



Fraunhofer Institut
Techno- und
Wirtschaftsmathematik

S. Feth, J. Franke, M. Speckert

Resampling-Methoden zur mse-
Korrektur und Anwendungen in
der Betriebsfestigkeit

© Fraunhofer-Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik ITWM 2007

ISSN 1434-9973

Bericht 116 (2007)

Alle Rechte vorbehalten. Ohne ausdrückliche schriftliche Genehmigung des Herausgebers ist es nicht gestattet, das Buch oder Teile daraus in irgendeiner Form durch Fotokopie, Mikrofilm oder andere Verfahren zu reproduzieren oder in eine für Maschinen, insbesondere Datenverarbeitungsanlagen, verwendbare Sprache zu übertragen. Dasselbe gilt für das Recht der öffentlichen Wiedergabe.

Warennamen werden ohne Gewährleistung der freien Verwendbarkeit benutzt.

Die Veröffentlichungen in der Berichtsreihe des Fraunhofer ITWM können bezogen werden über:

Fraunhofer-Institut für Techno- und
Wirtschaftsmathematik ITWM
Fraunhofer-Platz 1

67663 Kaiserslautern
Germany

Telefon: +49 (0) 6 31/3 16 00-0
Telefax: +49 (0) 6 31/3 16 00-1099
E-Mail: info@itwm.fraunhofer.de
Internet: www.itwm.fraunhofer.de

Vorwort

Das Tätigkeitsfeld des Fraunhofer-Instituts für Techno- und Wirtschaftsmathematik ITWM umfasst anwendungsnahe Grundlagenforschung, angewandte Forschung sowie Beratung und kundenspezifische Lösungen auf allen Gebieten, die für Techno- und Wirtschaftsmathematik bedeutsam sind.

In der Reihe »Berichte des Fraunhofer ITWM« soll die Arbeit des Instituts kontinuierlich einer interessierten Öffentlichkeit in Industrie, Wirtschaft und Wissenschaft vorgestellt werden. Durch die enge Verzahnung mit dem Fachbereich Mathematik der Universität Kaiserslautern sowie durch zahlreiche Kooperationen mit internationalen Institutionen und Hochschulen in den Bereichen Ausbildung und Forschung ist ein großes Potenzial für Forschungsberichte vorhanden. In die Berichtreihe sollen sowohl hervorragende Diplom- und Projektarbeiten und Dissertationen als auch Forschungsberichte der Institutsmitarbeiter und Institutsgäste zu aktuellen Fragen der Techno- und Wirtschaftsmathematik aufgenommen werden.

Darüber hinaus bietet die Reihe ein Forum für die Berichterstattung über die zahlreichen Kooperationsprojekte des Instituts mit Partnern aus Industrie und Wirtschaft.

Berichterstattung heißt hier Dokumentation des Transfers aktueller Ergebnisse aus mathematischer Forschungs- und Entwicklungsarbeit in industrielle Anwendungen und Softwareprodukte – und umgekehrt, denn Probleme der Praxis generieren neue interessante mathematische Fragestellungen.



Prof. Dr. Dieter Prätzel-Wolters
Institutsleiter

Kaiserslautern, im Juni 2001

Resampling-Methoden zur mse-Korrektur und Anwendungen in der Betriebsfestigkeit

Sascha Feth
Fraunhofer ITWM*

Prof. Dr. Jürgen Franke
TU Kaiserslautern

Dr. Michael Speckert
Fraunhofer ITWM

Zusammenfassung

Von sicherheitsrelevanten Bauteilen im Automobilbau verlangt man, dass beim Kunden bis zur Zeit/Strecke q_0 höchstens ein Anteil p_0 ausgefallen ist. Die Verifikation dieses Quantils geschieht in einer Reihe von Versuchen, bei denen die Bauteile mit einer typischen Kraft zyklisch belastet werden, bis ein gewisses, im Vorfeld festgelegtes, Schadensbild auftritt und die Anzahl T_i der Zyklen („Schwingspiele“) als Lebensdauer notiert wird. Typischerweise ist der Stichprobenumfang N dabei sehr gering ($N < 10$), während gleichzeitig ein extremes Quantil $0 \approx p_0 \ll 0,1$ verifiziert werden soll. Verwendet man als Lebensdauerverteilung eine Weibull- oder Lognormalverteilung, so tritt in den Quantilschätzern ein deutlicher Bias auf, der beseitigt werden soll. Da es sich hierbei in der Regel um einen positiven Bias handelt, würde man Bauteile als serientauglich einstufen, obwohl sie möglicherweise deutlich unter den Vorgaben liegen. Die Berechnung von Konfidenzintervallen für Quantile geschieht über Delta-Methoden, die ebenfalls schlechte Resultate liefern (in Form einer zu geringen empirischen Signifikanz linksseiter Intervalle).

Im Folgenden werden Verallgemeinerungen der Bootstrap- und Jackknife-Biaskorrektur vorgestellt, welche nicht nur versuchen den Bias zu beseitigen, sondern direkt den mittleren quadratischen Fehler des Schätzers weitestgehend zu reduzieren. Simulationsstudien zeigen, dass dies für geringe Stichprobenumfänge gelingt. Außerdem wird untersucht, inwiefern die Methode in Kombination mit der Bootstrap-Quantil-Methode einen verbesserten Intervallschätzer für Quantile liefert. Dabei werden simulierte Daten betrachtet, deren Parameter repräsentativ für Lebensdauerverteilungen von sicherheitsrelevanten Bauteilen sind.

Stichwörter: Weibull, Bootstrap, Maximum-Likelihood, Betriebsfestigkeit.

*Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik

1 Einführung

Betrachtet werden uiv Zufallsvariablen X_1, \dots, X_N mit Verteilung F , wobei hier die Fälle Weibull $F = \mathcal{W}(\beta; \gamma)$ bzw. Lognormal $F = \mathcal{LN}(\mu; \sigma^2)$ behandelt werden. Hierbei ist

$$X \sim \mathcal{LN}(\mu; \sigma) \Leftrightarrow \ln X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2) \quad \text{und} \quad X \sim \mathcal{W}(\beta; \gamma) \Leftrightarrow (X/\beta)^\gamma \sim \mathcal{Exp}(1).$$

Im Folgenden wird die Verteilungsfunktion der Verteilung F als $F(x)$ bezeichnet, die verallgemeinerte inverse Verteilungsfunktion als

$$F^-(p) = \inf\{x \mid F(x) \geq p\}.$$

Zunächst soll ein Punktschätzer für das p -Quantil $x_p = F^-(p)$ gefunden werden für den Fall, dass $p \ll 0,5$ angenommen wird. In einem parametrischen Modell $F \in \{F_\theta \mid \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k\}$, hier $k = 2$, muss der Parameter θ geschätzt werden, was in der Praxis oft mittels kleinsten Quadraten oder der ML-Methode geschieht. Falls F_θ eine Dichte besitzt:

$$\hat{\theta}_{\text{ML}} = \operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} \sum_{i=1}^N \ln f_\theta(X_i)$$

Während für Weibullverteilungen keine expliziten Formeln für $\hat{\beta}_{\text{ML}}, \hat{\gamma}_{\text{ML}}$ existieren, können die Lognormalparameterschätzer explizit berechnet werden:

$$\hat{\mu}_{\text{ML}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln X_i, \quad \hat{\sigma}_{\text{ML}}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\ln X_i - \hat{\mu}_{\text{ML}})^2$$

Wegen $\mathbb{E}(\hat{\sigma}_{\text{ML}}^2) = \frac{N-1}{N} \sigma^2$ hat $\hat{\sigma}_{\text{ML}}^2$ einen Bias, der durch Multiplikation mit $\frac{N}{N-1}$ jedoch wieder beseitigt wird. Analoge Korrekturformeln lassen sich für die Weibullparameter nicht aufstellen, da keine explizite Formel vorliegt (mit Monte-Carlo-Simulationen lässt sich zeigen, dass auch wirklich ein Bias vorhanden ist). Aus diesem Grund schlagen viele Autoren vor, andere Schätzmethode zu verwenden. Stichworte hierzu sind die GLUEs von Bain, Minimale-Distanz-Schätzer sowie weitere Methoden, die in der Regel mit der gumbelverteilten Zufallsvariablen $\ln X$ arbeiten. Es soll dennoch zunächst untersucht werden, inwiefern sich die ML-Parameterschätzer einer Weibullverteilung korrigieren lassen.

2 Biaskorrekturen: Jackknife und Bootstrap

Grundidee der Biaskorrektur ist es einen Schätzwert für den Bias zu finden, der dann vom eigentlichen Schätzer T subtrahiert wird:

$$T_{\text{Bias}} = T - \widehat{\text{Bias}}(T)$$

Hieraus resultiert für den biaskorrigierten Schätzer T_{Bias} :

$$\text{Bias}(T_{\text{Bias}}) = \mathbb{E}(T) - \mathbb{E}(\widehat{\text{Bias}}(T)) - \theta = \text{Bias}(T) - \mathbb{E}(\widehat{\text{Bias}}(T))$$

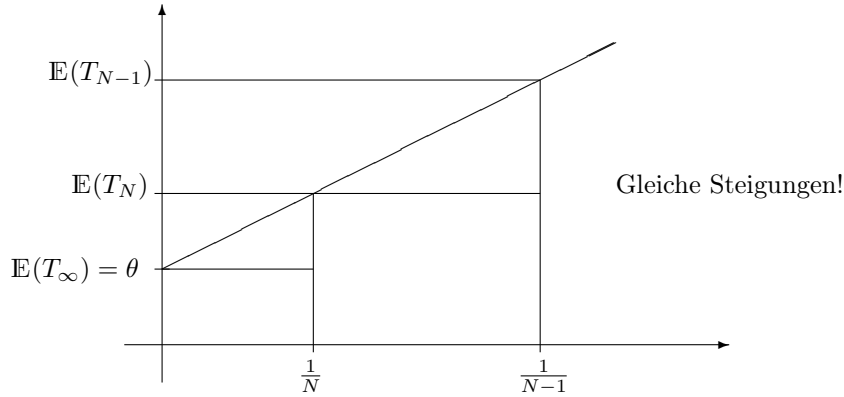


Abbildung 1: Interpretation des Jackknife als Extrapolation

Häufig hat man $\text{Bias}(T_{\text{Bias}}) \leq \text{Bias}(T)$. Allerdings ist ein Varianzanstieg möglich, der den Gewinn an Bias übersteigt (Bias-Varianz-Dilemma). Mit Jackknife und Bootstrap existieren zwei Verfahren, um den Bias einer beliebigen Zufallsvariablen (bei den hier betrachteten Quantilschätzer sogar konsistent) zu schätzen.

