencio, „Controlled Transport Based on Multiorbital Aharonov-Bohm Photonic Caging“, *Phys. Rev. Lett.* **128**, 256602 (2022).
- ⁸⁵W. A. Benalcazar, J. Noh, M. Wang, S. Huang, K. P. Chen und M. C. Rechtsman, „Higher-order topological pumping and its observation in photonic lattices“, *Phys. Rev. B* **105**, 195129 (2022).
- ⁸⁶F. Tamburini, G. Anzolin, G. Umbricco, A. Bianchini und C. Barbieri, „Overcoming the Rayleigh Criterion Limit with Optical Vortices“, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 163903 (2006).
- ⁸⁷M. Padgett und R. Bowman, „Tweezers with a twist“, *Nature Photonics* **5**, 343–348 (2011).
- ⁸⁸G. A. Swartzlander, E. L. Ford, R. S. Abdul-Malik, L. M. Close, M. A. Peters, D. M. Palacios und D. W. Wilson, „Astronomical demonstration of an optical vortex coronagraph“, *Opt. Express* **16**, 10200–10207 (2008).
- ⁸⁹M. P. J. Lavery, F. C. Speirits, S. M. Barnett und M. J. Padgett, „Detection of a Spinning Object Using Light’s Orbital Angular Momentum“, *Science* **341**, 537–540 (2013).
- ⁹⁰T. Mizuno, H. Takara, A. Sano und Y. Miyamoto, „Dense Space-Division Multiplexed Transmission Systems Using Multi-Core and Multi-Mode Fiber“, *Journal of Lightwave Technology* **34**, 582–592 (2016).
- ⁹¹G. C. G. Berkhout, M. P. J. Lavery, J. Courtial, M. W. Beijersbergen und M. J. Padgett, „Efficient Sorting of Orbital Angular Momentum States of Light“, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 153601 (2010).
- ⁹²H. Zhang, B. Mao, Y. Han, Z. Wang, Y. Yue und Y. Liu, „Generation of Orbital Angular Momentum Modes Using Fiber Systems“, *Applied Sciences* **9**, 10.3390/app9051033 (2019).
- ⁹³A. E. Willner, K. Pang, H. Song, K. Zou und H. Zhou, „Orbital angular momentum of light for communications“, *Applied Physics Reviews* **8**, 041312 (2021).
- ⁹⁴S. Zheng und J. Wang, „On-chip orbital angular momentum modes generator and (de)multiplexer based on trench silicon waveguides“, *Opt. Express* **25**, 18492–18501 (2017).