2.1 Jackknife-Biasschätzung

Nimmt man an, dass T_N asymptotisch erwartungstreu und die Abbildung $s : N^{-1} \mapsto \mathbb{E}(T_N)$ für große N annähernd linear ist, so kann auf den Wert $\theta = \mathbb{E}(T_\infty)$ mittels einer Geraden durch die Punkte

$$(N^{-1}, \mathbb{E}(T_N)), ((N-1)^{-1}, \mathbb{E}(T_{N-1}))$$

extrapoliert werden:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}(T_{N-1}) - \mathbb{E}(T_N)}{\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}} &= \frac{\mathbb{E}(T_N) - \mathbb{E}(T_\infty)}{\frac{1}{N} - \frac{1}{\infty}} \\ \Rightarrow \mathbb{E}(T_\infty) &= N\mathbb{E}(T_N) - (N-1)\mathbb{E}(T_{N-1}) \\ \Rightarrow \text{Bias}(T_N) &= (N-1)(\mathbb{E}(T_{N-1}) - \mathbb{E}(T_N)) \end{aligned}$$

Da die Erwartungswerte unbekannt sind, ersetzt Quenouille sie durch Beobachtungen (siehe etwa [1]), und gelangt so zum Biasschätzer:

$$\widehat{\text{Bias}}_{\text{Jack}} = (N-1) \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_{N-1,i} - T_N \right), \quad (1)$$

wobei $T_{N-1,i}$ aus der Stichprobe $\{X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_N\}$ berechnet wird. Hieraus resultiert der biaskorrigierte Schätzer:

$$T_{\text{Jack}} = T_N - \widehat{\text{Bias}}_{\text{Jack}}$$

2.2 Bootstrap-Biasschätzung

Die Bootstrap-Methode sieht vor, den Bias $\text{Bias}_F(T_N) = \mathbb{E}_F(T_N) - \theta$ durch eine Substitution $F \mapsto F^*$ zu schätzen, wobei F^* eine bekannte, aus den Daten X_1, \dots, X_N berechenbare Verteilung ist. Liegt ein parametrisches Modell vor, so geschieht dies in etwa durch $\hat{F} = F_{\hat{\theta}_{\text{ML}}}$. Kennzeichnet man Größen bzgl. F^* wie üblich durch $*$, so lässt sich schreiben:

$$\widehat{\text{Bias}}_{\text{Boot}} = \mathbb{E}_*(T_N^*) - \theta^*$$

und man definiert analog:

$$T_{\text{Boot}} = T_N - \widehat{\text{Bias}}_{\text{Boot}}$$

Sind X_1^*, \dots, X_N^* uiv Pseudodaten mit Verteilung F^* , so bezeichnet θ^* den entsprechenden Wert des Parameters θ bzgl. F^* . T_N^* wird dabei aus den Daten X_1^*, \dots, X_N^* berechnet. Liegt ein parametrisches Verteilungsmodell vor, so kann z.B. für das parametrische Bootstrap $F^* = F_{\hat{\theta}_{\text{ML}}}$, $\theta^* = \hat{\theta}_{\text{ML}}$ gewählt werden.

Für Weibullverteilungen ist es nicht möglich auf einfachem Weg explizite Formeln für $\widehat{\text{Bias}}_{\text{Boot}}$ zu finden, weshalb hierzu eine Monte-Carlo-Simulation verwendet wird (Da die Verteilung der Daten X_1^*, \dots, X_N^* bekannt ist, ist dies möglich).

3 Mse-Korrektur

3.1 Herleitung

Allen Bias-Schätzern ist gemeinsam, dass sie versuchen den mittleren quadratischen Fehler $\text{mse}(T_N) = \mathbb{E}(T_N - \theta)^2 = (\text{Bias}(T_N))^2 + \text{Var}(T_N)$ zu reduzieren, indem sie den Bias möglichst entfernen. In einem theoretischen Idealfall ist der Bias b bekannt, und man verwendet die Korrektur $T_{\text{Bias}} = T - b$. In diesem Fall hat man die Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} \text{Bias}(T_{\text{Bias}}) &= 0 \\ \text{Var}(T_{\text{Bias}}) &= \text{Var}(T) \end{aligned} \tag{2}$$

Um einen Einfluss auf die Varianz auszuüben, muss mit einer multiplikativen Korrektur kT gearbeitet werden. Wählt man k zunächst derart, dass wieder der Bias entfernt wird, so muss gelten:

$$\text{Bias}(kT) = k\mathbb{E}(T) - \theta \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow k = \frac{\theta}{\mathbb{E}(T)} = \frac{1}{1 + \rho}$$

wobei $\rho = \frac{\mathbb{E}(T) - \theta}{\theta}$ der relative Fehler ist. Liegt ein positiver Bias vor, so ist $k < 1$, womit die Varianz ebenfalls reduziert wird. Man kann nun auch direkt versuchen, k derart zu wählen, dass $\text{mse}(kT)$ minimal wird:

$$\text{mse}(kT) = (k\mathbb{E}(T) - \theta)^2 + k^2\text{Var}(T) \tag{3}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dk}\text{mse}(kT) = 2(k\mathbb{E}(T) - \theta) \cdot \mathbb{E}(T) + 2k\text{Var}(T) \stackrel{!}{=} 0 \tag{4}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\theta \cdot \mathbb{E}(T)}{(\mathbb{E}(T))^2 + \text{Var}(T)} = \frac{1}{1 + \rho + \frac{\text{Var}(T)}{\theta \cdot \mathbb{E}(T)}}$$

Wegen

$$\frac{d^2}{dk^2} \text{mse}(kT) = 2(\mathbb{E}(T))^2 + (\text{Var}(T))^2 > 0$$

liegt mit (5) auch wirklich ein Minimum vor.

Für einen Überschätzer (positiver Bias) wird man also einen schlechteren Bias im Vergleich zur Biaskorrektur, d.h. $|\text{Bias}(T_{\text{mse}})| > |\text{Bias}(T_{\text{Jack}})|$ bzw. $|\text{Bias}(T_{\text{mse}})| > |\text{Bias}(T_{\text{Boot}})|$ erwarten, jedoch zu Gunsten einer geringeren Varianz. Für Unterschätzer (negativer Bias) wird hingegen Bias und Varianz (im Vergleich zu biaskorrigierten Schätzern) verschlechtert, jedoch in verschiedenem Maße so dass insgesamt ein geringerer mse resultiert.

Um den unbekanntem Faktor k zu schätzen, muss man Schätzwerte für $\mathbb{E}(T)$, θ und $\text{Var}(T)$ kennen. Schreibt man $\theta = \mathbb{E}(T) - \text{Bias}(T)$ so müssen alternativ Schätzwerte für $\mathbb{E}(T)$, $\text{Bias}(T)$ und $\text{Var}(T)$ gefunden werden. Hier werden zwei Schätzverfahren betrachtet:

- Jackknife

Wähle für Bias und Varianz die entsprechenden Jackknife-Schätzer und ersetze $\mathbb{E}(T)$ durch T :

$$T_{\text{mse}} = \hat{k}T = \frac{T}{1 + \frac{\hat{b}}{T-\hat{b}} + \frac{\hat{V}}{T(T-\hat{b})}} = \frac{T^2}{T^2 + \hat{V}}(T - \hat{b})$$

Neben dem hierzu notwendigen Jackknife-Biasschätzer für \hat{b} aus Gleichung (1) existiert eine Variante nach Tukey (siehe [1]), welche ebenfalls die Varianz schätzt:

$$\hat{V} = \widehat{\text{Var}}_{\text{Jack}} = \frac{N-1}{N} \sum_{i=1}^N \left(T_{N-1,i} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_{N-1,i} \right)^2$$

- (parametrisches) Bootstrap

Die Schätzwerte für $\mathbb{E}(T)$, $\text{Bias}(T)$ und $\text{Var}(T)$ werden aus 1.000 Bootstrap-Stichproben (zur geschätzten Weibull- bzw. Lognormalverteilung) ermittelt.

3.2 Anwendungsbereiche

Nicht jeder verzerrte Schätzer kann sinnvoll mse-korrigiert werden. In diesem Abschnitt soll eine einfache Faustregel gefunden werden, wann sich der Einsatz dieser Korrekturform lohnt. Es wird ein Überschätzer (positiver Bias) betrachtet:

Aus Gleichung (4) kann entnommen werden, dass der mittlere quadratische Fehler quadratisch von einem deterministischen Faktor abhängt. In Kombination mit Abbildung 2 entnimmt man, dass ein Überschätzer genau dann sinnvoll korrigiert wird, falls der verwendete deterministische Faktor k im Intervall $[2k_{\min} - 1, 1]$ liegt. Wird der optimale Korrekturfaktor k_{\min} geschätzt, so kann der Schätzwert außerhalb dieses Intervalls liegen. Ist das Intervall möglichst lang, d.h. $2(1 - k_{\min})$ groß was für $k \approx 0$ geschieht, so ist ein größerer Wert $\text{Var}(\hat{k})$ nötig, um einen ungünstigen Schätzwert zu erhalten. Weiterhin ist für $k_{\min} < \frac{1}{2}$ der Wert $2k_{\min} - 1$ negativ, so dass \hat{k} die linke Intervallgrenze nicht

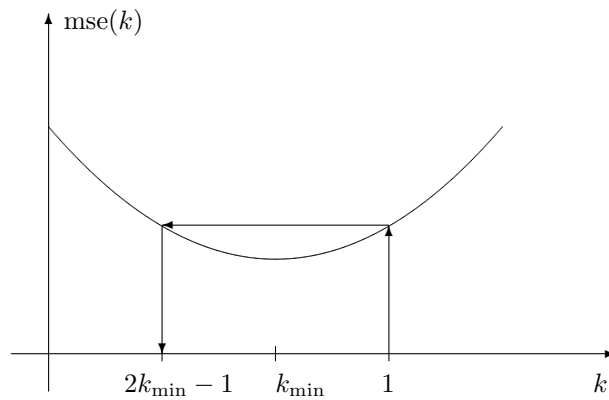


Abbildung 2: Mittlerer quadratischer Fehler als Funktion eines deterministischen Korrekturfaktors

mehr unterschreiten kann.