- ⁹⁵Y. Jiang, G. Ren, Y. Shen, Y. Xu, W. Jin, Y. Wu, W. Jian und S. Jian, „Two-dimensional tunable orbital angular momentum generation using a vortex fiber“, *Opt. Lett.* **42**, 5014–5017 (2017).
- ⁹⁶Y. Li, Y. Li, L. Feng, C. Yang, W. Li, J. Qiu, X. Hong, Y. Zuo, H. Guo, W. Tong und J. Wu, „Mode-Selective Photonic Lanterns for Orbital Angular Momentum Mode Division Multiplexing“, *Applied Sciences* **9**, 10.3390/app9112233 (2019).
- ⁹⁷X. Zeng, Y. Li, L. Feng, S. Wu, C. Yang, W. Li, W. Tong und J. Wu, „All-fiber orbital angular momentum mode multiplexer based on a mode-selective photonic lantern and a mode polarization controller“, *Opt. Lett.* **43**, 4779–4782 (2018).
- ⁹⁸Y. Yan, Y. Yue, H. Huang, J.-Y. Yang, M. R. Chitgarha, N. Ahmed, M. Tur, S. J. Dolinar und A. E. Willner, „Efficient generation and multiplexing of optical orbital angular momentum modes in a ring fiber by using multiple coherent inputs“, *Opt. Lett.* **37**, 3645–3647 (2012).
- ⁹⁹Y. Lu, Z. Jiang, W. Liu, Q. Zhou, M. Jiang und K. Xie, „Orbital angular momentum mode generation system based on photonic lantern“, *Journal of Optics* **21**, 125702 (2019).
- ¹⁰⁰Z. S. Eznaveh, J. C. A. Zacarias, J. E. A. Lopez, K. Shi, G. Milione, Y. Jung, B. C. Thomsen, D. J. Richardson, N. Fontaine, S. G. Leon-Saval und R. A. Correa, „Photonic lantern broadband orbital angular momentum mode multiplexer“, *Optics Express* **26**, 30042 (2018).
- ¹⁰¹H. Xu und L. Yang, „Conversion of orbital angular momentum of light in chiral fiber gratings“, *Opt. Lett.* **38**, 1978–1980 (2013).
- ¹⁰²C. N. Alexeyev, T. A. Fadeyeva, Y. A. Fridman und M. A. Yavorsky, „Optical vortices routing in coupled elliptical spun fibers“, *Appl. Opt.* **51**, C17–C21 (2012).
- ¹⁰³C. N. Alexeyev, T. A. Fadeyeva, B. P. Lapin und M. A. Yavorsky, „Generation of optical vortices in layered helical waveguides“, *Phys. Rev. A* **83**, 063820 (2011).
- ¹⁰⁴C. N. Alexeyev und M. A. Yavorsky, „Generation and conversion of optical vortices in long-period helical core optical fibers“, *Phys. Rev. A* **78**, 043828 (2008).
- ¹⁰⁵A. Turpin, G. Pelegrí, J. Polo, J. Mompert und V. Ahufinger, „Engineering of orbital angular momentum supermodes in coupled optical waveguides“, *Scientific Reports* **7**, 44057 (2017).
- ¹⁰⁶Y. Chen, K.-Y. Xia, W.-G. Shen, J. Gao, Z.-Q. Yan, Z.-Q. Jiao, J.-P. Dou, H. Tang, Y.-Q. Lu und X.-M. Jin, „Vector Vortex Beam Emitter Embedded in a Photonic Chip“, *Phys. Rev. Lett.* **124**, 153601 (2020).
- ¹⁰⁷H. Yang, Z. Xie, H. He, Q. Zhang und X. Yuan, „A perspective on twisted light from on-chip devices“, *APL Photonics* **6**, 110901 (2021).
- ¹⁰⁸J. Schulz und G. von Freymann, „Broadband Mode Division Multiplexing of OAM-Modes by a Micro Printed Waveguide Structure“, *Advanced Optical Materials* **12**, 2302597 (2024).
- ¹⁰⁹A. M. Velazquez-Benitez, J. C. Alvarado, G. Lopez-Galmiche, J. E. Antonio-Lopez, J. Hernández-Cordero, J. Sanchez-Mondragon, P. Sillard, C. M. Okonkwo und R. Amezcua-Correa, „Six mode selective fiber optic spatial multiplexer“, *Opt. Lett.* **40**, 1663–1666 (2015).
- ¹¹⁰W. Song, O. You, J. Sun, S. Wu, C. Chen, C. Huang, K. Qiu, S. Zhu, S. Zhang und T. Li, „Fast topological pumps via quantum metric engineering on photonic chips“, *Science Advances* **10**, eadn5028 (2024).
- ¹¹¹N. Fläschner, B. S. Rem, M. Tarnowski, D. Vogel, D.-S. Lühmann, K. Sengstock und C. Weitenberg, „Experimental reconstruction of the Berry curvature in a Floquet Bloch band“, *Science* **352**, 1091–1094 (2016).
- ¹¹²A. Tomita und R. Y. Chiao, „Observation of Berry’s Topological Phase by Use of an Optical Fiber“, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 937–940 (1986).
- ¹¹³M. Jürgensen, S. Mukherjee, C. Jörg und M. C. Rechtsman, „Quantized fractional Thouless pumping of solitons“, *Nature Physics* **19**, 420–426 (2023).

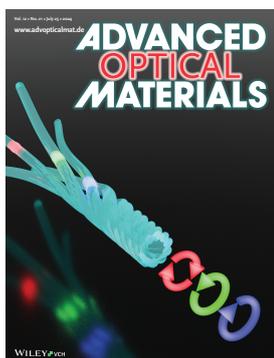
- ¹¹⁴D. Go, D. Jo, H.-W. Lee, M. Kläui und Y. Mokrousov, „Orbitronics: Orbital currents in solids“, [Europhysics Letters](#) **135**, 37001 (2021).
- ¹¹⁵M.-I. Cohen, C. Jörg, Y. Lumer, Y. Plotnik, E. H. Waller, J. Schulz, G. von Freymann und M. Segev, „Generalized laws of refraction and reflection at interfaces between different photonic artificial gauge fields“, [Light: Science & Applications](#) **9**, 200 (2020).
- ¹¹⁶H. Luo, Y. Wei, F. O. Wu, G. G. Pyrialakos, D. N. Christodoulides und M. Khajavikhan, „Guiding Trojan light beams via Lagrange points“, [Nature Physics](#) **20**, 95–100 (2024).
- ¹¹⁷K. Karkihalli Umesh, J. Schulz, J. Schmitt, M. Weitz, G. von Freymann und F. Vewinger, „Dimensional crossover in a quantum gas of light“, [Nature Physics](#), 10.1038/s41567-024-02641-7 (2024).

11. Publikationen

Teile dieser Arbeit wurden in wissenschaftlichen Fachzeitschriften veröffentlicht und auf internationalen Konferenzen präsentiert.

Im Rahmen der Dissertation genauer behandelte Arbeiten:

- [66] Julian Schulz, Christina Jörg, und Georg von Freymann, “Geometric control of next-nearest-neighbor coupling in evanescently coupled dielectric waveguides”, *Opt. Express* **6**, 9869 (2022).
- [42] Julian Schulz, Jiho Noh, Wladimir A. Benalcazar, Gaurav Bahl, und Georg von Freymann, “Photonic quadrupole topological insulator using orbital-induced synthetic flux”, *Nature Communications*, **13**, 6597 (2022).
- [108] Julian Schulz und Georg von Freymann, “Broadband Mode Division Multiplexing of OAM-Modes by a Micro Printed Waveguide Structure”, *Advanced Optical Materials* **12**, 2302597 (2024).



Arbeiten, an denen im Zeitraum der Dissertation mitgewirkt wurde:

- [55] Christina Jörg, Gerard Queraltó, Mark Kremer, Gerard Pelegrí, Julian Schulz, Alexander Szameit, Georg von Freymann, Jordi Mompart, Verònica Ahufinger, “Artificial gauge field switching using orbital angular momentum modes in optical waveguides”, *Light: Science & Applications* **9** 150 (2020).
- [115] Moshe-Ishay Cohen, Christina Jörg, Yaakov Lumer, Yonatan Plotnik, Erik H Waller, Julian Schulz, Georg von Freymann, Mordechai Segev, “Generalized laws of refraction and reflection at interfaces between different photonic artificial gauge fields”, *Light: Science & Applications* **9**, 200 (2020).
- [18] Julian Schulz, Sachin Vaidya und Christina Jörg, “Topological photonics in 3D micro-printed systems”, *APL Photonics* **6**, 080901 (2021).
- [117] Kirankumar Karkihalli Umesh, Julian Schulz, Julian Schmitt, Martin Weitz, Georg von Freymann, Frank Vewinger, "Dimensional Crossover in a Quantum Gas of Light", *Nature Physics*, (2024).

Konferenzbeiträge:

Vorträge:

- Julian Schulz, Christina Jörg und Georg von Freymann: Robustness of a Thouless pump in case of local site-exchange perturbations. SPIE Photonics West (2019), San Francisco, Kalifornien, USA
- Julian Schulz, Christina Jörg und Georg von Freymann: Investigation of a negative next-nearest-neighbor-coupling in evanescently coupled dielectric waveguides. DPG Frühjahrstagung (2019), Rostock, Deutschland
- Christina Jörg, Julian Schulz and Georg von Freymann: Direct laser writing of waveguides using the exposure dependent polymerization of IP-Dip. SPIE Photonics West (2020), San Francisco, Kalifornien, USA
- Julian Schulz, Christina Jörg und Georg von Freymann: Investigation of a negative next-nearest-neighbor-coupling in evanescently coupled dielectric waveguides. CLEO (2021), (online) San José, Kalifornien, USA
- Julian Schulz, Jiho Noh, Wladimir A. Benalcazar, Gaurav Bahl, and Georg von Freymann: Photonic quadrupole topological insulator using orbital-induced synthetic flux. PECS-XIII (2023), Tokyo, Japan
- Julian Schulz, Jiho Noh, Wladimir A. Benalcazar, Gaurav Bahl, and Georg von Freymann: Photonic quadrupole topological insulator using orbital-induced synthetic flux. CLEO (2023), San José, Kalifornien, USA

Poster:

- Julian Schulz, Christina Jörg und Georg von Freymann: Investigation of a negative next-nearest-neighbor-coupling in evanescently coupled dielectric waveguides. CLEO Europe (2021), (online) München, Deutschland
- Kirankumar Karkihalli Umesh, Julian Schulz, Julian Schmitt, Martin Weitz, Georg von Freymann und Frank Vewinger: Dimensional Crossover in a Quantum Gas of Light. Condensates of Light 2024 (2024), Bad Honnef, Deutschland

12. Curriculum Vitae

Persönliche Daten

Name: Julian Schulz
Geburtsort: Halle (an der Saale)
Staatsangehörigkeit: deutsch

Bildungsweg und akademischer Werdegang

08 / 2000 - 07 / 2004 Grundschule Göttschied (Idar-Oberstein)
08 / 2004 - 06 / 2010 Realschule Idar-Oberstein
08 / 2010 - 06 / 2013 Berufliches Gymnasium
an der Berufsbildenden Schule Technik (Harald-Fissler-Schule) Idar-Oberstein
10 / 2013 - 09 / 2016 Bachelorstudiengang Physik
an der Technischen Universität Kaiserslautern
Titel der Bachelorarbeit: „Charakterisierung des Reflektionsvermögens einer durch die Silberameise inspirierten Oberflächenstruktur“
10 / 2016 - 11 / 2018 Masterstudiengang Physik
an der Technischen Universität Kaiserslautern
Titel der Masterarbeit: „Herstellung und Charakterisierung evaneszent gekoppelter Wellenleiterstrukturen“
01 / 2019 - heute Promotion
an der Rheinland-Pfälzischen Technischen Universität Kaiserslautern Landau
(vormals Technische Universität Kaiserslautern)