Auch wenn diese Argumentation nur für deterministische Korrekturfaktoren gültig ist, so bleibt als Faustregel, dass möglichst $k_{\min} < \frac{1}{2}$ gelten sollte. Sind Erwartungswert und Varianz des unkorrigierten Schätzers bekannt (z.B. aus Monte-Carlo-Simulationen), so kann k_{\min} berechnet, und eine Abschätzung ob die mse-Korrektur sinnvoll ist vorgenommen werden. Für Unterschätzer dreht sich das Intervall: $[1, 2k_{\min} - 1]$ und k_{\min} sollte für ein breites Intervall möglichst größer 1 sein.

In den meisten praktischen Beispielen wird $\theta \cdot \mathbb{E}(T) > 0$, womit bei einem Überschätzer durch $\rho > 0$ auch wirklich $k_{\min} < 1$, während für Unterschätzer nicht zwangsläufig $k_{\min} > 1$ gelten muss.

4 Simulationsstudien: Mse-Korrektur der Parameterschätzer

4.1 Weibull-Parameter

Mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulationen soll ermittelt werden inwiefern sich die mse-korrigierten Schätzer von den gewöhnlichen Bias-korrigierten und unkorrigierten ML-Schätzern unterscheiden. Dabei werden 1.000 simulierte Stichproben des Umfangs jeweils 8 aus einer $\mathcal{W}(200.000; 2)$ -Verteilung erzeugt. Für die Bootstrap-Korrekturen sind für jede einzelne Stichprobe 500 Pseudostichproben generiert worden.

- Skalenparameter $\beta = 200.000$:

	$\hat{\beta}_{ML}$	$\hat{\beta}_{Bias}$		$\hat{\beta}_{mse}$	
		Jack	Boot	Jack	Boot
Bias	-1.552	82	-195	-6.475	-5.842
Stdabw	36.588	37.109	37.073	37.237	35.915
Mse	$1,341 \cdot 10^9$	$1,377 \cdot 10^9$	$1,374 \cdot 10^9$	$1,428 \cdot 10^9$	$1,324 \cdot 10^9$

$k_{min} = 0,97 \approx 1 \Rightarrow$ Laut Überschätzer-Faustregel schlecht mse-korrigierbar.

- Formparameter $\gamma = 2$:

	$\hat{\gamma}_{ML}$	$\hat{\gamma}_{Bias}$		$\hat{\gamma}_{mse}$	
		Jack	Boot	Jack	Boot
Bias	0,4896	-0,1699	-0,0689	-0,3926	-0,2440
Stdabw.	0,9195	0,8468	0,7150	0,7712	0,6424
Mse	1,0853	0,7460	0,5160	0,7489	0,4723

$k_{min} = 0,70 \Rightarrow$ Laut Überschätzer-Faustregel bedingt ($> 0,5$) sinnvoll mse-korrigierbar.

In diesem Zahlenbeispiel für die Verteilungsparameter sollte für den Formparameter also die mse-Korrektur basierend auf Bootstrap-Schätzern für Bias und Varianz verwendet werden, während der Skalenparameter weiterhin per ML-Methode geschätzt werden sollte.

4.2 Lognormal-Parameter

Während $\mathbb{E}(\hat{\mu}_{\text{ML}}) = \mu$ ist $\mathbb{E}(\hat{\sigma}_{\text{ML}}^2) = \frac{N-1}{N}\sigma^2$, was also leicht deterministisch mit dem Faktor $\frac{N}{N-1}$ zu korrigieren wäre. Versucht man sie dennoch empirisch zu korrigieren so erhält man ($\mathcal{LN}(11; 0, 2)$ -Verteilung mit 8 Daten in 1.000 Simulationen):

- Skalenparameter $\mu = 11$:

	$\hat{\mu}_{\text{ML}}$	$\hat{\mu}_{\text{Bias}}$		$\hat{\mu}_{\text{fk}}$	
		Jack	Boot	Jack	Boot
Bias	-0,0009	-0,0008	-0,0010	-0,0031	-0,0037
Stdabw	0,1527	0,1527	0,1530	0,1527	0,15270
Mse	0,0233	0,0233	0,0234	0,0233	0,0233

$k_{\min} = 0,99 \approx 1 \Rightarrow$ Laut Unterschätzer-Faustregel nicht sinnvoll mse-korrigierbar.

- Formparameter $\sigma^2 = 0, 2$:

	$\hat{\sigma}_{\text{ML}}^2$	$\hat{\sigma}_{\text{Bias}}^2$		$\hat{\sigma}_{\text{fk}}^2$	
		Jack	Boot	Jack	Boot
Bias	-0,0259	-0,0010	-0,0043	-0,0381	-0,0395
Stdabw	0,0911	0,1041	0,1024	0,0863	0,0842
Mse	0,0090	0,0108	0,0105	0,0089	0,0086

$k_{\min} = 0,28 < 1 \Rightarrow$ Laut Unterschätzer-Faustregel nicht sinnvoll mse-korrigierbar.

Im Fall der erwartungstreuen Parameterschätzer ist eine Biaskorrektur (wie erwartet) nicht notwendig und eine Fehlerkorrektur nicht wirkungsvoll.

5 Biasreduzierung von Quantilschätzern

5.1 Notwendigkeit der Korrekturen

Obwohl man die Parameter einer Lognormalverteilung erwartungstreu schätzen kann (sofern $\frac{N}{N-1}\hat{\sigma}_{\text{ML}}^2$ verwendet wird), wird ein Quantilschätzer bei $p < 0,5$ einen positiven Bias aufweisen:

$$\ln \hat{x}_p = \hat{\mu} + \sqrt{\hat{\sigma}^2} \mathcal{N}(0; 1)^-(p) \quad (5)$$

$$\Rightarrow \text{Bias}(\ln \hat{x}_p) = \underbrace{\left(\mathbb{E}(\sqrt{\hat{\sigma}^2}) - \sigma\right)}_{<0 \text{ (Jensen)}} \cdot \underbrace{\mathcal{N}(0; 1)^-(p)}_{<0} > 0 \quad (6)$$

Verwendet man nicht erwartungstreu Schätzer für die Verteilungsparameter (was im Weibull-Fall trotz Korrektur geschieht), so kann ein Bias des Quantilschätzers sowieso nicht ausgeschlossen werden. Sowohl für Lognormal- als auch für Weibullverteilungen kann die Verwendung einer Bias- bzw. mse-Korrektur also angebracht sein.

5.2 Weibull-Quantile

Aus 8 Daten einer $W(200.000; 2)$ -Verteilung soll auf das 1%-Quantil (wahrer Wert: 20.050,27) geschlossen werden. In 1.000 Monte-Carlo-Simulationen ergibt sich:

	$\hat{t}_{0,01,ML}$	$\hat{t}_{0,01,Bias}$		$\hat{t}_{0,01,fk}$	
		Jack	Boot	Jack	Boot
Bias	11.311	-781	693	2.720	-4.694
Stdabw.	20.046	19.658	18.953	19.080	17.425
Mse	$529 \cdot 10^6$	$387 \cdot 10^6$	$359 \cdot 10^6$	$371 \cdot 10^6$	$325 \cdot 10^6$

$k_{\min} = 0,45 < 1 \Rightarrow$ Laut Überschätzer-Faustregel sinnvoll mse-korrigierbar. Auch hier reduzieren die Biaskorrekturen in beiden Fällen den Bias deutlich. Die mse-Korrekturen reduzieren den Bias weniger gut, verringern dafür die Varianz stärker und resultieren in einem besseren mse.

5.3 Lognormal-Quantile

Nun werden jeweils 8 Daten aus einer $\mathcal{LN}(11; 0, 2)$ -Verteilung erzeugt, und das wahre 1%-Quantil 21.154,87 wird geschätzt:

	$\hat{t}_{0,01,ML}$	$\hat{t}_{0,01,Bias}$		$\hat{t}_{0,01,fk}$	
		Jack	Boot	Jack	Boot
Bias	2.903	-898	-234	481	-950
Stdabw.	6.710	7.141	6.808	7.278	7.423
Mse	$53,46 \cdot 10^6$	$51,80 \cdot 10^6$	$46,46 \cdot 10^6$	$53,21 \cdot 10^6$	$56,01 \cdot 10^6$

$k_{\min} = 0,81 \Rightarrow$ Laut Überschätzer-Faustregel bedingt ($> 0,5$) sinnvoll mse-korrigierbar. Nur die Biaskorrekturen zeigen eine geringe Wirkung, während die mse-Korrekturen keine Vorteile bzgl. des mse zeigen.

5.4 Modellmisspezifikationen

5.4.1 Weibull-Daten, Lognormal-Annahme

Bei der Anwendung der mse-Korrektur auf Quantilschätzer taucht die Möglichkeit einer schlechteren Leistung auf Grund einer falschen Modellwahl auf. Die Monte-Carlo-Simulationen werden wiederholt, diesmal jedoch mit der Annahme, es läge eine Lognormal-Verteilung vor:

	$\hat{t}_{0,01,ML}$	$\hat{t}_{0,01,Bias}$		$\hat{t}_{0,01,fk}$	
		Jack	Boot	Jack	Boot
Bias	28.082	14.395	19.563	19.001	14.656
Stdabw.	26.263	29,874	25.459	27.725	23.811
Mse	$1.478 \cdot 10^6$	$1.099 \cdot 10^6$	$1.030 \cdot 10^6$	$1.129 \cdot 10^6$	$781 \cdot 10^6$

$k_{\min} = 0,32 \Rightarrow$ Laut Überschätzer-Faustregel sinnvoll mse-korrigierbar.

5.4.2 Lognormal-Daten, Weibull-Annahme

Umgekehrt werden die Daten nun aus obiger Lognormal-Verteilung erzeugt, zur Auswertung wird jedoch eine Weibullverteilung verwendet:

	$\hat{t}_{0,01,ML}$	$\hat{t}_{0,01,Bias}$		$\hat{t}_{0,01,fk}$	
		Jack	Boot	Jack	Boot
Bias	-6.283	-11.335	-10.296	-9.117	-11.145
Stdabw.	6.984	8.127	70.13	6.983	6.554
Mse	$88 \cdot 10^6$	$194 \cdot 10^6$	$155 \cdot 10^6$	$131 \cdot 10^6$	$167 \cdot 10^6$

$k_{\min} = 1,165 \Rightarrow$ Laut Unterschätzer-Faustregel bedingt (nah bei 1) sinnvoll mse-korrigierbar.

Fazit Nimmt man eine Lognormalverteilung an, so haben höchstens die Bias-korrekturen einen Vorteil bzgl. mse gegenüber den ML-Schätzern. Dieser Vorteil ist auch noch vorhanden, falls die Lognormal-Annahme falsch ist, und Weibull-Daten vorliegen. Die Weibull-Quantile lassen sich sehr gut mit der Bootstrap-mse-Korrektur verbessern, jedoch nur bei korrekter Modellwahl. Nimmt man allerdings fälschlicherweise an, dass die Daten Weibull-verteilt sind, dann führen sämtliche Korrekturmethode zu einer deutlichen Verschlechterung.

6 Quantilschätzer aus korrigierten Verteilungsparametern

Statt die Quantilschätzer selbst zu korrigieren, soll versucht werden bei Weibull-Verteilungen nur den Formparameter zu korrigieren, um den Quantilschätzer anschließend wie gewohnt aus den Parameterschätzern zu berechnen. Hierzu wird für den Formparameter die mse-Korrektur mittels Bootstraps gewählt.

6.1 Korrekte Modellwahl

1.000 Simulationen von 8 Daten aus einer $\mathcal{W}(200.000; 2)$ -Verteilung zur Berechnung des 1%-Quantils (wahrer Wert: 20.050,27) unter einer Weibull-Annahme:

	ML	
	$\hat{t}_{0,001}(\hat{\beta}_{ML}, \hat{\gamma}_{ML})$	$\hat{t}_{0,001}(\hat{\beta}_{ML}, \hat{\gamma}_{fk})$
Bias	11.311	-6.820
Stdabw	20.046	12.421
Mse	$529 \cdot 10^6$	$200 \cdot 10^6$

(Für Histogramme der simulierten Quantilschätzer siehe Seite 15)

6.2 Falsche Modellwahl

1.000 Simulationen von 8 Daten aus einer $\mathcal{LN}(11; 0, 2)$ -Verteilung zur Berechnung des 1%-Quantils (wahrer Wert: 21.154,87) unter einer Weibull-Annahme:

	ML	
	$\hat{t}_{0,001}(\hat{\beta}_{\text{ML}}, \hat{\gamma}_{\text{ML}})$	$\hat{t}_{0,001}(\hat{\beta}_{\text{ML}}, \hat{\gamma}_{\text{fk}})$
Bias	-6.283	-14.117
Stdabw	6.984	5.181
Mse	$88 \cdot 10^6$	$226 \cdot 10^6$

Fazit Weibull-Quantile lassen sich am effektivsten in ihrem mse korrigieren, falls sie aus mse-korrigierten Formparametern berechnet werden. Wie auch schon beim Formparameter selbst konnte eine mse-Reduzierung um ca 50% erreicht werden. Allerdings gilt diese Eigenschaft nur, falls das Modell korrekt gewählt wurde, da sonst die ML-Schätzer wieder bessere Eigenschaften zeigen. Im Folgenden werden für Quantilschätzer aus Weibull-Daten nur noch Korrekturen verwendet, die nur mit korrigiertem Formparameter arbeiten, nicht jedoch den Quantilschätzer selbst korrigieren. Da die mse-Korrektur hier nur für Weibullverteilungen sinnvolle Verbesserungen anbot, wird die Methode zur Intervallschätzung nur noch an Weibullverteilungen getestet.

7 Intervallschätzer für Quantile

7.1 Übersicht: Typische Verfahren

Die Verifikation sicherheitsrelevanter Bauteile arbeitet für gewöhnlich nicht mit Punktschätzern, sondern berechnet linksseitige Konfidenzintervalle für die Quantile. Für die Berechnung dieser Intervalle stehen Delta-, empirische Likelihood- und Bootstrap-Methoden zur Verfügung¹. Die notwendigen Glattheitsbedingungen an die Zufallsvariablen werden als gültig angenommen.

1. Delta-Methoden

Gilt für eine Zufallsvariable $X_n \in \mathbb{R}^p$ sowie $a_n \in \mathbb{R}$:

$$a_n(X_n - \mu) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}_p(0; (\delta_{ij}))$$

so gilt für eine stetige, in μ differenzierbare reellwertige Abbildung g :

$$a_n(g(X_n) - g(\mu)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0; \|\nabla g(\mu)\|^2)$$

Wählt man X_n als Parameterschätzer und $g(\theta) = F_\theta^-(p)$, so wird obige Aussage verwendet um die asymptotische Normalität des Quantilschätzers zu erhalten, woraus in Folge Konfidenzintervalle für den Quantilschätzer konstruiert werden können.

2. Empirischer Likelihood

Die Zufallsvariable

$$W(\theta_0) = -2 \left(l(\theta_0 | \underline{x}) - l(\hat{\theta} | \underline{x}) \right)$$

¹Siehe auch [3]

folgt asymptotisch einer χ_r^2 -Verteilung, falls $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^r$. Hieraus ergibt sich ein Konfidenzintervall der Form:

$$\{\theta_0 \in \Theta \mid W(\theta_0) < c\} \quad (7)$$

3. Bootstrap-Methoden

- Bootstrap-Quantil-Methode (BQM)

Betrachte die parametrische Bootstrap-Zufallsvariable T^* . Ein Intervall I mit $\mathbb{P}_*(T^* \in I)$ kann entweder direkt aus der Kenntnis von $G_* = \text{Vert}(T^*)$ analytisch berechnet oder durch Monte-Carlo-Simulation numerisch bestimmt werden. Im Fall einseitiger $(1 - \alpha)$ -Intervalle lässt sich also schreiben:

$$I = [G_*^-(\alpha), \infty) \quad (8)$$

Anschließend wird die Approximation $\mathbb{P}(T \in I) \approx 1 - \alpha$ verwendet.

- t-Bootstrap (tB)

Die Approximation $\mathbb{P}(T \in I) \approx 1 - \alpha$ gilt umso genauer, je „näher“ G_* in der Verteilungsklasse bei G liegt. Um die Unterschiede zwischen wahrer und Bootstrap-Verteilung zu minimieren, werden die Zufallsvariablen studentisiert: Sei θ der wahre Wert der durch T geschätzt werden soll und $\hat{\sigma}^2 = \widehat{\text{Var}}(T)$, so wird die BQM für die Zufallsvariable:

$$T' = \frac{T - \theta}{\hat{\sigma}} \quad (9)$$

wiederholt. Die hierbei auftauchende Varianzschätzung $\hat{\sigma}^*$ kann durch Jackknife oder Bootstrap geschehen. Im letzten Fall werden zu jeder Bootstrap-Stichprobe erneut Bootstrap-Stichproben errechnet (doppelte Bootstraps).

7.2 Betrachtete Verfahren

Ein Qualitätskriterium für die Intervallschätzer ist die empirische Konfidenz („Abdeckung“), d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass das wahre Quantil im Konfidenzintervall enthalten ist. Exakte Intervallschätzer zeichnen sich dadurch aus, dass die empirische Konfidenz mit der (vorgegebenen/nominellen) Konfidenz übereinstimmt. Die hierzu notwendigen Berechnungen sind sehr zeitaufwändig, da etwa für die tB-Methode eine Monte-Carlo-Simulationsschleife mit jeweils zwei iterierten Bootstrap-Schleifen gestartet werden muss. Aus diesem Grund werden im folgenden Abschnitt nur Verfahren betrachtet, die auf BQM basieren. Betrachtet wird der Quantilschätzer aus ML-Parametern sowie aus korrigierten² ML-Parametern. Aus diversen Simulationsstudien ist bekannt, dass für geringe Stichprobenumfänge die Bootstrap-Methoden meist die beste empirische Signifikanz aufweisen (siehe etwa [3] bei symmetrischen Intervallen für den Mittelwert oder [2] bei symmetrischen Intervallen für Quantilschätzer). Es werden daher nur Varianten der Bootstrap-Methoden verwendet.

Um die BQM in allgemeinen Situationen zu verbessern, existieren biaskorrigierte Varianten (für eine Motivation siehe: [4, S. 133-144]):

²mittels Bootstraps

Biaskorrigierte BQM (bBQM) Setze $z_0 = \Phi^{-1}(G_*(T))$, wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist, (basierend auf der häufigen (unerwünschten) Eigenschaft $P_*(T^* \leq T) \neq 0,5$), so wird das bias-korrigierte Bootstrap-Intervall definiert als:

$$I_b = [G_*^{-1}(\Phi(2z_0 - \Phi^{-1}(1 - \alpha))), \infty)$$

was im Spezialfall $z_0 = 0$ in die Form (8) übergeht.

Beschleunigt-biaskorrigierte BQM (bbBQM) Durch eine Erweiterung der bBQM wird zusätzlich die Schiefe der Verteilung durch eine Beschleunigungskonstante a berücksichtigt: Die Herleitung der Biaskorrektur nimmt an, dass die Varianz σ^2 von $s(\hat{\theta}) - s(\theta)$ nicht von θ abhängt. Nimmt man an, dass ein Zusammenhang $\sigma = 1 + as(\theta)$ existiert, so schreibt sich das beschleunigt biaskorrigierte Intervall nach einiger Rechnung als:

$$I = \left[G_*^{-1} \left(\Phi \left(\frac{z_0 - \Phi^{-1}(1 - \alpha)}{1 - a(z_0 - \Phi^{-1}(1 - \alpha))} + z_0 \right) \right), \infty \right)$$

Im Spezialfall $a = 0$ ergibt sich die gewöhnliche bBQM. Die Schätzung von a ist in der Regel sehr schwierig (vor allem in Verbindung mit zensierten Daten), kann jedoch mit Hilfe des Jackknife oft hinreichend gut erledigt werden. Falls jedoch ein ML-Schätzer betrachtet wird, kann $\hat{a} = z_0$ gesetzt werden, siehe [4, S. 137]

8 Simulationsstudien

Aus 8 Daten einer $W(200.000; 2)$ -Verteilung werden in 200 Simulationsritten Intervallschätzer berechnet und geprüft ob das wahre 1%-Quantil 20.050,27 im linksseitigen 95%-Intervall enthalten ist. Hierzu wird die Bootstrap-Quantil-Methode unkorrigiert, biaskorrigiert und beschleunigt biaskorrigiert verwendet. Um möglichst viele Simulationen zur Berechnung der empirischen Signifikanz durchzuführen, wird die Anzahl der Bootstrap-Stichproben für die mse-Korrektur des Formparameters, sowie für die BQM auf 100 begrenzt. Hierdurch wird die Qualität der Schätzer beeinträchtigt, so dass man davon ausgehen kann, dass die Methoden für eine höhere Zahl von Bootstrap-Stichproben eine bessere Leistung zeigen sollten. Ebenso kann erwartet werden, dass die zeitaufwändigere t-Bootstrap-Methodik bessere Resultate zeigen sollte. Ebenso wird für die Berechnung der Bootstrap-Stichproben noch der Standard-ML-Parameterschätzer verwendet. In 200 MC-Simulationen findet man als empirische Signifikanzen:

Punktschätzer	Intervallschätzer		
	BQM	bBQM	bbBQM
$\hat{t}_{0,001}(\hat{\beta}_{ML}, \hat{\gamma}_{ML})$	76,0%	90,0%	91,5%
$\hat{t}_{0,001}(\hat{\beta}_{ML}, \hat{\gamma}_{Bias})$	91,0%	92,5%	70,0%
$\hat{t}_{0,001}(\hat{\beta}_{ML}, \hat{\gamma}_{fk})$	95,5%	97,5%	68,5%

Bestimmt man die Bootstrap-Stichproben mit Hilfe des mse-korrigierten Formparameters, so erhält man (200 MC-Simulationen):

Punktschätzer	Intervallschätzer		
	BQM	bBQM	bbBQM
$\hat{t}_{0,001}(\hat{\beta}_{ML}, \hat{\gamma}_{ML})$	74,0%	87,5%	76,5%
$\hat{t}_{0,001}(\hat{\beta}_{ML}, \hat{\gamma}_{fk})$	97,5%	100,0%	68,0%

Fazit Für sicherheitsrelevante Bauteile ist es angebracht, diejenigen Quantilschätzer vorzuziehen, welche mit ihrer empirischen Konfidenz die geforderte Konfidenz nicht unterschreiten. Während die bbBQM nur in Verbindung mit dem ML-Schätzer gut zu funktionieren scheint, ist die Verwendung einer mse-Korrektur in Verbindung mit der gewöhnlichen BQM am leistungsfähigsten. Weiterhin hat die Verwendung der korrigierten Parameterschätzer für die Bootstrap-Stichproben kaum positiven Einfluss auf die empirische Signifikanz. Gründe für die Unterschiede in der Wirksamkeit der beschleunigten Biaskorrektur zwischen ML- und fk-Schätzern können in den Verteilungen der Schätzer gesucht werden. In Abbildung 3 ist zu erkennen, dass der gewöhnliche ML-Schätzer bereits wesentlich näher an einer Normalverteilung liegt, als der Quantilschätzer aus fk-korrigierten Formparametern, womit die Grundannahme, die zur Definition von z_0 in der bBQM führt hier eher gerechtfertigt ist, während sich die deutlich schiefere³ Verteilung von $\hat{t}_{0,001}(\hat{\beta}_{ML}, \hat{\gamma}_{fk})$ für diese Approximation nicht anbietet. Wegen der um 60% geringeren Varianz des korrigierten Schätzers kann die gewöhnliche BQM aber dennoch gute Resultate erzielen.

9 Zusammenfassung

Welche Korrektur ist in welcher Situation angebracht?

- Parameterschätzer
 - **Weibullverteilung:** Skalenparameter: Maximum-Likelihood.
Formparameter: Bootstrap-mse-Korrektur.
 - **Lognormalverteilung:** Skalenparameter: Maximum-Likelihood.
Formparameter: Maximum-Likelihood $\cdot \frac{N}{N-1}$.
- Quantilschätzer
 - **Weibullverteilung:** Quantil aus ML-Skalen- und Bootstrap-mse-Formparameter. (Schlechterer mse unter Missspezifikation als der unkorrigierte Schätzer).
 - **Lognormalverteilung:** Bootstrap-Bias-Korrektur des Quantils (aus ML-Parametern). (Geringerer mse unter Missspezifikation als der unkorrigierte Schätzer).
- Intervallschätzer für Quantile
 - **Weibullverteilung:** Bootstrap-Stichproben aus den ML-Parameterschätzern, BQM bzgl. Quantil aus ML-Lageparameter und Bootstrap-mse-Formparameter.

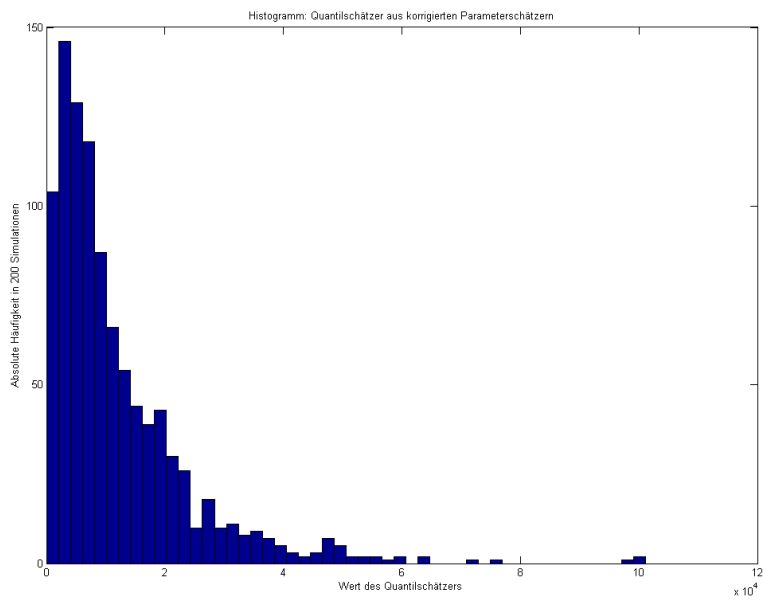
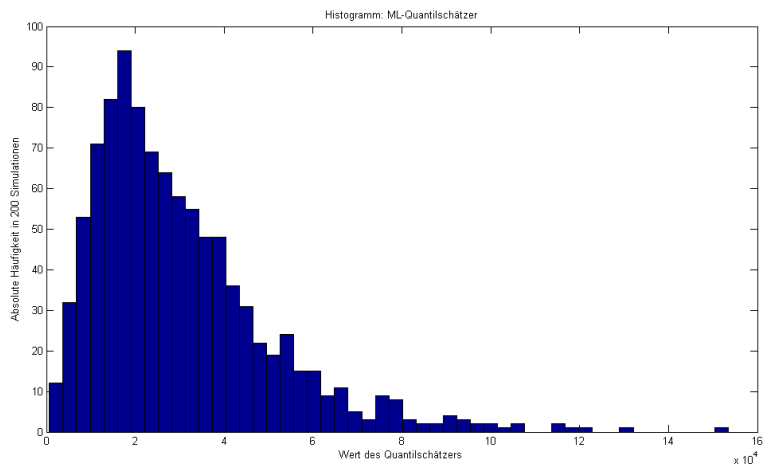


Abbildung 3: Histogramme zu den simulierten Quantilschätzern

Danksagung Die oben erläuterten neuen Schätzmethoden wurden im Rahmen eines Projektes des Fraunhofer ITWM für die Transporterentwicklung der DaimlerChrysler AG entwickelt. Wir möchten uns daher bei Dr. Stefan Weihe, Dr. Malte Hahn und Herrn Hans-Peter Tabarelli bedanken, welche die Entwicklung neuer Methoden motiviert haben.

Literatur

- [1] „*The Jackknife, the Bootstrap and other resampling Plans*“, Bradley Efron
Regional conference series in applied mathematics, 1982.
- [2] „*Biasreduzierung für Quantilschätzer in der Betriebsfestigkeit*“, Sascha Feth
Diplomarbeit am Fachbereich Mathematik der TU-Kaiserslautern.
<http://www.itwm.de/mdf/documents/pdf/Biasreduzierung.pdf>
- [3] „*Empirical likelihood and small Samples*“, Art Owen
Computing science and statistics, 1992, Seiten 69-88.
- [4] „*The Jackknife and Bootstrap*“, Jun Shao, Dongsheng Tu
Springer-Verlag, 1996.
- [5] „*The generalized Jackknife Statistic*“, Gary Schucany
Marcel Dekker, inc., 1972.
- [6] „*Punkt- und Intervallschätzungen der Parameter von Weibull-Verteilungen bei zensierten Stichproben*“, Franz Gander
Dissertation, Freie Universität Berlin, 1996.
- [7] „*An Introduction to the Bootstrap*“, E. Efron, R. J. Tibshirani,
Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York

³Schiefe von 1,368 gegen 0,7047 bei $\hat{\ell}_{0,001}(\hat{\beta}_{ML}, \hat{\gamma}_{ML})$

Published reports of the Fraunhofer ITWM

The PDF-files of the following reports are available under:

www.itwm.fraunhofer.de/de/zentral__berichte/berichte

1. D. Hietel, K. Steiner, J. Struckmeier
A Finite - Volume Particle Method for Compressible Flows
(19 pages, 1998)
2. M. Feldmann, S. Seibold
Damage Diagnosis of Rotors: Application of Hilbert Transform and Multi-Hypothesis Testing
Keywords: Hilbert transform, damage diagnosis, Kalman filtering, non-linear dynamics
(23 pages, 1998)
3. Y. Ben-Haim, S. Seibold
Robust Reliability of Diagnostic Multi-Hypothesis Algorithms: Application to Rotating Machinery
Keywords: Robust reliability, convex models, Kalman filtering, multi-hypothesis diagnosis, rotating machinery, crack diagnosis
(24 pages, 1998)
4. F.-Th. Lentjes, N. Siedow
Three-dimensional Radiative Heat Transfer in Glass Cooling Processes
(23 pages, 1998)
5. A. Klar, R. Wegener
A hierarchy of models for multilane vehicular traffic
Part I: Modeling
(23 pages, 1998)

Part II: Numerical and stochastic investigations
(17 pages, 1998)
6. A. Klar, N. Siedow
Boundary Layers and Domain Decomposition for Radiative Heat Transfer and Diffusion Equations: Applications to Glass Manufacturing Processes
(24 pages, 1998)
7. I. Choquet
Heterogeneous catalysis modelling and numerical simulation in rarified gas flows
Part I: Coverage locally at equilibrium
(24 pages, 1998)
8. J. Ohser, B. Steinbach, C. Lang
Efficient Texture Analysis of Binary Images
(17 pages, 1998)
9. J. Orlik
Homogenization for viscoelasticity of the integral type with aging and shrinkage
(20 pages, 1998)
10. J. Mohring
Helmholtz Resonators with Large Aperture
(21 pages, 1998)
11. H. W. Hamacher, A. Schöbel
On Center Cycles in Grid Graphs
(15 pages, 1998)
12. H. W. Hamacher, K.-H. Küfer
Inverse radiation therapy planning - a multiple objective optimisation approach
(14 pages, 1999)
13. C. Lang, J. Ohser, R. Hilfer
On the Analysis of Spatial Binary Images
(20 pages, 1999)
14. M. Junk
On the Construction of Discrete Equilibrium Distributions for Kinetic Schemes
(24 pages, 1999)
15. M. Junk, S. V. Raghurame Rao
A new discrete velocity method for Navier-Stokes equations
(20 pages, 1999)
16. H. Neunzert
Mathematics as a Key to Key Technologies
(39 pages (4 PDF-Files), 1999)
17. J. Ohser, K. Sandau
Considerations about the Estimation of the Size Distribution in Wicksell's Corpuscle Problem
(18 pages, 1999)
18. E. Carrizosa, H. W. Hamacher, R. Klein, S. Nickel
Solving nonconvex planar location problems by finite dominating sets
Keywords: Continuous Location, Polyhedral Gauges, Finite Dominating Sets, Approximation, Sandwich Algorithm, Greedy Algorithm
(19 pages, 2000)
19. A. Becker
A Review on Image Distortion Measures
Keywords: Distortion measure, human visual system
(26 pages, 2000)
20. H. W. Hamacher, M. Labbé, S. Nickel, T. Sonneborn
Polyhedral Properties of the Uncapacitated Multiple Allocation Hub Location Problem
Keywords: integer programming, hub location, facility location, valid inequalities, facets, branch and cut
(21 pages, 2000)
21. H. W. Hamacher, A. Schöbel
Design of Zone Tariff Systems in Public Transportation
(30 pages, 2001)
22. D. Hietel, M. Junk, R. Keck, D. Teleaga
The Finite-Volume-Particle Method for Conservation Laws
(16 pages, 2001)
23. T. Bender, H. Hennes, J. Kalcsics, M. T. Melo, S. Nickel
Location Software and Interface with GIS and Supply Chain Management
Keywords: facility location, software development, geographical information systems, supply chain management
(48 pages, 2001)
24. H. W. Hamacher, S. A. Tjandra
Mathematical Modelling of Evacuation Problems: A State of Art
(44 pages, 2001)
25. J. Kuhnert, S. Tiwari
Grid free method for solving the Poisson equation
Keywords: Poisson equation, Least squares method, Grid free method
(19 pages, 2001)
26. T. Götz, H. Rave, D. Reinel-Bitzer, K. Steiner, H. Tiemeier
Simulation of the fiber spinning process
Keywords: Melt spinning, fiber model, Lattice Boltzmann, CFD
(19 pages, 2001)
27. A. Zemitis
On interaction of a liquid film with an obstacle
Keywords: impinging jets, liquid film, models, numerical solution, shape
(22 pages, 2001)
28. I. Ginzburg, K. Steiner
Free surface lattice-Boltzmann method to model the filling of expanding cavities by Bingham Fluids
Keywords: Generalized LBE, free-surface phenomena, interface boundary conditions, filling processes, Bingham viscoplastic model, regularized models
(22 pages, 2001)
29. H. Neunzert
»Denn nichts ist für den Menschen als Menschen etwas wert, was er nicht mit Leidenschaft tun kann«
Vortrag anlässlich der Verleihung des Akademiepreises des Landes Rheinland-Pfalz am 21.11.2001
Keywords: Lehre, Forschung, angewandte Mathematik, Mehrskalalanalyse, Strömungsmechanik
(18 pages, 2001)
30. J. Kuhnert, S. Tiwari
Finite pointset method based on the projection method for simulations of the incompressible Navier-Stokes equations
Keywords: Incompressible Navier-Stokes equations, Meshfree method, Projection method, Particle scheme, Least squares approximation
AMS subject classification: 76D05, 76M28
(25 pages, 2001)
31. R. Korn, M. Krekel
Optimal Portfolios with Fixed Consumption or Income Streams
Keywords: Portfolio optimisation, stochastic control, HJB equation, discretisation of control problems.
(23 pages, 2002)
32. M. Krekel
Optimal portfolios with a loan dependent credit spread
Keywords: Portfolio optimisation, stochastic control, HJB equation, credit spread, log utility, power utility, non-linear wealth dynamics
(25 pages, 2002)
33. J. Ohser, W. Nagel, K. Schladitz
The Euler number of discretized sets – on the choice of adjacency in homogeneous lattices
Keywords: image analysis, Euler number, neighborhood relationships, cuboidal lattice
(32 pages, 2002)

34. I. Ginzburg, K. Steiner
Lattice Boltzmann Model for Free-Surface flow and Its Application to Filling Process in Casting
Keywords: Lattice Boltzmann models; free-surface phenomena; interface boundary conditions; filling processes; injection molding; volume of fluid method; interface boundary conditions; advection-schemes; up-wind-schemes (54 pages, 2002)
35. M. Günther, A. Klar, T. Materne, R. Wegener
Multivalued fundamental diagrams and stop and go waves for continuum traffic equations
Keywords: traffic flow, macroscopic equations, kinetic derivation, multivalued fundamental diagram, stop and go waves, phase transitions (25 pages, 2002)
36. S. Feldmann, P. Lang, D. Prätzel-Wolters
Parameter influence on the zeros of network determinants
Keywords: Networks, Equicofactor matrix polynomials, Realization theory, Matrix perturbation theory (30 pages, 2002)
37. K. Koch, J. Ohser, K. Schladitz
Spectral theory for random closed sets and estimating the covariance via frequency space
Keywords: Random set, Bartlett spectrum, fast Fourier transform, power spectrum (28 pages, 2002)
38. D. d'Humières, I. Ginzburg
Multi-reflection boundary conditions for lattice Boltzmann models
Keywords: lattice Boltzmann equation, boundary conditions, bounce-back rule, Navier-Stokes equation (72 pages, 2002)
39. R. Korn
Elementare Finanzmathematik
Keywords: Finanzmathematik, Aktien, Optionen, Portfolio-Optimierung, Börse, Lehrerweiterbildung, Mathematikunterricht (98 pages, 2002)
40. J. Kallrath, M. C. Müller, S. Nickel
Batch Presorting Problems: Models and Complexity Results
Keywords: Complexity theory, Integer programming, Assignment, Logistics (19 pages, 2002)
41. J. Linn
On the frame-invariant description of the phase space of the Folgar-Tucker equation
Key words: fiber orientation, Folgar-Tucker equation, injection molding (5 pages, 2003)
42. T. Hanne, S. Nickel
A Multi-Objective Evolutionary Algorithm for Scheduling and Inspection Planning in Software Development Projects
Key words: multiple objective programming, project management and scheduling, software development, evolutionary algorithms, efficient set (29 pages, 2003)
43. T. Bortfeld, K.-H. Küfer, M. Monz, A. Scherrer, C. Thieke, H. Trinkaus
Intensity-Modulated Radiotherapy - A Large Scale Multi-Criteria Programming Problem
Keywords: multiple criteria optimization, representative systems of Pareto solutions, adaptive triangulation, clustering and disaggregation techniques, visualization of Pareto solutions, medical physics, external beam radiotherapy planning, intensity modulated radiotherapy (31 pages, 2003)
44. T. Halfmann, T. Wichmann
Overview of Symbolic Methods in Industrial Analog Circuit Design
Keywords: CAD, automated analog circuit design, symbolic analysis, computer algebra, behavioral modeling, system simulation, circuit sizing, macro modeling, differential-algebraic equations, index (17 pages, 2003)
45. S. E. Mikhailov, J. Orlik
Asymptotic Homogenisation in Strength and Fatigue Durability Analysis of Composites
Keywords: multiscale structures, asymptotic homogenization, strength, fatigue, singularity, non-local conditions (14 pages, 2003)
46. P. Domínguez-Marín, P. Hansen, N. Mladenović, S. Nickel
Heuristic Procedures for Solving the Discrete Ordered Median Problem
Keywords: genetic algorithms, variable neighborhood search, discrete facility location (31 pages, 2003)
47. N. Boland, P. Domínguez-Marín, S. Nickel, J. Puerto
Exact Procedures for Solving the Discrete Ordered Median Problem
Keywords: discrete location, Integer programming (41 pages, 2003)
48. S. Feldmann, P. Lang
Padé-like reduction of stable discrete linear systems preserving their stability
Keywords: Discrete linear systems, model reduction, stability, Hankel matrix, Stein equation (16 pages, 2003)
49. J. Kallrath, S. Nickel
A Polynomial Case of the Batch Presorting Problem
Keywords: batch presorting problem, online optimization, competitive analysis, polynomial algorithms, logistics (17 pages, 2003)
50. T. Hanne, H. L. Trinkaus
knowCube for MCDM – Visual and Interactive Support for Multicriteria Decision Making
Key words: Multicriteria decision making, knowledge management, decision support systems, visual interfaces, interactive navigation, real-life applications. (26 pages, 2003)
51. O. Iliev, V. Laptev
On Numerical Simulation of Flow Through Oil Filters
Keywords: oil filters, coupled flow in plain and porous media, Navier-Stokes, Brinkman, numerical simulation (8 pages, 2003)
52. W. Dörfler, O. Iliev, D. Stoyanov, D. Vassileva
On a Multigrid Adaptive Refinement Solver for Saturated Non-Newtonian Flow in Porous Media
Keywords: Nonlinear multigrid, adaptive refinement, Heston model, stochastic volatility, cliquet options (17 pages, 2003)
53. S. Kruse
On the Pricing of Forward Starting Options under Stochastic Volatility
Keywords: Option pricing, forward starting options, Heston model, stochastic volatility, cliquet options (11 pages, 2003)
54. O. Iliev, D. Stoyanov
Multigrid – adaptive local refinement solver for incompressible flows
Keywords: Navier-Stokes equations, incompressible flow, projection-type splitting, SIMPLE, multigrid methods, adaptive local refinement, lid-driven flow in a cavity (37 pages, 2003)
55. V. Starikovicius
The multiphase flow and heat transfer in porous media
Keywords: Two-phase flow in porous media, various formulations, global pressure, multiphase mixture model, numerical simulation (30 pages, 2003)
56. P. Lang, A. Sarishvili, A. Wirsén
Blocked neural networks for knowledge extraction in the software development process
Keywords: Blocked Neural Networks, Nonlinear Regression, Knowledge Extraction, Code Inspection (21 pages, 2003)
57. H. Knaf, P. Lang, S. Zeiser
Diagnosis aiding in Regulation Thermography using Fuzzy Logic
Keywords: fuzzy logic, knowledge representation, expert system (22 pages, 2003)
58. M. T. Melo, S. Nickel, F. Saldanha da Gama
Largescale models for dynamic multi-commodity capacitated facility location
Keywords: supply chain management, strategic planning, dynamic location, modeling (40 pages, 2003)
59. J. Orlik
Homogenization for contact problems with periodically rough surfaces
Keywords: asymptotic homogenization, contact problems (28 pages, 2004)
60. A. Scherrer, K.-H. Küfer, M. Monz, F. Alonso, T. Bortfeld
IMRT planning on adaptive volume structures – a significant advance of computational complexity
Keywords: Intensity-modulated radiation therapy (IMRT), inverse treatment planning, adaptive volume structures, hierarchical clustering, local refinement, adaptive clustering, convex programming, mesh generation, multi-grid methods (24 pages, 2004)

61. D. Kehrwald
Parallel lattice Boltzmann simulation of complex flows
Keywords: Lattice Boltzmann methods, parallel computing, microstructure simulation, virtual material design, pseudo-plastic fluids, liquid composite moulding (12 pages, 2004)
62. O. Iliev, J. Linn, M. Moog, D. Niedziela, V. Starikovicus
On the Performance of Certain Iterative Solvers for Coupled Systems Arising in Discretization of Non-Newtonian Flow Equations
Keywords: Performance of iterative solvers, Preconditioners, Non-Newtonian flow (17 pages, 2004)
63. R. Ciegis, O. Iliev, S. Rief, K. Steiner
On Modelling and Simulation of Different Regimes for Liquid Polymer Moulding
Keywords: Liquid Polymer Moulding, Modelling, Simulation, Infiltration, Front Propagation, non-Newtonian flow in porous media (43 pages, 2004)
64. T. Hanne, H. Neu
Simulating Human Resources in Software Development Processes
Keywords: Human resource modeling, software process, productivity, human factors, learning curve (14 pages, 2004)
65. O. Iliev, A. Mikelic, P. Popov
Fluid structure interaction problems in deformable porous media: Toward permeability of deformable porous media
Keywords: fluid-structure interaction, deformable porous media, upscaling, linear elasticity, stokes, finite elements (28 pages, 2004)
66. F. Gaspar, O. Iliev, F. Lisbona, A. Naumovich, P. Vabishchevich
On numerical solution of 1-D poroelasticity equations in a multilayered domain
Keywords: poroelasticity, multilayered material, finite volume discretization, MAC type grid (41 pages, 2004)
67. J. Ohser, K. Schladitz, K. Koch, M. Nöthe
Diffraction by image processing and its application in materials science
Keywords: porous microstructure, image analysis, random set, fast Fourier transform, power spectrum, Bartlett spectrum (13 pages, 2004)
68. H. Neunzert
Mathematics as a Technology: Challenges for the next 10 Years
Keywords: applied mathematics, technology, modelling, simulation, visualization, optimization, glass processing, spinning processes, fiber-fluid interaction, turbulence effects, topological optimization, multicriteria optimization, Uncertainty and Risk, financial mathematics, Malliavin calculus, Monte-Carlo methods, virtual material design, filtration, bio-informatics, system biology (29 pages, 2004)
69. R. Ewing, O. Iliev, R. Lazarov, A. Naumovich
On convergence of certain finite difference discretizations for 1D poroelasticity interface problems
Keywords: poroelasticity, multilayered material, finite volume discretizations, MAC type grid, error estimates (26 pages, 2004)
70. W. Dörfler, O. Iliev, D. Stoyanov, D. Vassileva
On Efficient Simulation of Non-Newtonian Flow in Saturated Porous Media with a Multigrid Adaptive Refinement Solver
Keywords: Nonlinear multigrid, adaptive refinement, non-Newtonian in porous media (25 pages, 2004)
71. J. Kalcsics, S. Nickel, M. Schröder
Towards a Unified Territory Design Approach – Applications, Algorithms and GIS Integration
Keywords: territory design, political districting, sales territory alignment, optimization algorithms, Geographical Information Systems (40 pages, 2005)
72. K. Schladitz, S. Peters, D. Reinel-Bitzer, A. Wiegmann, J. Ohser
Design of acoustic trim based on geometric modeling and flow simulation for non-woven
Keywords: random system of fibers, Poisson line process, flow resistivity, acoustic absorption, Lattice-Boltzmann method, non-woven (21 pages, 2005)
73. V. Rutka, A. Wiegmann
Explicit Jump Immersed Interface Method for virtual material design of the effective elastic moduli of composite materials
Keywords: virtual material design, explicit jump immersed interface method, effective elastic moduli, composite materials (22 pages, 2005)
74. T. Hanne
Eine Übersicht zum Scheduling von Baustellen
Keywords: Projektplanung, Scheduling, Bauplanung, Bauindustrie (32 pages, 2005)
75. J. Linn
The Folgar-Tucker Model as a Differential Algebraic System for Fiber Orientation Calculation
Keywords: fiber orientation, Folgar-Tucker model, invariants, algebraic constraints, phase space, trace stability (15 pages, 2005)
76. M. Speckert, K. Dreßler, H. Mauch, A. Lion, G. J. Wierda
Simulation eines neuartigen Prüfsystems für Achserprobungen durch MKS-Modellierung einschließlich Regelung
Keywords: virtual test rig, suspension testing, multi-body simulation, modeling hexapod test rig, optimization of test rig configuration (20 pages, 2005)
77. K.-H. Küfer, M. Monz, A. Scherrer, P. Süß, F. Alonso, A. S. A. Sultan, Th. Bortfeld, D. Craft, Chr. Thieke
Multicriteria optimization in intensity modulated radiotherapy planning
Keywords: multicriteria optimization, extreme solutions, real-time decision making, adaptive approximation schemes, clustering methods, IMRT planning, reverse engineering (51 pages, 2005)
78. S. Amstutz, H. Andrä
A new algorithm for topology optimization using a level-set method
Keywords: shape optimization, topology optimization, topological sensitivity, level-set (22 pages, 2005)
79. N. Ettrich
Generation of surface elevation models for urban drainage simulation
Keywords: Flooding, simulation, urban elevation models, laser scanning (22 pages, 2005)
80. H. Andrä, J. Linn, I. Matei, I. Shklyar, K. Steiner, E. Teichmann
OPTCAST – Entwicklung adäquater Strukturoptimierungsverfahren für Gießereien Technischer Bericht (KURZFASSUNG)
Keywords: Topologieoptimierung, Level-Set-Methode, Gießprozesssimulation, Gießtechnische Restriktionen, CAE-Kette zur Strukturoptimierung (77 pages, 2005)
81. N. Marheineke, R. Wegener
Fiber Dynamics in Turbulent Flows Part I: General Modeling Framework
Keywords: fiber-fluid interaction; Cosserat rod; turbulence modeling; Kolmogorov's energy spectrum; double-velocity correlations; differentiable Gaussian fields (20 pages, 2005)
Part II: Specific Taylor Drag
Keywords: flexible fibers; $k-\epsilon$ turbulence model; fiber-turbulence interaction scales; air drag; random Gaussian aerodynamic force; white noise; stochastic differential equations; ARMA process (18 pages, 2005)
82. C. H. Lampert, O. Wirjadi
An Optimal Non-Orthogonal Separation of the Anisotropic Gaussian Convolution Filter
Keywords: Anisotropic Gaussian filter, linear filtering, orientation space, nD image processing, separable filters (25 pages, 2005)
83. H. Andrä, D. Stoyanov
Error indicators in the parallel finite element solver for linear elasticity DDFEM
Keywords: linear elasticity, finite element method, hierarchical shape functions, domain decomposition, parallel implementation, a posteriori error estimates (21 pages, 2006)
84. M. Schröder, I. Solchenbach
Optimization of Transfer Quality in Regional Public Transit
Keywords: public transit, transfer quality, quadratic assignment problem (16 pages, 2006)
85. A. Naumovich, F. J. Gaspar
On a multigrid solver for the three-dimensional Biot poroelasticity system in multilayered domains
Keywords: poroelasticity, interface problem, multigrid, operator-dependent prolongation (11 pages, 2006)
86. S. Panda, R. Wegener, N. Marheineke
Slender Body Theory for the Dynamics of Curved Viscous Fibers
Keywords: curved viscous fibers; fluid dynamics; Navier-Stokes equations; free boundary value problem; asymptotic expansions; slender body theory (14 pages, 2006)
87. E. Ivanov, H. Andrä, A. Kudryavtsev
Domain Decomposition Approach for Automatic Parallel Generation of Tetrahedral Grids
Key words: Grid Generation, Unstructured Grid, Delaunay Triangulation, Parallel Programming, Domain Decomposition, Load Balancing (18 pages, 2006)

88. S. Tiwari, S. Antonov, D. Hietel, J. Kuhnert, R. Wegener
A Meshfree Method for Simulations of Interactions between Fluids and Flexible Structures
Key words: Meshfree Method, FPM, Fluid Structure Interaction, Sheet of Paper, Dynamical Coupling (16 pages, 2006)
89. R. Ciegis, O. Iliev, V. Starikovicius, K. Steiner
Numerical Algorithms for Solving Problems of Multiphase Flows in Porous Media
Keywords: nonlinear algorithms, finite-volume method, software tools, porous media, flows (16 pages, 2006)
90. D. Niedziela, O. Iliev, A. Latz
On 3D Numerical Simulations of Viscoelastic Fluids
Keywords: non-Newtonian fluids, anisotropic viscosity, integral constitutive equation (18 pages, 2006)
91. A. Winterfeld
Application of general semi-infinite Programming to Lapidary Cutting Problems
Keywords: large scale optimization, nonlinear programming, general semi-infinite optimization, design centering, clustering (26 pages, 2006)
92. J. Orlik, A. Ostrovska
Space-Time Finite Element Approximation and Numerical Solution of Hereditary Linear Viscoelasticity Problems
Keywords: hereditary viscoelasticity; kern approximation by interpolation; space-time finite element approximation, stability and a priori estimate (24 pages, 2006)
93. V. Rutka, A. Wiegmann, H. Andrä
EJIM for Calculation of effective Elastic Moduli in 3D Linear Elasticity
Keywords: Elliptic PDE, linear elasticity, irregular domain, finite differences, fast solvers, effective elastic moduli (24 pages, 2006)
94. A. Wiegmann, A. Zemitis
EJ-HEAT: A Fast Explicit Jump Harmonic Averaging Solver for the Effective Heat Conductivity of Composite Materials
Keywords: Stationary heat equation, effective thermal conductivity, explicit jump, discontinuous coefficients, virtual material design, microstructure simulation, EJ-HEAT (21 pages, 2006)
95. A. Naumovich
On a finite volume discretization of the three-dimensional Biot poroelasticity system in multilayered domains
Keywords: Biot poroelasticity system, interface problems, finite volume discretization, finite difference method. (21 pages, 2006)
96. M. Krekel, J. Wenzel
A unified approach to Credit Default Swaption and Constant Maturity Credit Default Swap valuation
Keywords: LIBOR market model, credit risk, Credit Default Swaption, Constant Maturity Credit Default Swap-method. (43 pages, 2006)
97. A. Dreyer
Interval Methods for Analog Circuits
Keywords: interval arithmetic, analog circuits, tolerance analysis, parametric linear systems, frequency response, symbolic analysis, CAD, computer algebra (36 pages, 2006)
98. N. Weigel, S. Weihe, G. Bitsch, K. Dreßler
Usage of Simulation for Design and Optimization of Testing
Keywords: Vehicle test rigs, MBS, control, hydraulics, testing philosophy (14 pages, 2006)
99. H. Lang, G. Bitsch, K. Dreßler, M. Speckert
Comparison of the solutions of the elastic and elastoplastic boundary value problems
Keywords: Elastic BVP, elastoplastic BVP, variational inequalities, rate-independency, hysteresis, linear kinematic hardening, stop- and play-operator (21 pages, 2006)
100. M. Speckert, K. Dreßler, H. Mauch
MBS Simulation of a hexapod based suspension test rig
Keywords: Test rig, MBS simulation, suspension, hydraulics, controlling, design optimization (12 pages, 2006)
101. S. Azizi Sultan, K.-H. Küfer
A dynamic algorithm for beam orientations in multicriteria IMRT planning
Keywords: radiotherapy planning, beam orientation optimization, dynamic approach, evolutionary algorithm, global optimization (14 pages, 2006)
102. T. Götz, A. Klar, N. Marheineke, R. Wegener
A Stochastic Model for the Fiber Lay-down Process in the Nonwoven Production
Keywords: fiber dynamics, stochastic Hamiltonian system, stochastic averaging (17 pages, 2006)
103. Ph. Süß, K.-H. Küfer
Balancing control and simplicity: a variable aggregation method in intensity modulated radiation therapy planning
Keywords: IMRT planning, variable aggregation, clustering methods (22 pages, 2006)
104. A. Beaudry, G. Laporte, T. Melo, S. Nickel
Dynamic transportation of patients in hospitals
Keywords: in-house hospital transportation, dial-a-ride, dynamic mode, tabu search (37 pages, 2006)
105. Th. Hanne
Applying multiobjective evolutionary algorithms in industrial projects
Keywords: multiobjective evolutionary algorithms, discrete optimization, continuous optimization, electronic circuit design, semi-infinite programming, scheduling (18 pages, 2006)
106. J. Franke, S. Halim
Wild bootstrap tests for comparing signals and images
Keywords: wild bootstrap test, texture classification, textile quality control, defect detection, kernel estimate, nonparametric regression (13 pages, 2007)
107. Z. Drezner, S. Nickel
Solving the ordered one-median problem in the plane
Keywords: planar location, global optimization, ordered median, big triangle small triangle method, bounds, numerical experiments (21 pages, 2007)
108. Th. Götz, A. Klar, A. Unterreiter, R. Wegener
Numerical evidence for the non-existing of solutions of the equations describing rotational fiber spinning
Keywords: rotational fiber spinning, viscous fibers, boundary value problem, existence of solutions (11 pages, 2007)
109. Ph. Süß, K.-H. Küfer
Smooth intensity maps and the Bortfeld-Boyer sequencer
Keywords: probabilistic analysis, intensity modulated radiotherapy treatment (IMRT), IMRT plan application, step-and-shoot sequencing (8 pages, 2007)
110. E. Ivanov, O. Gluchshenko, H. Andrä, A. Kudryavtsev
Parallel software tool for decomposing and meshing of 3d structures
Keywords: a-priori domain decomposition, unstructured grid, Delaunay mesh generation (14 pages, 2007)
111. O. Iliev, R. Lazarov, J. Willems
Numerical study of two-grid preconditioners for 1d elliptic problems with highly oscillating discontinuous coefficients
Keywords: two-grid algorithm, oscillating coefficients, preconditioner (20 pages, 2007)
112. L. Bonilla, T. Götz, A. Klar, N. Marheineke, R. Wegener
Hydrodynamic limit of the Fokker-Planck equation describing fiber lay-down processes
Keywords: stochastic differential equations, Fokker-Planck equation, asymptotic expansion, Ornstein-Uhlenbeck process (17 pages, 2007)
113. S. Rief
Modeling and simulation of the pressing section of a paper machine
Keywords: paper machine, computational fluid dynamics, porous media (41 pages, 2007)
114. R. Ciegis, O. Iliev, Z. Lakdawala
On parallel numerical algorithms for simulating industrial filtration problems
Keywords: Navier-Stokes-Brinkmann equations, finite volume discretization method, SIMPLE, parallel computing, data decomposition method (24 pages, 2007)
115. N. Marheineke, R. Wegener
Dynamics of curved viscous fibers with surface tension
Keywords: Slender body theory, curved viscous fibers with surface tension, free boundary value problem (25 pages, 2007)

116. S. Feth, J. Franke, M. Speckert

***Resampling-Methoden zur mse-Korrektur
und Anwendungen in der Betriebsfestigkeit***

*Keywords: Weibull, Bootstrap, Maximum-Likelihood,
Betriebsfestigkeit*

(16 pages, 2007)

Status quo: June 2007