Beruflicher Werdegang

03 / 2016 - 05 / 2016 wissenschaftliche Hilfskraft
02 / 2017 - 05 / 2017 an der Technischen Universität Kaiserslautern
04 / 2019 - 12 / 2019 in der Arbeitsgruppe Optische Technologien und Photonik
01 / 2020 - heute wissenschaftlicher Mitarbeiter
an der Rheinland-Pfälzischen Technischen Universität Kaiserslautern Landau
(vormals Technische Universität Kaiserslautern)

13. Danksagung

Zum Ende möchte ich noch die Gelegenheit nutzen, mich bei all denjenigen zu Bedanken, die mich auf dem Weg zum Abschluss dieser Arbeit in vielerlei Hinsicht unterstützt haben.

Zuerst geht mein Dank an meinen Doktorvater, Prof. Dr. Georg von Freymann, der mir erst die Promotion auf diesem Themengebiet ermöglicht hat. Vielen Dank, dass du mir von Anfang an eine Promotion zugetraut und mir, wenn nötig, motivieren zugesprochen hast. Für die Freiheit, das Thema völlig flexibel mit meinen Ideen (wie [108]) entwickeln zu können und für die Möglichkeit, die eigenen Ergebnisse auf mehreren internationalen Konferenzen präsentieren zu dürfen, danke ich dir vielmals.

Zudem geht mein Dank an Prof. Dr. Artur Widera, für die Übernahme des Zweitgutachtens, die anschaulichen und verständlichen Quantenmechanik-Vorlesungen und für die Übernahme der Verantwortung des gemeinsam genutzten DLW-Systems. Alle in dieser Arbeit gezeigten Strukturen [42, 66, 108] wurden an dem gemeinsam genutzten DLW-System hergestellt.

Mein Dank gilt zudem der Kalyandjian-Conradt-Stiftung, die mich während meines Studiums mit einem Stipendium finanziell unterstützt hat. Vielen Dank für den Vertrauensvorschuss und den Austausch mit anderen Stipendiaten.

Allen ehemaligen und aktuellen Mitgliedern der AG von Freymann danke ich für die gemeinsame Zeit, die hilfreichen Diskussionen, die leckeren Kuchen und die selbstverständliche Hilfsbereitschaft. Besonders geht der Dank dabei an Heike Buchinger, die uns den Rücken frei hält, indem sie die anfallende Bürokratie bewältigt und Matthias Fischer, der uns bei technischen Problemen stets mit Rat und Tat und Know-how zur Seite steht.

Ganz besonders möchte ich mich bei JProf. Dr. Christina Jörg bedanken, die bei mir ursprünglich das Interesse an dem Themengebiet geweckt hat. Die vielen interessanten Diskussionen mit dir, haben mir geholfen ein deutlich besseres und tieferes Verständnis zu erhalten, insbesondere über Fragestellungen, die ich mir sonst niemals selbst gestellt hätte. Vielen Dank für die Zusammenarbeit, die zahlreichen Anmerkungen und Vorschläge über die Jahre und Kooperationen die du initiiert hast. Ohne deine Initiative wären die Zusammenarbeit mit Jiho Noh und darauf aufbauend, die Ergebnisse in [42], nie zustande gekommen!

In terms of collaboration, I would like to thank everyone I have worked with on projects, especially: Jiho Noh, Kirankumar Karkihalli Umesh, Sachin Vaidya, Wladimir A. Benalcazar and there group leaders. Without you, I would have understood and achieved so much less. Thank you.

Ich bedanke mich zudem bei Alaa Bayazeed, Christina Jörg, Julian Hering-Stratemeier, Malte Koster, Pascale Klaeger, Sven Enns und Thomas Utz dafür, dass sie diese Arbeit korrekturgelesen haben. Dank euch sind weniger Rechtschreib- und Zeichensetzungfehler im Text und eure konstruktive Kritik hat merklich zu Verbesserung der Arbeit beigetragen.

Zudem möchte ich mich natürlich bei all meinen Freunden und meiner Familie für die stetige Unterstützung über die Jahre bedanken.

Danke euch allen!

Fachbereich Physik

Rheinland-Pfälzische Technische
Universität Kaiserslautern Landau

Postfach 3049
67653 Kaiserslautern, Germany

www.physik.rptu.de/

R
P **TU** Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau