

KOMMS Reports Nr. 5 (2016)

Reports zur Mathematischen Modellierung
in MINT-Projekten in der Schule



Mathematische Modellierung eines Segways mit Umsetzung in der Schule als interdisziplinäre Projektarbeit

Jean-Marie Lantau



Vorwort

Die Idee einen Segway im Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe zu modellieren entstand dadurch, dass Herr Prof. Dr. Tobias Damm mir die Anregung gab einen Seminarvortrag zu gestalten, inwiefern die Aufgabe des Fachpraktikums (Gestaltung eines sich stabilisierenden Lego-Mindstorms Segway) in der Schule umgesetzt werden kann. Ich danke ihnen zum einen für die Ideengebung, diese reizvolle Aufgabe in der Schule umzusetzen und zum anderen für die immer offene Tür bei mathematischen Fragen bezüglich der Vor- und Nachbereitung des interdisziplinären Projektes.

Weiterhin möchte ich mich bei Frau Susanne Scheffler-Hausbrandt, sowie Herrn Dr. Martin Bracke dafür bedanken, dass sie mir die Möglichkeit gegeben haben, dieses Projekt mit den Schülerinnen und Schülern des Kurses 12h am Heinrich-Heine Gymnasium in Kaiserslautern durchzuführen. Die enge und sehr gute Zusammenarbeit als Lehrerteam hat den Erfolg des Projektes erst möglich gemacht. Ich danke ihnen hierfür.

Diese Arbeit widme ich meiner Familie, auf deren Unterstützung ich mich während des gesamten Studiums stets verlassen konnte.

In dankbarer Erinnerung an Herrn Dr. Heribert Steinmetz, der mich geprägt hat, ein Lehramtsstudium auszuüben.

Inhalt

1. Einleitung	- 4 -
2. Mathematische Modellierung	- 7 -
2.1. Notwendige Definitionen und Sätze	- 7 -
2.1.1. Lineare Algebra	- 7 -
2.1.2. Gewöhnliche Differentialgleichungen	- 13 -
2.1.3. System- und Kontrolltheorie	- 18 -
2.2. Physikalische Kräftegleichungen	- 24 -
2.3. Aufstellen des Zustandsraumsystems	- 26 -
2.4. Regelung und Kontrollierbarkeit des Systems	- 28 -
2.5. Optimale Regelung	- 33 -
2.5.1. LQ-Regelung	- 34 -
2.5.2. Optimierte Polzuweisung	- 41 -
3. Beschreibung des Projekts	- 47 -
3.1. Einordnung in den Lehrplan	- 47 -
3.2. Projekteinstieg (03.12.2015 – 2 Unterrichtsstunden)	- 50 -
3.3. Projektunterricht (18.12.2015 & 21.12.2015 – 3 Unterrichtsstunden)	- 55 -
3.4. Dreitägige Projektumsetzung (20.01.2016 – 22.01.2016)	- 59 -
3.5. Abschlusspräsentation (16.02.2016)	- 64 -
4. Analyse des Projekts	- 71 -
4.1. Analyse der Projektdurchführung	- 71 -
4.1.1. Projekteinstieg	- 71 -
4.1.2. Projektunterricht	- 73 -
4.1.3. Projektumsetzung	- 77 -
4.1.4. Abschlusspräsentation	- 87 -
4.2. Analyse der Beantwortung der offenen Fragen an das Projekt	- 89 -
4.3. Analyse des mathematischen Lernzuwachses	- 93 -
4.4. Schülerfeedback an das Projekt	- 106 -
4.4.1. Schülerfeedback vom 22.01.2016	- 106 -
4.4.2. Schülerfeedback vom 22.02.2016	- 110 -
4.5. Fazit und Ausblick	- 112 -
5. Literatur	- 116 -
6. Abbildungsverzeichnis und deren Quellen	- 117 -
Anhang	- 119 -
Eidesstattliche Erklärung	- 152 -

1. Einleitung

Segways wurden von der Firma „Segway Inc.“ aus Bendford, Bundesstaat New-Hampshire, USA im Jahre 2001 das erste Mal hergestellt. Bei einem handelsüblichen Segway steht eine Person zwischen zwei Rädern, die auf einer Achse befestigt sind. Durch eine elektronische Antriebsregelung hält sich das Gerät selbst in Balance. Segways werden somit als Beförderungsmittel für eine Person eingesetzt. Im Rahmen des Fachpraktikums im Bachelorstudiengang Mathematik war es die Aufgabe, einen Segway in einer Kleingruppe bestehend aus drei Personen mit Hilfe von Lego-Mindstorms zu realisieren. Um dabei zu einer mathematischen Modellierung zu gelangen, wird der Segway als inverses Pendel auf einem Wagen angenommen.

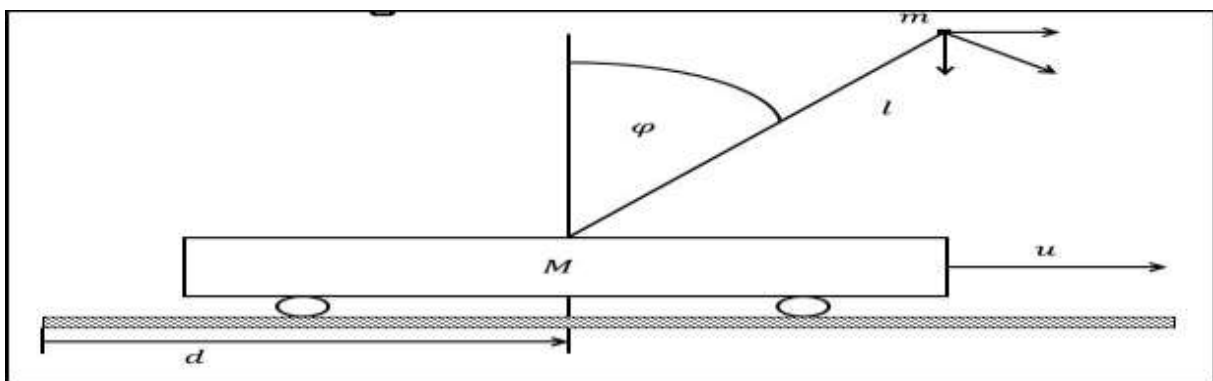


Abbildung 1: Der Segway, modelliert als inverses Pendel auf einem Wagen

Werden nun Beschleunigungskräfte auf den Stab und den Wagen, sowie entstehende Radialkräfte berücksichtigt, die ebenfalls auf den Stab und den Wagen wirken, so gelangt man über zwei physikalische Kräftegleichungen, sowie geeignete Vereinfachungen für kleine Winkel hin zu einem mathematischen System $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$. Der Zustandsvektor x besitzt die Komponenten d (Ortsposition des Segway) und φ (Neigung des Segway), sowie jeweils deren Ableitungen \dot{d} (horizontale Geschwindigkeit des Segway) und $\dot{\varphi}$ (Winkelgeschwindigkeit). Das Ziel besteht nun darin die Steuerung u so zu realisieren, dass sich der Segway stabilisiert, sprich dass der Zustandsvektor die Form $x = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ annimmt. Zur Regulation können bei Lego-Mindstorms zwei Sensoren genutzt werden: zum einem der Gyro-Sensor, der eine Motoransteuerung über das Auslesen von Neigung und Winkelgeschwindigkeit reguliert, sowie über einen Beschleunigungssensor, der die Motoransteuerung über den aktuellen Ort, sowie die aktuelle Geschwindigkeit reguliert. Das Ziel dieser Arbeit besteht darin, aufzuzeigen, wie eine mathematische Modellierung, verbunden mit Simulations- und Ansteuerungsaspekten eines Segways im Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe als interdisziplinäres Projekt umgesetzt werden kann. Dabei werden sowohl Chancen, im Sinne von erreichbaren mathematischen Kompetenzen, als auch Schwierigkeiten eines solchen Projektes mit einer interdisziplinären Umsetzung geschildert.

Effizient erreicht man eine Regulierung eines Segways entweder über eine proportional-derivative Kontrolle, beziehungsweise einer Feedback-Stabilisierung. Wie diese gelingt und welche mathematischen Voraussetzungen hierfür gelten müssen, wird dabei im Abschnitt „Mathematische Modellierung“ geschildert. Dieser Abschnitt befasst sich neben der Stabilisierung zudem auch mit der Kontrollierbarkeit eines linearen zeitinvarianten Zustandsraumsystems. In diesem Abschnitt werden fernerhin weitere Zugänge der mathematischen Modellierung eines Segways erörtert.

Im Abschnitt der „mathematischen Modellierung“ werden wichtige Aspekte der System- und Kontrolltheorie, angewandt auf den Alltagsgegenstand des Segway aufgezeigt. Inhaltlich kann die Vorlesung „System- und Kontrolltheorie“ nur als Vertiefungsvorlesung im Lehramtsmasterstudiengang des Fachs Mathematik belegt werden. Voraussetzungen für das Verständnis der System- und Kontrolltheorie sind fundierte Kenntnisse in der Theorie über Lösungen und deren Stabilität von Differentialgleichungen. Die Vorlesung „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ ist ebenfalls erst im Masterstudiengang des Lehramts Mathematik vorgesehen. An Hand dieser Informationen zeigt sich, dass das Verständnis und die Modellierung eines Segways im Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe eine schwierige, jedoch, um es vorwegzunehmen, keine unlösbare Aufgabe erscheint. Das Projekt wurde am Heinrich-Heine Gymnasium Kaiserslautern mit 12 Schülerinnen und Schülern (SuS) des Kurses 12 h unter Leitung von Frau Scheffler-Hausbrandt durchgeführt. Eine Einordnung des Projektes in den Mathematiklehrplan der Oberstufe erfolgt im Abschnitt „Beschreibung des Projekts“. Der Abschnitt umfasst dabei weiterhin die Umsetzung des Projekts, beginnend bei der ersten Einführung über zwei Videos, gefolgt von der eigenständigen Modellierung eines Segways, hin zur Erarbeitung von physikalischen Gleichungen, die ein mathematisches System zur Modellierung ermöglichen. Weiterhin werden die dreitägige interdisziplinäre Projektarbeit beschrieben, sowie die Ergebnisse der Abschlusspräsentation dargelegt.

In der Analyse des Projektes werden der mathematische Lernzuwachs und damit verbunden die Chancen und Nutzen der Einbindung eines solchen Projekts in den Mathematikunterricht, sowie die Schwierigkeiten, sowohl beim Verständnis, als auch bei der Planung und Umsetzung des Projektes erörtert. Dabei dient als Grundlage die Auswertung des Schülerfragebogens, welcher von den 12 SuS des Kurses 12h des Heinrich-Heine Gymnasiums ausgefüllt worden ist. In diesem Abschnitt wird weiterhin erläutert, an welchen Stellen des Projekts Schüler sich Inhalte, oder Modellierungen des Segways selbst erarbeiten konnten und an welchen Stellen des Projekts eine Unterstützung seitens des Lehrerteams notwendig für das Verständnis und den Fortgang des Projektes war. Dieser Abschnitt schließt damit, dass mögliche Alternativen in der Projektplanung und Umsetzung aufgezeigt werden, um den Lernerfolg zu optimieren, beziehungsweise das selbstorganisierte Lernen und Modellieren an einem, für Schülerinnen und Schüler, solch schwierig zu verstehendem Projekt zu fördern.

Der erste Schritt zur Umsetzung des interdisziplinären Projektes in der Schule, erfolgte im Sommersemester 2014, als das Ziel des Fachpraktikums darin bestand einen Segway auf Basis von Lego-Mindstorms derart zu gestalten, dass dieser sich stabilisiert. Nach

einer Bearbeitungszeit von 2 Monaten, gelang es schließlich den Segway über die Plattform lejosEV3 derart anzusteuern, dass das Ziel des Fachpraktikums erreicht wurde. Die relativ lange Bearbeitungszeit lässt bereits erahnen, dass die Umsetzung vertiefte mathematische, physikalische und technische Fähigkeiten erfordert. Demnach benötigt ein Mathematiklehrer, der ein solches Projekt in der Schule umsetzen möchte vertiefte Kenntnisse in der System- und Kontrolltheorie, jedoch auch ein vertieftes physikalisches und technisches Verständnis. Die Anforderungen an den Lehrer bei der Umsetzung des Projektes sind dementsprechend groß. Konkret benötigt ein Mathematiklehrer ein Verständnis für die Beschreibung von Kräften eines Segways. Besitzt der Lehrer diese Kompetenz nicht, so kann auf Basis der physikalischen Beschreibung, kein mathematisches Modell des Segways den SuS nachvollziehbar dargelegt werden. Weiterhin ist für die Analyse des mathematischen Modells ein vertieftes Verständnis der System- und Kontrolltheorie, sowie der Theorie über Differentialgleichung notwendig. Dieses notwendige Verständnis werden die meisten Lehrer rekapitulieren müssen, da sie sich die notwendigen Fachkompetenzen zuletzt im Studium angeeignet haben. Um schließlich eine praktische Umsetzung des Segways im Projekt zu realisieren, ist ein technisches Verständnis im Rahmen sicherer Programmierkenntnisse notwendig. Zusammenfassend bietet das Projekt hohe Herausforderungen an das mathematische, physikalische und technische Verständnis eines Mathematiklehrers. Daher ist die Kernfrage, inwiefern und in welchem Rahmen ein solches interdisziplinäres Projekt in der Schule umgesetzt werden kann.

2. Mathematische Modellierung

Der Abschnitt der mathematischen Modellierung umfasst zunächst die notwendigen Definitionen und Sätze aus den Gebieten der linearen Algebra, der Differentialgleichungstheorie und der System- und Kontrolltheorie, die für das mathematische Verständnis notwendig sein werden. In den Kapiteln 2.2., sowie 2.3. werden an Hand von drei verschiedenen physikalischen Beschreibungen des Segways drei mathematische Modellierungen aufgezeigt, an Hand dessen eine Lösung des mathematischen Problems skizziert werden kann. Erste Lösungsansätze der mathematischen Stabilisierung des Segways werden in Abschnitt 2.4. dargelegt. Fernerhin erfolgt in diesem Abschnitt die Erklärung, weshalb eine Stabilisierung des Segways, mathematisch durch ein lineares zeitinvariantes System modelliert, realisierbar ist. Abschnitt 2.5. gibt schließlich Einblicke in eine optimierte Regelung des Segways über eine LQ-Regelung, sowie eine Stabilisierung durch geschickte Polvorgabe.

2.1. Notwendige Definitionen und Sätze

Um die mathematische Modellierung des Segways und den Prozess der Lösungsfindung im gewählten mathematischen Modell nachzuvollziehen, werden fundierte Kenntnisse im Bereich der linearen Algebra, der Differentialgleichungstheorie, sowie der System- und Kontrolltheorie vorausgesetzt. Diese werden in den Abschnitten 2.1.1., 2.1.2. und 2.1.3. dargelegt.

2.1.1. Lineare Algebra

Definition 1.1: Matrizen:

Seien m und n zwei ganze Zahlen. Eine $m \times n$ -Matrix ist ein rechteckiges Schema A der Form:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Dabei ist ein Eintrag a_{ij} , der Eintrag in Zeile i und in Spalte j und ist im weiteren Verlauf entweder eine reelle, oder komplexe Zahl. Sofern $m = n$ gilt, nennt man die Matrix *quadratisch*. Die Menge der quadratischen Matrizen über dem Körper K ($K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) be-

zeichnen wir mit $Mat_n(K)$. Im weiteren Verlauf werden wir nur solche Matrizen betrachten, jedoch wird zunächst das allgemeine Matrixprodukt kurz eingeführt.

Definition 1.2: Matrixprodukt:

Sei $A \in Mat(m \times n, K)$ und $B \in Mat(n \times p, K)$, so ist $C = A \cdot B \in Mat(m \times p, K)$ mit

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il} \cdot b_{lj} \quad \forall i \in \{1 \dots m\}, j \in \{1 \dots p\}.$$

Bemerkung 1.1:

Matrizen beschreiben lineare Abbildungen zwischen zwei Vektorräumen $f: K^n \rightarrow K^m: x \mapsto A \cdot x$. Eine Abbildung f heißt dabei linear, wenn folgende Eigenschaften gelten:

$$\begin{aligned} f(x + y) &= f(x) + f(y); \quad x, y \in K^n \\ f(\lambda \cdot x) &= \lambda \cdot f(x); \quad \lambda \in K \end{aligned}$$

Definition 1.3: Determinanten:

Sei $A \in Mat_n(K)$. Die *Determinante* der Matrix A ist eine Abbildung, die wie folgt definiert wird: $\det: Mat_n(K) \rightarrow K: A \mapsto \det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}$. In dieser Definition entspricht σ einer *Permutation* der Menge $\{1 \dots n\}$, das *Signum* $\text{sgn}(\sigma)$ berechnet sich wie folgt: $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^k$, wobei k die Anzahl der *Transpositionen* (i, j) , $i \neq j$ entspricht, deren Produkt die Permutation σ ergibt. S_n entspricht der *symmetrischen Gruppe*, der Menge aller Permutationen der Menge $\{1 \dots n\}$.

Im Verlauf der Arbeit betrachten wir im Abschnitt der mathematischen Modellierung eines Segway nur Matrizen der Dimension $n, n \in \{1, 2, 3, 4\}$, deren Determinanten wie folgt berechnet werden:

Beispiel 1.1: Die Berechnung von Determinanten für $n = 1, 2, 3$:

a) $n = 1: A = (a) \Rightarrow \det(A) = a$

b) $n = 2: A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

$$n = 3: A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

c) $\Rightarrow \det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$

Die Berechnung der Determinanten einer Matrix $A \in \text{Mat}_3(K)$, wird als *Regel von Sarrus* bezeichnet. Die Berechnung von Determinanten von Matrizen $\in \text{Mat}_4(K)$ gelingt, indem man den *Entwicklungssatz von Laplace* verwendet.

Satz 1.1: Entwicklungssatz von Laplace:

Sei $A \in \text{Mat}_n(K)$. Folgende Formel bezeichnen wir als *Entwicklung nach der i-ten Zeile*:

$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$. Die Matrix A_{ij} entspricht der Matrix, die entsteht, wenn in der Matrix A Zeile i und Spalte j gestrichen werden. Analog bezeichnen wir folgende Formel als die *Entwicklung nach der j-ten Spalte*: $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$.

Beweis: Vergleiche Markwig, Grundlagen der Mathematik 2011, S.351. ■

Durch den Entwicklungssatz von Laplace sind wir in der Lage Determinanten von Matrizen $\in \text{Mat}_4(K)$ zu berechnen, indem wir für diese den Entwicklungssatz von Laplace, sowie die Regel von Sarrus verwenden.

Im weiteren Verlauf wird die Eindeutigkeit der Lösung von linearen Differentialgleichungssystemen mit konstanten Koeffizienten begründet. Hierfür ist der Begriff der Matrixnorm, beziehungsweise der Operatornorm essentiell, dazu wird zunächst der Normbegriff rekapituliert.

Definition 1.4: Norm:

Sei der K^n gegeben. Eine Abbildung $\|\cdot\|: K^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ heißt Norm auf dem K^n , falls für $x, y \in K^n$ und $\lambda \in K$ gilt:

- (i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (ii) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Dabei bezeichnet Eigenschaft (i) die positive Definitheit, Eigenschaft (ii) die Homogenität und Eigenschaft (iii) die Dreiecksungleichung.

Beispiel: 1.2: Vektornormen:

Sei $x \in K^n$:

- Summennorm: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

- Euklidische Norm: $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
- Maximumsnorm: $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$

Weiterhin gilt, falls $W \in \text{Mat}_n(K)$ mit $\det(W) \neq 0$, so ist auch durch $\|x\|_W = \|W \cdot x\|$ eine Norm gegeben.

Definition 1.5: Matrixnorm:

Sei $A \in \text{Mat}_n(K)$ und $x \in K^n$. So ist $\|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|A \cdot x\|_{K^n}}{\|x\|_{K^n}}$ die durch die Norm $\|\cdot\|_{K^n}$ induzierte Operatornorm. Dabei ist $\|\cdot\|_{K^n}$ eine beliebige Vektornorm auf K^n .

Bemerkung 1.2: Eigenschaften der Matrixnorm:

Sei $A \in \text{Mat}_n(K)$, $B \in \text{Mat}_n(K)$ und $x \in K^n$. So gelten folgende Eigenschaften:

- $\|A \cdot x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$
- $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Um Aussagen über die Stabilität des Segways treffen zu können, werden wir in späteren Abschnitten dieser Arbeit die *Eigenwerte* von Matrizen untersuchen. Das Konzept der *Eigenwerte* und den damit verbundenen *Eigenvektoren* wird im folgenden Abschnitt eingeführt.

Definition 1.6: Eigenwerte und Eigenvektoren:

Sei $A \in \text{Mat}_n(K)$. Eine Zahl $\lambda \in K$ heißt *Eigenwert* von A, falls es ein $x \in K^n$, $x \neq \underline{0}$ gibt, sodass $A \cdot x = \lambda \cdot x$ gilt. Wir nennen den Vektor x *Eigenvektor* der Matrix A zum Eigenwert λ . Mit $\text{Eig}(A, \lambda) = \{x; A \cdot x = \lambda \cdot x\}$ bezeichnen wir den *Eigenraum* von A zum Eigenwert λ . Die Menge $\sigma = \{\lambda \in K; \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$ bezeichnet man als *Spektrum* von A.

Um Eigenwerte berechnen zu können, wird der Begriff des charakteristischen Polynoms eingeführt.

Definition 1.7: Charakteristisches Polynom:

Sei $A \in \text{Mat}_n(K)$. Wir nennen $P(\lambda) = \det(\lambda \cdot E_n - A)$ das *charakteristische Polynom* der Matrix A. Mit E_n bezeichnen wir die *Einheitsmatrix* der Dimension n. Das charakteristische Polynom ist ein Polynom in λ , vom Grad n.

Satz 1.2: Eigenwerte \triangleq Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms der Matrix A entsprechen genau den Eigenwerten der Matrix.

Beweis: Vergleiche Markwig, Grundlagen der Mathematik 2011, S.372 ■.

Den Eigenraum $Eig(A, \lambda) = \{x; A \cdot x = \lambda \cdot x\}$ der Matrix A zum Eigenwert λ , berechnet man, indem man den Kern $Ker(\lambda \cdot E_n - A)$, also den Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems $\lambda \cdot E_n - A = \underline{0}$ berechnet. Man erhält bei diesem Vorgehen einen nicht-trivialen Unterraum des K^n .

Um im späteren Verlauf die Diagonalisierbarkeit einer Matrix zu begründen werden hierfür zunächst zwei Begriffe eingeführt.

Definition 1.8: Algebraische und geometrische Vielfachheit:

Sei $A \in Mat_n(K)$ und $\lambda \in K$.

- $mult(P(\lambda), \lambda)$ heißt *algebraische Vielfachheit* von λ als Eigenwert von A .
- $\dim_k Eig(A, \lambda)$ heißt *geometrische Vielfachheit* von λ als Eigenwert von A .

Satz 1.3: Die geom. Vielfachheit ist durch die alg. Vielfachheit beschränkt:

Sei $A \in Mat_n(K)$ und $\lambda \in K$. So gilt stets: $\dim_k Eig(A, \lambda) \leq mult(P(\lambda), \lambda)$.

Beweis: Vergleiche Markwig, Grundlagen der Mathematik 2011, S.376 ■.

Definition 1.9: Diagonalisierbarkeit:

Sei $A \in Mat_n(K)$. A heißt *diagonalisierbar*, falls es eine Diagonalmatrix D gibt mit

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix},$$

sowie Transformationsmatrizen T, T^{-1} mit $D = T^{-1} \cdot A \cdot T$.

Mit den bereits formulierten Sätzen und Definitionen ist es nun möglich ein Kriterium für Diagonalisierbarkeit zu formulieren.

Satz 1.4: Kriterium der Diagonalisierbarkeit:

Sei $A \in Mat_n(K)$. So sind folgende Aussagen äquivalent:

- A ist diagonalisierbar

- Das charakteristische Polynom zerfällt über K in Linearfaktoren und für jeden Eigenwert stimmen algebraische und geometrische Vielfachheit überein.
- K^n hat eine Basis aus Eigenvektoren von A .

Beweis: Vergleiche Markwig, Grundlagen der Mathematik 2011, S.392 f. ■

Somit ist die Matrix A insbesondere diagonalisierbar, wenn die Matrix n verschiedene Eigenwerte besitzt. Die Diagonalmatrix D wird somit erreicht, wenn die Spalten in T gerade die n linear unabhängigen Eigenvektoren zu den entsprechenden Eigenwerten der Matrix A sind.

Bemerkung 1.2: Jordan Normalform:

Bevor die notwendigen Sätze und Definitionen der Differentialgleichungstheorie behandelt werden, erfolgt nun ein kurzer Kommentar bezüglich der Jordan Normalform. Nicht jede Matrix ist diagonalisierbar, sofern für einen Eigenwert λ einer Matrix A die Beziehung gilt: $\dim_k(\text{Eig}(A, \lambda)) < \text{mult}(P(\lambda), \lambda)$, so ist die Matrix A nicht diagonalisierbar, es existieren jedoch Transformationsmatrizen S, S^{-1} mit $J = S^{-1} \cdot A \cdot S$, wobei J folgende Gestalt besitzt:

$$J = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r(\lambda_r) \end{pmatrix}.$$

Dabei hat ein Jordanblock J_i der Größe $r \times r$ zum Eigenwert λ_i folgende Gestalt hat:

$$J_i(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \lambda_i & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Die Größe eines solchen Jordanblocks setzt sich nun wie folgt zusammen. Die algebraische Vielfachheit $\text{mult}(P(\lambda_i), \lambda_i)$ gibt die Anzahl der Einträge des Eigenwertes λ_i in der Diagonalblockmatrix J an. Die geometrische Vielfachheit $\dim_k(\text{Eig}(A, \lambda_i))$ gibt die Anzahl der Jordanblöcke zum Eigenwert λ_i an.

Für die weitere Betrachtung der notwendigen Sätze und Definitionen, insbesondere bei der Analyse der Existenz- und Eindeutigkeit, sowie der Stabilität von Lösungen von linearen Differentialgleichungssystemen, reicht es aus, sich auf die Diagonalisierbarkeit, sowie weiterhin auf die algebraische (und geometrische) Vielfachheit von Eigenwerten zu berufen. An den entsprechenden Stellen der Analyse wird jedoch ein kurzer Kommentar zu Bemerkung 1.2 erfolgen.

2.1.2. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Im folgenden sei $K = \mathbb{R}$. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall $V \subset \mathbb{R}^m, m \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen die Menge aller k -fach stetig differenzierbaren Funktionen von I nach V mit $C^k(I; V), k \in \mathbb{N}_0$

Definition 2.1: Gewöhnliche Differentialgleichung:

Sei $t \in I \subset \mathbb{R}$. Eine *gewöhnliche Differentialgleichung (DGL) der Ordnung n* ist eine Gleichung der Form: $f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)}, x^{(n)}) = 0$, wobei $f \in C^0(U; \mathbb{R})$, und $U \subset \mathbb{R}^{n+2}$ offen ist.

Eine Funktion x heißt Lösung der DGL auf dem Intervall I , falls $x \in C^n(I; \mathbb{R})$ und die DGL für alle $t \in I$ erfüllt.

Definition 2.2: Explizite und implizite DGL:

Eine DGL heißt *explizit*, falls sie durch folgende Gleichung beschrieben wird: $x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)})$. Andernfalls heißt sie *implizit*.

Definition 2.3: System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

Seien $f_1, \dots, f_m \in C^0(U; \mathbb{R}); U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, so ist

$$\begin{aligned} u_1^{(n)} &= f_1(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) \\ &\vdots \\ u_m^{(n)} &= f_m(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) \end{aligned}$$

ein System von *gewöhnlichen Differentialgleichungen der Ordnung n* .

Definition 2.4: Lineare Differentialgleichungen:

Eine Differentialgleichung heißt *linear*, sofern sie linear in allen abhängigen Variablen $x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(m)}$ linear ist. Andernfalls heißt sie *nicht linear*.

Definition 2.5: Autonome DGLs:

Ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen der Form $f(x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}) = 0$ heißt *autonom*

Definition 2.6: Anfangswertproblem:

Das Problem $\dot{x} = f(t, x(t)), f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $x(t_0) = x_0, t \geq t_0$ heißt *Anfangswertproblem (AWP)*.

Im Folgenden wird ein Kriterium der eindeutigen Lösbarkeit eines Anfangswertproblems erarbeitet, wesentlich hierfür ist jedoch die Definition der Lipschitz-Stetigkeit.

Definition 2.7: Lipschitz-Stetigkeit:

Eine Funktion $f : [a, b] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ heißt *global Lipschitz-stetig* bezüglich x , falls $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\| \quad \forall t \in [a, b] \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$ für die *Lipschitz-Konstante* $L > 0$.

Satz 2.1: Picard-Lindelöfs Existenz- und Eindeutigkeitsatz:

Sei f global Lipschitz-stetig bezüglich x . Dann *existiert eine eindeutige Lösung* $x \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^d)$ für das *Anfangswertproblem* für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^d$, mit $a \leq t_0 \leq b$.

Vgl. Prüss/Wilke: Gewöhnliche Differentialgleichungen und lineare Systeme. ■

Wir verwenden den Existenz- und Eindeutigkeitsatz von Picard-Lindelöf nun um Aussagen zur eindeutigen Lösbarkeit von Anfangswertproblemen, die als System linearer Differentialgleichungen gegeben sind, zu treffen.

Definition 2.8: Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten:

Ein *lineares System mit konstanten Koeffizienten* besitzt die Form $\dot{x} = A \cdot x, \quad x(t_0) = x_0$, wobei die Matrix A nur konstante Koeffizienten besitzt.

Zunächst wollen wir nun eine Lösung für das gegebene Anfangswertproblem generieren.

Satz 2.2: Existenz der Lösung für ein lineares System mit konstanten Koeffizienten:

Die Lösung für das AWP $\dot{x} = A \cdot x, \quad x(t_0) = x_0$ hat die Form $x(t) = e^{A \cdot t} \cdot x_0$

Beweis:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = A \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{x} = A dt \quad \Leftrightarrow \quad \int_{x_0}^x \frac{ds}{s} = \int_{t_0}^t A dt \quad \Leftrightarrow \quad \ln(|x|) - \ln(|x_0|) = A \cdot (t - t_0)$$

Nun kann man durch lineare Verschiebung des Intervalls ohne Beschränkung der Allgemeinheit $t_0 = 0$ wählen und erhält über einfache Termumformungen die Behauptung. ■

Definition 2.9: Matrixexponentialfunktion:

Die Funktion $f(t) = e^{At}$ wird definiert als $e^{At} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t \cdot A)^k}{k!}$.

Da die Ungleichung $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ für jedes k gilt, so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(|t| \cdot \|A\|)^k}{k!}$ eine konvergente Majorante. Diese Reihe konvergiert für jedes t und somit konvergiert auch die Reihe $e^{A \cdot t} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t \cdot A)^k}{k!}$ für jedes t .

Zur Berechnung der Matrixexponentialfunktion werden wir nun wieder das Konzept der Eigenwerte und Eigenvektoren verwenden, um die Matrixexponentialfunktion elegant berechnen zu können.

Dazu nehmen wir zunächst an, dass die Matrix A diagonalisierbar ist, eine entsprechende Betrachtung bei einer Jordan-Transformation der Matrix erfolgt in einer anschließenden Bemerkung.

Zunächst werden die Transformationsmatrizen T, T^{-1} bestimmt, sodass $A = T \cdot D \cdot T^{-1}$ gilt. Betrachtet man nun A^k , so gilt:

$$A^k = (T \cdot D \cdot T^{-1})^k = (T \cdot D \cdot T^{-1}) \cdot (T \cdot D \cdot T^{-1}) \cdot \dots \cdot (T \cdot D \cdot T^{-1}) = T \cdot D^k \cdot T^{-1}.$$

Für die Diagonalmatrix D gilt nun jedoch:

$$D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & & & \\ & d_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n^k \end{pmatrix}$$

Mit dieser Erkenntnis kann man nun leicht $e^{A \cdot t}$ berechnen, es gilt nämlich $e^{A \cdot t} = T \cdot e^{D \cdot t} \cdot T^{-1}$, wobei

$$e^{D \cdot t} = \begin{pmatrix} e^{d_1 \cdot t} & & & \\ & e^{d_2 \cdot t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{d_n \cdot t} \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir schließlich folgenden Satz:

Satz 2.3: Lösungsstruktur des linearen Differentialgleichungssystems:

Das AWP $\dot{x} = A \cdot x$, $x(0) = x_0$ besitzt die Lösung $x(t) = T \cdot e^{D \cdot t} \cdot T^{-1} \cdot x_0$, wobei D eine Diagonalmatrix, beziehungsweise Jordan-Matrix ist.

Bemerkung 2.1: Lösungsstruktur bei Jordan-Transformationen:

Sollte die Matrix A nicht diagonalisierbar, sondern lediglich in Jordanform transformierbar sein, so reicht es aus einen Jordan-Block $J_i(\lambda_i)$ der Größe $r \times r$ zu betrachten, für diesen gilt:

$$e^{J_i(\lambda_i)t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_i t} & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ & e^{\lambda_i t} & t & \ddots & \vdots \\ & & e^{\lambda_i t} & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & t \\ & & & & e^{\lambda_i t} \end{pmatrix}$$

Folglich gilt insgesamt für die Lösung $x(t)$, des AWP $\dot{x} = A \cdot x$, $x(0) = x_0$

$$x(t) = T \cdot \begin{pmatrix} e^{J_1(\lambda_1)t} & & & \\ & e^{J_2(\lambda_2)t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{J_m(\lambda_m)t} \end{pmatrix} \cdot T^{-1} \cdot x_0$$

Bemerkung 2.2: Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung:

Die Lösung des inhomogenen AWP $\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$, $x(0) = x_0$ kann über Variation der Konstanten berechnet werden und hat die Struktur $x(t) = e^{At} \cdot x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) d\tau$.

Satz 2.4: Eindeutigkeit der Lösung eines linearen Differentialgleichungssystems:

Die Lösung $x(t)$ des AWP $\dot{x} = A \cdot x$, $x(0) = x_0$ ist eindeutig.

Beweis: Es gilt $f(t, x) = A \cdot x$ und somit $\|Ax_1 - Ax_2\| \leq \|A\| \cdot \|x_1 - x_2\|$, sodass f Lipschitzstetig ist. Unter Verwendung des Satzes von Picard-Lindelöf folgt die Behauptung. ■

Im abschließenden Teil des Kapitels „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ wird nun die Definition der Stabilität von Lösungen eingeführt, bevor anschließend Kriterien zur Analyse von Stabilität von Lösungen erarbeitet werden.

Definition 2.10: Stabilität von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen:

Sei die DGL $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ gegeben mit $f : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ und $t \geq t_0$. Eine Lösung $x(t)$ des AWP heißt:

- *stabil*, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für jede weitere Lösung $y(t)$ gilt, dass $y(t) \in B_\varepsilon(x(t)) \quad \forall t \geq t_0$, sofern $y_0 \in B_\delta(x_0)$.

- *asymptotisch stabil*, falls $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - y(t)\| = 0$, für alle $y_0 \in B_\delta(x_0)$.
- *instabil*, sonst.

Hierbei ist $B_\delta(x_0)$ ein „Ball“, beziehungsweise eine Kugel vom Radius δ mit Mittelpunkt x_0 .

Betrachten wir nun noch die Stabilität linearer Systeme. Das AWP $\dot{x} = A \cdot x$, $x(0) = x_0$ besitzt die eindeutige Lösung $x(t) = e^{At} \cdot x_0$. Diese ist stabil, genau dann wenn $\sup_{t \geq 0} \|x(t)\| < \infty$ und asymptotisch stabil, falls $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$. Mit Hilfe der im Folgenden definierten Spektralabzisse, sowie des Indexes eines Eigenwertes gelingt ein schärferes Kriterium.

Definition 2.11: Spektralabzisse:

Sei $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$, so ist

- die *Spektralabzisse* $\nu(A)$ von A der größtmögliche Realteil aller Eigenwerte von A : $\nu(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} \text{Re}(\lambda)$
- der *Index* $i(\lambda)$ eines Eigenwertes $\lambda \in \sigma(A)$ die *maximale* Dimension eines Jordanblocks von A bezüglich des Eigenwertes λ .

Satz 2.5: Stabilitätskriterium für das lineare AWP:

Das lineare AWP $\dot{x} = A \cdot x$, $x(0) = x_0$ ist

- *stabil*, falls $\nu(A) \leq 0$ und alle Eigenwerte $\lambda \in \sigma(A)$ mit $\text{Re}(\lambda) = 0$ den Index $i(\lambda) = 1$ besitzen
- *asymptotisch stabil*, falls $\nu(A) < 0$.

Man bezeichnet eine Matrix A deren Spektralabzisse $\nu(A)$ die Eigenschaft besitzt, dass $\nu(A) < 0$ auch als *Hurwitz*.

Das Kapitel „gewöhnliche Differentialgleichungen“ schließt nun mit einem Kriterium für nichtlineare Systeme, hierzu wird zunächst die nichtlineare Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$, wobei $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, betrachtet. x_* heißt *Equilibrium* der DGL, sofern $f(x_*) = 0$. Ziel ist es nun Aussagen über die Stabilität des Equilibrium dieser DGL zu treffen. Betrachtet man sich nun

$$Df(x_*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \Big|_{x=x_*} := A,$$

wobei $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ die Jacobi-Matrix von f ausgewertet an der Stelle $x = x_*$ ist, so gilt folgender Satz:

Satz 2.6: Stabilitätskriterium für nichtlineare Differentialgleichungen:

Sei x_* ein Equilibrium des nichtlinearen AWPS $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Sofern $\nu(Df(x_*)) < 0$, dies bedeutet, dass das linearisierte AWP $\dot{x} = Df(x_*) \cdot x$, $x(0) = x_0$ *asymptotisch stabil* ist, dann folgt daraus, dass x_* ein *asymptotisch stabiles Equilibrium* der nicht-linearen DGL $\dot{x} = f(x)$ ist. Das bedeutet, dass jede Lösung x des AWP $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$ gegen x_* konvergiert, sofern $x_0 \in B_\delta(x_*)$ ist.

Bemerkung 2.3: Die Stabilität kann nicht auf nichtlineare AWPs übertragen werden:

Aus der Stabilität des linearisierten AWPs $\dot{x} = Df(x_*) \cdot x$, $x(0) = x_0$ kann *keine* Stabilität des nichtlinearen Systems gefolgert werden.

2.1.3. System- und Kontrolltheorie

In Abschnitt 2.2. werden die wirkenden physikalischen Kräfte erarbeitet, aus denen sich später eine Systemgleichung darstellen lässt. Dabei werden jedoch geeignete Linearisierungen getroffen, um Aussagen über die Kontrollierbarkeit und Stabilisierbarkeit zu treffen. Über eine lineare Zustandsrückführung (Feedback-Stabilisierbarkeit) wird es gelingen die asymptotische Stabilität des linearen Systems zu generieren, sodass wir mit Hilfe von Satz 2.6 auch die asymptotische Stabilität des nicht-linearen Systems sicher stellen können. Zunächst werden die wichtigsten Begriffe des linearen Zustandsraumsystems, dessen Kontrollierbarkeit, sowie dessen Zustandsrückführung und Stabilisierbarkeit eingeführt.

Definition 3.1: Lineares Zustandsraumsystem mit Eingangs- und Ausgangsrepräsentation:

Ein *lineares Zustandsraumsystem mit Eingangs- und Ausgangsrepräsentation* ist gegeben durch folgende zwei Gleichungen: $\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t)$, $y = C(t)x(t) + D(t)u(t)$

Dabei sei $x \in \mathbb{R}^n$ der *Zustandsvektor*, mit $u(t) \in \mathbb{R}^m$ bezeichnen wir die *Steuerung*, sowie mit $y \in \mathbb{R}^k$ die *Ausgangsfunktion*. Die Matrizen $A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot), D(\cdot)$ sind dabei vom Typ $(n \times n), (n \times m), (k \times n), (k \times m)$. An Hand der Matrizenschreibweise ist die lineare Repräsentation des Systems zu erkennen. Das lineare Zustandsraumsystem heißt *zeitinvariant*, sofern die Matrizen $A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot), D(\cdot)$ Matrizen mit konstanten Koeffizienten sind.

Definition 3.2: Stabilität linearer Systeme:

Das lineare System $\dot{x} = A(t) \cdot x + B(t) \cdot u$ heißt *stabil*, falls jede Lösung $x(t)$ der homogenen Differentialgleichung $\dot{x} = A(t) \cdot x(t)$ beschränkt ist ($\sup_{t \geq 0} \|x(t)\| < \infty$). Das System heißt *asymptotisch stabil*, falls ferner $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$ zutrifft.

Bemerkung 3.1: Stabilität linearer Systeme mit konstanten Koeffizienten:

Sofern $A(t) = A$ eine konstante Matrix ist, so gelten die gleichen Bedingungen für die (asymptotische) Stabilität des Systems $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$, wie in Satz 2.5

Definition 3.3: Steuerbarkeit eines Systems:

Das lineare System $\dot{x} = A(t) \cdot x + B(t) \cdot u$, mit einer *Anfangszeit* t_0 , *Anfangszustand* x_0 und *Endzustand* x_1 sei gegeben. Das Paar (t_0, x_0) heißt zur Zeit $t_1 > t_0$ nach x_1 *steuerbar*, falls es eine stetige *Steuerung* $u(\cdot)$ derart gibt, derart, dass die Lösung des AWP $\dot{x} = A(t) \cdot x + B(t) \cdot u(t)$, $x(t_0) = x_0$ der Bedingung $x(t_1) = x_1$ genügt. Das Paar (t_0, x_0) heißt nach x_1 *steuerbar*, wenn es nach irgendeiner Zeit $t_1 > t_0$ nach x_1 steuerbar ist. Sofern für jedes Paar (t_0, x_0) und jedes x_1 das Paar (t_0, x_0) nach x_1 steuerbar ist, so heißt das System $\dot{x} = A(t) \cdot x + B(t) \cdot u$ ein *steuerbares System*.

Im Abschnitt 2.3 wird ein Zustandsraumsystem für den Segway beruhend auf den physikalischen Kräftegleichungen aufgestellt. Dabei wird klar, dass das System zeitinvariant ist. Dementsprechend werden im Folgenden Kriterien entwickelt, die die Steuerbarkeit des linearen zeitinvarianten Systems garantieren.

Definition 3.4: Kalman-Matrix:

Sei das lineare zeitinvariante System $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$ gegeben. Die Matrix $K \in \text{Mat}(n \times n \cdot m; \mathbb{R})$ mit $K = (B, A \cdot B, \dots, A^{n-1} \cdot B)$ wird als *Kalman-Matrix* bezeichnet.

Mit Hilfe der Kalman-Matrix kann man leicht ein Kriterium für die Steuerbarkeit linearer zeitinvarianter Systeme erarbeiten:

Satz 3.1: Kriterien für die Steuerbarkeit linearer zeitinvarianter Systeme:

Das System $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$ ist steuerbar, sofern eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- $\text{rang}(K) = n$
- Ist p ein Eigenvektor zu A^t , so gilt $p^T B \neq 0$

Beweis:

Für den Beweis sei auf Knobloch, Kwakernaak: Lineare Kontrolltheorie, S.31ff. verwiesen. ■

Sofern die Steuerung u skalar ist, kann die erste Bedingung leicht überprüft werden, indem die Determinante der Kalman-Matrix berechnet wird. Ist diese ungleich 0, so ist das lineare zeitinvariante System steuerbar.

Definition 3.5: Zustandsrückführung:

Es sei das lineare, zeitinvariante System $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$ gegeben. Wählt man für eine Steuerung das *lineare* Steuergesetz $u = -F \cdot x$, so spricht man von einer *Zustandsrückführung* des Systems. Die Matrix F ist dabei vom Typ $(m \times n)$.

Durch die Zustandsrückführung gelingt es schließlich das lineare zeitinvariante System $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$ in eine lineare DGL zu überführen: $\dot{x} = (A - B \cdot F) \cdot x$.

Mit Hilfe der Zustandsrückführung ist es nun möglich eine äquivalente Aussage für steuerbare Systeme zu treffen:

Satz 3.2: Polvorgabe/Ackermann:

Das lineare zeitinvariante System $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$ ist genau dann steuerbar, wenn es zu jedem reellen normierten Polynom P vom Grad n eine Matrix F gibt, sodass P charakteristisches Polynom der Matrix $A - B \cdot F$ ist. Gilt nun noch $m=1$, so ist die Matrix $F \in \text{Mat}(1 \times n; \mathbb{R})$ eindeutig durch das vorgegebene Polynom $P(s) = s^n + \alpha_{n-1} \cdot s^{n-1} + \alpha_{n-2} \cdot s^{n-2} + \dots + \alpha_0$ bestimmt, diese entspricht der n -ten Zeile der Matrix $K^{-1}P(A)$, also insgesamt $F = e_n^T \cdot K^{-1} \cdot P(A)$, wobei die Matrix $P(A)$ folgende Form hat $P(A) = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \alpha_{n-2}A^{n-2} + \dots + \alpha_0 \cdot E$.

Beweis: Vergleiche Knobloch, Kwakernaak: Lineare Kontrolltheorie S.39ff. ■

Nachdem wichtige Ergebnisse über die Kontrollierbarkeit/Steuerbarkeit eines linearen zeitinvarianten Systems erläutert wurden, werden nun noch Kriterien für die Stabilisierbarkeit eines linearen zeitinvarianten Systems erarbeitet, begonnen wird dabei mit der Definition der Stabilisierbarkeit.

Definition 3.7: Stabilisierbarkeit linearer Systeme:

Ein lineares System $\dot{x} = A(t) \cdot x + B(t) \cdot u$ ist *stabilisierbar*, wenn es zu jedem (t_0, x_0) eine für $t \geq t_0$ stückweise stetige Funktion $u(t)$ gibt, derart, dass die Lösung $x(t)$ des AWP's folgende Beziehung erfüllt: $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0$

Bemerkung 3.2: Steuerbarkeit impliziert Stabilisierbarkeit:

Ein steuerbares System $\dot{x} = A(t) \cdot x + B(t) \cdot u$ ist stabilisierbar, denn sofern ein geeignetes $u(t)$ existiert, sodass die Lösung des AWP der Bedingung $x(t_1) = 0$ für $t_1 > t_0$ genügt, so kann man $u(t) = 0$ für alle $t \geq t_1$, so bleibt $x(t) = 0$ für $t \geq t_1$.

Im Folgenden werden nun zwei Kriterien für die Stabilisierbarkeit linearer zeitinvarianter Systeme erarbeitet.

Satz 3.3: Stabilisierbarkeit linearer zeitinvarianter Systeme:

Das zeitinvariante lineare System $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$ ist genau dann stabilisierbar, wenn für jeden Eigenwert $\lambda \in \sigma(A)$ mit $\text{Re}(\lambda) \geq 0$ und zugehörigem Eigenvektor v von A^T , die Beziehung $v^T \cdot B \neq 0$ gilt. Wenn das System stabilisierbar ist, so gibt es eine stabilisierende Zustandsrückführung durch eine Matrix F , sodass alle Eigenwerte der Matrix $A - B \cdot F$ einen negativen Realteil haben.

Beweis: Vergleiche Knobloch, Kwakernaak: Lineare Kontrolltheorie S.56. ■

Bemerkung 3.3: Stabilisierbarkeit durch Zustandsrückführung:

Die letzte Aussage des Satzes 3.3 ist eine äquivalente Aussage: Sofern eine Matrix F existiert, sodass alle Eigenwerte der Matrix $A - BF$ einen negativen Realteil besitzen, so ist das lineare zeitinvariante System $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$ stabilisierbar. Für ein lineares zeitinvariantes System ist demnach die Eigenschaft der Stabilisierbarkeit äquivalent zu einer Stabilisierbarkeit durch Zustandsrückführung.

Sofern eine Regelung durch Zustandsrückführung gelingt, ist man ebenso daran interessiert, diese möglichst gut zu gestalten. In Abschnitt 2.5 werden hierzu die optimierte Regelung auf Basis der optimierten Polvorgabe, sowie die optimierte Regelung auf Basis der LQ-Regelung für das Beispiel des Segways diskutiert. Zunächst werden einige wichtige Erkenntnisse der optimalen Regelung über eine LQ-Regelung dargelegt.

Definition 3.8: Gütefunktional:

Für das lineare zeitinvariante System $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$ mit dem Anfangszustand definieren wir das Gütefunktional durch:

$$J(u(\cdot)) = \int_0^{\infty} x^T(t) \cdot Q \cdot x(t) + u^T(t) \cdot R \cdot u(t) dt$$

Die mittlere Zustandsabweichung während des gesamten Steuervorgangs, welches dem Einschwingverhalten entspricht, wird durch den Term $\int_0^{\infty} x^T(t) \cdot Q \cdot x(t) dt$ ausgedrückt.

Durch den Term $\int_0^{\infty} u^T(t) \cdot R \cdot u(t) dt$ wird der Aufwand, im Sinne eines Energiefunktionals, durch die Gegensteuerung u ausgedrückt. Die Matrix Q ist dabei aus $Mat_n(K)$, mit der Einschränkung, dass diese positiv semidefinit sein muss. Die Matrix R ist aus dem Raum $Mat_m(K)$, mit der Eigenschaft, dass diese positiv definit und regulär ist.

Bemerkung 3.4: Bedeutung der Matrizen Q und R .

Die Matrizen Q und R können insofern frei gewählt werden, dass nur die geforderten Bedingungen berücksichtigt werden. Durch die freie Wahl kann man als Anwender die Stellgrößen selektieren, auf deren Regelung insbesondere geachtet werden soll. Einige Beispiele in Abschnitt 2.5 werden dieses Vorgehen darstellen. Mit Hilfe der regulären positiv-definiten Matrix R kann das Energiefunktional festgelegt werden. Je größer der Aufwand der Steuerung gewichtet wird, desto schneller reguliert sich das System in die Ruhelage.

Definition 3.9: Festlegung des Optimierungsproblems:

Eine optimale Regelung gelingt, sofern das Gütefunktional

$$J(u(\cdot), 0, x_0) = \int_0^{\infty} x^T(t) \cdot Q \cdot x(t) + u^T(t) \cdot R \cdot u(t) dt$$

unter der Nebenbedingung $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u, x(0) = x_0$ minimiert wird.

Formal mathematisch kann nun das Minimierungsproblem unter Nebenbedingungen mit Hilfe der Lagrange-Methode gelöst werden. Im Zuge dessen entwickelt sich die Matrix-Riccati-Differentialgleichung:

$$\dot{K}(t) = -A^T(t)K(t) - K(t)A(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) - Q(t),$$

deren Lösung $K(t)$ zur Lösung des Optimierungsproblems führt.

Da der Segway als lineares zeitinvariantes System mathematisch modelliert wird, betrachten wir nun die Lösung des Optimierungsproblems für diesen Spezialfall. Hierzu führen wir zunächst die algebraische Matrix-Riccati-Gleichung ein.

Definition 3.10: Algebraische Matrix-Riccati-Gleichung:

Die algebraische Matrix-Riccati-Gleichung lautet:

$$0 = -A^T K - KA + KBR^{-1}B^T K - Q$$

Mit Hilfe der algebraischen Matrix-Riccati-Gleichung kann eine optimale lineare Zustandsrückführung gelingen, sofern zwei Voraussetzungen erfüllt sind:

1. Die Matrizen $M = BR^{-1}B^T$ und Q müssen positiv semidefinit sein.
2. Ist α ein Eigenwert von A mit $\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$ und p ein zugehöriger Eigenvektor, so gilt $Q \cdot p \neq 0$

Unter diesen Bedingungen gilt nun Satz 3.4:

Satz 3.4: Die Lösung für das Minimierungsproblem aus Definition 3.9

Sofern das System $[A, B]$ stabilisierbar ist und die oben genannten beiden Voraussetzungen gegeben sind, so bestehen folgende Alternativen für die algebraische Matrix-Riccati-Gleichung: Entweder besitzt die algebraische Matrix-Riccati-Gleichung keine Lösung im Bereich der positiv-semidefiniten Matrizen. Oder aber es existiert eine eindeutige positiv-semidefinite Lösung K_∞ . Unter diesen Voraussetzungen kann nun die lineare Zustandsrückführung $u(t) = -Gx(t) = -R^{-1}B^TK_\infty x(t)$ als optimale lineare Zustandsrückführung gewählt werden.

Beweis: Vergleiche Knobloch, Kwakernaak, Lineare Kontrolltheorie, S.220 ff. ■

Bemerkung 3.5: Die LQ-Regelung:

Da die Regelungsstrecke, sowie das System als linear angenommen werden und für dieses über ein quadratisches Gütefunktional eine optimale lineare Zustandsrückführung berechnet wird, nennt man diese Art der optimalen Regelung *Linear-Quadratic-Regulation*, oder auch *LQ-Regelung*.

2.2. Physikalische Kräftegleichungen

Ansatz 1: Der Segway als inverses Pendel auf einem Wagen:

In der Einleitung wurde bereits eine Möglichkeit der Modellierung eines Segways veranschaulicht. Hierzu wird die entsprechende Abbildung nochmals rekapituliert:

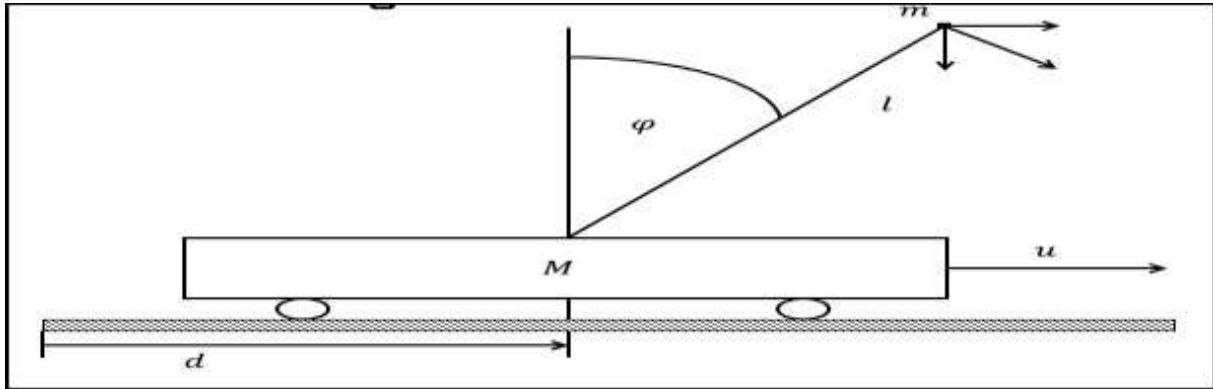


Abbildung 2: Der Segway, modelliert als inverses Pendel auf einem Wagen

In der Abbildung wird der Segway als inverses Pendel auf einem Wagen modelliert. Dabei besitzt der Wagen die Masse M . In dieser Abbildung wird der Wagen durch die Räder, die auf zwei Achsen verteilt sind, bewegt. In der tatsächlichen Umsetzung eines Segway, wie auch des Lego-Segway im Projekt waren die zwei Räder des Segway an einer Achse angebracht. Fernerhin sind in der Abbildung die Größen m und l für die Länge des Pendels und dessen Masse zu erkennen. Die Masse des Pendels wird als konzentriert am Ende des Pendels angenommen. Diese Annahme trifft für den Segway sicher nicht zu, hier wird die Annahme getroffen, dass m den Schwerpunkt des Segway modelliert und l den Abstand der Räder zum Schwerpunkt. Mit der Koordinate d beschreiben wir die aktuelle Position des Segway, sowie mit der Koordinate φ die Neigung des Pendels bezogen auf eine vertikale Ausrichtung des Pendels. u beschreibt schließlich die Ansteuerung mit der der Segway angetrieben wird. Schließlich wirken auf den Segway verschiedene Kräfte, die nun aufgelistet werden:

- Durch die Bewegung des Segway wird eine Beschleunigungskraft auf die Räder und den Schwerpunkt generiert, diese entspricht der Grundgleichung der Mechanik $(M + m) \cdot a$. a entspricht dabei der horizontalen Beschleunigung des Segway.
- Fernerhin bewirkt die Bewegung des Segway durch den Motor, dass eine horizontale Kraft durch die Winkelbeschleunigung auf den Segway wirkt. Diese wird durch den Term $m \cdot l \cdot \cos \varphi \cdot \omega'$ beschrieben, wobei ω' der Winkelbeschleunigung entspricht.
- Durch die Bewegung der Räder wird eine Bewegung des Pendels generiert und somit auch eine rücktreibende Kraft für die Pendelbewegung. Diese Kraft wird durch den Term $-m \cdot l \cdot \omega^2 \cdot \sin \varphi$ beschrieben.

Die drei aufgelisteten Kräfte werden durch eine Bewegung der Räder, also einer horizontalen Bewegung des Segway generiert. Demnach lassen sich die drei Kräfte zu einer ersten Kräftegleichung aufsummieren: $u = (M + m) \cdot a + m \cdot l \cdot \cos \varphi \cdot \omega' - m \cdot l \cdot \omega^2 \cdot \sin \varphi$

Weiterhin werden durch eine Pendelbewegung Radialkräfte generiert. Diese werden nun ebenfalls kurz aufgelistet:

- Jede Radialbewegung generiert eine Radialkraft, die wieder dem 2. Newtonschen Axiom entspricht: $m \cdot l \cdot \omega'$.
- Durch die horizontale Beschleunigung des Wagens wird eine Radialkraft auf den Schwerpunkt des Pendels ausgeübt. Diese Kraft besitzt folgenden Term $m \cdot \cos \varphi \cdot a$
- Schließlich wirkt noch die Gravitationskraft auf den Schwerpunkt, beschrieben durch folgenden Term $m \cdot g \cdot \sin \varphi$. g entspricht dabei der Gravitationskonstanten

$$g = 9,81 \frac{m}{s^2}.$$

Die Radialkräfte lassen sich ebenfalls zu einer Kräftegleichung zusammenfassen. Diese lautet: $m \cdot g \cdot \sin \varphi = m \cdot l \cdot \omega' + m \cdot \cos \varphi \cdot a$

Zu beachten ist hierbei, dass eine Rollreibung der Räder vernachlässigt wird.

Mit Hilfe dieser beiden Gleichungen ist es möglich ein lineares zeitinvariantes System aufzustellen. Bevor dies geschieht werden jedoch noch zwei leicht abweichende physikalische Modellierungen vorgestellt.

Ansatz 2: Vereinfachtes Modell des Segway als inverses Pendel auf einem Wagen:

Der zweite Ansatz den Segway zu modellieren geht zunächst einmal von der gleichen Übertragung des Segway auf ein inverses Pendel auf einem Wagen aus. Jedoch trifft man hierbei zwei Vereinfachungen, nämlich jene dass sämtliche rücktreibende Kräfte, sowie jegliche Radialkräfte vernachlässigt werden. Es werden schließlich nur die horizontalen Bewegungskräfte auf den Schwerpunkt und die Räder betrachtet. So gelangt man zu folgenden zwei Kräftegleichungen: $u = M \cdot \ddot{s}$, sowie $m \cdot \ddot{d} = m \cdot g \cdot \tan \varphi$. Die Terme \ddot{s} , sowie \ddot{d} entsprechen der horizontalen Beschleunigung der Räder (\ddot{s}) und des Schwerpunktes (\ddot{d}).

Ansatz 3: Modellierung von Radialkräften beim inversen Pendel:

Eine abschließende physikalische Modellierung greift den Aspekt der Regulierung der Neigung des Segways auf. Somit werden ausschließlich die Radialkräfte beim inversen Pendel betrachtet. Zunächst wird eine entsprechende Abbildung eingeführt.

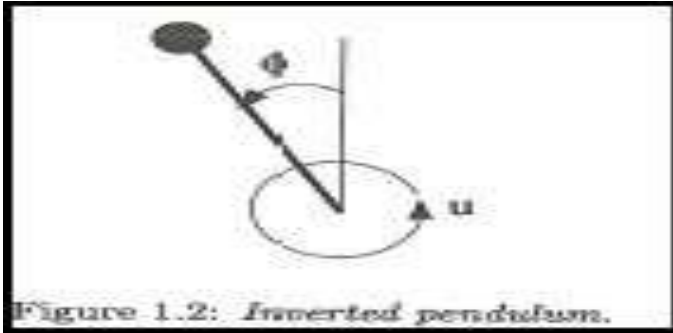


Abbildung 3: Das inverse Pendel

Eine Bewegung durch die Motoransteuerung u bewirkt eine Radialbewegung des Pendels. Dadurch entstehen Radialkräfte, die im folgenden Term zusammengefasst werden können: $u = m \cdot \ddot{\varphi} - m \cdot g \cdot \sin(\varphi)$. Der Term $m \cdot \ddot{\varphi}$ entspricht der Grundgleichung der Mechanik, wobei der Ausdruck $\ddot{\varphi}$ der Winkelbeschleunigung entspricht, sowie der Term $-m \cdot g \cdot \sin(\varphi)$ der entsprechenden rücktreibenden Kraft. In dieser Modellierung werden jegliche horizontale Bewegungen des Segways, verbunden mit entsprechenden Bewegungskräften vernachlässigt. Lediglich eine Modellierung von Radialkräften wird in diesem Ansatz berücksichtigt. Für jedes der drei physikalischen Modelle ist es nun möglich ein lineares zeitinvariantes System aufzustellen, was im folgenden Abschnitt 2.3. geschieht.

2.3. Aufstellen des Zustandsraumsystems

Ansatz 1:

In diesem ersten Ansatz sind zwei Kräftegleichungen erarbeitet worden:

$$u = (M + m) \cdot a + m \cdot l \cdot \cos(\varphi) \cdot \omega' - m \cdot l \cdot \omega^2 \cdot \sin(\varphi) \quad (2.3.1)$$

$$0 = m \cdot l \cdot \omega' + m \cdot \cos(\varphi) \cdot a - m \cdot g \cdot \sin(\varphi) \quad (2.3.2)$$

Nun gilt zunächst, dass die horizontale Beschleunigung a als zweite Ableitung der Position s , also mit $a = \ddot{s}$ ausgedrückt werden kann und die Winkelgeschwindigkeit ω , beziehungsweise die Winkelbeschleunigung ω' in Abhängigkeit des Winkels φ ($\omega = \dot{\varphi}$, $\omega' = \ddot{\varphi}$) ausgedrückt werden kann. Durch diese Umformung wird eine nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung formuliert:

$$\begin{pmatrix} (m+M) & m \cdot l \cdot \cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & l \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{s} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + m \cdot l \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin(\varphi) \\ g \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad (2.3.3)$$

Zu beachten ist, dass die Matrix $A = \begin{pmatrix} (m+M) & m \cdot l \cdot \cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & l \end{pmatrix}$ invertierbar für jeden Winkel φ ist, denn unter der offensichtlichen Bedingung, dass die Größen l (Länge des Segway), M (Masse der Räder), sowie m (Masse des Schwerpunktes) positiv sind, ist die De-

terminante der Matrix A , $\det(A) = (M + \sin^2(\varphi) \cdot m) \cdot l$ stets positiv. Also kann die Gleichung (2.3.3) äquivalent formuliert werden als:

$$\begin{pmatrix} \ddot{s} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(M + m \cdot \sin^2(\varphi))} & \frac{-m \cdot \cos(\varphi)}{(M + m \cdot \sin^2(\varphi))} \\ \frac{-\cos(\varphi)}{(M + m \cdot \sin^2(\varphi)) \cdot l} & \frac{(m + M)}{(M + m \cdot \sin^2(\varphi)) \cdot l} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u + m \cdot l \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin(\varphi) \\ g \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad (2.3.4)$$

Nun ist das Ziel die Gleichung 2.3.4 durch geeignete Linearisierungen zu vereinfachen. Mathematisch formal bestimmt man eine Taylorreihenentwicklung für die Variablen s , φ , \dot{s} , $\dot{\varphi}$ um den Entwicklungspunkt 0 vom Grad 1. Allgemein kann eine Taylorreihenentwicklung der Funktion $f(x)$ vom Grad 1 um den Entwicklungspunkt 0 folgendermaßen beschrieben werden: $T_{f,0}^1(x) = f(0) + f'(0) \cdot x$. Wird die Taylorentwicklung auf die oben genannten Variablen angewendet, so ergeben sich folgende Linearisierungen:

$$\begin{aligned} T_{\sin(\varphi)^2,0}^1(\varphi) &= \sin(0)^2 + 2 \cdot \sin(0) \cdot \cos(0) \cdot \varphi = 0 \\ T_{\sin(\varphi),0}^1(\varphi) &= \sin(0) + \cos(0) \cdot \varphi = \varphi \\ T_{\cos(\varphi),0}^1(\varphi) &= \cos(0) - \sin(0) \cdot \varphi = 1 \\ T_{\dot{\varphi}^2,0}^1(\dot{\varphi}) &= 0^2 + 2 \cdot 0 \cdot \dot{\varphi} = 0 \end{aligned}$$

Werden die oben aufgeführten Taylorreihenentwicklungen vom Grad 1 betrachtet, so lässt sich das linearisierte Differentialgleichungssystem folgendermaßen formulieren:

$$\begin{pmatrix} \ddot{s} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{M} & \frac{-m}{M} \\ -1 & \frac{(M + m)}{Ml} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ g \cdot \varphi \end{pmatrix} \quad (2.3.5)$$

Diese Differentialgleichung 2. Ordnung kann nun in ein lineares zeitinvariantes System transformiert werden, indem der Zustandsvektor $x = (s \quad \varphi \quad \dot{s} \quad \dot{\varphi})^T$ gewählt wird. So erhält man folgendes System:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{s} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{m \cdot g}{M} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(M + m) \cdot g}{M \cdot l} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ \varphi \\ \dot{s} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \\ \frac{-1}{M \cdot l} \end{pmatrix} \cdot u \quad (2.3.6)$$

In dieser Modellierung können die Position der Räder, sowie die Position des Schwerpunktes als zu messenden Ausgang y des Systems aufgefasst werden, für diesen gilt dann: $y = s + l \cdot \sin(\varphi)$ und mit der bereits bekannten Linearisierung $\sin(\varphi) \approx \varphi$ erhält

man so die Gleichung $y = (1 \quad l \quad 0 \quad 0) \cdot x$, und insgesamt das zeitinvariante, lineare System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A \cdot x + B \cdot u \\ y &= C \cdot x\end{aligned}$$

Ansatz 2:

In diesem Ansatz ist es das Ziel eine Regulierung des Segways über die Position der Räder (s) und des Schwerpunktes (d) zu erzielen. Hierbei wurden die beiden Gleichungen $u = M \cdot \ddot{s}$, sowie $m \cdot \ddot{d} = m \cdot g \cdot \tan(\varphi)$ erarbeitet. Für die Tangensfunktion gilt nun folgender Ausdruck: $\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} \approx \sin(\varphi) = \frac{d-s}{l}$. Die Vereinfachung $\tan(\varphi) \approx \sin(\varphi)$ gilt für kleine Winkel φ , da für kleine Winkel φ , die Annahme $\cos(\varphi) \approx 1$ getroffen werden kann. Somit erhält man folgendes lineare zeitinvariante System:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{d} \\ \ddot{s} \\ \ddot{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{g}{l} & \frac{-g}{l} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ d \\ \dot{s} \\ \dot{d} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot u \quad (2.3.7)$$

In diesem Ansatz gilt für den zu messenden Ausgang y folgender Zusammenhang, welcher äquivalent ist zu dem zu messenden Ausgang in Ansatz 1: $y = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0) \cdot x$.

Ansatz 3:

Für den dritten Ansatz wird zunächst kein lineares zeitinvariantes System aufgestellt. Die Regulierung des Winkels und damit des Segways als inverses Pendel kann bei diesem Ansatz über eine proportional-derivative Kontrolle (kurz PD-Kontrolle) erfolgen. Zunächst wird jedoch eine geeignete Linearisierung des Terms $u = m \cdot \ddot{\varphi} - m \cdot g \cdot \sin(\varphi)$ vorgenommen, indem eine Taylorreihenentwicklung vom Grad 1 um den Entwicklungspunkt 0 der Sinus-Funktion gewählt wird und somit die Gleichung $u = m \cdot \ddot{\varphi} - m \cdot g \cdot \varphi$ erhalten wird. Die Steuerung dieses Ansatzes erfolgt in Abschnitt 2.4.

2.4. Regelung und Kontrollierbarkeit des Systems

Ansatz 1:

Das lineare zeitinvariante System $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$ wird zunächst auf Stabilität überprüft. Dazu wird zunächst das Spektrum der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{m \cdot g}{M} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(M+m) \cdot g}{M \cdot l} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

betrachtet. Dieses hat folgende Gestalt: $\sigma(A) = \left\{ 0; 0; \sqrt{\frac{(M+m) \cdot g}{M \cdot l}}; -\sqrt{\frac{(M+m) \cdot g}{M \cdot l}} \right\}$.

Der Eigenwert 0 besitzt die algebraische Vielfachheit 2, sowie die geometrische Vielfachheit 1. Das Spektrum enthält ferner einen echt positiven Eigenwert. Somit ist das lineare zeitinvariante System nach Satz 3.1 instabil. Ergänzend werden noch die Jordanform J der Matrix A , sowie die Eigenvektoren, eingespeichert in den Spalten der Transformationsmatrix V dargestellt:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{(M+m) \cdot g}{M \cdot l}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{(M+m) \cdot g}{M \cdot l}} \end{pmatrix};$$

$$V = \begin{pmatrix} \frac{M \cdot m}{M+m} & 0 & \sqrt{\frac{25 \cdot M^3 \cdot l \cdot m^2}{3 \cdot (M+m)^3}} & -\sqrt{\frac{25 \cdot M^3 \cdot l \cdot m^2}{3 \cdot (M+m)^3}} \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{25 \cdot M^3 \cdot l \cdot m^2}{3 \cdot (M+m)^3}} & \sqrt{\frac{25 \cdot M^3 \cdot l \cdot m^2}{3 \cdot (M+m)^3}} \\ 0 & \frac{M \cdot m}{M+m} & \frac{-M \cdot m}{2 \cdot (M+m)} & \frac{-M \cdot m}{2 \cdot (M+m)} \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Nun wird die Steuerbarkeit des Systems untersucht. Da es sich hierbei um ein lineares zeitinvariantes System handelt, wird der Rang der Kalman-Matrix K bestimmt. Ist der Rang der Kalman-Matrix voll (also in diesem Fall 4), so ist das System steuerbar. Die Kalman-Matrix K hat folgende Gestalt:

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{M} & 0 & \frac{m \cdot g}{M \cdot l^2} \\ 0 & \frac{-1}{M \cdot l} & 0 & \frac{-(M+m) \cdot g}{(M \cdot l)^2} \\ \frac{1}{M} & 0 & \frac{m \cdot g}{M \cdot l^2} & 0 \\ \frac{-1}{M \cdot l} & 0 & \frac{-(m+m) \cdot g}{(M \cdot l)^2} & 0 \end{pmatrix}$$

Die Kalman-Matrix in diesem zeitinvarianten linearen System besitzt die Determinante $\det(K) = -\frac{g^2 \cdot (M \cdot l - M \cdot m + l \cdot m)^2}{(M \cdot l)^6} \neq 0$. Also hat die Kalman-Matrix vollen Rang und somit ist das zeitinvariante lineare System steuerbar.

Um eine Stabilisierbarkeit durch Zustandsrückführung zu erreichen, wird nun Satz 3.2 (Polvorgabe/Ackermann) angewandt. Dies ist möglich, da das lineare zeitinvariante System steuerbar ist. Zunächst wählen wir uns ein Polynom, dessen Nullstellen alle einen negativen Realteil besitzen, beispielsweise folgendes Polynom

$P(s) = (s+1) \cdot (s+2) \cdot (s+3) \cdot (s+4) = s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24$. Die Nullstellen dieses Polynom entspricht der Menge $\{-1; -2; -3; -4\}$, also sind alle Nullstellen negativ. Im nächsten Schritt berechnen wir die Feedback-Matrix F mit Hilfe der Formel $F = e_n^T \cdot K^{-1} \cdot P(A)$. Die einzelnen Einträge der Matrix F können mit Matlab berechnet werden und man erhält eine Matrix der Dimension 1×4 der Form $F = (F_1, F_2, F_3, F_4)$:

$$F_1 = \frac{-800M^2l^2}{327(Ml - Mm + ml)}$$

$$F_2 = 100M^2l^2 \cdot \left(\frac{6867m}{20l} + \frac{9,81 \cdot \left(\frac{9,81(m+M)}{Ml^2} \right)}{981(Ml - Mm + ml)} - \left(100M^2l^3 \left(\frac{(9,81(M+m))^2}{M^2l^2} \right) + \left(\frac{35 \cdot 9,81(M+m)}{981(Ml - Mm + ml)} \right) \right) \right)$$

$$F_3 = \frac{-5000M^2l^2}{981(Ml - Mm + ml)}$$

$$F_4 = \frac{10M^2lm}{Ml - Mm + ml} - (100M^2l^3) \cdot \left(\frac{10 \cdot \left(\frac{9,81(M+m)}{Ml + 50} \right)}{981(Ml - Mm + ml)} \right)$$

Die Kontrollierbarkeit des zeitinvarianten linearen Systems $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$ mit der Bedingung, dass die Kontrollfunktion u skalar ist, garantiert die Stabilisierung des Systems über eine entsprechende Zustandsrückführung. Nach Satz 3.2 entspricht das charakteristische

Polynom der Matrix $A - B \cdot F$ genau dem Polynom $P(s)$, dessen Nullstellen allesamt einen negativen Realteil besitzen. Durch Konstruktion konnte also bei einer fest vorgegebenen Polvorgabe eine Steuerung des Systems über Zustandsrückführung gelingen, die zu einer asymptotischen Stabilität des linearen zeitinvariantem System führt. Somit ist ein Segway, modelliert durch geeignete Linearisierungen, als lineares zeitinvariantes System theoretisch stabilisierbar. Diese Stabilisierung gelingt auch über eine Modellierung nach Ansatz 2.

Ansatz 2:

Im zweiten Ansatz wurde das lineare zeitinvariante System

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{d} \\ \ddot{s} \\ \ddot{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{g}{l} & \frac{-g}{l} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ d \\ \dot{s} \\ \dot{d} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot u \quad (2.3.7)$$

unter Berücksichtigung der horizontalen Bewegungskräfte des Segway herausgearbeitet. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{g}{l} & \frac{-g}{l} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat dabei die Jordanform

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} \end{pmatrix}.$$

Es ist an Hand der Jordan-Form erkennbar, dass das System, ohne eine Steuerung ($u \equiv 0$) instabil ist, da der Eigenwert 0 die algebraische Vielfachheit 2, jedoch der zugehörige Eigenraum die Dimension 1 besitzt. Die zu diesem linearen zeitinvarianten System zugehörige Kalman-Matrix besitzt die Form

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{g}{l \cdot M} \\ \frac{1}{M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{g}{l \cdot M} & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Rang der Kalman-Matrix ist voll, da alle Spalten der Kalman-Matrix offensichtlich linear unabhängig sind. Somit ist auch das lineare zeitinvariante System nach Ansatz 2 steuerbar. Da das System steuerbar ist, ist Satz 3.2 erneut anwendbar. Wählt man sich das Polynom $P(s) = (s+1)^4 = s^4 + 4 \cdot s^3 + 6 \cdot s^2 + 4 \cdot s + 1$, welches die Nullstelle -1 mit algebraischer Vielfachheit 4 besitzt, so erhält man unter Verwendung der Formel $F = e_n^T \cdot K^{-1} \cdot P(A)$ folgende Feedback-Matrix:

$$F = \left(-\frac{Mg}{l} + 6M, \frac{M \cdot (g^2 - 6 \cdot g \cdot l + l^2)}{g \cdot l}, 4M, \frac{-4M(g-l)}{g} \right).$$

Somit ist auch das lineare zeitinvariante System nach Ansatz 2 durch eine lineare Zustandsrückführung stabilisierbar. Also gelingt auch bei dieser mathematischen Modellierung eine Stabilisierung des Segways.

Ansatz 3:

Der linearisierte Ansatz der Modellierung des Segway als inverses Pendel und dessen Kontrolle über eine Kontrolle des Winkels führte zu der Gleichung $u = m \cdot \ddot{\varphi} - m \cdot g \cdot \varphi$. Zunächst wird die Annahme betrachtet, dass auf diesen Ansatz des inversen Pendels keine äußere Kontrolle, also $u \equiv 0$ wirkt. Unter diesen Voraussetzungen erhält man eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung: $0 = m \cdot \ddot{\varphi} - m \cdot g \cdot \varphi$, die als ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung formuliert werden kann:

$$\begin{aligned} 0 &= m \cdot \ddot{\varphi} - m \cdot g \cdot \varphi \\ \Leftrightarrow \ddot{\varphi} &= g \cdot \varphi \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g & 0 \end{pmatrix}$ besitzt die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{g}$. Somit ist die Lösung

$\varphi(t) = c_1 \cdot e^{-\sqrt{g} \cdot t} + c_2 \cdot e^{\sqrt{g} \cdot t}$ instabil. Damit ist auch die nichtlineare Differentialgleichung ohne äußere Kontrolle instabil. Nun besteht der Ansatz der proportionalen Kontrolle darin, der aktuellen Neigung des Segway entgegen zu wirken. Man wählt nun also den An-

satz $u = -\alpha \cdot \varphi$ und erhält somit ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung mit folgen-

der Gestalt:
$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g - \frac{\alpha}{m} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g - \frac{\alpha}{m} & 0 \end{pmatrix}$ besitzt die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{g - \frac{\alpha}{m}}$. Man kann nun durch

die Wahl von $\alpha > m \cdot g$ eine stabile Lösung generieren, da unter dieser Bedingung beide Eigenwerte rein imaginär wären. Da jedoch die Stabilität der linearen Differentialgleichung keinerlei Aussagen bezüglich der Stabilität des nichtlinearen Systems zulässt, wird die proportionale Kontrolle auf die proportional-derivative Kontrolle erweitert, indem der Neigung und der Winkelgeschwindigkeit entgegengesteuert werden. Dazu wird der Ansatz $u = -\beta \cdot \dot{\varphi} - \alpha \cdot \varphi$ gewählt. Somit erhält man folgende lineare Differentialgleichung 2. Ordnung $0 = m \cdot \ddot{\varphi} + \beta \cdot \dot{\varphi} - (m \cdot g - \alpha) \cdot \varphi$. Wird diese Differentialgleichung in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung transformiert erhält man nachfolgende Gleichung:

Die Eigenwerte dieser Matrix sind

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g - \frac{\alpha}{m} & -\frac{\beta}{m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta}{2m} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \left(\frac{\alpha}{m} - g\right)}$. Beide Eigenwerte sind echt negativ, wenn zwei Bedingungen erfüllt sind:

1. $\alpha > m \cdot g$
2. $\frac{\beta^2}{4m^2} - \left(\frac{\alpha}{m} - g\right) \geq 0$

Unter Berücksichtigung der ersten Voraussetzung ist es nun möglich eine Einschränkung für β zu treffen, indem $\varepsilon = \frac{\alpha}{m} - g > 0$ gewählt wird. Somit gilt für β : $\beta^2 \geq 4 \cdot m^2 \cdot \varepsilon$.

Durch die proportional-derivative Kontrolle gelingt es unter geeigneten Bedingungen an die Parameter α und β die Lösung der linearen Differentialgleichung asymptotisch stabil zu gestalten. Nach Satz 2.6 ist somit auch die Lösung der zugehörigen nichtlinearen Differentialgleichung asymptotisch stabil, also gelingt eine Stabilisierung des Segway als inverses Pendel über eine proportional-derivative Kontrolle.

2.5. Optimale Regelung

Im abschließenden Unterkapitel der mathematischen Modellierungen werden optimierte Regelungstechniken für den Segway vorgestellt. Insbesondere werden verschiedene Ansätze für die LQ-Regelung, sowie die Regelung des Segways über eine geschickte Polzu-

weisung beleuchtet. Zunächst werden jedoch die getroffenen Annahmen an den Segway dargelegt. Dabei sind die Annahmen an einen der Segways orientiert, der im Projekt realisiert wurde. Die Masse der Räder werden mit $M = 0.2 [kg]$ und die Masse des Schwerpunktes auf $m = 0.4 [kg]$ angenommen. Die Länge des Segways wird auf $l = 0.5 [m]$ gesetzt und die Gravitationskonstante ist bekanntlich $g = 9.81 [m/s^2]$. Der Segway soll aus der Startposition $x_0 = (0 \ 1 \ 0 \ 0)^T$ gesteuert werden. Der Anfangszustand x_0 wird sowohl für Ansatz 1, als auch für Ansatz 2 angenommen. Hierbei ist der Unterschied für den Zustandsvektor in beiden Ansätzen zu beachten. Im anschließenden ersten Unterkapitel werden die Ergebnisse für eine LQ-Regelung dargestellt.

2.5.1. LQ-Regelung

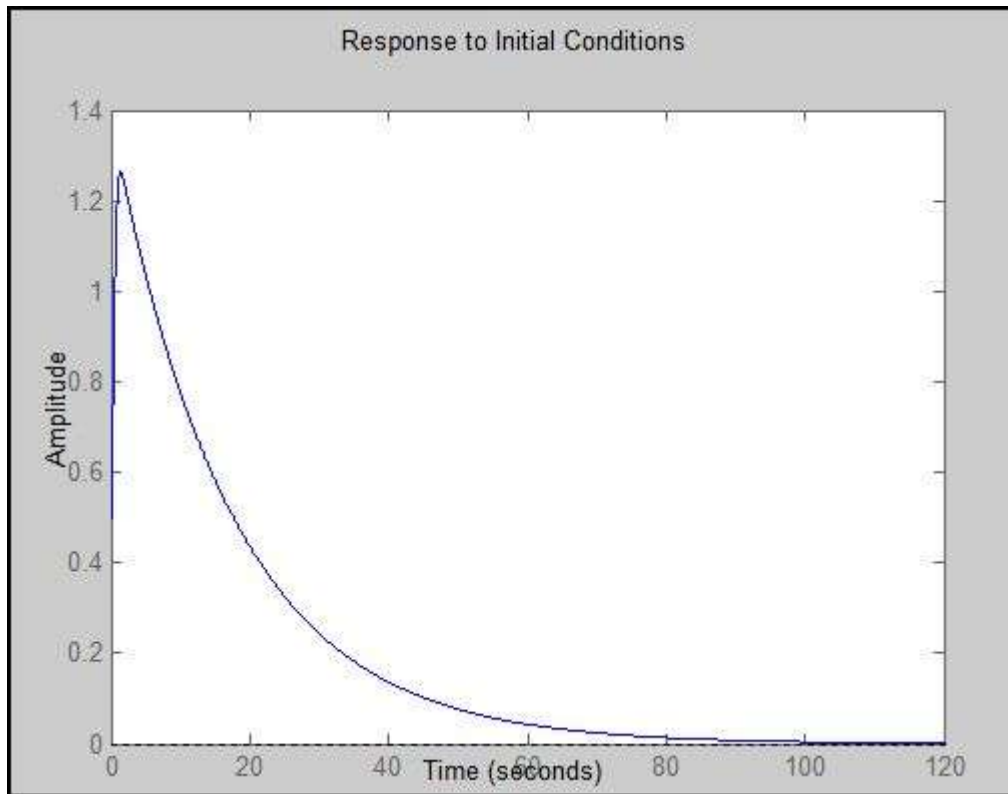
Ansatz 1:

Wir betrachten das lineare zeitinvariante System

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{s} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{m \cdot g}{M} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(M+m) \cdot g}{M \cdot l} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ \varphi \\ \dot{s} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \\ \frac{-1}{M \cdot l} \end{pmatrix} \cdot u$$

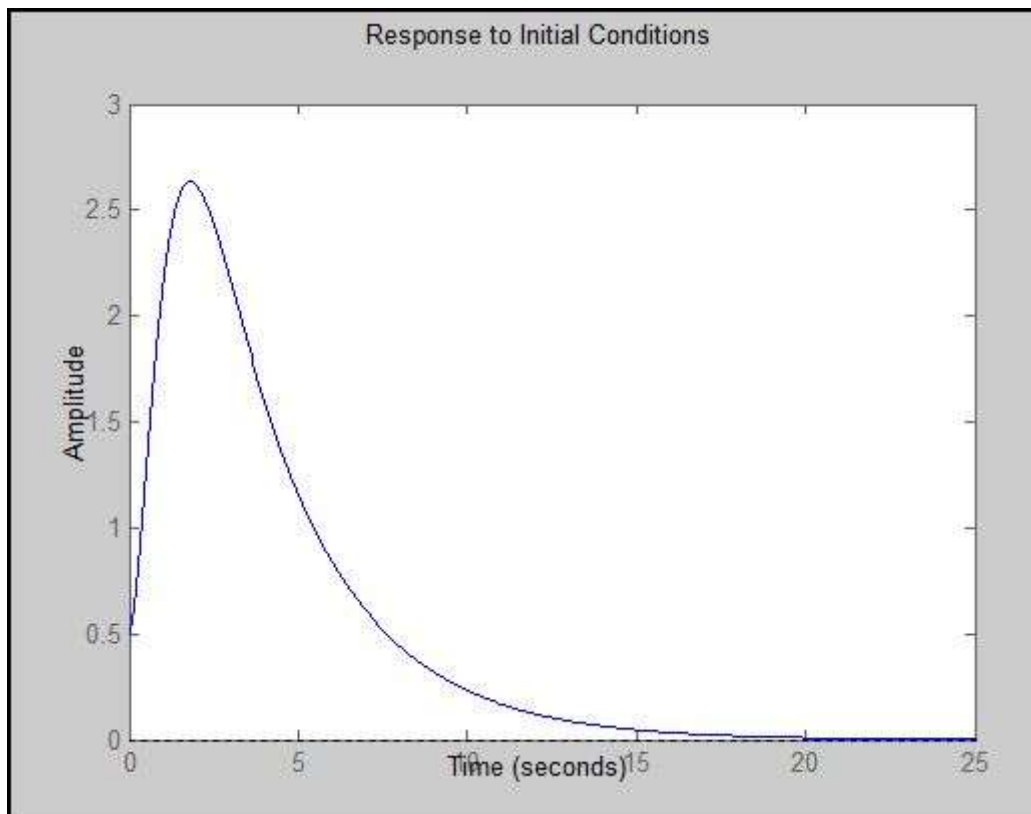
$$y = (1 \ l \ 0 \ 0)x$$

Um die gewünschte Eigenschaft der positiven Definitheit der Matrix R und der semipositiven Definitheit der Matrix Q zu garantieren, werden jeweils Diagonalmatrizen mit (semi)-positiven Einträgen gewählt. Durch diese Wahl der Matrizen, gewichten die Einträge auf der Diagonalen der Matrix Q die Regelungsgüte der entsprechenden Komponenten des Zustandsvektors. Da die Ansteuerung u skalar ist kann auch die Matrix R skalar gewählt werden. Die Ergebnisse für verschiedene Gewichtungen der Komponenten des Zustandsvektors werden kurz skizziert.



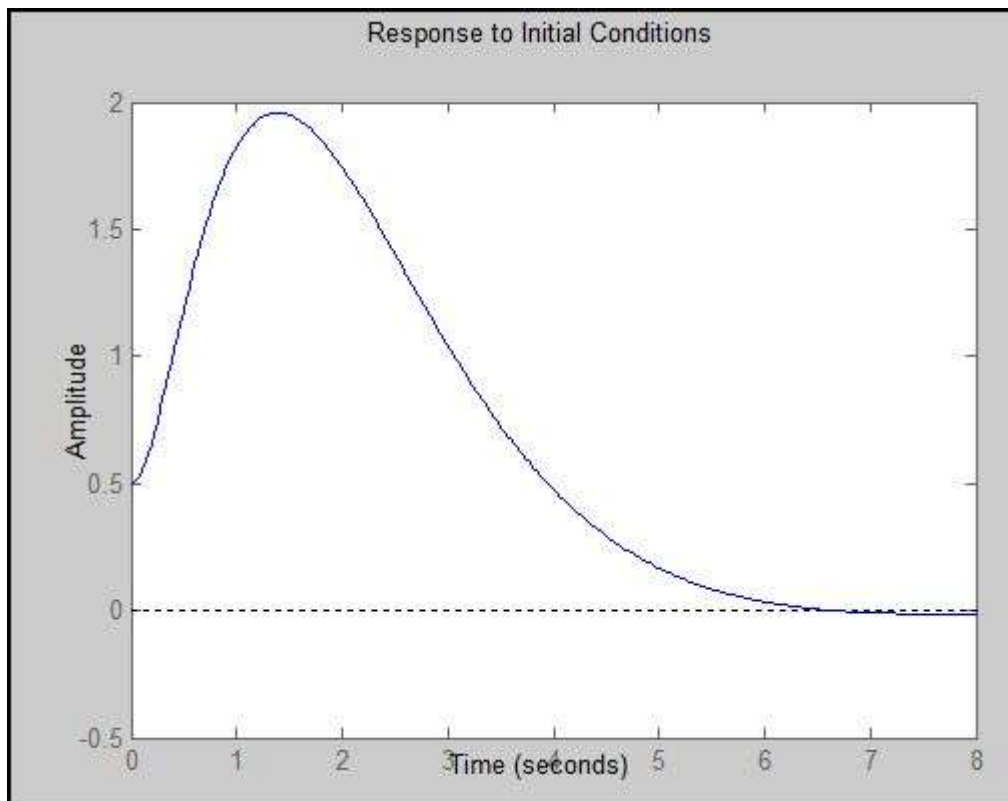
Funktionsplot 1: $Q = \text{diag}(1 \ 0 \ 300 \ 100)$, $R = I$

An Hand der Einträge der Matrix Q zeigt sich, dass in diesem ersten Ansatz die Regelung der horizontalen Geschwindigkeit, sowie der Winkelgeschwindigkeit mit einem großen Faktor gewichtet wird. Die Gewichtung des Ortes ist marginal, die Gewichtung des Winkels verschwindet gar. Dies zeigt, dass eine Stabilisierung des Winkels des Segways zwar gelingt, dieser Prozess jedoch an die 2 Minuten andauert. Die lange Stabilisierungsdauer erklärt sich ebenso dadurch, dass der Regelung der horizontalen Geschwindigkeit eine große Rolle zugesprochen wird. Durch die große Gewichtung der horizontalen Geschwindigkeit, soll eine Regelung des Winkels nahezu starr an einem fixen Ort geschehen. Physikalisch betrachtet ist dieses Vorgehen nicht sinnvoll, da die Steuerung des Winkels durch nichtdeterministische Größen, wie beispielsweise Luftströmungen, oder Unebenheiten der Oberfläche, beeinflusst wird. Lässt man den Ort nun fix, so gelingt eine Steuerung des Winkels nur schwierig. Wird die lange Regelungsdauer, ohne Berücksichtigung nichtdeterministischer Größen, betrachtet, so ist zu bilanzieren, dass diese Wahl der Gewichtungsmatrix Q , auf Grund der Starrheit des Ortes nicht zu einer sehr guten Regelung des Segways führen wird. Ausgehend von diesen Überlegungen wurde ein zweiter Gewichtungsansatz gewählt, indem der Regelung des aktuellen Winkels eine höhere Bedeutung zugewiesen wird. Unter Beachtung der Tatsache, dass der Ort für die Steuerung des Winkels vernachlässigt werden kann, werden der horizontale Ort, sowie die horizontale Geschwindigkeit entsprechend niedrig gewichtet. So erhält man eine wesentlich schnellere Stabilisierung des Winkels, wie Funktionsplot 2 belegt.



Funktionsplot 2: $Q=diag(1,300,10,100)$, $R=1$

Funktionsplot 2 zeigt, dass eine höhere Gewichtung der Regelung des Winkels tatsächlich eine raschere Regelung insgesamt bewirkt. Jedoch zeigt sich auch, dass zuvor eine große Amplitude, zu Beginn des Steuerungsprozess, auftritt. So erhöht sich die Amplitude während des Steuerungsvorgangs zwischenzeitlich auf mehr als das fünffache der ursprünglichen Neigung. Bei einer angenommenen Anfangsneigung von 1° kann davon ausgegangen werden, dass der Segway sich stabilisieren wird. Ist die Neigung zu Beginn des Steuerungsprozess jedoch wesentlich größer, beispielsweise 10° , so werden die Erdanziehungskräfte, im Laufe des Regelungsprozess zu groß, um eine Gegensteuerung zu realisieren. Also ist bei dieser Regelung darauf zu achten, dass der Segway zu Beginn des Steuerungsprozess nahezu vertikal positioniert wird, denn andernfalls gelingt eine Steuerung theoretisch, jedoch können die physikalischen Kräfte während der Steuerung auf Grundlage der großen Amplitude dazu führen, dass der Segway schlichtweg umkippt. Das Ziel war es nun die Erkenntnisse aus den ersten beiden Ansätzen zu kombinieren. Um die Stabilisierung des Segways zu garantieren, ist eine Regelung des Winkels essentiell. Dabei soll die Regelung jedoch nicht an einen fixen Ort gebunden sein. Bemisst man aber die Regelung des Winkels und der Winkelgeschwindigkeit zu groß, so entstehen während des Regelungsprozess große Amplituden, die bei zu großer Anfangsneigung eine praktische Regelung verhindern. Diese beiden Erkenntnisse sind in eine dritte Regelung integriert worden. Das Ergebnis der Regelung gibt Funktionsplot 3 wieder.



Funktionsplot 3: $Q=diag(1,100,1,10)$, $R=1$

Funktionsplot 3 gibt Aufschluss, dass durch eine geringere Wichtung des Winkels (Faktor 1/3) und der Winkelgeschwindigkeit (Faktor 1/10) eine bessere Regelung des Segways gelingt. Die Zeitspanne der Regelung beträgt knapp 6 Sekunden. Die Amplitude wird während diesem Steuerungsprozess um weniger als das Vierfache gegenüber der Anfangsneigung größer. Auch dies ist eine Verbesserung gegenüber dem zweiten Ansatz. Dennoch ist in diesem Ansatz darauf zu achten, dass der Segway zu Beginn der Steuerung nahezu vertikal positioniert wird. Der Spielraum für eine praktische Stabilisierung ist jedoch gegenüber dem zweiten Stabilisierungsansatz, bezüglich der Anfangsneigung größer. Insgesamt liefert diese Wahl der Gewichtungsmatrix Q die besten der drei vorgestellten Stabilisierungsergebnisse für den Segway.

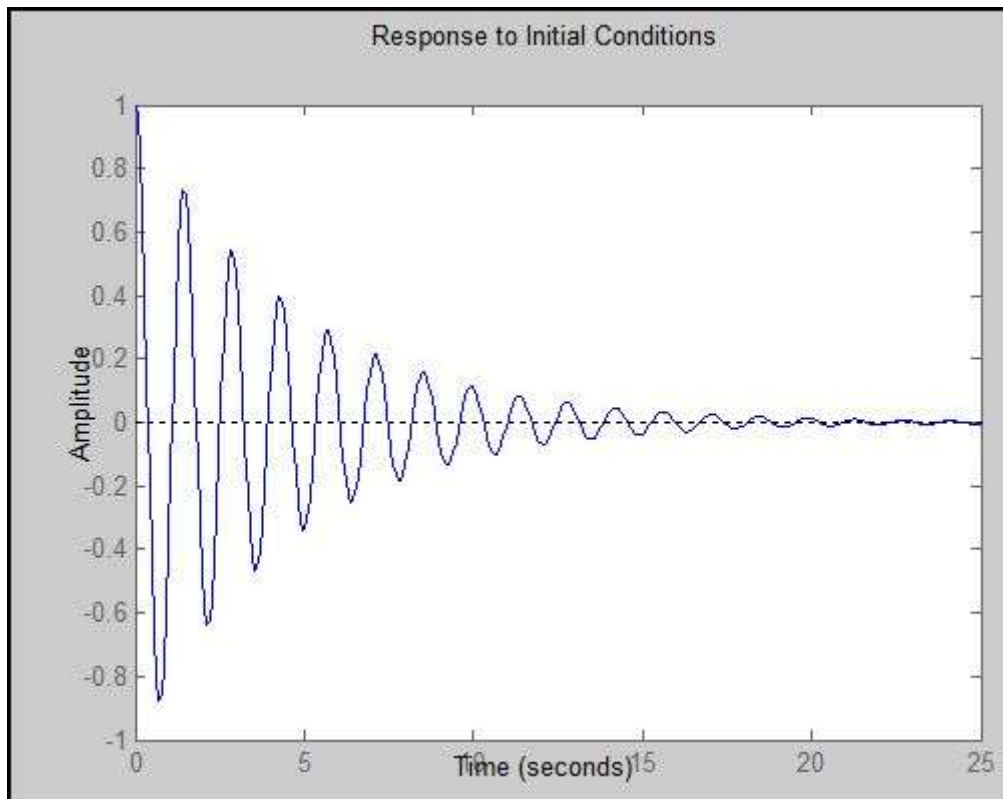
Ansatz 2:

Zunächst wird das lineare zeitinvariante System rekapituliert:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{d} \\ \ddot{s} \\ \ddot{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{g}{l} & \frac{-g}{l} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ d \\ \dot{s} \\ \dot{d} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot u$$

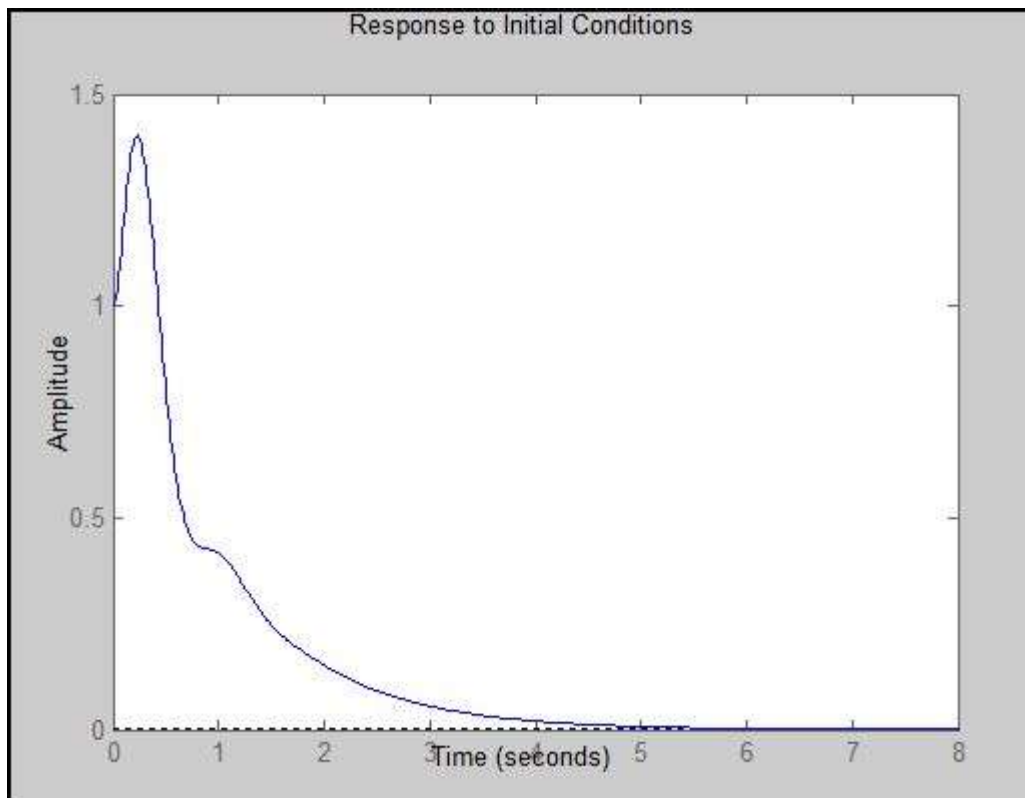
$$y = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0) \cdot x$$

Die Komponente s entspricht der horizontalen Position der Räder, die Komponente d entspricht der horizontalen Position des Schwerpunktes. Zunächst wird der Ansatz beleuchtet, die horizontale Position der Räder nahezu fix zu halten. Es ergibt sich folgender Funktionsplot.



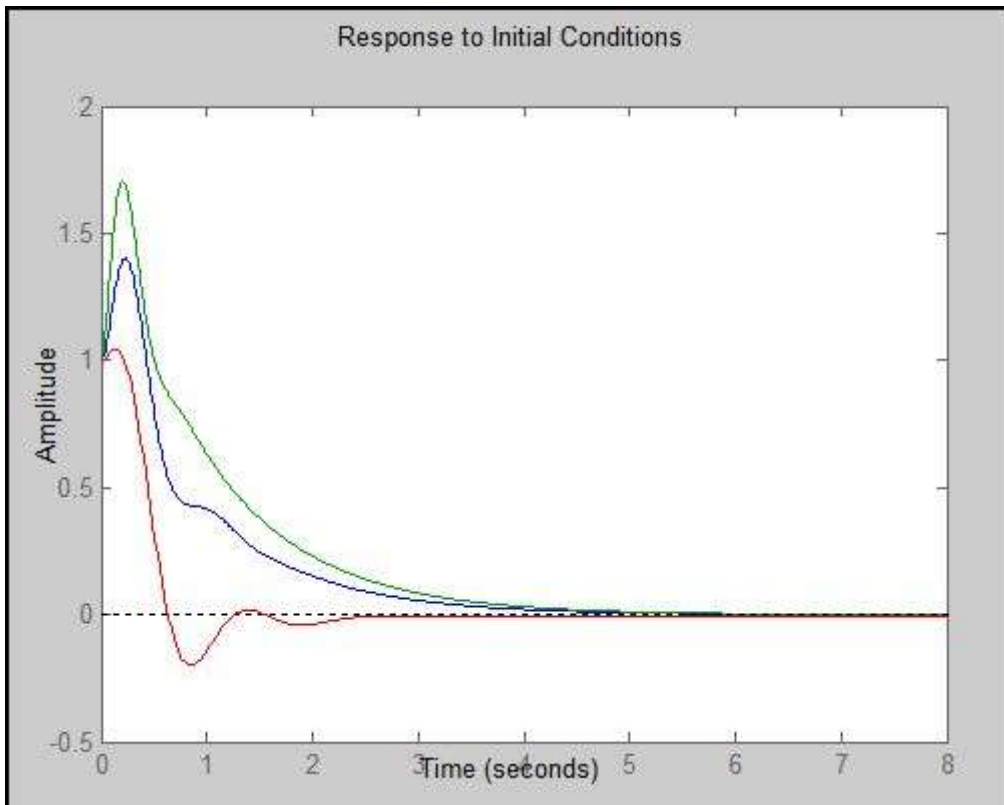
Funktionsplot 4: $Q=\text{diag}(100,1,100,1)$, $R=1$

Will man einen Segway stabilisieren mit der Bedingung, dass die horizontale Position der Räder nahezu fix gehalten werden soll, so erscheint es sinnvoll, dass die Stabilisierung der horizontalen Position des Schwerpunktes über gedämpfte Schwingungen realisiert werden muss. Exakt dies belegt Funktionsplot 4. Durch die Fixierung der Räderposition kann lediglich die gedämpfte oszillierende Bewegung des Schwerpunktes eine Stabilisierung bewirken. Da jedoch in der praktischen Umsetzung die Position des Schwerpunktes durch die Bewegung der Räder bedingt wird, erscheint dieser Ansatz weniger sinnvoll. Begründet wird dies mit der Tatsache, dass die Oszillation des Schwerpunktes nur über eine Bewegung der Räder realisiert werden kann. Eine Fixierung der Räder wird in der Praxis keine gedämpfte Oszillation der Position des Schwerpunktes bewirken. Insgesamt zeigt diese Wahl der Gewichtungsmatrix Q , dass eine Stabilisierung theoretisch über gedämpfte Oszillationen gelingt, da der Computer die Tatsache vernachlässigt, dass die Position des Schwerpunktes durch die Bewegung der Räder bedingt wird. Auf Grund dessen wird nun ein zweiter Ansatz visualisiert, der der Regelung der Position des Schwerpunktes eine hohe Regelgüte zuweist.



Funktionsplot 5: $Q=\text{diag}(0,100,0,100)$, $R=1$

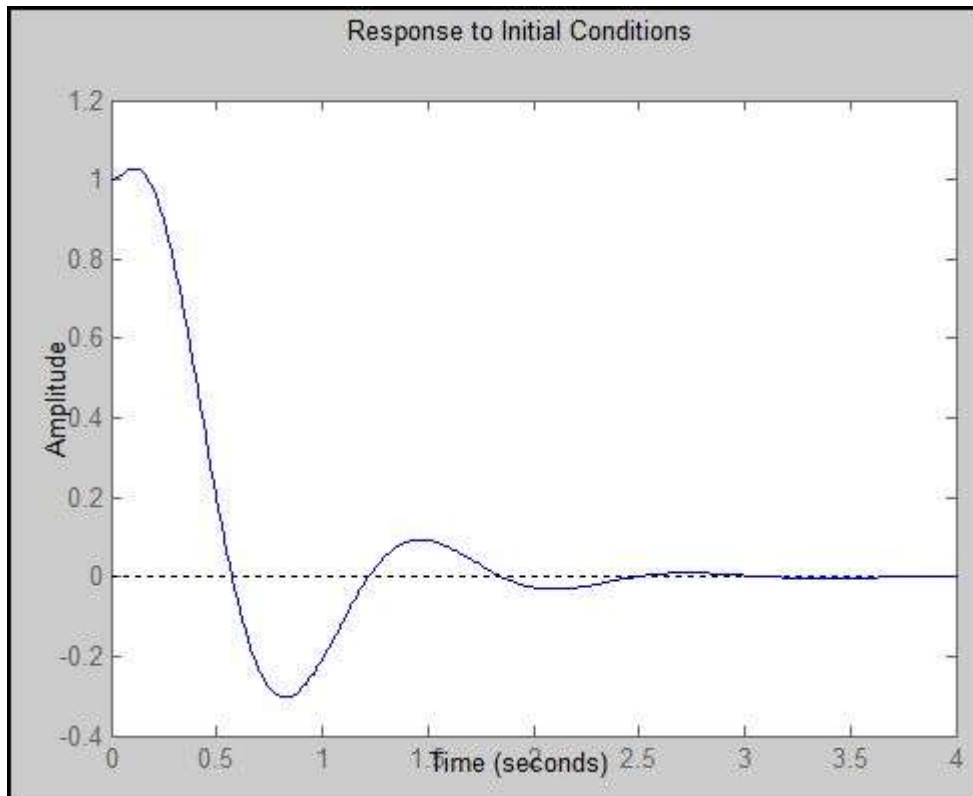
Sofern an die freie horizontale Bewegung der Räder keine Einschränkungen gestellt werden, kann eine Stabilisierung der horizontalen Position des Schwerpunktes innerhalb von sechs Sekunden gelingen. Analog zu den Ergebnissen aus Ansatz 1 führt die freie Bewegung der Räder zunächst dazu, dass der horizontale Schwerpunkt vom Ursprung kurz nach Beginn der Regelung weiter abweicht. Die Ergebnisse aus beiden Ansätzen sind demnach nahezu identisch. Dies belegt die bereits formulierte These, dass eine niedrige Gewichtung der Regelgüte der Position der Räder des Segways zu zufriedenstellenden Stabilisierungsergebnissen führt. Um die Bedeutung des Parameters R zu visualisieren, werden im Folgenden drei Steuerungen bei unterschiedlicher Gewichtung der Energiekosten dargelegt.



Funktionsplot 6: $Q=\text{diag}(0,100,0,100)$; $R=1$ (blau), $R=0,1$ (grün), $R=10$ (rot)

Eine höhere Gewichtung des Energiefunktional führt zu einer rascheren Regelung der horizontalen Position des Schwerpunktes. Bei der größeren Gewichtung der Energiekosten ist zu erkennen, dass der Segway unmittelbar der aktuellen Position entgegen steuert, sodass eine schnellere Regelung gelingt. Doch die schnelle Regelung gelingt nur über eine hohe Gewichtung des Aufwandes, der für die Stabilisierung notwendig ist. Sofern die Energiekosten gering gehalten werden sollen, ist mit einer längeren Stabilisierungszeit, verbunden mit einem anfänglich größeren Abweichung vom Ursprung zu rechnen. Wie bereits in Ansatz 1 diskutiert, sollte der Abstand vom Ursprung nicht allzu groß werden, da andernfalls eine praktische Stabilisierung auf Grund von zu großen Schwerkräften scheitern wird. Dies belegt erneut, dass eine minimale Gewichtung der Energiekosten in der praktischen Umsetzung nicht sinnvoll erscheint.

In der mathematischen Modellierung von Ansatz 2 ist es das Ziel, die horizontale Position der Räder und des Schwerpunktes relativ zügig gleichzusetzen. Dieser Gedanke wurde in die dritte Regelung integriert. Dazu wird sowohl die Position der Räder, als auch die Position des Schwerpunktes in der Matrix Q mit dem Faktor 100 gewichtet, die entsprechenden horizontalen Geschwindigkeiten sind mit dem Faktor 10 gewichtet. Insgesamt zeigt Funktionsplot 7, dass diese Wahl der Gewichtung sehr gute Regelungsergebnisse liefert.



Funktionsplot 7: $Q=\text{diag}(100,100,10,10)$ $R=1$

Innerhalb von 2,5 Sekunden gelingt eine Regelung des Segways über eine gleichwertige Gewichtung der Position der Räder und des Schwerpunktes. Die Kombination der Regelung der beiden Komponenten des Zustandsvektors bewirkt zum einen einen oszillierenden Prozess (vergleiche erster Ansatz), zum anderen eine rasche Regelung, ohne dass die Abweichung vom Ursprung größer wird, als die Abweichung zu Beginn der Regelung. Insgesamt garantiert diese Wahl der Gewichtungsmatrix Q eine äußerst zufriedenstellende Regelung.

2.5.2. Optimierte Polzuweisung

In den Kapiteln 2.1.3., sowie 2.4. ist bereits die Stabilisierung des Segways durch eine Polzuweisung erörtert worden. Das Kapitel 2.5.2. zeigt nun, wie eine Polzuweisung optimiert werden kann. Es werden dabei an den Segway die gleichen Bedingungen für die Wahl der Parameter und des Anfangszustandes, wie in Abschnitt 2.5.1. gestellt. Zunächst wird an Hand einer Abbildung die Grundproblematik der optimierten Polzuweisung dargestellt.

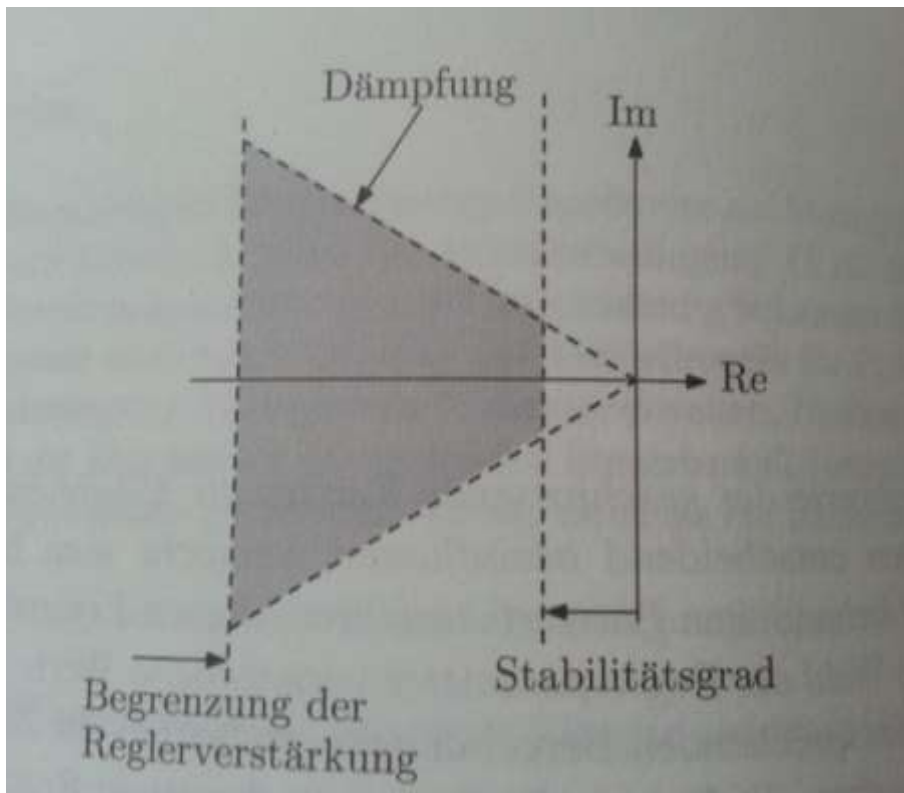


Abbildung 4: Gebiet für die Eigenwerte des geregelten Systems

An Hand Abbildung 4 ist zu erkennen, dass eine Polzuweisung an physikalische Beschränkungen des Systems gekoppelt ist. Der Stabilitätsgrad gibt eine obere Schranke für den Index der Matrix $A-BF$ an, der eine reale Stabilisierung des Segways garantiert. Weiterhin wird das Gebiet für eine optimale Polzuweisung durch die Dämpfung und die Begrenzung der Reglerverstärkung eingeschränkt. Hierbei dient die Begrenzung der Reglerverstärkung zur Unterdrückung des Messrauschens. Abbildung 4 zeigt auf, dass die Eigenwerte nicht beliebig weit in die linke komplexe Halbebene gelegt werden können. Bereits in Abschnitt 2.5.1. konnte diese Tatsache erahnt werden, denn sofern der Realteil eines Eigenwertes beliebig weit in die linke Halbebene gelegt wird, so findet zwar eine schnelle Stabilisierung statt, jedoch sind die Amplituden gerade zu Beginn der Stabilisierung so groß, dass eine Stabilisierung in der Praxis auf Grund dieser Tatsache leicht scheitern kann, sofern der Anfangszustand eine zu große Abweichung von der Ruhelage aufweist. Um eine erste Charakterisierung des Stabilitätsgebietes der Eigenwerte zu erreichen, werden die Eigenwerte $\sigma_j \pm i \cdot \omega_j$ als Nullstellen des Polynoms des geschlossenen Regelkreises

$$P_j(s) = (s - \sigma_j - i\omega_j)(s - \sigma_j + i\omega_j) = s^2 - 2\sigma_j s + \sigma_j^2 + \omega_j^2 = s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2$$

betrachtet. Hierbei ist $\omega_0 = \sqrt{\sigma_j^2 + \omega_j^2}$ die natürliche Frequenz und bemisst den Abstand zum Ursprung. Die Dämpfung D wird durch den Term $-\sigma_j/\omega_0$ beschrieben. In praktischen Anwendungen nutzt man für die Wahl der Polvorgabe die Gleichung $\left(\frac{\sigma}{a}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{b}\right)^2 = 1$ um eine Grenze für das Stabilitätsgebiet zu generieren. Dieses Vorgehen wird durch Abbildung 5 verdeutlicht.

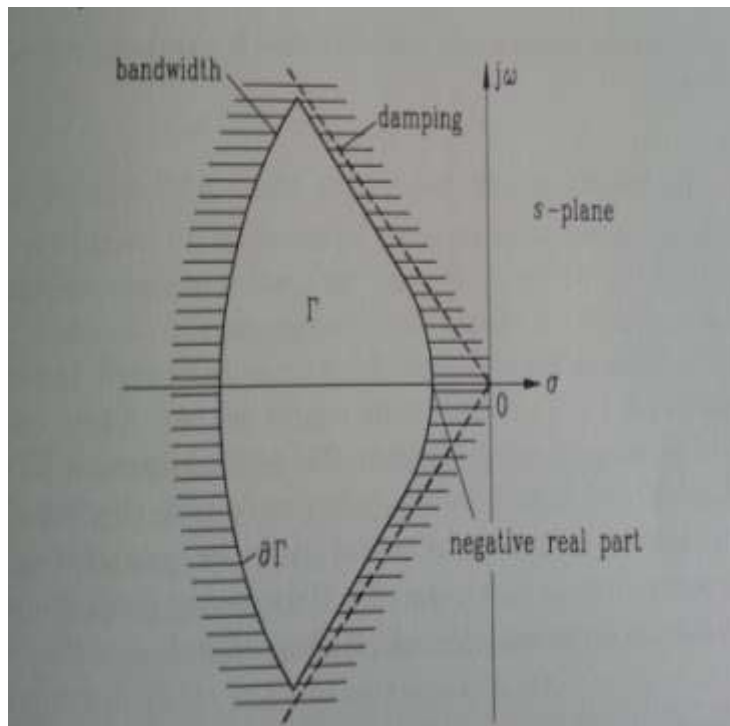


Abbildung 5: Spezifikation eines Polgebietes Γ , welches Dämpfung, Begrenzung der Reglerverstärkung und einen negativen Realteil der Eigenwerte garantiert.

Wählt man für die Gleichung $\left(\frac{\sigma}{a}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{b}\right)^2 = 1$ die empirischen Parameter $a = 0.25$ und $b = 0.5$, so ergibt sich die der Graph der Funktion $\omega^2 = 4\sigma^2 - 0.25$ als Rand des Stabilitätsgebiets Γ . Die folgende Analyse wird zeigen, dass die Zuweisung der Eigenwerte auf den Graph der Funktion $\omega^2 = 4\sigma^2 - 0.25$ sehr gute Stabilisierungseigenschaften liefert. Im Vergleichsmaßstab werden ferner die Polzuweisungen $\sigma_{11} = (-1, -1, -1, -1)$, sowie $\sigma_{12} = (-1, -2, -3, -4)$, analog zu Abschnitt 2.4. betrachtet. Die Ergebnisse der unterschiedlichen Polzuweisungen werden nun für beide Ansätze skizziert.

Ansatz 1:

Wir rekapitulieren zunächst das lineare zeitinvariante System

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \ddot{\varphi} \\ \dot{s} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{m \cdot g}{M} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(M+m) \cdot g}{M \cdot l} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ \varphi \\ \dot{s} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \\ -\frac{1}{M \cdot l} \end{pmatrix} \cdot u$$

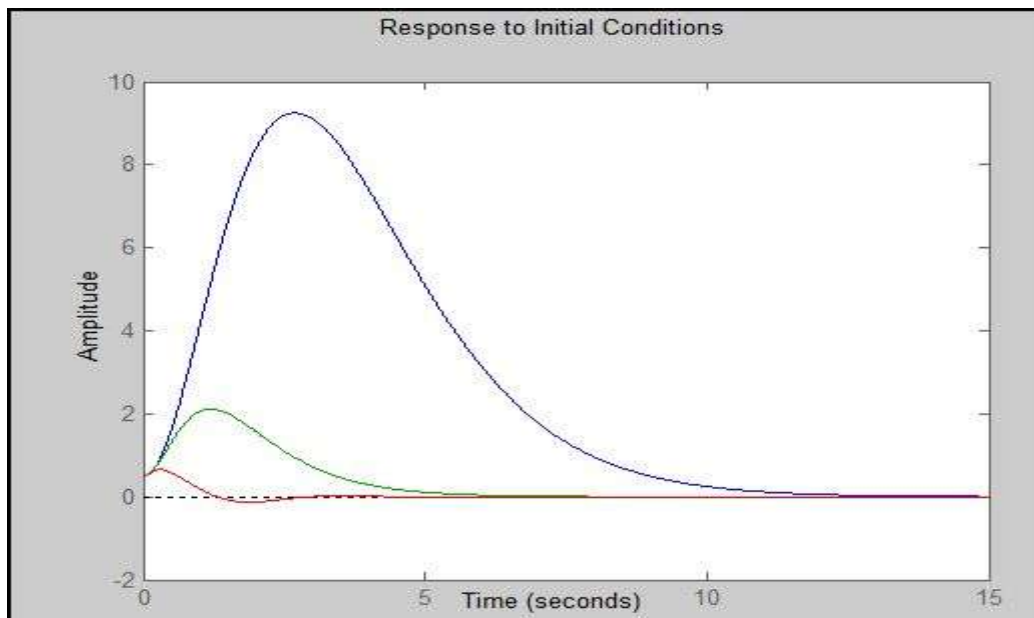
$$y = (1 \quad l \quad 0 \quad 0)x$$

Die Matrix A besitzt das Spektrum $\sigma(A) = \left\{ 0; 0; \sqrt{\frac{(M+m) \cdot g}{M \cdot l}}; -\sqrt{\frac{(M+m) \cdot g}{M \cdot l}} \right\}$. Mit den

bereits erörterten Annahmen an die Größen M, m, l und g ergibt sich das Spektrum $\sigma(A) = \{0; 0; 5.42; -5.42\}$. Um nun eine optimierte Polzuweisung für diesen Ansatz zu erreichen, wird der Eigenwert -5.42 derart modifiziert, dass der Realteil $\sigma = -5.42$ beibehalten wird und der Imaginärteil ω des Eigenwertes die Gleichung $\omega^2 = 4\sigma^2 - 0.25$ erfüllt. Die zwei weiteren Pole ergeben sich dadurch, dass der Eigenwert 0 auf den Pol $\sigma = -1$ gesetzt wird und auch für diese beiden Pole der Imaginärteil die Gleichung $\omega^2 = 4\sigma^2 - 0.25$ erfüllen muss. So ergibt sich folgende optimierte Polzuweisung:

$$\sigma_{3,1} = \left(-1 + \frac{\sqrt{15}}{2}i; -1 - \frac{\sqrt{15}}{2}i; -5.42 + 10.83i; -5.42 - 10.83i \right).$$

Dass durch diese Wahl der Polzuweisung tatsächlich das Stabilitätsverhalten des Segways optimiert wird belegt Funktionsplot 8.



Funktionsplot 8: Stabilisierung durch Polvorgabe: σ_1 (blau), σ_2 (grün), sowie die optimierte Polvorgabe $\sigma_{3,1}$ (rot).

An Hand von Funktionsplot 8 wird deutlich, dass es für Anwendungen ungünstig ist, die Pole auf einen Punkt im Innern des Stabilitätsgebietes festzulegen. So ist zu erkennen, dass durch die Polzuweisung $\sigma_{1,1} = (-1, -1, -1, -1)$ der Neigungswinkel des Segways bei einer solchen Steuerung um mehr als das achtfache gegenüber dem Anfangszustand zunimmt. Dies bedeutet, dass sich der Segway bei einer solchen Polvorgabe in der praktischen Umsetzung nur stabilisieren kann, wenn er zu Beginn der Stabilisierung nahezu senkrecht steht. Eine vermeintlich geringe Neigung ($\approx 5^\circ$) wird vermutlich bereits dazu führen, dass die Erdanziehungskräfte während der Stabilisierung so groß werden, dass der Segway umfällt. Die Polzuweisung $\sigma_{2,1} = (-1, -2, -3, -4)$ entspricht einer verbesserten Polzuweisung. Innerhalb von 6 Sekunden kann eine Stabilisierung des Segways erreicht werden. Außerdem wird die Neigung des Segways zu Beginn der Stabilisierung „nur“ doppelt so groß, wie die Anfangsneigung. Der Spielraum für eine praktische Stabilisierung in Abhängigkeit der Anfangsneigung nimmt somit zu. Die Polzuweisung wird jedoch durch die Wahl von

$$\sigma_{3,1} = \left(-1 + \frac{\sqrt{15}}{2}i; -1 - \frac{\sqrt{15}}{2}i; -5.42 + 10.83i; -5.42 - 10.83i \right) \text{ deutlich verbessert. Die}$$

Stabilisierung erfolgt innerhalb von 3 Sekunden und die Neigung des Segways überschreitet während des Stabilisierungsvorgangs nur marginal die anfängliche Neigung. Es zeigt sich, dass die geschickte Wahl der Pole auf den Graphen der Funktion $\omega^2 = 4\sigma^2 - 0.25$ sehr gute Stabilisierungseigenschaften liefert. Dies wird durch eine Betrachtung von Ansatz 2 bestätigt.

Ansatz 2:

Ansatz 2 beruht auf dem linearen zeitinvarianten System:

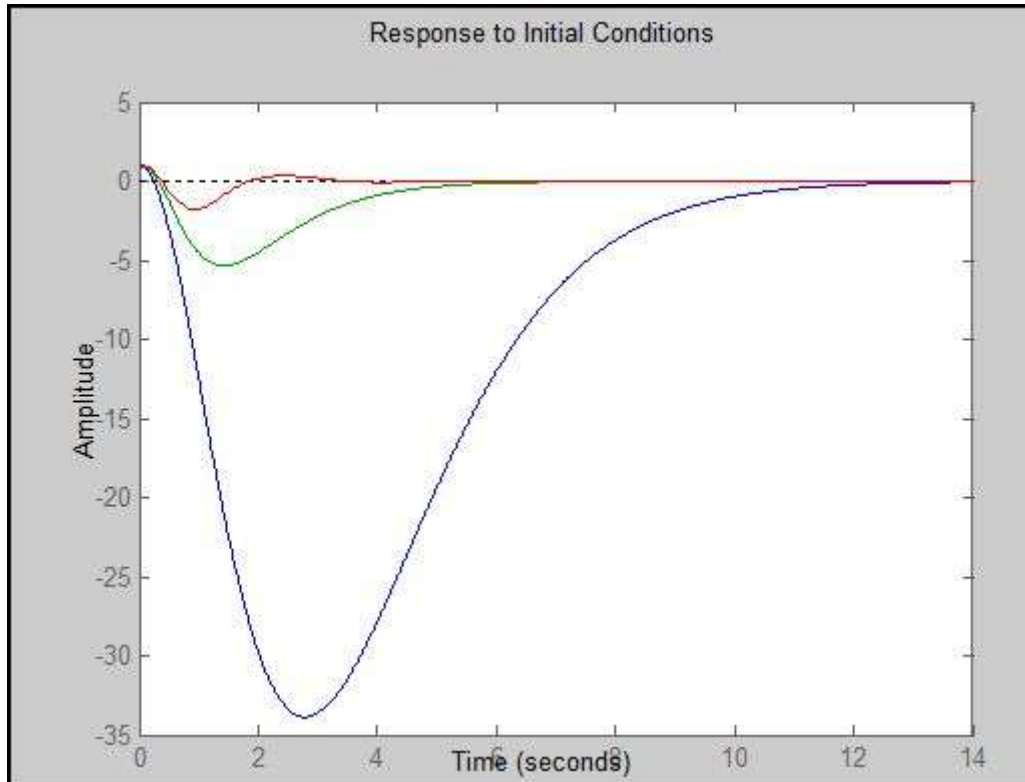
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{d} \\ \ddot{s} \\ \ddot{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{g}{l} & \frac{-g}{l} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ d \\ \dot{s} \\ \dot{d} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot u$$

$$y = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0) \cdot x$$

Das Spektrum der Matrix A nimmt die Form $\sigma(A) = \{0; 0; i \cdot \sqrt{g/l}; -i \cdot \sqrt{g/l}\}$ an. Unter den Annahmen an g und l des Segways erhält man das Spektrum $\sigma(A) = \{0; 0; i \cdot 4,43; -i \cdot 4,43\}$. Die Eigenwerte $\pm 4,43i$ werden auf die Hyperbel des Funktionsterms $\omega^2 = 4\sigma^2 - 0.25$ verschoben. So ergeben sich zwei Pole $-2.23 \pm 4.43i$. Für die weiteren beiden Pole wird der Eigenwert 0 auf den Wert -1 gesetzt. Damit die Hyperbelgleichung $\omega^2 = 4\sigma^2 - 0.25$ erfüllt ist, ergeben sich analog zu Ansatz 1 die beiden weiteren Pole $-1 \pm \sqrt{15}/2i$ und somit insgesamt folgende Polvorgabe:

$$\sigma_{3,2} = \left\{ -1 + \frac{\sqrt{15}}{2}i; -1 - \frac{\sqrt{15}}{2}i; -2.23 - 4.43i; -2.23 + 4.43i \right\}$$

Diese Polvorgabe optimiert die Stabilisierung erneut. Dies belegt Funktionsplot 9.



Funktionsplot 9: Stabilisierung durch Polvorgabe: σ_1 (blau), σ_2 (grün), sowie die optimierte Polvorgabe $\sigma_{3,2}$ (rot).

Funktionsplot 9 bestätigt die Erkenntnisse aus Funktionsplot 8. Werden die Pole mit Vielfachheit 4 auf den Wert -1 gelegt, so kann der Segway zwar theoretisch stabilisiert werden, doch praktisch wird die Stabilisierung des Segways scheitern. Die Neigung des Segways wird so groß, dass auf der Segway auf Grund von zunehmenden Gewichtskräften umfallen wird. Legt man die Pole auf die reelle Achse, jeweils mit Vielfachheit 1, so ist eine optimierte Stabilisierung des Segways feststellbar. Jedoch wird der Abstand zur Ruhelage während der Stabilisierung um den Faktor 5 vergrößert. Demnach ist bei einer praktischen Anwendung darauf zu achten, dass der Segway zu Beginn der Stabilisierung nahezu senkrecht steht, um eine Stabilisierung des Segways zu garantieren. Eine schnelle Stabilisierung, ohne dass der Abstand zur Ruhelage sich gegenüber des Anfangswertes merklich erhöht, gelingt über die optimierte Polvorgabe von $\sigma_{3,2}$. Die Funktionsplots 8 und 9 belegen, dass eine Steuerung durch eine lineare Zustandsrückführung theoretisch gelingt, sofern das lineare zeitinvariante System steuerbar ist. Die Wahl der Pole für die Berechnung der Feedbackmatrix F entscheidet jedoch signifikant über die praktische Stabilität des Segways. Werden die Pole mit einer Vielfachheit von 4 in einen Punkt der linken komplexen Halbebene gelegt, so kann eine praktische Stabilisierung nur dann gelin-

gen, wenn die Abweichung des Anfangszustandes zur Ruhelage sehr gering ist. Bessere Stabilisierungen werden dadurch erzielt, dass die Pole entlang der reellen Achse verteilt werden. Doch auch hier ist zu beachten, dass die Stabilisierung nur dann praktisch gelingt, wenn der Anfangszustand nicht allzu weit von der Ruhelage abweicht. Legt man die Pole hingegen auf den Rand des Stabilitätsgebietes, der durch die Gleichung der Hyperbel $\omega^2 = 4\sigma^2 - 0.25$ beschrieben werden kann, so gelingt eine praktische Stabilisierung des Segways rasch, ohne dass der Abstand zur Ruhelage während des Stabilisierungsprozess signifikant zunimmt.

3. Beschreibung des Projekts

Abschnitt 2 zeigt, dass die mathematische Stabilisierung eines Segways eine anspruchsvolle Aufgabe ist. Im folgenden Kapitel wird beleuchtet, welche Aspekte der mathematischen Modellierung eines Segways im Projekt berücksichtigt wurden und welche Aspekte elementarisiert werden mussten. Dabei wird zunächst die Legitimation des Projektes durch den aktuellen Lehrplan dargelegt. In den dann folgenden Unterkapiteln werden die einzelnen Phasen des Projektes beschrieben und die Ergebnisse der Abschlusspräsentation der Schülerinnen und Schüler (SuS) aufgezeigt.

3.1. Einordnung in den Lehrplan

Bereits in den ersten Zeilen des Mathematiklehrplans der gymnasialen Oberstufe ist zu lesen, dass „im Mathematikunterricht in vielfältiger Weise die Anwendungsrelevanz fachspezifischer Kenntnisse und Fähigkeiten erfahren werden soll“. Weiterhin kann dem didaktischen Konzept des Lehrplans entnommen werden, dass, wenn immer es sich anbietet, mit mathematischen Mitteln ein Sachproblem strukturieren werden sollte, um wesentliche Aspekte eines komplexen Sachverhalts in eine mathematische Modellierung darzulegen und eine Lösung zu suchen, um das Wechselspiel zwischen Theorie und Realität aufzuzeigen. Als Grundlage der mathematischen Modellierung müssen die SuS jedoch die notwendigen mathematischen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten verfügen. Der Prozess der mathematischen Modellbildung wird in der nachfolgenden Abbildung verdeutlicht.

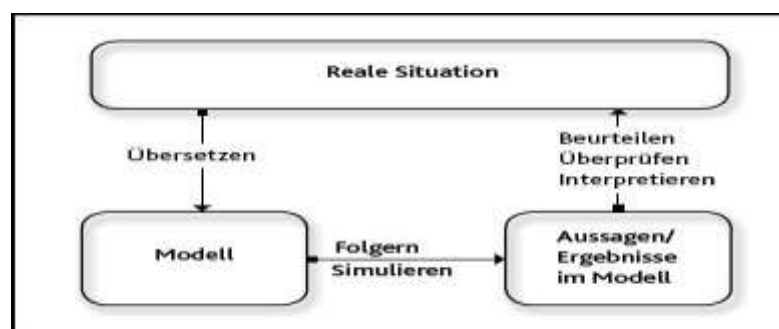


Abbildung 6: Der Prozess der Modellbildung

Zu erkennen ist, dass die SuS bei der mathematischen Modellierung zunächst die reale Problemstellung erkennen müssen. Um anschließend das Problem zu lösen, muss die Komplexität der realen Situation derart reduziert werden, dass eine mathematische Grundlage der Problemlösung geschaffen wird. Wichtig dabei ist der Vergleich der relevanten Parameter des Modells und der realen Situation. Diese Parameter sollten möglichst weitgehend übereinstimmen. Sofern eine Modellkritik positiv abgeschlossen wird, kann die Lösung des Problems, basierend auf der Lösung des mathematischen Modells herausgearbeitet werden. Hierbei kann eine Modifikation des Modells schließlich stattfinden, sofern die Lösung des Modells nicht auf die Lösung des realen Problems übertragen werden kann. Doch auch wenn dies gelingen sollte, so muss die Lösung des Modells interpretiert werden als eine Lösung des tatsächlichen Problems. Dieser Modellierungszyklus, der in Abbildung 6 zu erkennen ist, umfasst dabei 6 Schritte:

1. Erfassen des Problems des Anwenders
2. Eindeutige Beschreibung des Problems
3. Modellierung des Problems
4. Mathematische Lösung in dem gewählten Modell
5. Überprüfung und Bewertung der Lösung
6. Interpretation in der Sprache des Anwenders

Diese 6 Schritte der mathematischen Modellierung, beziehungsweise des mathematischen Problemlösens wurden in dem Projekt versucht, zu realisieren. Der projektförmige Modellierungsunterricht erhöht weiterhin viele methodische Kompetenzen bei den SuS, denn die „SuS gewinnen an der Wirklichkeit orientierten Vorstellung von der Bedeutung der Mathematik in Anwendungsbereichen.“ Ebenso werden durch einen Modellierungsunterricht vernetztes und fächerübergreifendes Lernen gefordert und gefördert. Bevor in den weiteren Abschnitten dieses Kapitels das modellierungsbasierte Unterrichten in einem interdisziplinären Projekt am Beispiel des Segways herausgearbeitet wird, werden zunächst die mathematischen Fachkompetenzen aufgelistet, welche die SuS laut Lehrplan nach Beenden der gymnasialen Oberstufe beherrschen sollten und die in diesem Projekt angeschnitten worden sind.

Im Themenmodul „Weiterführung der Differential- und Integralrechnung“ wird aufgeführt, dass die SuS eine Definition der eulerschen Zahl kennen. Es wird davon ausgegangen, dass die SuS bereits aus dem Gebiet „Folgen und deren Grenzwerte“ die Definition

$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ kennen gelernt haben. Im Verlauf der dreitägigen Projektphase konnten die SuS eine weitere Definition erfahren, indem ihnen die Matrixexponentialfunktion

dargelegt wurde. So haben die SuS die Definition $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$, als Spezialfall der Funktion

$f(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ kennen gelernt. In diesem Zusammenhang haben die SuS die Exponentialfunktion als Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = x$ aufgefasst. Der Aspekt der

Lösung und Erarbeitung von Differentialgleichungen wird im Lehrplan im Themenmodul

„Weiterführung der Differential- und Integralrechnung“ gefordert. Eine anschauliche Einführung von Differentialgleichungen, über Schwingungsvorgänge, die bei einem Segway zu beobachten sind, erfolgte ebenfalls in diesem Projekt. Dieses Vorgehen ist als methodische Unterrichtsgestaltung für die Erarbeitung und Lösung von Differentialgleichungen vorgesehen.

Im Wahlpflichtgebiet 1 „Vektoren und Matrizen“ ist aufgeführt, dass die SuS das Produkt einer Matrix mit einem Vektor, sowie das Produkt zweier Matrizen in nicht geometrischen Zusammenhängen verstehen sollen. Diese mathematische Kompetenz wurde beim Aufstellen des linearen zeitinvarianten Systems, sowie bei der Analyse der Matrixexponentialfunktion erreicht. Die SuS haben dabei die Inverse einer Matrix (der Transformationsmatrix) kennen gelernt, um die Matrixexponentialfunktion geschickt formulieren zu können (vergleiche Abschnitt 2.1.2.). Damit verbunden wird auch die mathematische Kompetenz erworben in einem nicht-geometrischen Anwendungsfeld von Matrizen Problemaufgaben zu lösen.

Das interdisziplinäre Projekt besitzt mathematische, physikalische, informatische, und ingenieursspezifische Anteile, fördert demnach das fächerverbindende Lernen, welches im Lehrplan gefordert wird. So fördert der fächerübergreifende Unterricht, Methoden- und Sozialkompetenzen der SuS. Einige dieser Kompetenzen, die durch das Projekt gefördert werden sollten und die im Lehrplan explizit genannt werden, sind die Folgenden:

- „Die SuS erfahren, dass für eine Lösung realitätsnaher Probleme meist Aspekte aus mehreren Fächern zu berücksichtigen sind“. Dies wurde im Projekt dadurch realisiert, dass zunächst eine physikalische Beschreibung von Bewegungskräften bei der Bewegung des Segway genutzt wurde, um ein mathematisches Modell zu entwickeln, mit dem versucht wurde eine theoretische und eine praxisorientierte Lösung (in dem Fall die Stabilisierung des Segways) für das Problem zu generieren.
- „Die SuS entwickeln dabei die Bereitschaft zur Lösung eines größeren Problems mit anderen zu kooperieren und zu kommunizieren“. Diese Kompetenz wurde während der Projektphase dadurch garantiert, dass die SuS sich in Gruppen mit bestimmten Schwerpunkten (Mathematik, Simulation, Programmierung des Segway) dem Problem gewidmet haben.
- „Die SuS lernen die Ergebnisse eines Arbeitsprozesses zu strukturieren und so zu präsentieren, dass sie von anderen, die nicht an dem Arbeitsprozess beteiligt waren, verstanden werden können.“ Diese Kompetenz wurde durch die Vorbereitung und die Durchführung der Abschlusspräsentation erworben.

3.2. Projekteinstieg (03.12.2015 – 2 Unterrichtsstunden)

Der Einstieg in das Projekt erfolgte zunächst über zwei Videos. Das erste Video zeigte den bekannten TV-Star Stefan Raab, wie er in einer Unterhaltungssendung offensichtliche Probleme bei der Steuerung eines Segway hatte, sodass er mehrere Unfälle mit dem Segway verursachte. Das zweite Video zeigte, wie sich ein Lego-Segway selbstständig balancieren kann, sodass er eine stabile Ruhelage erreicht. Verbunden mit den beiden Videos wurden den SuS das Ziel des Projektes mitgeteilt: Es soll ein Segway mathematisch modelliert werden und damit verbunden eine Umsetzung eines solchen, über Lego-Mindstorms erfolgen. Zunächst sollten die SuS jedoch in drei Gruppen einen Segway eigenständig modellieren. Nach 30 Minuten Bearbeitungszeit stellten die einzelnen Gruppen ihre Modellierungen vor. Diese werden nun kurz rekapituliert.

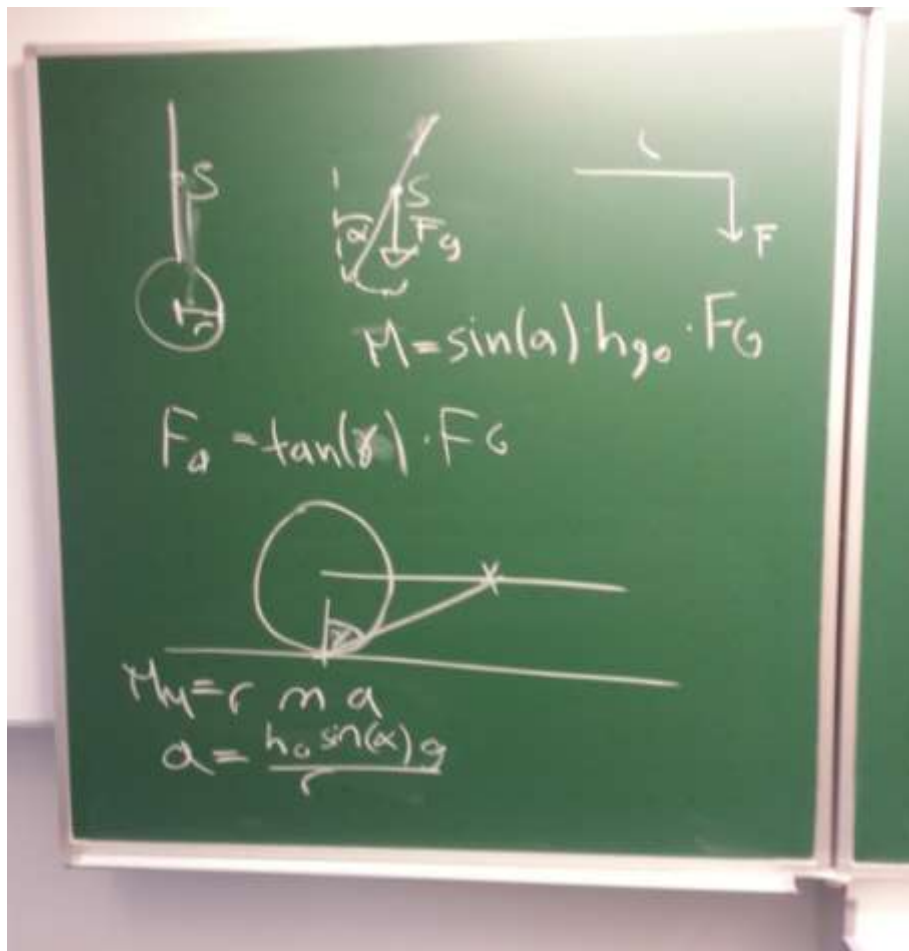


Abbildung 7: Modellierung eines Segway – Gruppe 1

An Hand der Abbildung ist zu erkennen, dass Gruppe 1 bereits wichtige Aspekte der Modellierung eines Segway berücksichtigt hat. Dabei modellierte Gruppe 1 den Segway als einen Stab mit dem Schwerpunkt S auf einem Rad mit Radius r . Sofern der Segway eine Neigung bezüglich des vertikalen Lots erfährt, so führt der Neigungswinkel α , zu der Formel für das Drehmoment $M = \sin(\alpha) \cdot h_0 \cdot F_g$, wobei h_0 die Distanz der Räder zum

Schwerpunkt angibt und F_g der Gewichtskraft des Schwerpunktes entspricht. Fernerhin gilt für das Drehmoment des Motors folgende Beziehung $M_m = r \cdot m \cdot a$, sodass aus diesen beiden Formeln die Beschleunigung a berechnet werden kann: $a = \frac{h_0 \cdot g \cdot \sin(\alpha)}{r}$. Gruppe

1 hat bereits wichtige Aspekte der späteren Regelung des Segway aufgegriffen. So wird an Hand der Modellierung des Segway ersichtlich, dass der Winkel α viele Kräfte beeinflusst und dass die Regelung dieser Kräfte zur Stabilisierung des Segways führt. Fernerhin ist an Hand der oberen linken Skizze die Modellierung eines Segways als inverses Pendel in Teilen wieder zu finden. So ist der Stab, sowie der Schwerpunkt, der die konzentrierte Masse des Stabes widerspiegeln soll, in der Modellierung integriert. Der Wagen ist hierbei durch die Räder des Segway modelliert. Dass die Gruppe erkannt hat, dass die Räder für die Steuerung des Segway und damit verbunden für die Regelung verantwortlich sind, entnimmt daran, dass dem Drehmoment der Räder eine große Bedeutung zugesprochen wird. Zusammenfassend ist eine sehr gelungene Modellierung festzustellen, bedenkt man, dass die Modellierung in allen drei Gruppen eigenständig, ohne jegliche Anweisungen und Hilfen seitens des Lehrerteam durchgeführt worden sind.

Im Folgenden wird die Modellierung der zweiten Gruppe vorgestellt und anschließend kommentiert.

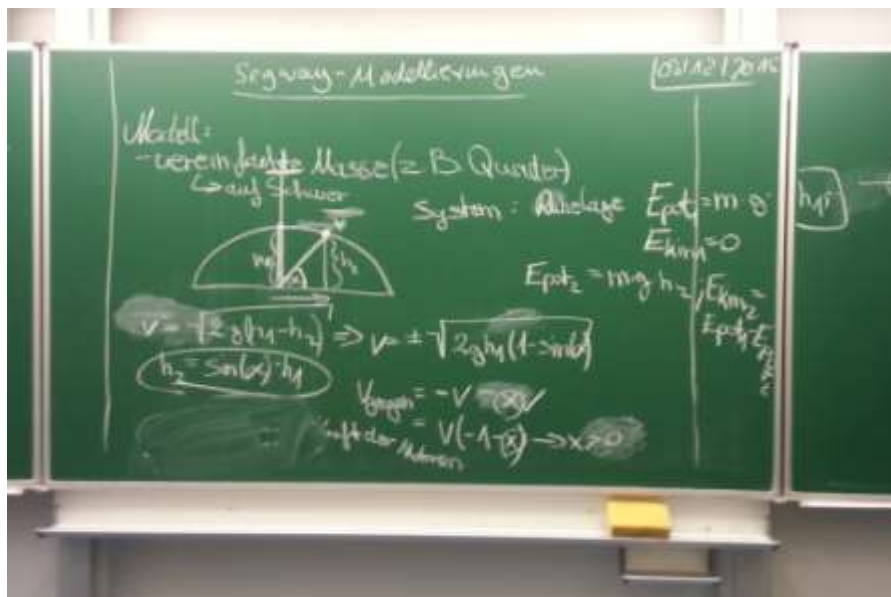


Abbildung 8: Modellierung eines Segway – Gruppe 2

Gruppe 2 hat bei der Modellierung des Segway die verschiedenen Energien betrachtet, die bei einer Oszillation des Segway auftreten können. So ist an den beiden Formeln rechts oben ersichtlich, dass die Gruppe korrekterweise erkannt hat, dass in der Ruhelage der Segway nur eine potentielle Energie besitzt ($E_{pot} = m \cdot g \cdot h_1$), die kinetische Energie jedoch 0 ist. Eine Neigung des Segway um den Winkel α führt jedoch zu einer Umwandlung der Energieformen. Neben der potentiellen Energie $E_{pot2} = m \cdot g \cdot h_2$, erfährt der Segway nun auch eine kinetische Energie, die sich nach dem Energieerhaltungssatz aus der

Differenz der beiden potentiellen Energien berechnet. Da für die kinetische Energie die Formel gilt: $E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$, kann die Geschwindigkeit des Segways mit Hilfe der Formel $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1 (1 - \sin \alpha)}$ berechnet werden. Gruppe 2 hat nun in ihrer Modellierung des Segway bereits eine Regelung über eine proportionale Kontrolle berücksichtigt. So erkennt man, dass die Motoren der aktuellen Geschwindigkeit entgegenwirken müssen, indem eine Motorbewegung eine „Gegengeschwindigkeit“ des Segway generiert, sodass dieser sich stabilisiert. Dies wird durch die Formel $v_{gegen} = (-1 - x) \cdot v$, $x > 0$ ersichtlich. Der Wert x entspricht dem Parameter der proportionalen Kontrolle. Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass Gruppe 2, analog zu Gruppe 1, bereits wichtige Aspekte der Modellierung und Regelung eines Segways in der eigenständigen Modellierung aufgegriffen hat. Ebenso verhält es sich mit der Modellierung von Gruppe 3, die nun visualisiert wird.

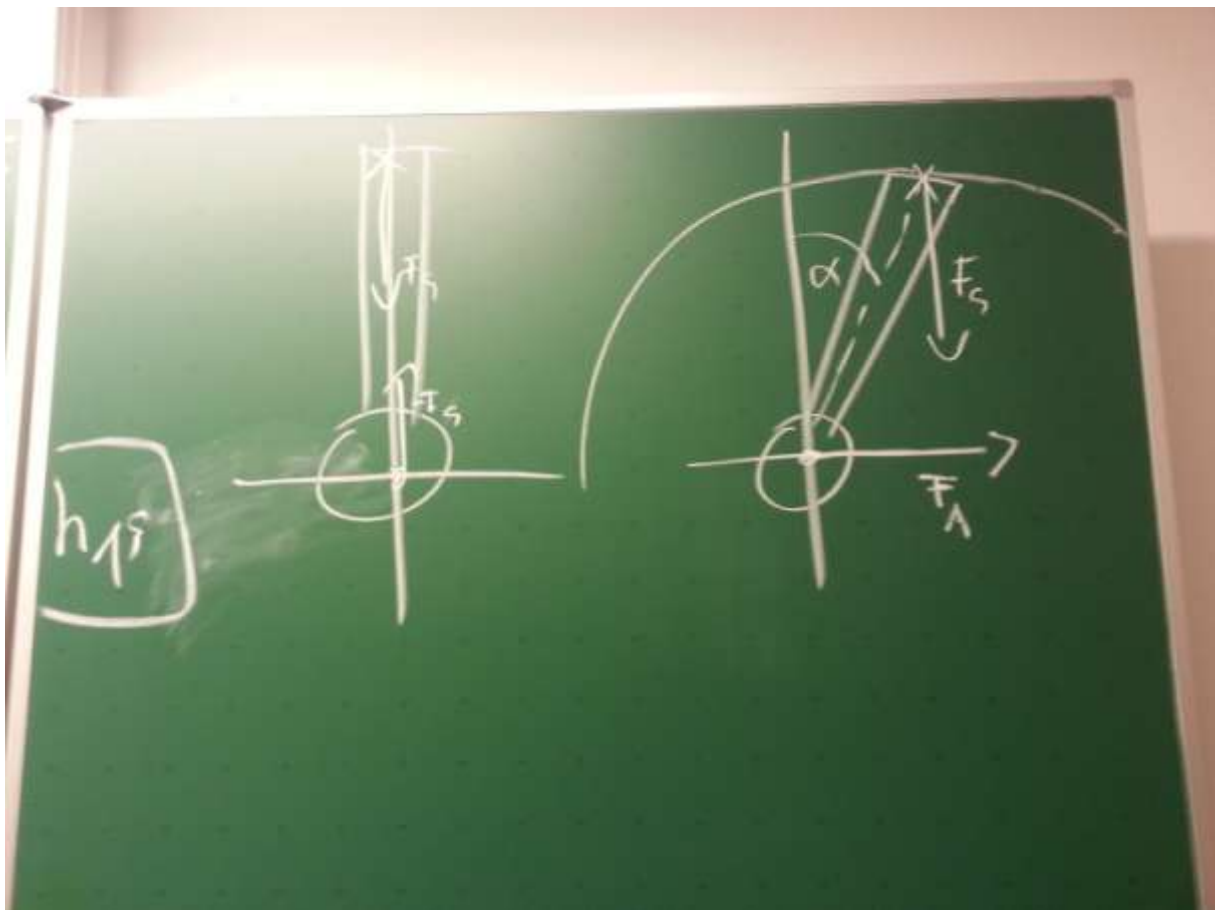


Abbildung 9: Modellierung eines Segway – Gruppe 3

Gruppe 3 wählte ebenfalls den Ansatz den Segway als inverses Pendel zu modellieren. Bei Gruppe 3 fehlen zwar mathematische Formeln, oder Anregungen zur Kontrolle, dennoch ist die Modellierung durchaus gelungen. So ist zu erkennen, dass in der Ruhelage ein Gleichgewicht zweier Kräfte vorliegt, nämlich der Kraft der Motoren auf den Segway, sowie der Gewichtskraft des Schwerpunkts des Segway auf die Räder. Eine Bewegung

des Segway, führt zu einer Neigung α , welche die Gewichtskraft des Schwerpunktes beeinflusst (vergleiche hierzu die Modellierung von Gruppe 1). Um der Neigung des Segways entgegen zu wirken, benötigt es eine Kraft F_A in horizontaler Bewegungsrichtung der Räder, um wieder die Gleichgewichtslage des Segway zu garantieren. In dieser Modellierung sind demnach bereits die Abhängigkeit der Modellierung und Regelung von der aktuellen Neigung, sowie die Steuerung über eine horizontale Bewegung der Räder vorhanden, die in der Unterrichtsphase bei der Besprechung der physikalischen Kräfte, sowie damit verbunden bei der mathematischen Modellierung des Segway wieder aufgegriffen wurden. Der Projekteinstieg wurde nun damit abgeschlossen, dass die SuS offene Fragen und Anregungen an das Projekt stellen sollten, die an der Tafel festgehalten wurden.

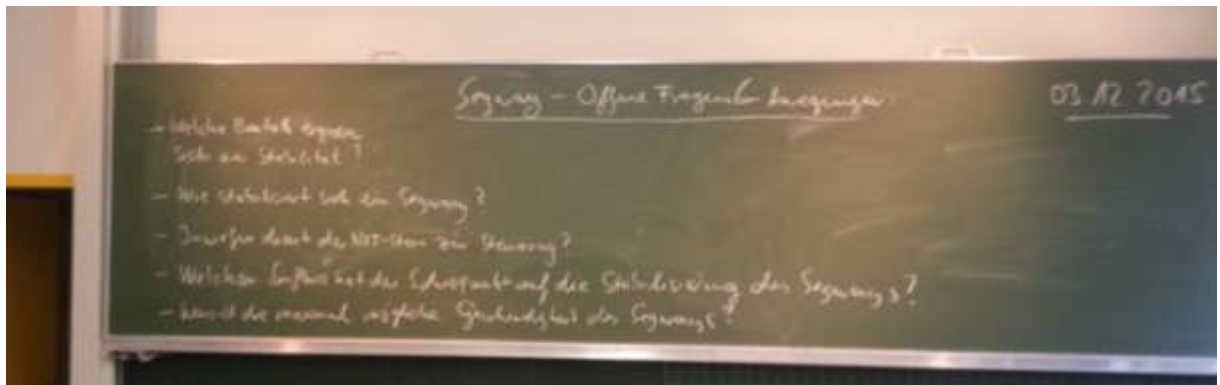


Abbildung 10: Offene Fragen und Anregungen für das Segway-Projekt

In der Analyse des Projektes in Abschnitt 4 wird untersucht, welche der Fragen aus Sicht der SuS beantwortet wurden. Im Folgenden wird kurz skizziert, ob und in welchem Umfang die Fragen und Anregungen der SuS während der Projektphase aufgegriffen wurden:

- „Welche Bauteile eignen sich zur Stabilität?“

Die Gruppe, die versuchte den Segway mit Hilfe eines Lego-Mindstorms-Set zu bauen und zu programmieren, benötigte zur Stabilisierung einen EV-3-Stein zur Ansteuerung, sowie Gyro-Sensoren (also einen Winkelsensor) und zwei Motoren zum Antrieb der Räder und somit zur Regelung des Segway. Fernerhin wäre eine zusätzliche Regelung über einen Beschleunigungssensor möglich gewesen, dieser konnte jedoch nur mit zeitlicher Verzögerung versandt werden, sodass dieser den SuS während der Projektphase nicht mehr zur Verfügung stand. Zusammenfassend wurde diese Frage also während der Projektphase aufgegriffen und größtenteils beantwortet.

- „Wie stabilisiert sich ein Segway?“

Nachdem die physikalische Beschreibung des Segways, verbunden mit einer mathematischen Modellierung als inverses Pendel abgeschlossen wurde, haben die SuS der Gruppen Mathematik und Simulation die proportional-derivative Kontrolle, sowie eine Regelung über eine Feedback-Stabilisierung kennen gelernt. Diese Frage konnte für die SuS ausreichend zufriedenstellend beantwortet werden. Aber auch die SuS, die den Segway mit Hil-

fe der Lego-Mindstorms Software, beziehungsweise mit der lejosEV3-Software angesteuert haben, versuchten die PD-Kontrolle (Gruppe lejosEV3), als auch die Steuerung über eine Zustandsrückführung (Gruppe Lego-Mindstorms) praktisch umzusetzen. Die Gruppe der SuS, welche die theoretischen Ergebnisse am Rechner simulierten, haben die theoretischen Regelungen der PD-Kontrolle und der Feedback-Stabilisierbarkeit kennen gelernt, sodass diese Frage für jeden SuS als beantwortet angesehen werden kann.

- „Inwiefern dient der NXT-Stein zur Steuerung?“

Die SuS arbeiteten zwar während des Projekts mit dem neueren EV-3-Stein, anstatt mit dem NXT-Stein, doch die Fragestellung wurde zumindest für die SuS beantwortet, die den Segway über den EV-3-Stein angesteuert haben. Schließlich erfolgte die Steuerung über den EV-3-Stein durch das Auslesen der Gyro-Daten und der anschließenden entsprechenden Gegensteuerung über den Antrieb der Räder. Die Steuerung gelang, also über die Programmierung des EV-3-Steins über die Lego-Software, oder über die lejosEV3-Software, basierend auf den Gyro-Messdaten, die dem EV-3-Stein übermittelt worden sind.

- „Welchen Einfluss hat der Schwerpunkt auf die Stabilisierung des Segway?“

Der Schwerpunkt des Segway entspricht einem Parameter bei der Stabilisierung. Dies wurde insbesondere in Abschnitt 2 klar, da der Schwerpunkt als konstanter Parameter der Matrix A enthalten war. Weiterhin ist bei der Berechnung von Feedbackkonstanten zu erkennen, dass der Schwerpunkt des Segway als Parameter für die Stabilisierung auftritt. Bei der mathematischen Modellierung wurde jedoch ein größeres Augenmerk auf die Stabilisierung der Variablen Winkel und Position des Segway Wert gelegt, sodass hier der Schwerpunkt als ein Parameter dessen aufgegriffen wurde. Es bleibt also festzuhalten, dass diese Frage im Verlauf der Projektphase zumindest aufgegriffen wurde.

- „Was ist die maximale Geschwindigkeit des Segway?“

Diese Frage wurde während der Projektphase nicht aufgegriffen. Das Ziel des Projektes war es, den SuS die theoretischen Grundlagen der Stabilität eines Segways darzulegen, sodass diese genutzt werden können, um die theoretischen Erkenntnisse zu verwenden, um eine praktische Stabilisierung zu erreichen. Dabei ist der Aspekt der maximalen Geschwindigkeit des Segways jedoch nicht weiter betrachtet worden.

Der nächste Schritt des Projektes war es nun, zunächst mit den SuS die physikalischen Kräfte bei einem Segway zu ermitteln, um darauf aufbauend ein mathematisches System aufzustellen. Wie dieses Ziel versucht wurde zu erreichen, wird im nächsten Unterabschnitt erläutert.

3.3. Projektunterricht (18.12.2015 & 21.12.2015 – 3 Unterrichtsstunden)

Zur Beschreibung der physikalischen Kräfte, die bei einem Segway wirken, wurde ein Arbeitsblatt konzipiert, welches Abbildung 1 beinhaltet. Die SuS sollten nun in einer Zuordnungsaufgabe den wirkenden Kräften entsprechende Terme zuordnen:

Beschreibung	Term
2. newtonsches Gesetz (Beschleunigungskraft auf die Räder und den Schwerpunkt)	$-m \cdot l \cdot \omega^2 \sin(\varphi)$
Kraft der Winkelbeschleunigung auf den Schwerpunkt	$m \cdot l \cdot \omega'$
Rücktreibende Kraft	$m \cdot l \cdot \cos(\varphi) \cdot \omega'$
Kraft der Winkelbeschleunigung	$(M+m) \cdot a$
Kraft der Winkelbeschleunigung auf den Schwerpunkt, basierend auf der Beschleunigung des Wagens	$m \cdot g \cdot \sin(\varphi)$
Gravitationskraft auf den Schwerpunkt	$m \cdot \cos(\varphi) \cdot a$

Legende: a ...Beschleunigung der Räder, ω ...Winkelgeschwindigkeit, ω' ...Winkel-(Radial-)beschleunigung, m ...Masse der Räder, M ...Masse des Schwerpunktes, l ...Distanz Räder – Schwerpunkt, g ...Erdbeschleunigung, φ ...Winkel

Die Aufgabe wurde aus folgenden Überlegungen heraus gewählt. Zum einem sollten die in der Einführungsstunde aufgestellten Modellierungen der einzelnen Gruppen aufgegriffen, und zu der Modellierung des Segway als inverses Pendel auf einem Wagen zusammengefasst werden. Die Skizze von Abbildung 1 dient so als einheitliche Grundlage für die weiteren Schritte der Beschreibung der physikalischen Kräfte. Da in diesem Mathematikleistungskurs nicht jeder Schüler das Fach Physik besucht, wurde eine Zuordnungsaufgabe gewählt. Hierzu bildeten die SuS Gruppen, sodass SuS, die einen Physikleistungskurs besuchen, innerhalb der Gruppe den SuS, die keinen Physikunterricht mehr haben, die entsprechenden Kräfte erklären können, um anschließend eine gemeinsame Zuordnung der Kräfte zu den entsprechenden Termen zu gewährleisten. Dieses Vorgehen besitzt zwei Vorteile. Zum einem können SuS innerhalb der Gruppe, durch die Erklärung von Gruppenmitgliedern dem Unterricht folgen und die Zuordnung von Kräften zu entsprechenden Termen nachvollziehen, und zum anderen verbessern die SuS, die das physikalische Know-How besitzen, um physikalische Kräften entsprechenden Termen zuzuordnen, ihre Kompetenz anderen Mitschülern etwas schlüssig und nachvollziehbar zu erklären. Nachdem die Kräfte an der Skizze des inversen Pendels auf dem Wagen eingetragen wurden, konnten die SuS die folgenden zwei Kräftegleichungen formulieren, womit der Unterricht der ersten der drei Stunden abgeschlossen wurde:

$$u = (M + m) \cdot a + m \cdot l \cdot \cos(\varphi) \cdot \omega' - m \cdot l \cdot \omega^2 \cdot \sin(\varphi)$$

$$0 = m \cdot l \cdot \omega' + m \cdot \cos(\varphi) \cdot a - m \cdot g \cdot \sin(\varphi)$$

Basierend auf diesen beiden Gleichungen wurde anschließend in der folgenden Doppelstunde das mathematische System aufgestellt. Hierzu bekamen die SuS zunächst ein

zweites Arbeitsblatt ausgeteilt. Den SuS wurden dabei eine geeignete Variablennotation, sowie verschiedene Linearisierungen vorgegeben:

Wir wollen nun den Übergang von den physikalischen Gleichungen hin zu einem Differentialgleichungssystem leisten. Dazu führen wir folgende Beziehungen ein.

Sei s der Weg des Segway, so gilt: $v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$ $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s}$	Sei φ der gemessene Winkel, so gilt: $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$ $\dot{\omega} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$
--	--

Für kleine Winkel φ treffen wir nun folgende Vereinfachungen:

- $\sin(\varphi) = \varphi$
- $\cos(\varphi) = 1$
- $\ddot{\varphi} = 0$

Die Beziehungen in der obigen Tabelle wurden vorgegeben, um die SuS darauf zu sensibilisieren, dass die Beschleunigung der Ableitung der Geschwindigkeit entspricht, welche wiederum der Ableitung des Weges, beziehungsweise des Winkels entspricht. Fernerhin werden die Beziehungen später genutzt, um das System aufstellen zu können. Die drei angegebenen Vereinfachungen wurden anschließend mit den SuS diskutiert. Hierbei wurde ausführlich der Aspekt aufgegriffen, dass diese Vereinfachungen nur gelten, wenn der Winkel klein ist, welches ja dem Ziel der Stabilisierung des Segways entspricht. Anschließend wurde die Korrektheit der Annahmen mit den SuS besprochen. Die Annahmen entsprechen genau den linearen Taylorentwicklungen der entsprechenden Funktionen um den Entwicklungspunkt 0. Diese mathematisch exakte Formulierung wurde jedoch nicht mit den SuS besprochen, es fand lediglich an Hand einer Skizze an der Tafel eine Analyse der Funktionsgraphen in der Nähe des Punktes 0 statt, sodass die Annahmen auch von den SuS verifiziert worden sind. Der nachfolgende Arbeitsauftrag für die SuS sah vor, dass sie mit Hilfe der Vereinfachungen und der angegebenen Beziehungen für Beschleunigung, Geschwindigkeit und Weg die beiden Kräftegleichungen nach den Variablen \ddot{s} und $\ddot{\varphi}$ auflösen sollten. Nach einer Partnerarbeit wurden die Ergebnisse an der Tafel festgehalten.

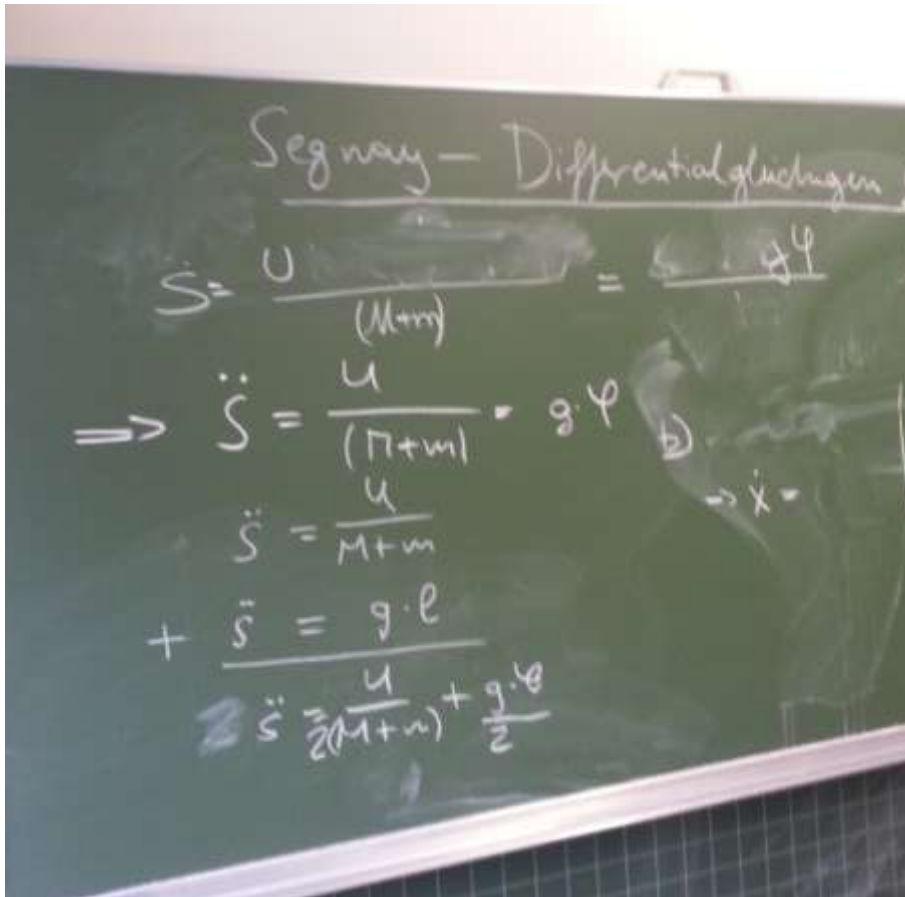


Abbildung 11: Aufstellen der Gleichung der horizontalen Beschleunigung

Ebenso wurde eine Gleichung für die Winkelbeschleunigung ermittelt, welche in der folgenden Abbildung zu erkennen ist. Nachdem beide Gleichungen erfasst wurden, bestand nun das Ziel darin das lineare invariante System aufzustellen. Hierfür hatten die SuS folgenden Arbeitsauftrag auszuführen:

b) Stellen Sie mit Hilfe von Aufgabenteil a) ein (linearisiertes) System auf, indem sie folgende Differentialgleichung passend ergänzen:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot u$$

Allgemein gilt für ein System, dass es sich schreiben lässt als $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$

Hierbei zeigte sich, dass die SuS das Matrix-Vektor-Produkt, sowie die Matrixschreibweise in ihrer Schullaufbahn noch nicht kennen gelernt haben. Also wurde den SuS dargelegt, wie sie aus einer linearen Gleichung einen entsprechenden Zeileneintrag in einer Matrix generieren können. Anschließend erfolgte die Erklärung des Matrix-Vektor-Produktes, sodass die SuS abschließend das lineare zeitinvariante System aufstellen konnten.



Abbildung 12: Das Aufstellen und Festhalten des Systems

Um den Tafelanschrift zu verdeutlichen wird kurz die Musterlösung der Aufgabe eingefügt:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \ddot{s} \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{g}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-(M+m) \cdot g}{m \cdot l} & 0 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2 \cdot (M+m)} \\ 0 \\ \frac{1}{m \cdot l} \end{pmatrix} \cdot u$$

Es ist zu erkennen, dass dieses System keinem der Systeme entspricht, welche in der mathematischen Modellierung erarbeitet wurden. Dies ist damit zu erklären, dass zunächst die Aufgabenstellung formuliert wurde, dass die beiden Kräftegleichungen nach den Termen der horizontalen- und der Winkelbeschleunigung aufgelöst werden sollen. Hierbei bedingen sich jedoch die beiden Variablen, sodass für das Auflösen einer Variable, Gleichungen der zweiten Variablen verwendet werden müssen. Fernerhin wurde in der mathematischen Modellierung bereits vor der Linearisierung der nichtlinearen Terme die Matrix-Vektor-Schreibweise verwendet, um die Gleichungen entsprechend auszudrücken. Da die SuS diese Schreibweise jedoch erst erlernen mussten, wurde an dieser Stelle darauf verzichtet und es erfolgte zunächst die Einführung und Vereinfachung geeigneter Variablen für die (Winkel-)Beschleunigung, die (Winkel-)Geschwindigkeit, sowie für den Weg und den Winkel des Segway. Erst anschließend wurden die beiden linearen Gleichungen in der Matrix-Vektor-Schreibweise erfasst. Durch dieses Vorgehen erhält man trotz der gleichen Annahmen an die Linearisierungen zwei verschiedene Gleichungen für die Systeme. Über den Umstand, dass die Systemgleichung, die mit den SuS erarbeitet wurde, nicht den Systemgleichungen entsprechen, welche in der mathematischen Modellierung dargelegt sind, kann dahingehend verziehen werden, dass die weitere mathematische Theorie zum einem nicht zwingend von einer Systemgleichung für den Segway ausgeht (vergleiche weitere Modellierung) und zum anderen dass die nachfolgende ma-

thematische Theorie der Stabilisierung des Segways nicht gebunden an die aufgestellte Systemgleichung, sondern allgemein erarbeitet wurde. Mit dem Aufstellen des Systems waren die SuS soweit vorbereitet, sodass im Januar die dreitägigen Projektstage gestartet werden konnten.

3.4. Dreitägige Projektumsetzung (20.01.2016 – 22.01.2016)

Die drei Projektstage wurden zeitlich so gegliedert, dass der Projektunterricht morgens um 08:00 Uhr begonnen hat und um 14:00 Uhr endete. Die SuS durften sich ihre Pausen dabei frei und selbstständig wählen, sie waren also nicht an die offiziellen Pausenzeiten der Schule und den Rhythmus von 45 Minuten pro Stunde gebunden. Am ersten Projekttag wurden zunächst die Gruppen eingeteilt. Die SuS durften eigenständig zwischen einer der folgenden Gruppen wählen:

- Mathematik
- Simulation
- Lego-Mindstorms

Dabei wurden den SuS die Aufgabenfelder der einzelnen Gruppen kurz skizziert. Die Gruppe „Mathematik“ hatte die Aufgabe, ausgehend von dem aufgestellten System zur Beschreibung des Segway sich die Lösung des linearen Differentialgleichungssystems mit konstanten Koeffizienten zu erarbeiten. Im Zuge dessen haben diese SuS das Konzept der Eigenwerte mit zugehörigen Eigenvektoren, sowie der Matrixexponentialfunktion erarbeitet. Weitere Arbeitsaufträge bestanden darin, sich einen Zugang zur Regelung eines Segways über eine Kontrolle der horizontalen Positionen des Segway, sowie über eine Kontrolle des Winkels (als PD-Kontrolle) zu erarbeiten. Abschließend erfolgte eine Einführung des Konzepts der Feedback-Stabilisierbarkeit. Methodisch wurden hierzu vier Arbeitsblätter konzipiert, welche die SuS möglichst eigenständig bearbeiten sollten. Die Arbeitsblätter mit zugehörigen Lösungen sind im Anhang enthalten. Die Gruppe „Simulation“ hatte die Aufgabe 6 Arbeitsaufträge, die inhaltlich an die der Mathematiker angelehnt waren, an Hand eines Arbeitsblattes zu bearbeiten. Dabei sollten die SuS zuerst die Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = A \cdot x$, wobei A der Matrix mit den Einträgen des in der Unterrichtsphase erarbeiteten Systems entspricht, berechnen und diese anschließend visuell darstellen. Die weiteren Arbeitsaufträge waren die Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung mit Hilfe des Computers zu approximieren, sowie die Lösung der Differentialgleichung des vereinfachten Modells des Segway (horizontale Kräfteanalyse) zu visualisieren. Weitere Aufgaben bestanden in der Analyse der Stabilität linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, der experimentellen Bestimmung optimaler PD-Konstanten, sowie in einer Recherche des Konzepts der Feedback-Stabilisierbarkeit. Die konkreten Arbeitsaufträge der Gruppe Simulation befinden sich ebenfalls im Anhang. Zur Bearbeitung der Arbeitsaufträge wurde den SuS keine Vorgabe bezüglich des Bearbeitungsprogramms gegeben. So konnten die SuS frei zwischen Matlab, GeoGebra und Java wählen. Die SuS der Gruppe „Lego-Mindstorms“ konnten ihre Kreativität beim Bau und der Programmierung des Segway frei ausschöpfen. Es war bereits im Vorfeld be-

kannt, dass die SuS reichlich Erfahrung mit Lego-Mindstorms besitzen, da einige der SuS bereits bei Weltmeisterschaften von Lego-Mindstorms teilgenommen haben. Unter diesem Aspekt war eine Einführung in die Software von Lego und die einzelnen Bauteile des Lego-Mindstorms-Set nicht notwendig. Während der Projektphase splittete sich die Lego-Gruppe noch auf. Zwei Schüler versuchten eine Ansteuerung des Segway über die Plattform lejosEV3 zu gestalten, während die restlichen drei SuS eine Steuerung über die von Lego zur Verfügung gestellte Software versuchten. Im Folgenden werden die wesentlichen Ergebnisse und Ereignisse der drei Projektstage kurz rekapituliert.

Tag 1: 20.01.2016:

Nach der Gruppeneinteilung (Gruppe Mathematik: Zu Beginn 4 SuS, Gruppe Simulation 3 SuS, Gruppe Lego-Mindstorms: Zu Beginn 4 SuS), begannen die SuS damit das Projekt in Angriff zu nehmen. Dabei wirkten die SuS sehr motiviert. Die ersten Schwierigkeiten traten jedoch schnell bei der Gruppe der Mathematiker auf. Diese sollten zu Beginn die Differentialgleichung der harmonischen Oszillation aufstellen. Anschließend bestand die Aufgabe darin sich selbstständig die Lösung des eindimensionalen linearen Anfangswertproblems $\dot{x} = \lambda \cdot x, x(0) = x_0$ herzuleiten. Diese Aufgabe überforderte die SuS sehr, sodass das Erarbeiten der Lösung in einem stark lehrerzentriertem fragend-entwickelndem Unterricht erfolgte. Der Umstand, dass die SuS bereits in einer frühen Phase des Projekts an ihre mathematischen Grenzen gebracht wurden, veranlasste einen Schüler in die Gruppe „Lego-Mindstorms“ zu wechseln. Er kritisierte insbesondere den Umstand, dass die SuS nicht die Möglichkeit besaßen, eigene Ideen, zur mathematischen Modellierung und Stabilisierung eines Segways, einfließen zu lassen, um sich somit eine Lösung der Problemstellung vollkommen eigenständig zu erarbeiten. Nachdem der Schüler die Gruppe verlassen hatte, sollten sich die restlichen Gruppenmitglieder der Mathematikgruppe den Zusammenhang zwischen Eigenwerten und der Lösung einer Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten an Hand der Arbeitsaufträge erarbeiten. Hier hatten die SuS große Probleme, sodass diese Erarbeitung mit den SuS in einem stark lehrerzentrierten fragend-entwickelndem Unterricht stattgefunden hat. Die Herleitung erfolgte dabei an einem interaktiven Whiteboard, sodass die Ergebnisse abgespeichert werden konnten und die SuS während des gesamten Projekts Zugriff auf diese Herleitung hatten. Die gemeinsame Erarbeitung nahm einen Zeitraum von 60 Minuten ein. Doch der mathematische Input, den die SuS lehrerzentriert erhalten haben, war für die Bearbeitung der weiteren Arbeitsaufträge hilfreich, da die SuS diese eigenständig und nahezu korrekt bearbeiten konnten. Es war eine hilfreiche Erkenntnis zu sehen, dass lehrerzentrierte Phasen in einem interdisziplinären Projekt notwendig sind, sofern die SuS Probleme besitzen, die sie eigenständig nur mit sehr viel Mühe lösen können. Sofern hier eine Hilfestellung durch den Lehrer gegeben ist, kann dies weitere Arbeitsaufträge erleichtern. Die drei SuS der Gruppe Simulation haben am ersten Tag den ersten Arbeitsauftrag bearbeitet. Hierfür war, wie bei der Gruppe Mathematik, ein inhaltlicher Input notwendig, sodass die SuS diesen Arbeitsauftrag nachvollziehen und anschließend bearbeiten konnten. Die Erarbeitung erfolgte dabei an der Tafel. Folgende Abbildung zeigt den Tafelanschrieb.



Abbildung 13: Tafelbild zur Erarbeitung des Arbeitsauftrag 1 der Gruppe Simulation

Die SuS der Lego-Mindstorms Gruppe begannen zunächst damit den Segway zu bauen. Sie wählten dabei einen vergleichsweise hohen Schwerpunkt. Zur Steuerung standen der Gruppe zwei Gyro-Sensoren, sowie der EV-3-Stein zur Verfügung. Anschließend begannen die SuS damit den Segway über die Lego-Software anzusteuern. Hierbei gelang den SuS bereits früh eine erste Stabilisierung des Segway über einen Zeitraum von circa 10 Sekunden. Die SuS arbeiteten dabei heuristisch und versuchten durch Anpassen der Parameter die Stabilisierung des Segway zu optimieren. Leider war es den SuS nicht möglich die Stabilisierung des Segway über einen Beschleunigungssensor zu optimieren, da dieser aus versandtechnischen Problemen erst nach Ende der Projektphase zur Verfügung gestellt werden konnte. Dies war jedoch für die Durchführung des Projektes nicht optimal, da der Gyro-Sensor sich während der Steuerung dekalibrierte. Weitere Probleme bei der Steuerung über die Lego-Software bestanden darin, dass die Motorleistung abhängig von dem Akkustand war und die Befehle nur mit kleiner Zeitverzögerung durchgeführt werden konnten. Dieser Umstand veranlasste zwei SuS sich einen zweiten Lego-Mindstorms Satz der Schule zu besorgen und eine Ansteuerung über die Plattform lejosEV3 zu beginnen. Abschließend wird noch die Bauweise des Segways der Gruppe vorgestellt, die die Steuerung über die Lego-Mindstorms Software versuchte.



Abbildung 14: Der Lego-Segway mit hohem Schwerpunkt, sowie 2 Gyro-Sensoren

Tag 2: 21.01.2016:

Die SuS der Gruppe Mathematik haben an diesem Projekttag große Fortschritte gemacht. So konnten die SuS die Arbeitsaufträge der Arbeitsblätter „Vereinfachte Modellierung“, „PD-Kontrolle“, „Eigenwerte und Stabilität“, sowie „Feedback-Stabilisierbarkeit“ nahezu selbstständig und größtenteils korrekt lösen. Damit waren die Aufträge für die Gruppe der Mathematiker ausgeschöpft, sodass diese die Aufgabe erhalten haben, ihre theoretischen Ergebnisse am letzten Projekttag in der praktischen Steuerung des Segway einfließen zu lassen. Zudem bekamen die SuS den Auftrag ihre Ergebnisse bereits in einer Präsentation zu gliedern. Das eigenständige, zügige und korrekte Bearbeiten der Arbeitsaufträge am zweiten Tag gelang insbesondere deshalb, da die SuS einen Tag zuvor den nötigen mathematischen Input erhalten haben, um die weiteren Arbeitsaufträge rasch nachvollziehen zu können. Ob lehrergeleitete Phasen in einem interdisziplinärem Projekt auch von Schülerseite als hilfreich empfunden werden, beziehungsweise gar notwendig sind, wird die Analyse in Abschnitt 4 untersuchen. Die SuS der Gruppe Simulation hatten auch am zweiten Tag viele Verständnisfragen zu den Themengebieten Steuerung des Segway, Klassifikation von Differentialgleichungen (linear und nichtlinear), sowie zu Lösungen von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Infolgedessen musste der Arbeitsauftrag 2, der die Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung darstellen sollte,

abgebrochen werden, da dieser zu schwierig für die SuS war. Die Gruppe, die den Segway über die Lego-Software stabilisieren wollte, kämpfte auch am zweiten Tag mit der Dekalibrierung der Gyro-Sensoren. Dennoch gelangen, unter diesen Umständen, sehr gute heuristische Stabilisierungen des Segway über einen Zeitraum von 15 Sekunden, bis die Dekalibrierung eine weitere Stabilisierung verhinderte. Die Gruppe, die den zweiten Segway, mit niedrigerem Schwerpunkt, über Lejos ansteuern wollte, wählte zur Steuerung eine proportional-derivative Kontrolle des Winkels. Fernerhin wurden das Gewicht und der Drehmoment der Motoren gemessen, um diese für die weitere Steuerung am nächsten Tag zu verwenden.

Tag 3: 22.01.2016:

Die SuS der Gruppen, die versuchten den Segway praktisch zu stabilisieren, bekamen am letzten Projekttag die Unterstützung der Mathematiker, sodass diese auf theoretische Erkenntnisse zurück greifen konnten. Wie bereits erwähnt kam der Beschleunigungssensor, der die Steuerung des Segways optimiert hätte (vergleiche mathematische Modellierung), nicht rechtzeitig an, sodass die SuS auf die fehlerhaften Daten des Gyro-Sensors angewiesen waren. Unter diesen Umständen kann die Stabilisierung des Segway als mehr als zufriedenstellend bezeichnet werden. Die Gruppe Simulation konnte die letzten drei Arbeitsaufträge des Arbeitsblatts bearbeiten. Hierzu war jedoch zunächst eine mathematische Hinführung in einem fragend-entwickelndem Unterricht notwendig. Diese Hinführung erfolgte an der Tafel, welche in der folgenden Abbildung zu erkennen ist.

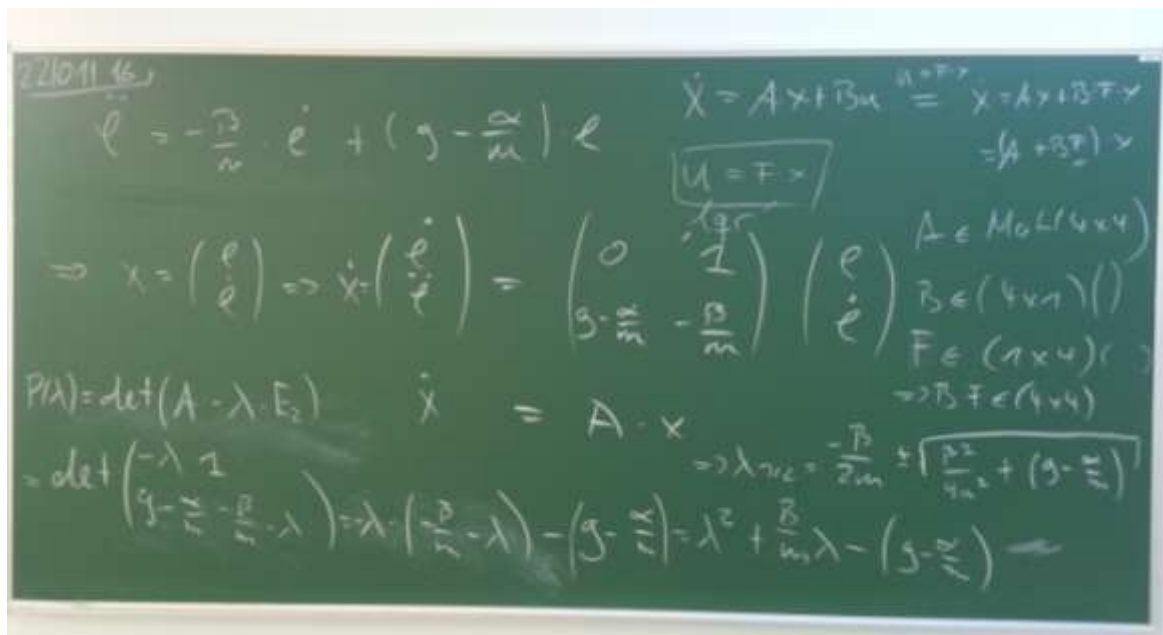


Abbildung 15: Das Tafelbild zur Bearbeitung der Arbeitsaufträge der Gruppe Simulation

Wie bereits die beiden Tage zuvor, konnten die SuS die Arbeitsaufträge, nachdem mit ihnen eine fragend-entwickelnde Erarbeitung der mathematischen Theorie stattgefunden hat, eigenständig bearbeiten. So konnte auch die Gruppe Simulation alle Aufträge, bis auf Arbeitsauftrag 2 vollständig bearbeiten. Zusammenfassend haben alle drei Gruppen während der Projekttag hervorragend gearbeitet. Die Gruppe der Mathematiker konnten nach

anfänglichen Schwierigkeiten die Arbeitsaufträge bereits am zweiten Tag abschließen, sodass sie am letzten Projekttag ihre theoretischen Ergebnisse in die praktische Umsetzung des Projekts einfließen lassen konnten. Die Gruppe Simulation konnte ebenfalls, bis auf eine Aufgabe, alle Arbeitsaufträge erfüllen. Diese Leistung ist unter dem Umstand hoch anzurechnen, dass die SuS zur Bearbeitung der Arbeitsaufträge keine vorgefertigten Dateien zur Verfügung gestellt bekommen haben, die sie nur noch vervollständigen mussten, sondern alle Aufträge eigenständig und unter freier Wahl der geeigneten Software bearbeitet haben. Die praktische Stabilisierung über die Steuerung des Segways über Lego-Mindstorms gelang den SuS mit Bravour. Leider verhinderte die Dekalibrierung der Sensoren eine verbesserte Stabilisierung. Die wichtigsten Ergebnisse der einzelnen Gruppen werden im folgenden Unterkapitel nochmals aufgezeigt, um die Leistung der SuS zu verdeutlichen. Während des letzten Projekttags besuchten zwei Mathematiklehrer den Leistungskurs, um sich Impressionen vom Projekt zu verschaffen. Dabei haben die Lehrkräfte folgende Einschätzung an das Projekt abgegeben:

- „Ein reizvolles und spannendes Projekt, doch als Lehrer benötigt man ein fundiertes mathematisches, technisches und informatisches Know-How.“
- „Es ist schön, dass ein solch mathematisches Projekt in der Schule umgesetzt werden konnte. Jedoch muss man die SuS gezielt unterstützen.“

Zum Ende des letzten Projekttagess durften die SuS die Projektarbeit kommentieren. Hierzu sollten sie angeben, was ihnen am Projekt besonders gefallen, beziehungsweise missfallen hat. Außerdem sollten die SuS einen Vergleich des Projektunterrichts mit dem ihnen bekannten Regelunterricht ziehen. In einem vierten Aspekt sollten die SuS angeben, ob das Projekt die SuS motiviert hat einen Studiengang in einem MINT-Fach anzustreben. Das gegebene Feedback der SuS wird in Abschnitt 4.4. beleuchtet.

3.5. Abschlusspräsentation (16.02.2016)

Zur Vorbereitung der Abschlusspräsentation wurden nochmals drei Unterrichtsstunden, im Zeitraum vom 11.02. – 12.02.2016, durchgeführt. Im Rahmen dessen wurden Fragen und Unklarheiten mit den drei Gruppen besprochen. Fernerhin wurde die inhaltliche Gestaltung des Vortrages abgesprochen und zusammen mit den SuS festgelegt. Diese wird kurz skizziert:

- Einführung und Fragestellung des Projekts
- Projektgestaltung
- Ergebnisse der Gruppe „Lego-Mindstorms“
- Physikalische Modellierung
- Aufstellen des mathematischen Systems
- Ergebnisse der Gruppe „Mathematik“ und „Simulation“
- Ergebnisse der Gruppe „lejosEV3“
- Videos des stabilisierten Segways beider Gruppen
- Rückblick und Ausblick auf das Projekt

Zur Abschlusspräsentation, die am 16.02.2016 in Raum 48-208 der TU Kaiserslautern, stattgefunden hat, wurden Mitarbeiter des Fachbereich Mathematik der TU Kaiserslautern, Lehrerinnen und Lehrer des Heinrich-Heine-Gymnasium Kaiserslautern, Lehramtsstudierende der TU Kaiserslautern, eine 8.Klasse des Heinrich-Heine-Gymnasium mit MINT-Schwerpunkt, sowie die Eltern der Schülerinnen und Schüler eingeladen. So versammelten sich dreißig Personen, um dem Vortrag der SuS beizuwohnen. Ein würdiger Rahmen, um die sehr guten Projektergebnisse der SuS zu huldigen. Die SuS referierten eine Stunde. Es werden die wichtigsten Ergebnisse der Abschlusspräsentation kurz skizziert. Begonnen wird hierbei bei der Gruppe der SuS, die den Segway mit Hilfe der Lego-Mindstorms-Software angesteuert haben. Grundidee bei der Bauweise war es den Schwerpunkt sehr hoch zu wählen, da die SuS die Erfahrung gemacht haben, dass ein Objekt mit hohem Schwerpunkt besser zu regulieren sei, als ein Objekt mit niedrigem Schwerpunkt. Das Ausbalancieren des Segway erfolgte in dieser Gruppe durch heuristisch ermittelte Werte. So wurde der Motor mit folgender Funktion angesteuert: Sofern der aktuelle Winkel betragsmäßig geringer als 2° ist, so wird die aktuelle Winkel mit dem Faktor 100 multipliziert, sofern der aktuelle Winkel nicht im Intervall $[-2^\circ; 2^\circ]$ ist, wird der Winkel quadriert und mit dem Faktor 4 multipliziert. So gelang den SuS eine zufriedenstellende Stabilisierung. Eine Übersicht der Ansteuerung zeigt die folgende Abbildung.

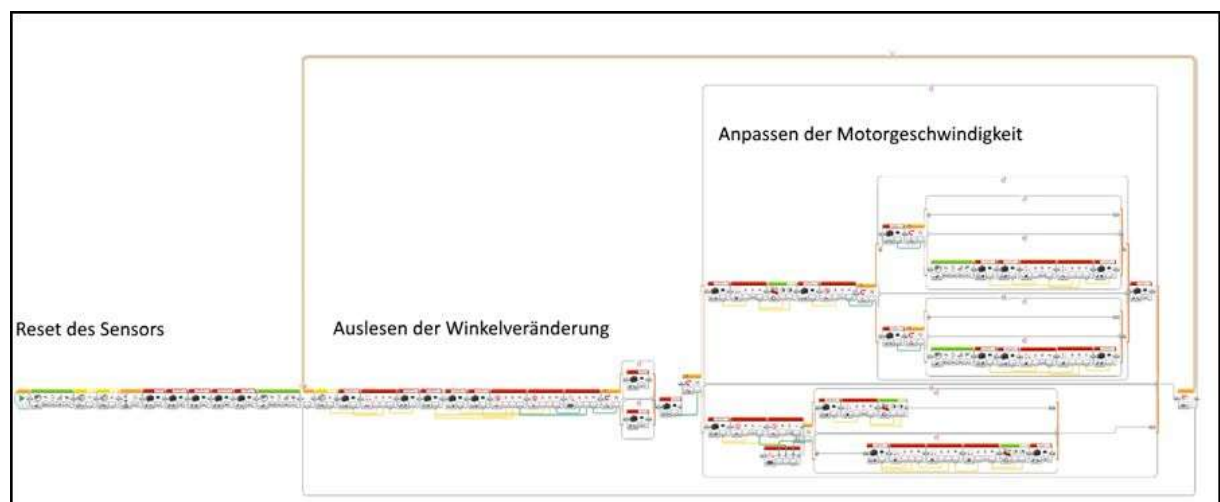


Abbildung 16: Die Steuerung des Segways über die Lego-Software

Es ist zu erkennen, dass die SuS unterbewusst das Prinzip des geschlossenen Regelkreises zur Stabilisierung des Segway ausgewählt haben. Mathematisch gelingt der geschlossene Regelkreis über eine proportional-derivative Kontrolle, oder über eine Stabilisierung durch Zustandsrückführung. Die SuS konnten die bereits erwähnten Probleme bei der Steuerung des Segways ebenfalls gut herausarbeiten. Als Lösungsansätze überlegten die SuS sich den Schwerpunkt in der Programmierung zu modifizieren, beziehungsweise auf Winkelveränderung schnellstmöglich Einfluss zu nehmen. So erfolgte eine schnelle Beschleunigung, um den Winkel nicht allzu groß werden zu lassen. Die SuS dieser Gruppe bilanzierten, dass die Sensibilität der Sensoren essentiell für die Stabilisierung des Segways ist. Des Weiteren empfanden Sie die Lego-Mindstorms-Software als ungeeignet für

die Bearbeitung des Problems, da ein gleichmäßiges Beschleunigen und Balancieren des Segways schwer zu realisieren war. Im Anschluss an die Ergebnisse der Lego-Mindstorms Gruppe erfolgte die Erklärung des physikalischen Modells mit dem anschließenden Übergang zum System. Dabei wurden beide Zugänge zu einem System, also die Ansätze 1 und 2 der mathematischen Modellierung erörtert. Exemplarisch wird hierzu eine Folie der Präsentation dargelegt, um den Gedankengang der SuS beim Aufstellen des Systems aufzuzeigen.

Umwandeln

$$\ddot{s} = \frac{u}{M+m} = g\varphi \Rightarrow \ddot{s} = \frac{u}{2(M+m)} + \frac{g}{2}\varphi$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{u - (M+m)g\varphi}{m \cdot l}$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \ddot{s} \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{g}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{(M+m)g}{m \cdot l} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ \dot{s} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2(M+m)} \\ 0 \\ \frac{1}{m \cdot l} \end{pmatrix} \cdot u$$

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$$

Abbildung 17: Aufstellen des linear zeitinvariantem Systems

Ausgehend von dem linearen zeitinvarianten System konnten die SuS der Gruppen Mathematik und Simulation beginnen ihre Präsentationen darzulegen. Inhaltlich haben beide Gruppen folgende Punkte präsentiert:

- Eigenwerte
- Lösung der linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten
- Definition Stabilität
- Stabilität in Abhängigkeit von Eigenwerten
- Feedback-Stabilisierung
- PD-Kontrolle

Da die aufgelisteten Aspekte bereits in Abschnitt 2 ausführlich erörtert wurden, wird nun die Aufbereitung der Konzepte durch die SuS kurz analysiert. Begonnen wird hierbei mit dem Eigenwertkonzept, welches die SuS folgendermaßen aufbereitet haben.

Eigenwerte

$$\begin{aligned}
 A \cdot \vec{x} &= \lambda \cdot \vec{x} \\
 A \cdot \vec{x} &= \lambda \cdot E \cdot \vec{x} \\
 A \cdot \vec{x} - \lambda \cdot E \cdot \vec{x} &= 0 \\
 (A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{x} &= 0
 \end{aligned}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\det(A - \lambda \cdot E) = 0}$$

$$\lambda \cdot E = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Abbildung 18: Das Eigenwertkonzept

An Hand der Folie erschließt sich, dass die SuS den Zusammenhang zwischen den Nullstellen des charakteristischen Polynoms und den Eigenwerten der Matrix schön herausgearbeitet haben. Dies zeigt, dass die SuS das Eigenwertkonzept in seinen Grundzügen verstanden haben. Ein weiterer Beleg hierfür ist folgende Folie, die den Zusammenhang zwischen den Eigenwerten einer Matrix A als Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = A \cdot x$ darlegt.

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$$

$$\text{mit } V = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$$

$$A = V D V^{-1} = V \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot V^{-1}$$

$$y(t) = e^{A \cdot t}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(V \cdot D \cdot V^{-1})^k}{k!}$$

$$\begin{aligned}
 (V D V^{-1})^k &= (V D V^{-1})(V D V^{-1})(V D V^{-1}) \dots = V D \cdot E \cdot D \cdot E \cdot D \cdot V^{-1} \dots \\
 &= V \cdot D^k \cdot V^{-1}
 \end{aligned}$$

Abbildung 19: Herleitung der Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = A \cdot x$

Die Folie zeigt ebenfalls, dass die SuS die Potenzreihendarstellung der e-Funktion gelernt haben. Eine kurze Korrektheitsbegründung der Potenzreihendefinition der e-Funktion, über den Zusammenhang, dass die Ableitung der Potenzreihe gerade wieder der Potenzreihe entspricht, erfolgte während der dreitägigen Projektphase. Nachdem die SuS die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = A \cdot x$, $x(0) = x_0$ herausgearbeitet haben, erfolgte der Übergang zur Stabilität, die die SuS folgendermaßen definiert haben.

Was heißt stabil?

- Segway ist aufrecht, horizontale Position von Rad und Schwerpunkt gleich
- Winkelgeschwindigkeit φ möglichst gering
- Modelle:
 - $x = \begin{pmatrix} s \\ \dot{s} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \rightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 - $x = \begin{pmatrix} s \\ \dot{s} \\ d \\ \dot{d} \end{pmatrix} \rightarrow x = \begin{pmatrix} d \\ \dot{d} \\ s \\ \dot{s} \end{pmatrix}$

Abbildung 20: Definition der Stabilität

Die SuS haben die Definition der Stabilität zunächst auf die Stabilität des Segway bezogen, sodass dieser stabil ist, sofern der Segway aufrecht steht und die horizontale Position von Rad und Scherpunkt gleich ist. Fernerhin sollte die Winkelgeschwindigkeit möglichst gering sein. Die für den Segway praktische Definition, wurde anschließend mathematisch ausgedrückt, indem die Lösung des Systems stabil ist, sofern der Zustandsvektor dem Nullvektor entspricht. Diese Definition der SuS ist nah an der mathematisch korrekten Definition der asymptotischen Stabilität (es fehlt lediglich der Aspekt, dass der normierte Zustandsvektor im Grenzprozess gegen 0 konvergieren sollte), sodass auch dieses Prinzip von den SuS als verstanden angesehen werden kann. Der Zusammenhang der Stabilität des Segways über eine PD-Kontrolle, und somit über das Stabilitätskriteriums in Abhängigkeit der Struktur der Eigenwerten einer Matrix, wird an Hand folgender Folie sehr schön zusammengefasst.

PD-Kontrolle

- Neue Differentialgleichung: $\ddot{\varphi} = \varphi \left(\frac{g}{l} - \frac{\alpha}{m \cdot l} \right) - \dot{\varphi} \frac{\beta}{m \cdot l}$

- $\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} - \frac{\alpha}{m \cdot l} & -\frac{\beta}{m \cdot l} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = A \cdot x$

- $\lambda_{1/2} = -\frac{\beta}{m \cdot l} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{m \cdot l}\right)^2 + 4\left(\frac{g}{l} - \frac{\alpha}{m \cdot l}\right)}$

- Stabil, wenn folgendes gilt: $\alpha > m \cdot g, \beta > 0$

Abbildung 21: PD-Kontrolle

Die Folie belegt, welche mathematischen Fähigkeiten SuS sich durch die Gestaltung des Projektes aneignen konnten. So wissen SuS, wie aus einer Differentialgleichung 2.Ordnung, ein Differentialgleichungssystem 1.Ordnung aufgestellt werden kann. Die Lösung dieser Differentialgleichung konnten sich die SuS erarbeiten. Weiterhin ist zu erkennen, dass die SuS das Eigenwertkonzept verstanden haben und anwenden können. Der Zusammenhang zwischen Eigenwerten und der Stabilität der Lösung eines linearen zeitinvarianten Systems ist den SuS bewusst. Dies belegen die letzten beiden Zeilen der Folie. Bedenkt man, dass den SuS nur drei Projektstage zur Verfügung gestanden haben, um sich jene mathematischen Kenntnisse (aus Vorlesungen des Bachelorstudiums Mathematik) zu erarbeiten, so zeigen sich bereits die Kompetenzen, die die SuS mit einem solchen Modellierungsprojekt erarbeiten können. Dass der Kompetenzerwerb jedoch nicht nur im Bereich der Mathematik, sondern auch im Bereich der Physik, des Ingenieurwesens, sowie der Informatik stattgefunden hat, wird auch an Hand der Ergebnisse der Gruppe deutlich, die den Segway über lejosEV3 angesteuert haben. Diese Gruppe veränderte die Bauweise des Segways derart, dass sie den Schwerpunkt tiefer gewählt haben und die Bauweise des Segways kompakter gestaltet haben, um die Distanz zwischen den Rädern und des Schwerpunktes zu verkleinern. Die Programmierung erfolgte über die Plattform lejosEV3, welches eine Java-basierte EV3 Schnittstelle ist, in der mathematische Formeln leicht eingefügt werden können. Die Gruppe wählte den mathematischen PD-Ansatz, dabei trat jedoch folgendes Problem auf.

PD-Regler

```
float u = (p(angle) + d(rate)) * motorDirection;
```

Berechnung der Motorgeschwindigkeit

```
float speedRatio = u * wheelRadius / maxMotorTorque;
```

```
float speed = maxMotorSpeed * speedRatio;
```

→ Drehmoment der Motoren nicht einstellbar!

Abbildung 22: Der Versuch der PD-Kontrolle

An Hand der Folie ist zu erkennen, wie tiefgehend die Gruppe lejosEV3 die Problemstellung der Stabilisierung des Segways bearbeitet hat. So ist der mathematische Ansatz der PD-Kontrolle erkennbar. Fernerhin haben die SuS auch erkannt, weshalb der theoretische Ansatz nicht umgesetzt werden kann. Das Drehmoment der Motoren, die die Räder antreiben, ist nicht steuerbar. So kann der PD-Ansatz praktisch nicht angewendet werden. Auch an dieser Stelle erkennt man, dass die SuS eine Kompetenzzuwachs im mathematischen Bereich (Anwenden der PD-Kontrolle), des informatischen Bereichs (Programmierung der PD-Kontrolle), sowie der ingenieurstechnischen Bereichs (Fehlende Steuerung des Drehmoments erkannt) erlangt haben. Fernerhin zeigt diese Folie, dass dieses Modellierungsprojekt fächerübergreifende Aspekte aus dem MINT-Bereich vereinigt. Die SuS haben bei der Programmierung mit lejosEV3 Probleme dahingehend gehabt, dass die Gyro-Sensoren für dieses Projekt zu ungenau arbeiten, indem sie sich selbstständig dekalibrieren. Dieses Problem kann entweder durch verbesserte neue Sensoren behoben werden, oder über eine verbesserte Programmierung, die der Dekalibrierung entgegensteuert, welche natürlich, um optimale Ergebnisse zu liefern, einen gewissen Zeitrahmen einnimmt. Neben dem bereits erörtertem Problem, dass das Drehmoment der Motoren nicht gesteuert werden konnte, mussten die SuS den Schwerpunkt noch bestimmen, wozu jedoch in den drei Tagen die Zeit gefehlt hat.

4. Analyse des Projekts

Für die Analyse des interdisziplinären Projekts wurde ein Auswertungsbogen konzipiert, den die SuS am 22.02.2016, also eine Woche nach der Abschlusspräsentation, ausgefüllt haben. Dabei sollten zehn mathematische Fragen an das Projekt beantwortet werden, sowie die Gestaltung des Projekts reflektiert werden. Fernerhin konnten die SuS angeben, inwiefern ihre offenen Fragen und Anregungen an das Projekt beantwortet wurden, bevor sie ein abschließendes Feedback an das Projekt geben konnten. Der Auswertungsbogen ist im Anhang hinterlegt und die Erkenntnisse dessen werden in dem kommenden Unterkapitel erläutert.

4.1. Analyse der Projektdurchführung

In diesem Unterkapitel werden die einzelnen Phasen des Projekts analysiert. Dabei werden die gelungenen Aspekte des Projekts beleuchtet, aber auch die Phasen des Projekts, die anders gestaltet hätten werden können. Die Analyse beruht auf der Auswertung des Fragebogens der SuS.

4.1.1. Projekteinstieg

Zu Beginn des Projekts wurden zwei Videos präsentiert, um die SuS auf das anstehende Projekt einzustimmen und zu motivieren. Ob dies gelungen ist, zeigt das kommende Diagramm.



Abbildung 23: Projekteinstieg: Videos

Der Großteil des Kurses empfand den Einstieg in das Projekt über zwei Videos als sinnvoll. Hierbei ist aufgefallen, dass insbesondere das erste Video, das den Komödianten Stefan Raab zeigte, wie er vergeblich versucht einen Segway zu steuern, auf die SuS mo-

tivierend wirkte. An Hand der Ergebnisse von Abbildung 23 lässt sich die Einführung in das Projekt als gelungen einschätzen. Alternativ hätte ein sich regulierender Lego-Segway den SuS präsentiert werden können. Von dieser Idee wurde aber abgesehen, da die SuS bei diesem Vorgehen bereits ein „vorgefertigtes Produkt“ vorgelegt bekommen hätten, welches sie „nur“ hätten nachahmen sollen. Die Motivation war über das lustige Video, deren zugehörige URL im Literaturverzeichnis zu finden ist, durchaus gegeben. Im Anschluss an das Video sollten die SuS einen Segway eigenständig modellieren. Die Ergebnisse dieser Modellierung wurden bereits erörtert. Die SuS empfanden das eigenständige Modellieren des Segway als äußerst sinnvoll, was durch Abbildung 24 belegt wird.

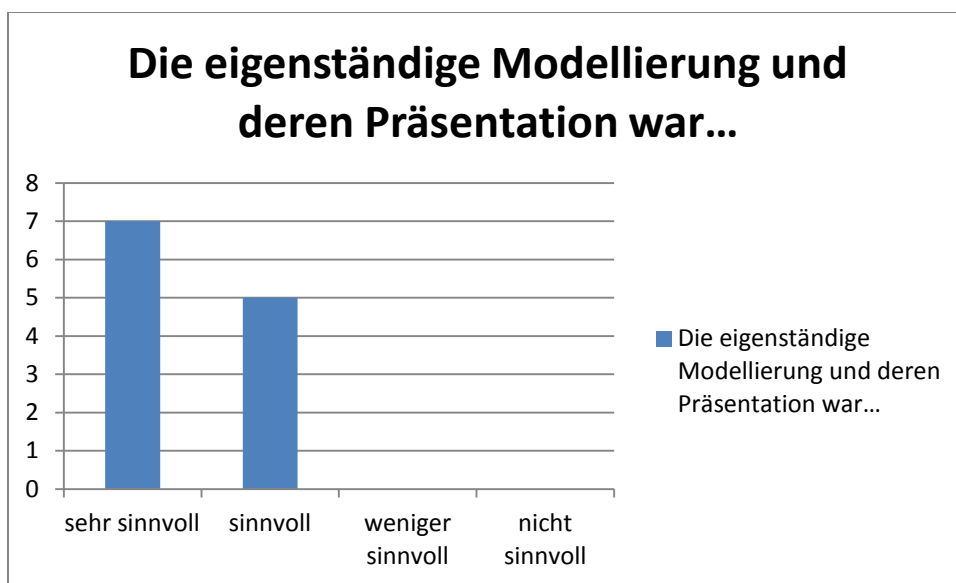


Abbildung 24: Projekteinstieg: Eigenständige Modellierung

In Abbildung 6 wurde der Prozess des Modellbildens visualisiert. In diesem Abschnitt des Projekts sollten die SuS eigenständig die Modellierung des Segways vornehmen. So ist an Abbildung 24 zu erkennen, dass diese schülerzentrierte und handlungsorientierte Phase sehr positiv bewertet werden kann. Die eigenständige Modellierung der SuS öffnet dem Lehrer die Möglichkeit die Erwartungen der SuS an das Projekt zu erfassen. Ferner kann die Modellierungen der SuS an weiteren Stellen des Projektes aufgegriffen werden, um den SuS das Gefühl zu vermitteln, dass die Projektgestaltung auch aufbauend auf den Gedankengängen der SuS stattfindet. So ist es möglich die SuS an der Projektgestaltung aktiv teilnehmen zu lassen, was durch die SuS angenommen wird. Auch dies belegt Abbildung 24. Im Laufe des Projekts wurde versucht die eigenständige Modellierung der SuS aufzugreifen, indem in der Unterrichtsphase die drei Modellierungen zu einer physikalischen Beschreibung zusammengefasst wurden. Weiterhin wurde der Aspekt der PD-Kontrolle (vergleiche Modellierung Gruppe 2) in der Projektphase ebenfalls berücksichtigt. Im Anschluss an die Modellierung hatten die SuS noch die Möglichkeit offene Fragen und Anregungen an das Projekt zu stellen. Abbildung 25 zeigt die Auswertung dieser Unterrichtsphase.

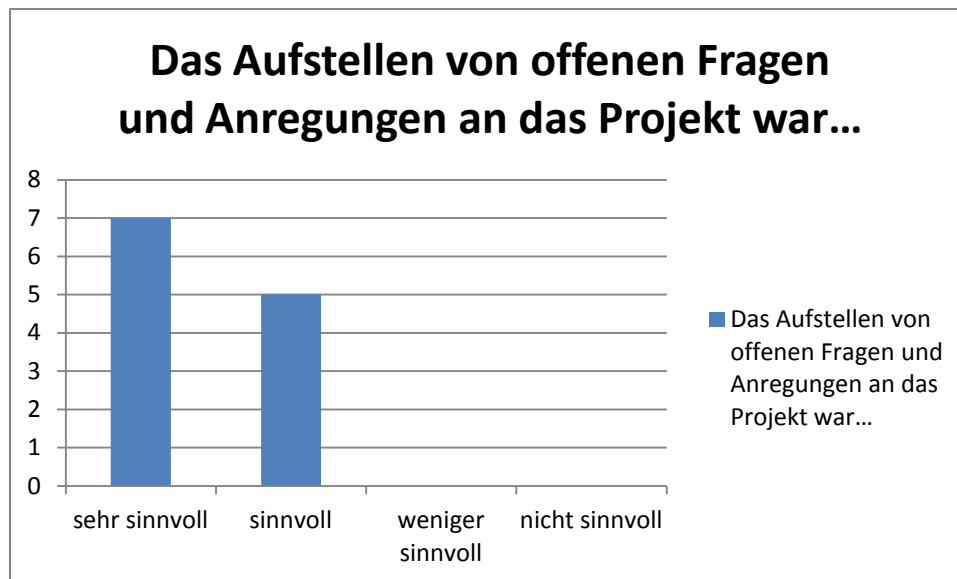


Abbildung 25: Projekteinstieg: Offene Fragen und Anregungen

Die SuS bewerteten die Möglichkeit, offene Fragen und Anregungen an das Projekt zu stellen, als positiv. Diese Phase, sowie die eigenständige Modellierung wurde in die Planung des Unterrichtseinstiegs mit einbezogen, um den SuS bereits früh die Handlungs- und Schülerorientierung des Projekts zu verdeutlichen. Dies wurde von den SuS wohlwollend aufgenommen. An Hand der Abbildungen 23, 24 und 25 kann der Projektstart, als gelungen eingestuft werden. Die beiden Videos haben die SuS auf das Projekt motiviert und sensibilisiert. Die frühe eigenständige Modellierung, sowie das Aufstellen von Fragen und Anregungen an das Projekt hat den SuS das Gefühl der aktiven Mitgestaltung gegeben. Dieses Vorgehen sorgte für eine hohe Motivation, sich mit der Problematik der Stabilisierung des Segways theoretisch und praktisch auseinanderzusetzen.

4.1.2. Projektunterricht

Der Projektunterricht begann damit, die Modellierungen der drei Gruppen zu der Modellierung des Segways als inverses Pendel auf einem Wagen zusammenzufassen, um ausgehend davon physikalische Kräfte zu bestimmen. Der Sinn dessen, war den SuS nicht ganz klar, was durch Abbildung 26 gekennzeichnet ist.

Die Vorgabe von physikalischen Kräften, die zu entsprechenden Termen bei der Modellierung des Segway zugeordnet werden...

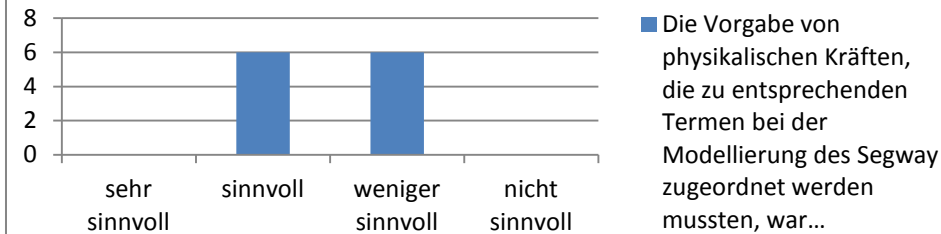


Abbildung 26: Projektunterricht: Physikalische Betrachtung des Segway

An Hand von Abbildung 26 ist zu erkennen, dass die Zuordnung von physikalischen Kräften zu entsprechenden Termen nur von der Hälfte der SuS als sinnvoll empfunden wurde. Ein Grund hierfür ist, dass einige SuS Physik abgewählt haben und so das physikalische Verständnis teilweise gefehlt hat. Dass einige SuS das Fach Physik in der Oberstufe abgewählt haben, war dem Lehrerteam bewusst, daher wurde sich dafür entschieden die Erarbeitung der physikalischen Kräfte in Gruppenarbeit durchführen zu lassen, damit auch SuS mit geringeren Physikkenntnissen vom Wissen der SuS mit größeren Physikkenntnissen profitieren. Dies ist offensichtlich nur bedingt gelungen, da vielen SuS der physikalische Zugang zu dem Problem zu groß war. Das Ziel der physikalischen Erarbeitung war darin begründet, aus den physikalischen Kräftegleichungen mit entsprechender Variablendeklaration ein mathematisches System aufzustellen, welches die Grundlage der weiteren Arbeitsaufträge der Gruppe Mathematik sein sollte. Fernerhin sollte den SuS bewusst gemacht werden, dass die Modellierung und Regelung eines Segways einen fächerübergreifenden Kontext besitzt. Ein physikalisches Verständnis ist demnach fundamental für das Verständnis von Kräften, die man bei einer Regulierung eines Segways zu berücksichtigen und zu kontrollieren hat. Diesen Part des Unterrichts völlig aus dem Konzept auszuschließen, erscheint keine Option, da die SuS das mathematische Verständnis der Kontrolle eines Segways im Rahmen des Projekts verstehen sollten. Die Analyse von physikalischen Kräften bildet jedoch das Fundament für das mathematische Verständnis der Regelung des Segways. An Hand von Abbildung 26 lässt sich jedoch festhalten, dass die physikalische Modellierung vereinfacht, beziehungsweise elementarisiert werden sollte. Eine Möglichkeit für dieses Vorhaben, wäre es den zweiten Ansatz der Modellierung (vergleiche Kapitel 2) des Segways zu wählen. Hier werden nur die horizontalen Kräfte bei der Modellierung eines Segways berücksichtigt. Diese Modellierung vernachlässigt Radial- und rücktreibende Kräfte. Dadurch werden die physikalischen Anforderungen an die SuS geringer, aber man ist dennoch in der Lage, ausgehend von den physikalischen Kräften, ein mathematisches System aufzustellen. Das komplexere Modell, welches mehr Kraftkomponenten beinhaltet, hätte bei diesem Vorgehen in der Projektphase der Gruppe Mathematik integriert werden können. Dennoch würde auch

diese alternative Unterrichtsumsetzung die Zuordnung von physikalischen Kräften zu entsprechenden Termen beinhalten.

Ausgehend von den zugeordneten Termen sollten die SuS, als Vorbereitung auf das mathematische System, zwei Kräftegleichungen ermitteln, welche die physikalischen Terme zusammenfasst. Dieser Unterrichtsabschnitt wurde von den SuS folgendermaßen bewertet.

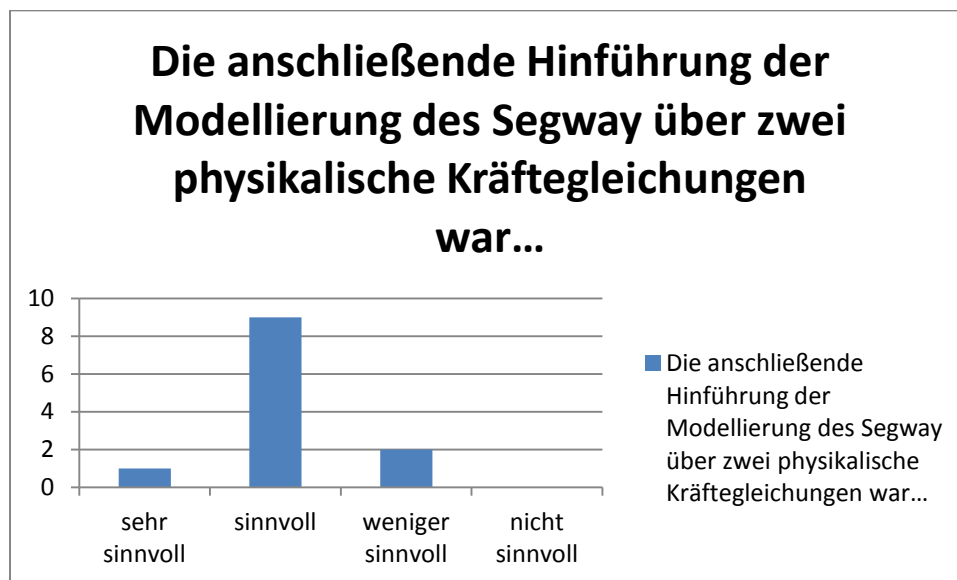


Abbildung 27: Projektunterricht: Kräftegleichungen

Das Zuordnen von physikalischen Kräften zu entsprechenden Termen war für einige SuS eine zu große Herausforderung, daher wurde dieser Unterrichtsabschnitt von der Hälfte der SuS als nicht sinnvoll eingestuft. Bei der Zusammenfassung von Termen zu einer Gleichung taten sich die SuS, da in dieser Unterrichtsphase neben dem physikalischen Verständnis auch das Rechnenkül der SuS gefragt ist. In einem Mathematik Leistungskurs ist das Arbeiten mit Rechnenkülen meist sehr ausgeprägt, sodass die SuS, selbst wenn sie die physikalischen Prozesse nicht ganz nachvollziehen konnten, dieser Phase des Unterrichts gut folgen können. In dieser Phase des Unterrichts wurden die SuS nicht durch mangelnde physikalische Kenntnisse überfordert, sodass dies eine Erklärung dafür sein kann, dass dieser Unterrichtsabschnitt von den SuS als sinnvoller eingestuft wurde. Im Unterricht erfolgte nun das Aufstellen des mathematischen Systems auf Basis der physikalischen Kräftegleichung. Dieser Unterrichtsabschnitt wurde von den SuS wie folgt bewertet.

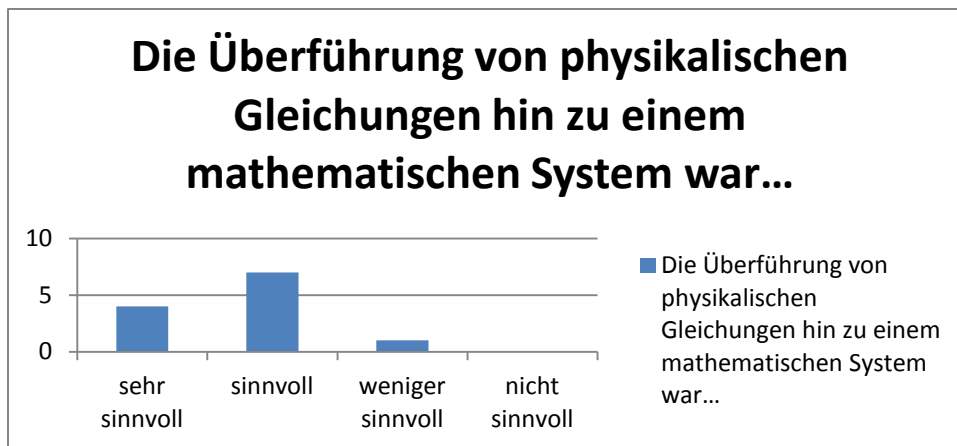


Abbildung 28: Projektunterricht: Aufstellen des mathematischen Systems

Die Mehrheit der SuS empfand die Überführung der physikalischen Gleichungen hin zu einem mathematischen System als sinnvoll. Insbesondere die SuS der Gruppen Mathematik und Simulation haben diesen Unterrichtspart als sehr sinnvoll empfunden, da diese Unterrichtsphase als Vorbereitung der Arbeitsaufträge während der dreitägigen Projektphase diente. Aber auch die SuS der Gruppen, die sich mit der praktischen Regelung des Segways in den drei Projekttagen beschäftigt haben, empfanden das Einführen des Begriffs System, beziehungsweise das Überführen eines physikalischen Modells, zu einem mathematischen Modell als sinnvoll. Dadurch wurde im Unterricht ein Zugang zu einer mathematischen Modellierung ermöglicht, was von den SuS positiv bewertet wurde. Um ein lineares zeitinvariantes System zu untersuchen, wurden im Verlauf der mathematischen Modellierung, geeignete Linearisierungen für nichtlineare Terme erarbeitet. Die SuS bewerteten diese Unterrichtsphase wie folgt.

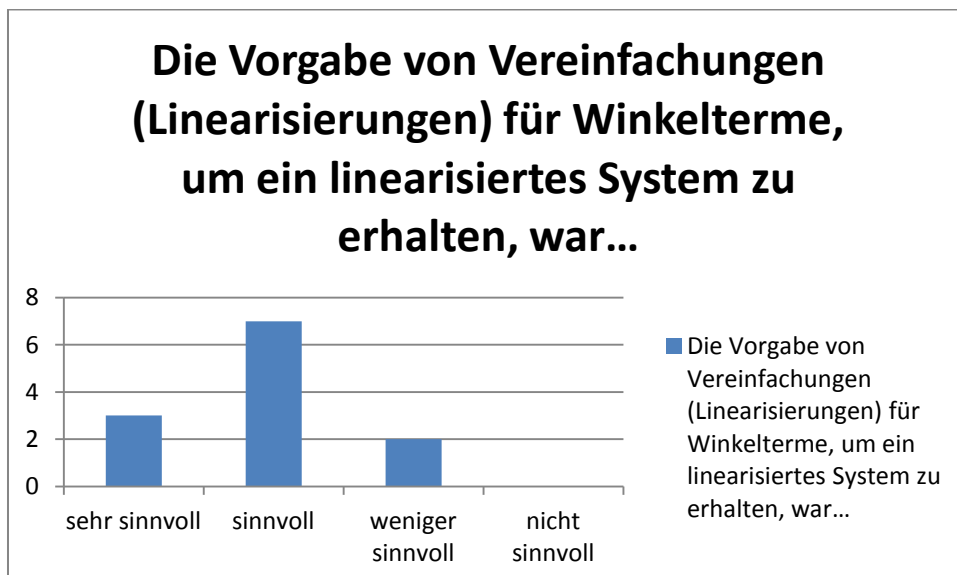


Abbildung 29: Projektunterricht: Linearisierungen

Zwei SuS bewerteten die Einführung von linearisierten Termen zur mathematischen Modellierung als weniger sinnvoll. Die weiteren Schüler teilten diese Einschätzung nicht.

Der Vorteil von Linearisierungen ist, dass die SuS durch das Ausführen dessen, lineare zeitinvariante Systeme mathematisch untersuchen können, welches im Rahmen dieses Projektes möglich gewesen ist. Dadurch konnten für die SuS der Gruppen Mathematik und Simulation der innermathematische Zugang zu den Konzepten Eigenwerte, Lineare Differentialgleichungen und deren Lösungen, sowie deren Stabilität und das Konzept der Feedback-Stabilisierung ermöglicht werden. An Hand dessen zeigt sich, dass die Linearisierung erst als Grundlage der Einführung der genannten mathematischen Konzepte dient, sodass auf diese während der Unterrichtsphase ebenfalls nicht verzichtet werden sollte. Weiterhin erscheint eine mathematische Modellierung eines nichtlinearen Systems im Mathematikunterricht der Oberstufe nicht möglich, da die Lösbarkeit einer nichtlinearen Modellierung, Kenntnisse aus dem vertieften Studium der System und Kontrolltheorie benötigt. Zusammenfassend kann der Projektunterricht, als Vorbereitung auf die dreitägige Projektumsetzung, als zufriedenstellend eingestuft werden. Um einer Überforderung der SuS, durch mangelnde physikalische Kenntnisse, entgegen zu wirken, hätte die Erarbeitung von horizontalen Kräften in einer Modellierung des Segways ausgereicht. So hätte, mit einem einfacheren physikalischen Ansatz, die weiteren Schritte der mathematischen Modellierung ebenfalls herausgearbeitet werden können. Jedoch ist es naheliegend, dass auf eine Betrachtung von physikalischen Kräften bei der Modellierung eines Segways nicht verzichtet werden kann, da zum einem den SuS bewusst gemacht wird, dass die Modellierung des Segways als fächerübergreifendes Problem aufgefasst werden muss und zum anderen die physikalische Betrachtung von Kräften bei der Bewegung des Segways erst eine mathematische Modellierung ermöglicht. Diese mathematische Modellierung kann dann dazu genutzt werden, um eine mathematische Lösung für das Problem zu generieren (vergleiche Prozess des Modellbildens; Abbildung 6). Um diesen Schritt vorzubereiten waren weitere Schritte im Unterricht nötig, wie das Zusammenfassen von physikalischen Termen zu entsprechenden Gleichungen, die zu einem mathematischen System geführt haben, welches durch Linearisierungen geeignet vereinfacht werden konnte. All jene Prozesse wurden im Unterricht durch Gruppenarbeit, auf Grundlage von Arbeitsblättern ermöglicht. Dieses Vorgehen wurde von den meisten SuS als sinnvoll eingestuft.

4.1.3. Projektumsetzung

Die SuS konnten sich zu Beginn der Projekttag für eine Gruppe (Mathematik, Simulation, Lego-Mindstorms) entscheiden, deren Arbeitsaufträge sie für die nächsten drei Tage zu bearbeiten hatten. Die Aufteilung der SuS in Gruppen wurde gewählt, um je nach Interesse verschiedene Zugänge zur Regelung eines Segways zu gestalten. Diese Maßnahme wurde von nicht jedem Schüler positiv eingestuft, wie Abbildung 30 belegt.

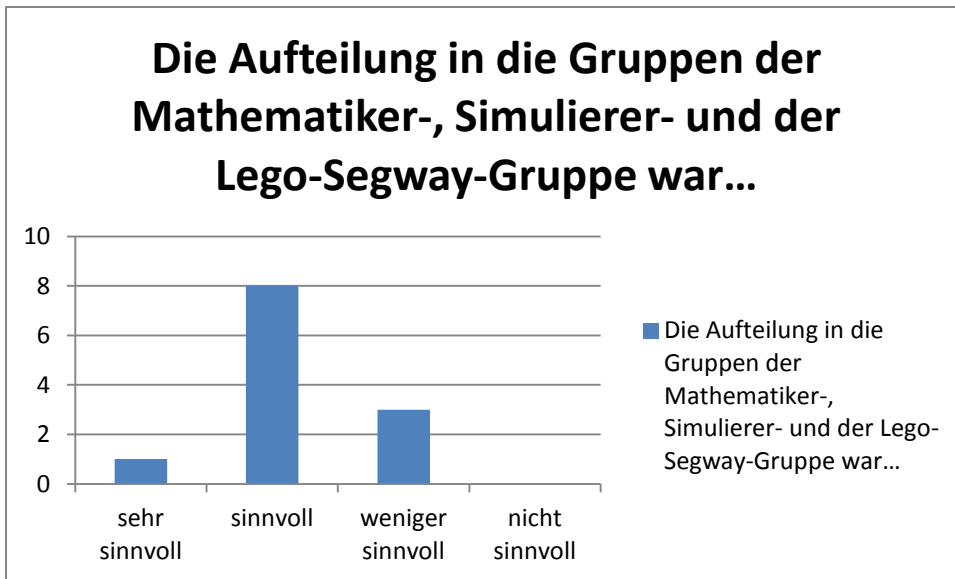


Abbildung 30: Projektumsetzung: Die Aufteilung in Gruppen

Zwei der drei Schüler der Gruppe Simulation empfanden die Aufteilung in Gruppen zur Bearbeitung des Projekts als nicht sinnvoll. Dies kann damit erklärt werden, dass den SuS der Gruppe Simulation einige mathematische Konzepte (vergleiche Kapitel 3.4) lehrerzentriert eröffnet werden mussten, um die Arbeitsaufträge zu bearbeiten. Hier hätten die Gruppen Mathematik, die diesen Input bereits früh in der Projektphase erhalten haben, und Simulation kurzzeitig zusammen geführt werden können, damit auch diesen SuS der mathematische Input früher und umfangreicher zur Verfügung gestellt worden wäre. Dies geschah leider nicht, sodass den SuS der Gruppe Simulation an entsprechenden Stellen zunächst das mathematische Verständnis des Arbeitsauftrags erörtert werden musste, bevor die SuS den Arbeitsauftrag beginnen konnten. Dadurch wurden die SuS in einem autonomen Arbeiten eingeschränkt. Eine detaillierte Analyse, wie die Kommunikation und das Zusammenarbeiten der Gruppen während der Projektphase hätte verbessert werden können, erfolgt in der Analyse von Abschnitt 4.4. Bevor die Umsetzung des Projekts in den einzelnen Gruppen näher untersucht wird, erfolgt zunächst eine Analyse des größtenteils eigenständigen Arbeitens während der Projekttag.



Abbildung 31: Projektumsetzung: Eigenständiges Arbeiten

Der Umstand, dass die SuS über einen längeren Zeitraum (als die gewöhnlichen 45 Minuten) eigenständig an einer Problemstellung arbeiten konnten, wurde größtenteils als sehr sinnvoll eingestuft. Dies wird auch in der Analyse von Abschnitt 4.4. nochmals deutlich. Es zeigte sich, dass die SuS, teilweise nach kurzen hilfreichen Informationen, seitens des Lehrerteams, über einen längeren Zeitraum autonom und konzentriert an einer Problemstellung arbeiten konnten. Dementsprechend kam den SuS die freie Zeiteinteilung hierbei entgegen. Sie wurden nicht durch das Klingeln der Schulglocke gehindert, ihren aktuellen Gedankengang fortzuführen, wie es im normalen Schulalltag oft der Fall ist. Auch das eigenverantwortliche Setzen von Pausen war für die SuS im Schulalltag eine neue Erfahrung, die sie dankend wahrgenommen haben. Aus der Analyse von Abbildung 31 folgt, dass das eigenständige Arbeiten in den Gruppen mit zugehöriger freier Pausenwahl von den SuS sehr wohlwollend aufgenommen wurde. Im weiteren Verlauf von Kapitel 4.1.3. wird die Umsetzung des Projekts in den einzelnen Gruppen erörtert. Begonnen wird dabei mit der Gruppe Mathematik, gefolgt von den Gruppen Simulation und Lego-Mindstorms.

Gruppe Mathematik:

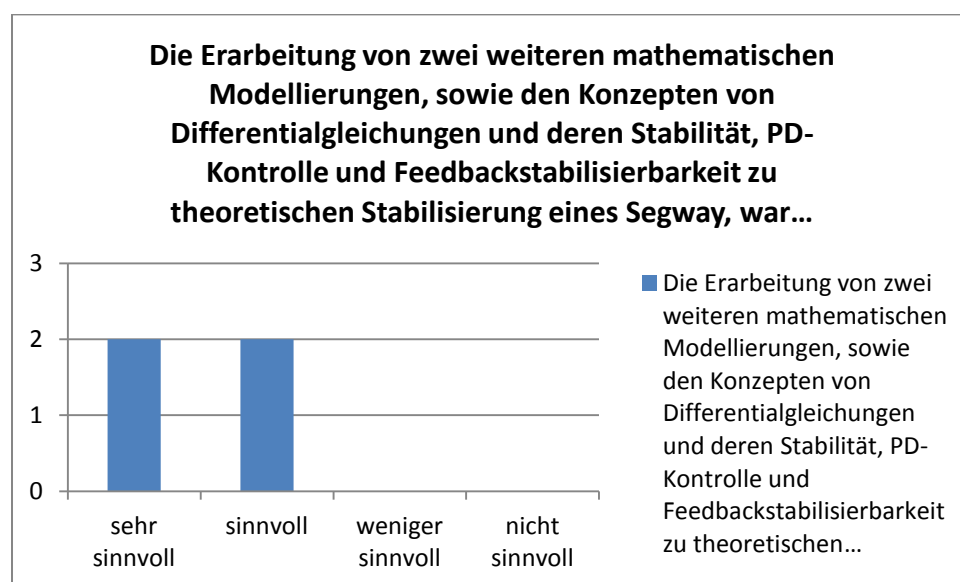


Abbildung 32: Projektumsetzung: Gruppe Mathematik (1)

Ein Schüler der Gruppe Simulation hat ebenfalls die Fragen der Gruppe Mathematik beantwortet. Dieser Schüler hat sowohl in dieser Frage, als auch in den kommenden drei Fragen jeweils mit „sinnvoll“ die entsprechende Aussage bewertet. Daher sind in den folgenden Abbildungen stets vier gegebene Antworten der SuS aufgelistet, obwohl nur drei SuS Teilnehmer der Gruppe Mathematik waren. Da die mathematischen Inhalte, die die Gruppe Mathematik erarbeitet haben, größtenteils deckungsgleich mit den erarbeiteten Inhalten der Gruppe Simulation sind, wird der SuS mit in die Auswertung einbezogen. Abbildung 32 ist zu entnehmen, dass die Erarbeitung von mathematischen Konzepten, die im regulären Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe selten bis gar nicht behandelt werden, im Rahmen eines Modellierungsprojekts möglich ist. So können die SuS, auf Grund des gegebenen Alltagskontextes des Segways, genügend Motivation aufbrin-

gen, sich Lerninhalte, die über das Oberstufenwissen im Fach Mathematik hinausgehen, nahezu eigenständig, anzueignen. Dies wird von den SuS im Rahmen eines solchen Modellierungsprojekts sogar als (sehr) sinnvoll erachtet. Grund hierfür ist womöglich, dass die SuS sich in einem Modellierungsprojekt die mathematische Lösung eines motivierenden Problems, unter gelegentlicher Hilfe des Lehrerteams, erarbeiten wollen und dadurch auch bereit sind, schwieriger werdende mathematische Probleme anzugehen. Um diesen Prozess zu erreichen, wurden Arbeitsblätter ausgegeben an Hand derer sich die SuS die in Abbildung 33 aufgelisteten Konzepte erarbeiten konnten. Diese Methode wurde von den SuS größtenteils als sinnvoll eingeordnet.

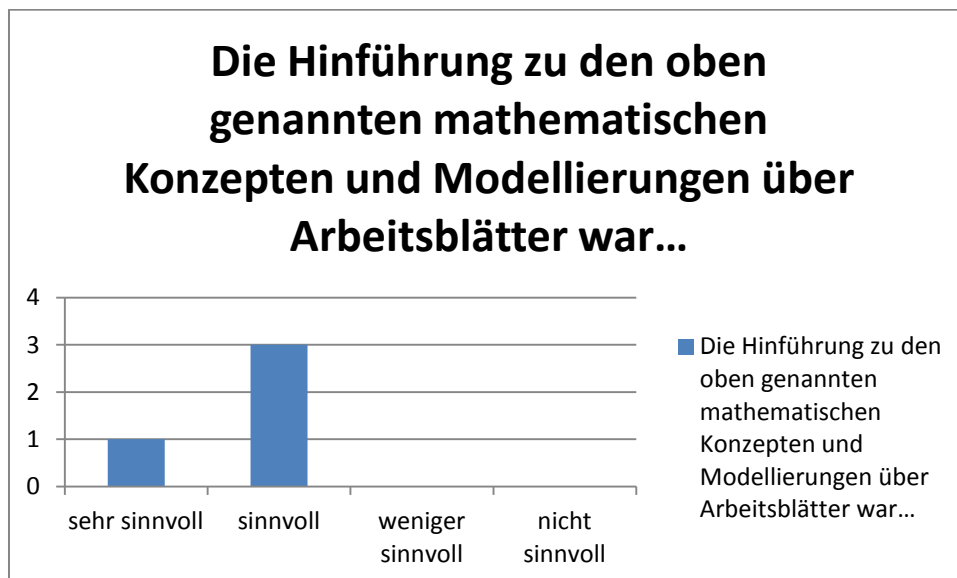


Abbildung 33: Projektumsetzung: Gruppe Mathematik (2)

Die Methodik, die Hinführung zu den mathematischen Konzepten über Arbeitsblätter zu gestalten, wurde unter dem Aspekt gewählt, dass die SuS einen Leitfaden an die Hand bekommen, um sich mathematische Konzepte größtenteils eigenständig erarbeiten zu können. Die Methodik ist von den SuS als sinnvoll eingeschätzt worden, dennoch hätte man im Rückblick eine höhere Vielfalt an Methoden berücksichtigen können. Dabei ist jedoch darauf zu achten, dass die SuS weiterhin möglichst eigenständig arbeiten. Eine Möglichkeit, exemplarisch für die Einführung der PD-Kontrolle, wäre gewesen den Aspekt der proportionalen Kontrolle in der Modellierung von Gruppe 2 aufzugreifen und an Hand dessen das Konzept der proportional-derivativen Kontrolle am Active-Board, welches im Unterrichtssaal zur Verfügung stand, erarbeiten zu lassen. So wäre dieses mathematische Konzept methodisch differenziert zu den weiteren Konzepten erarbeitet worden. Das Ziel der Ausgabe von Arbeitsblättern wurde bereits erörtert, doch vereinzelte SuS gaben den Kommentar ab, dass sie den Eindruck gewonnen haben, dass das gesamte Projekt durch die Ausgabe der Arbeitsblätter straff durchgeplant war. Auch dieser Kommentar gibt Grund zur Annahme, dass eine Methodenvielfalt in der Arbeitsphase für zukünftige Modellierungsprojekte zu beachten ist. Jedoch ist zu bedenken, dass die SuS in einem Modellierungsprojekt eine geeignete Struktur für die Lösung eines Problems entwickeln müssen. Meist sind selbst sehr gute SuS nicht in der Lage, sich diese Struktur

vollkommen eigenständig zu erarbeiten. In diesem Projekt wurde dieser Aspekt berücksichtigt und daher wurden zur Lösung des Problems der theoretischen Stabilisierbarkeit eines Segways konkrete Arbeitsaufträge konzipiert, die die Struktur für den Lösungsprozess legen sollte. Dieses Vorgehen wurde von den SuS sehr positiv bewertet.

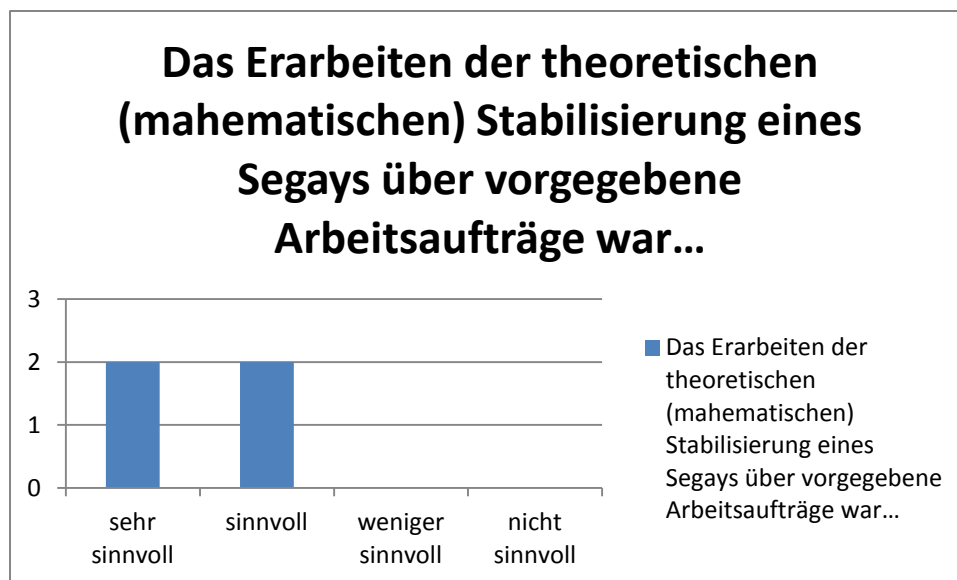


Abbildung 34: Projektumsetzung: Gruppe Mathematik (3)

Abbildung 34 zeigt, dass selbst sehr gute SuS bei mathematischen Inhalten, die über das Oberstufenwissen hinaus gehen, Struktur benötigen, um sich diese zu erarbeiten. Ein Brute-Force Ansatz, die mathematische Theorie hinter einem Segway selbstständig lösen zu wollen, würde sehr wahrscheinlich schnell zu Schwierigkeiten führen, die für SuS eigenständig kaum zu lösen sind. Von daher ist es ratsam den SuS gewisse Lösungsstrukturen vorzugeben, an denen sie sich orientieren können. Dass auch dieses Vorgehen Nachteile hat, zeigte sich an dem Schüler der bereits früh die Gruppe Mathematik verlassen hatte, weil er dachte, dass seine eigene Lösung für das Problem der Stabilisierung des Segways nicht gewünscht ist. Dies sollte durch dieses Vorgehen nicht bezweckt werden, doch man erkennt an der mathematischen Modellierung (Kapitel 2), dass das Alltagsphänomen des Segways mathematisch nicht allein mit Kenntnissen der gymnasialen Oberstufe zu beschreiben ist und daher an gewissen Punkten Strukturen benötigt werden, die das Erarbeiten von mathematischen Konzepten, die in der Oberstufe in der Regel nicht vermittelbar sind, ermöglicht. Jedoch ist an der Reaktion des Schülers auch zu erkennen, dass dieses Vorgehen die Gefahr birgt, dass die SuS glauben, ihre eigene Leistung sei zu gering, wenn sie einen strukturierten Lösungsweg „lediglich“ abarbeiten müssen. Doch bereits die Arbeitsaufträge bereiteten den SuS Schwierigkeiten, sodass sie diese erst nach einigen Ergänzungen und Hilfen zu Beginn des Projekts durch das Lehrerteam selbstständig bearbeiten konnten. Diese Phase des lehrerzentrierten Inputs bewerteten die SuS wie folgt.

Die begleitenden Hilfen und Ergänzungen am Smartboard während der Bearbeitung der Arbeitsaufträge durch Herrn Lantau waren...

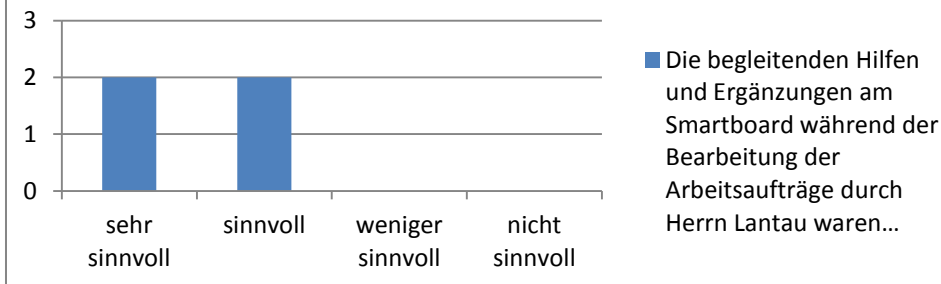


Abbildung 35: Projektumsetzung Gruppe Mathematik (4)

An Hand Abbildung 35 ist zu erkennen, dass lehrerzentrierte Phasen in einem Modellierungsprojekt ihren Zweck erfüllen, diese sogar von den SuS gewünscht sind, sofern sie Schwierigkeiten bei der aktuellen Problematik haben. Dabei hat sich gezeigt, dass lehrerzentrierte Phasen in einem Zeitraum von 10 bis maximal 60 Minuten den Vorteil haben, dass die SuS, an Hand der Informationen des Lehrers die weiteren Aufgaben effizienter bearbeiten können, als ohne jegliche Hilfen. Das Projekt wurde zwar derart geplant, dass die SuS sich auf der Basis der Arbeitsaufträge der Arbeitsblätter die mathematischen Konzepte nahezu eigenständig aneignen sollten, jedoch zeigte sich, dass dieses Vorhaben ein zu großes Ziel gewesen ist. Selbst sehr starke SuS benötigen bei mathematischen Schwierigkeiten Hilfestellungen durch den Lehrer. So wirkt der Lehrer in einem solchen Projekt oft als Moderator, der die meiste Zeit des Projekts im Hintergrund agiert, dann aber präsent sein muss, sofern die SuS keinen eigenständigen Fortschritt in der Problemlösung erzielen können. Diese Analyse wird in der Gruppe Simulation ebenfalls aufgegriffen, da auch diese SuS Hinweise und Ergänzungen lehrerzentriert an der Tafel erhalten haben, um die Arbeitsaufträge bearbeiten zu können. Doch bereits an dieser Stelle bleibt festzuhalten, dass lehrerzentrierte Phasen in einem Modellierungsprojekt essentiell für die Problemlösung einer mathematischen Modellierung sind, sofern Schritte der Problemlösung zu unüberwindbaren Schwierigkeiten bei den SuS führen.

Gruppe Simulation:

Die SuS der Gruppe Simulation sollten an Hand von konkreten Arbeitsaufträgen Simulationen für den Segway erstellen. Auf Grund dessen waren die SuS in ihrer Kreativität ein wenig eingeschränkt. Das Ziel der Konzeption von konkreten Arbeitsaufträgen war es, dass die SuS aus den Gruppen Mathematik und Simulation sich gegenseitig in ihrer Arbeitsphase ergänzen, da die inhaltlichen Aspekte der Arbeitsaufträge in beiden Gruppen ähnlich waren. So war es angedacht, dass die SuS der Gruppe Simulation passende Simulationen zu den theoretischen Erkenntnissen der Gruppe Mathematik liefern. Dieser Pro-

zess fand während der Projektphase selten statt und es wurde leider vom Lehrerteam vernachlässigt, diesen zu initiieren. Dadurch haben die SuS der Gruppe Simulation den Sinn der konkreten Arbeitsaufträge nicht nachvollziehen können, sodass diese Konzeption von Schülerseite weniger sinnvoll erachtet wurde, welches durch Abbildung 36 visualisiert wird.

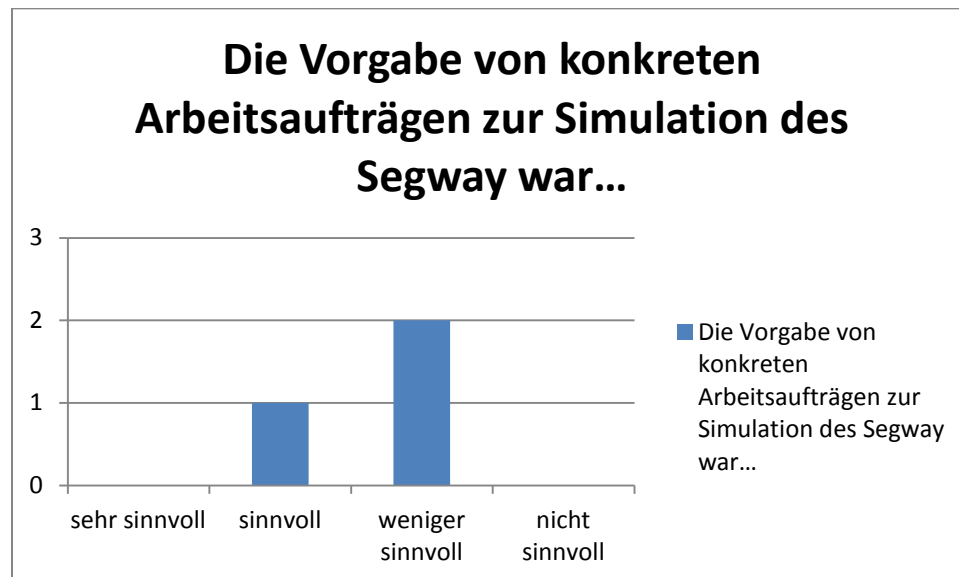


Abbildung 36: Projektumsetzung: Gruppe Simulation (1)

Es zeigt sich, dass die Konzeption von Arbeitsaufträgen zur Simulation als weniger gelungen bezeichnet werden kann. Eine Überlegung wäre es gewesen, die SuS der Gruppe Simulation in die Gruppe Mathematik zu integrieren und diesen dann an entsprechenden Stellen den Arbeitsauftrag zu geben, zu dem nun behandelten mathematischen Konzept eine entsprechende Simulation in Bezug auf den Segway zu gestalten. Der Vorteil an diesem Vorgehen ist, dass die SuS die mathematischen Kompetenzen ebenfalls erlangen und anschließend entsprechende Simulationen gestalten können. Jedoch würde man auch so die Simulation durch konkrete Arbeitsaufträge vorgeben. Eine weitere Option bliebe darin, den SuS nur den Auftrag zu geben, eine Simulation für den sich stabilisierenden Segway zu erstellen und die Gedankengänge anschließend zu erörtern. Diese Aufgabenstellung ist sehr offen gehalten, welches so die Kreativität der SuS zur Lösung des Arbeitsauftrages erhöht. Die SuS waren in ihren Aufgaben nicht ganz eingeschränkt, sie konnten sich schließlich die Programme zur Bearbeitung der Arbeitsaufträge frei wählen. Dieser Aspekt, wie in Abbildung 37 zu erkennen ist, wird durch die SuS als sinnvoll erachtet. Diese Maßnahme wurde deswegen so gewählt, da das Lehrerteam keine Klarheit hatte, welche Programmiersprache die SuS zur Programmierung und Simulation bevorzugen. Den SuS standen die Programme GeoGebra, Java, sowie Matlab zur Verfügung, sodass sie sich für je eine passende Programmiersprache je nach Aufgabentyp entscheiden konnten. Eine Bewertung dieser Vorgehensweise ist in Abbildung 37 hinterlegt.

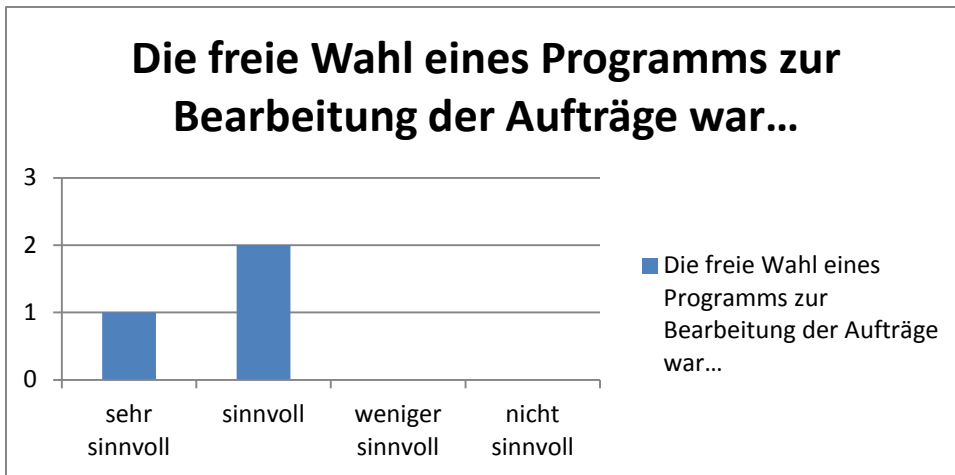


Abbildung 37: Projektumsetzung: Gruppe Simulation (2)

In Abschnitt 3.4. wurde bereits erörtert, dass auch die SuS der Gruppe Simulation sich mathematische Konzepte durch geeignete Hilfestellungen des Lehrers erarbeiten konnten, um anschließend die entsprechenden Arbeitsaufträge besser verstehen zu können. Die ergänzenden Hinweise durch das Lehrerteam wurden von den SuS dankbar angenommen. Dies belegt Abbildung 38.

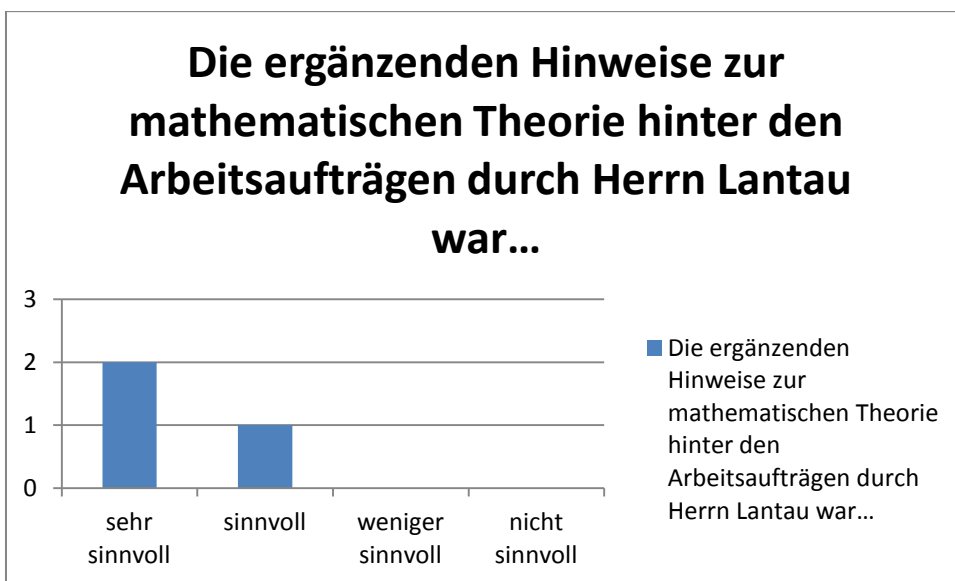


Abbildung 38: Projektumsetzung: Gruppe Simulation (3)

Analog zur Auswertung der Gruppe Mathematik zeigt sich, dass lehrergeleitete Phasen in einem Modellierungsprojekt sehr sinnvoll sind. Durch diese werden inhaltliche Verständnisfragen geklärt, sodass die SuS ihren Arbeitsprozess fortführen können. Im Endeffekt führt dies zu besseren Ergebnissen der Problemlösung, die durch gezielte Hilfen auch schneller erzielt werden. Abschließend wird noch untersucht, inwiefern die SuS es als sinnvoll empfanden die Simulationsaufträge an die mathematischen Inhalte zu koppeln. Hierzu gibt Abbildung 39 Aufschluss.

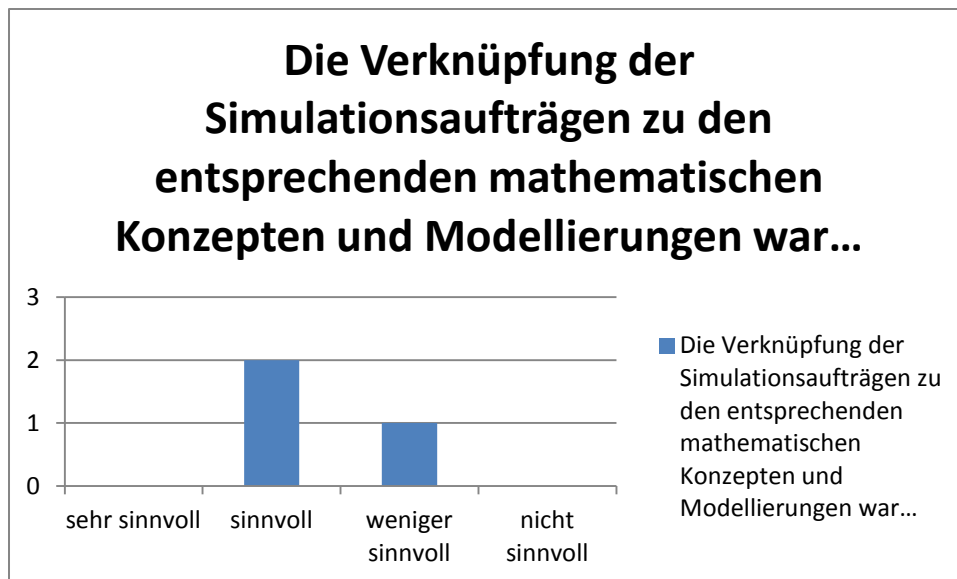


Abbildung 39: Projektumsetzung: Simulation (4)

Abbildung 39 belegt die These, dass die enge Anlehnung der Arbeitsaufträge der Gruppe Simulation, an die der Gruppe Mathematik, nicht von allen SuS als sinnvoll erachtet wurde. Weiterhin zeigt Abbildung 39, dass durch die enge Vorgabe der Arbeitsaufträge und durch die enge Vernetzung an die mathematischen Konzepte, die SuS in ihrer Kreativität eingeschränkt wurden. Dies wird insgesamt durch die Abbildungen 36-39 belegt.

Gruppe Lego-Mindstorms:

Die SuS der Gruppe Lego-Mindstorms, die sich jeweils noch aufgeteilt haben in die Gruppe, die den selbstgebauten Segway einmal über die Lego-Mindstorms Software und über die Programmierumgebung lejosEV3 angesteuert haben, waren in der Konstruktion des Segways an keine Vorschriften gebunden. So wählten die SuS, die den Segway über die Lego-Steuerung ansteuerten einen hohen Schwerpunkt, die Gruppe der SuS, die den Segway über lejosEV3 ansteuerten einen niedrigen Schwerpunkt. Die SuS konnten bei der Gestaltung des Segways ihre Kreativität frei entfalten. Dies wurde von den SuS größtenteils als sehr positiv bewertet.

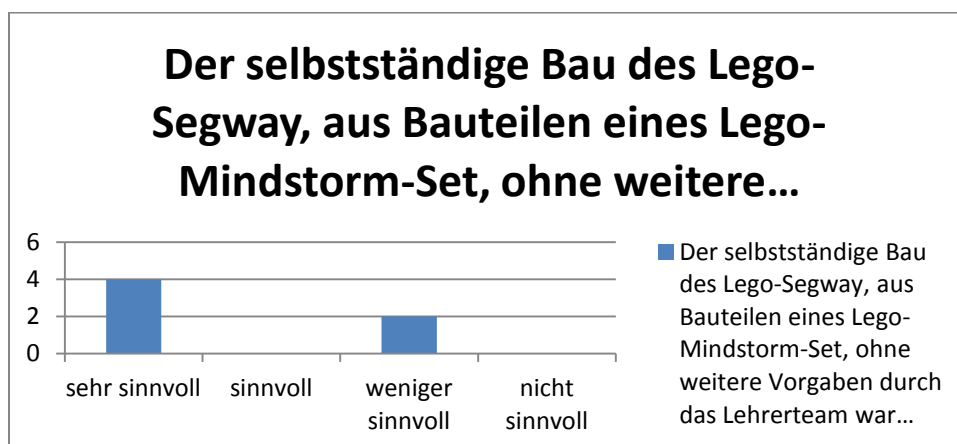


Abbildung 40: Projektumsetzung: Gruppe Lego-Mindstorms (1)

Auffallend ist die Auswertungsverteilung bei dieser Frage. Zwei Drittel der SuS empfanden die freie Gestaltung des Segways als sehr sinnvoll, da die SuS dadurch ihre eigenen Ideen direkt umsetzen konnten und relativ zügig dabei festgestellt haben, ob diese Ideen die Stabilisierung des Segways ermöglichen, oder behindern. Zwei SuS, beide aus der Gruppe, die den Segway über die Lego-Software angesteuert haben, gaben an, dass der selbstständige Bau des Segways weniger sinnvoll gewesen ist. In dieser Gruppe war demnach das Bedürfnis vorhanden, konkrete Hinweise zur Gestaltung des Segways anzugeben, sofern Schwierigkeiten beim Bau des Segways auftreten. In der Projektgestaltung konnten die SuS jedoch recht rasch einen Segway bauen, der sich bereits früh relativ gut stabilisierte. Es ist auf Grund dessen verwunderlich, dass zwei SuS aus dieser Gruppe Vorgaben, oder Hinweise bezüglich der Konstruktion des Segways gewünscht haben. Wie bereits erwähnt wurde, konnten die SuS sich ein Programm zur Steuerung des Segways frei wählen. Es war dabei bekannt, dass die SuS bereits reichlich Erfahrung im Umgang mit der Lego-Software gesammelt haben. Dementsprechend positiv ist die Tatsache von den SuS aufgenommen worden, dass die Programmiersprache zur Steuerung frei gewählt werden konnte.

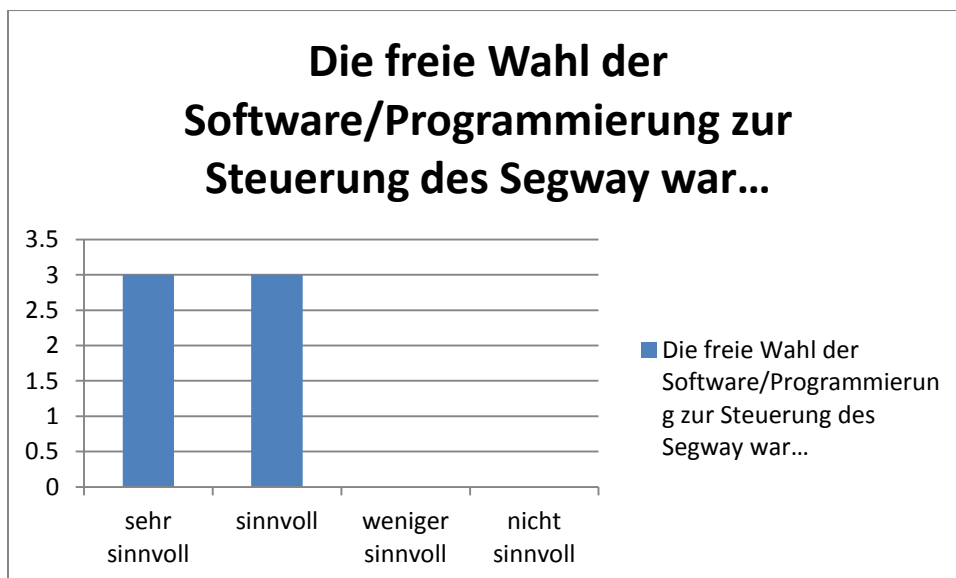


Abbildung 41: Projektumsetzung: Gruppe Lego-Mindstorms (2)

Wie bereits dargelegt wurde, haben die SuS einen großen Erfahrungsschatz im Umgang mit der Programmierumgebung von Lego, als auch von lejosEV3. Dadurch war es möglich die SuS frei an der Programmierung arbeiten zu lassen, ohne den SuS Erklärungen und Hinweise im Umgang mit den Programmiersprachen zu geben. Sofern diese Voraussetzungen nicht gegeben sind, gestaltet sich das Projekt sicherlich schwieriger, da man den SuS zunächst eine Einführung in die Programmierumgebung geben muss. Sofern die SuS jedoch bereits diese Erfahrungen haben, zeigt sich, dass man als Lehrer gut beraten ist, die SuS frei in ihrer Programmierung walten zu lassen. An Hand der tollen Projektergebnisse zeigt sich, dass dieses eigenständige Arbeiten der SuS mit tollen Projektergebnissen verbunden ist. Fernerhin fördert das eigenständige Arbeiten neben der Kreativität, auch die Motivation der SuS sich der Problematik der praktischen Umsetzung eines Seg-

ways zu widmen. Wie bereits erörtert, waren die Stabilisierungsergebnisse beider Gruppen, die den Segway angesteuert haben, sehr gut, bedenkt man den Umstand, dass den SuS nur ein Gyro-Sensor zur Ansteuerung des Segways zur Verfügung gestanden hat. Aus versandtechnischen Gründen konnte der, für die weitere Stabilisierung des Segways, essentielle Beschleunigungssensor nicht rechtzeitig geliefert werden. Durch die Dekalibrierung des Gyro-Sensors, war eine Stabilisierung aus technischen Gründen, über einen längeren Zeitraum nicht möglich, daher wurde die Steuerung allein über den Gyro-Sensor bemängelt. Dies belegt Abbildung 42.

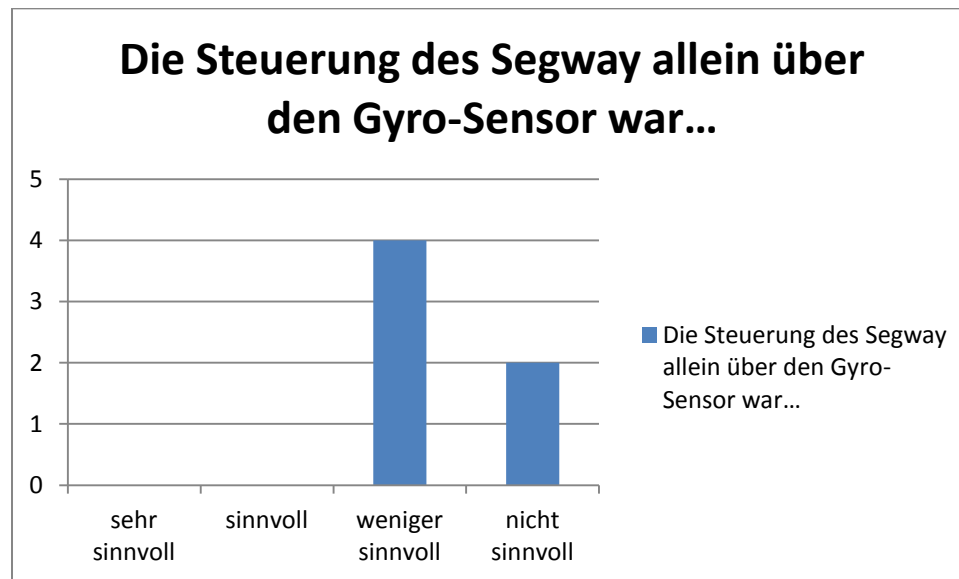


Abbildung 42: Projektumsetzung: Gruppe Lego-Mindstorms (3)

In der elektronischen Version der Arbeit können die Stabilisierungsergebnisse der beiden Gruppen über entsprechende Videos entnommen werden. Doch ab einem gewissen Zeitpunkt ist die Dekalibrierung des Gyro-Sensors so groß, dass keine Ansteuerung eine Regelung des Segways mehr ermöglicht. Dieser Umstand kann als äußerst schade bezeichnet werden, denn bereits mit dem Gyro-Sensor waren gute Ergebnisse der Stabilisierung erreicht worden. Mit Hilfe des Beschleunigungssensors hätte der Dekalibrierung des Gyro-Sensors, durch eine geschickte Programmierung, entgegen gewirkt werden können. Abbildung 42 zeigt deutlich, dass eine Steuerung über den Gyro-Sensor allein nicht sinnvoll ist, um langfristige Stabilisierungsergebnisse zu erhalten. Eine Ansteuerung über zwei Sensoren, den Gyro-Sensor und den Beschleunigungssensor, wäre für die Projektumsetzung wichtig gewesen, um bessere Stabilisierungsergebnisse zu erzielen.

4.1.4. Abschlusspräsentation

Nachdem die Projektphase mit sehr guten Ergebnissen der SuS abgeschlossen wurde, war es nun die Aufgabe der SuS ihre Ergebnisse zu sammeln und in eine Abschlusspräsentation aufzubereiten. Abbildung 43 zeigt, dass die SuS das Aufbereiten der Ergebnisse in eine Präsentation als sehr sinnvoll empfunden haben.

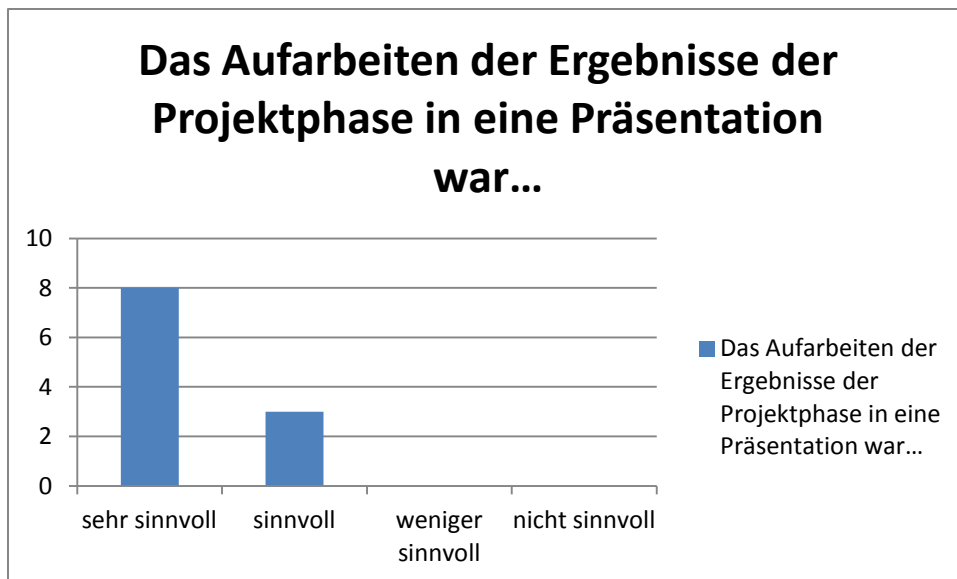


Abbildung 43: Präsentation: Das Aufarbeiten der Ergebnisse

Die Erklärung für die positive Bewertung der Aufarbeitung der Ergebnisse ist jene, dass die SuS die wichtigsten Ergebnisse der Projektstage rekapitulieren mussten, um diese derart vorzubereiten, dass sie verständlich präsentiert werden können. Um eine verständliche Präsentation der Ergebnisse zu erreichen, müssen die SuS die jeweils zu präsentierende Inhalte sehr gut nachvollziehen können. Die Aufbereitung der Ergebnisse hatte weiterhin den Vorteil, dass die SuS die Ergebnisse der einzelnen Gruppen zusammengetragen haben und die SuS somit einen Gesamtüberblick über alle Ergebnisse gewinnen konnten. So haben die SuS Bestandteile ihrer Arbeitsergebnisse in anderen Gruppen wieder entdeckt und konnten auf Grund dessen ihr aufgebautes Wissen besser vernetzen. In der Phase der Präsentationsvorbereitungen wurden so inhaltliche Verständnisfragen klarer, da die SuS Vernetzungen zu inhaltlich äquivalenten Ergebnissen anderer Gruppen erhalten haben und ihnen dadurch ein weiterer Zugang zu dem Verständnisproblem ermöglicht wurde, sodass dieses schneller behoben werden konnten. Da die SuS die Präsentation gemeinsam durchführen sollten, war in der Vorbereitung eine große Kommunikation der Gruppen untereinander notwendig, um die Inhalte der Präsentation gegenseitig abzusprechen. Genau diese Vernetzung erhöhte den Lernerfolg der SuS, der in Abschnitt 4.3. erörtert wird, immens, sodass auch SuS der Gruppen Lego und Simulation sehr gute Ergebnisse bei der Kontrolle des Lernzuwachses erzielt haben. Die genaue Analyse des Lernzuwachses erfolgt jedoch erst später. An dieser Stelle ist zu bilanzieren, dass durch die Aufbereitung der Ergebnisse, die Kommunikation der SuS über ihre Ergebnisse gefördert wurde und dadurch der Lernzuwachs bei allen SuS des Kurses gegenüber der Projektumsetzung gestiegen ist. Abschließend wird auf Grundlage von Abbildung 44 die Abschlusspräsentation des Projekts reflektiert.

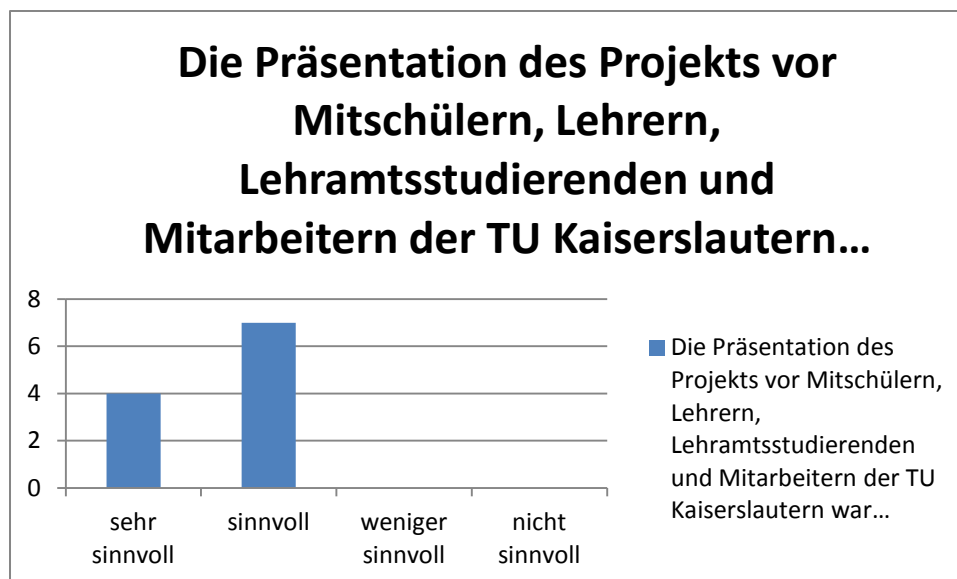


Abbildung 44: Die Abschlusspräsentation

Auch die Abschlusspräsentation wurde von den SuS als sehr positiv bewertet. Die Abschlusspräsentation verfolgte neben der Darstellung der Ergebnisse den Zweck, die hervorragenden Leistungen der SuS, während der Projektphase in einem entsprechenden Rahmen zu würdigen. So konnten die SuS ihre Ergebnisse vor Mathematikern der AG Technomathematik, Lehrern des Heinrich-Heine Gymnasiums, Mitschülern, Eltern und Lehramtsstudierenden präsentieren. Gerade die Präsenz von Professoren und promovierten Mathematikern beim Vortrag der SuS belegt die zuvor aufgestellte These. Auf Grund des Vortrags der SuS haben diese gar die Einladung erhalten ihre Ergebnisse, bei weiterer Vertiefung des Projekts, im Rahmen der mathematischen Forschungsreihe „Imaginary“ vorzustellen. Eine Ehre, die unter normalen Umständen nur Mathematikern an Universitäten zu Teil wird. Diese Einladung hat den SuS aufgezeigt, dass das Projekt für die SuS nicht nur motivierend war, sondern sie im Rahmen des Projekts mathematische, technische und informatische Kompetenzen erworben haben, die weit über die Erwartungen an einen Oberstufenschüler in diesen drei Fächern hinaus gehen. An Hand dessen zeigt sich auch, welchen Mehrwert solche Modellierungsprojekte im Unterricht haben können. Durch dieses Projekt konnten sich die SuS Kompetenzen aneignen, die normalerweise nach 1 bis 3 Jahren Studium zu erwarten sind. Dieses Zwischenfazit belegt bereits, dass den SuS durch dieses Projekt Einblicke in spätere Studiengänge, sowie in das Arbeitsleben von Mathematikern gegeben wird. Ein solcher Einblick ist in einem regulären Unterricht der gymnasialen Oberstufe seltener vorhanden.

4.2. Analyse der Beantwortung der offenen Fragen an das Projekt

Im Abschnitt 3.2. wurden bereits die offenen Fragen und Anregungen der SuS an das Projekt vorgestellt und erörtert, ob diese Fragen im Projektverlauf beantwortet wurden. In diesem Abschnitt wird nun dargelegt, inwiefern die SuS glauben, dass die offenen Fragen

und Anregungen im Projekt beantwortet worden sind. Zunächst wird dabei die Frage erörtert, welche Bauteile sich zur Stabilität des Segways eignen.

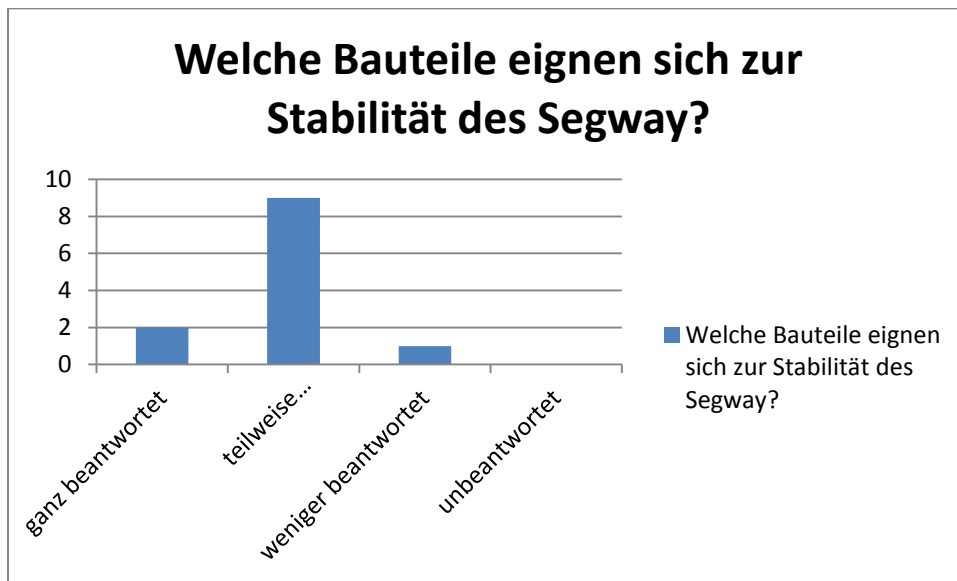


Abbildung 45: Frage 1: Bauteile des Segways

Die SuS gaben an, dass die Frage, welche Bauteile sich zur Stabilisierung des Segways eignen teilweise beantwortet wurde. Wie bereits erwähnt, stand den SuS nur der Gyro-Sensor, als ein Sensor zur Stabilisierung des Segways zur Verfügung. Dieser allein eignete sich nur bedingt zur Steuerung des Segways. Höchstwahrscheinlich hätte der Beschleunigungssensor der Dekalibrierung des Gyro-Sensors entgegen wirken können. Diese These kann jedoch nicht sicher belegt werden, sodass dies von den SuS dementsprechend bewertet wurde. Die Frage, inwiefern sich ein Segway stabilisiert, ist hingegen im Projekt beantwortet worden, was die SuS ähnlich eingeschätzt haben.

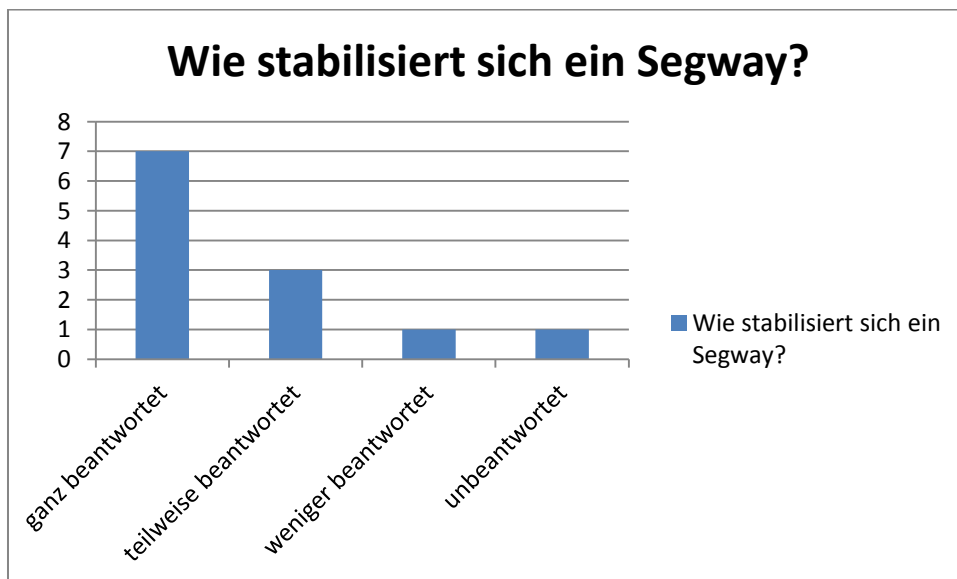


Abbildung 46: Frage 2: Stabilisierung des Segways

Die theoretische und praktische Stabilisierung des Segways war der wichtigste Aspekt der Projektphase, dementsprechend haben die SuS das Gefühl, dass während des Projekts diese Frage ganz, beziehungsweise teilweise beantwortet wurde. Die Analyse des mathematischen Lernerfolgs im kommenden Abschnitt wird belegen, dass viele SuS sich die theoretische Stabilisierung des Segways durch das Projekt aneignen konnten. Insbesondere die Stabilisierung des Segways über eine PD-Kontrolle führte hierbei zu einem erfreulichen Lernzuwachs. Dieses Ergebnis deckt sich mit der Auswertung von Abbildung 46 gut ab. Insgesamt hat nahezu jeder SuS einen Einblick in die Stabilisierung eines Segways durch das Projekt gewinnen können, welches schließlich eines der wichtigsten Projektziele war. In der kommenden Abbildung wird die Bedeutung des EV3-Steins für das Projekt beleuchtet.

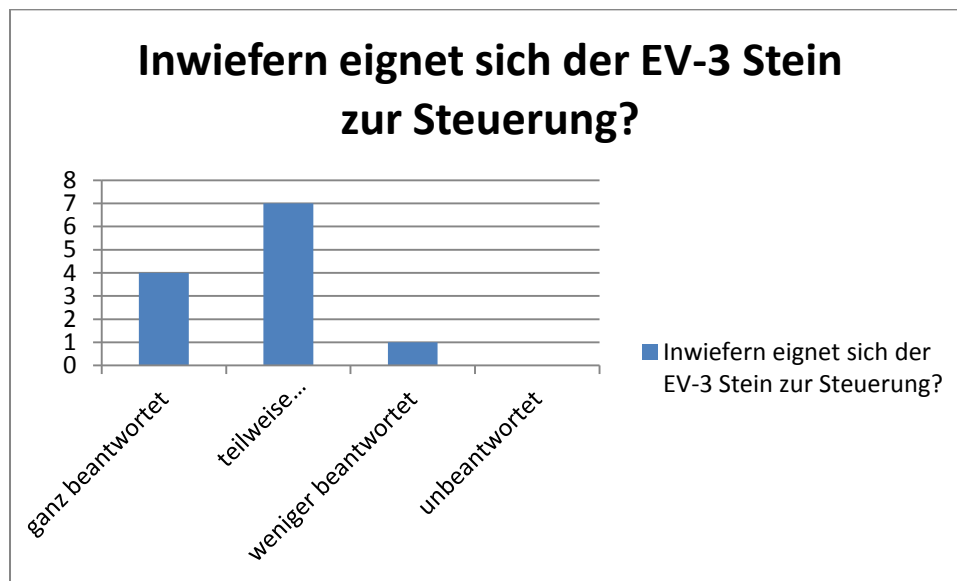


Abbildung 47: Frage 3: Die Bedeutung des EV3-Steins

Die SuS der Gruppe Lego-Mindstorms haben den EV3-Stein genutzt, um über eine Programmierung dessen die Stabilisierung des Segways zu erreichen. Auf Grund der bereits erwähnten Problematik, dass die Daten des Gyro-Sensors fehlerhaft waren, kann die Frage, ob sich der EV3-Stein zur Steuerung eignet nur teilweise beantwortet werden. Eine hinreichend zufriedenstellende Steuerung des Segways ist während der Projektumsetzung über den EV3-Stein erfolgt. Dies stimmt größtenteils mit der subjektiven Wahrnehmung der SuS überein.

Bei der Konstruktion des Segways spielte der EV3-Stein eine wichtige Rolle, denn der vergleichsweise schwere EV3-Stein legt die Lage des Schwerpunkts des Segways fest. Es wurde bereits erörtert, dass die Gruppen je einen Segway mit hohem Schwerpunkt (Gruppe Lego-Software) und mit niedrigem Schwerpunkt (Gruppe lejosEV3) konstruierten. Ferner wurde bereits dargelegt, dass der Schwerpunkt einem wichtigen Parameter für die Konstruktion und die Stabilisierung des Segways darstellt. Dementsprechend haben die SuS angegeben, dass die Bedeutung des Schwerpunktes für den Segway sowohl praktisch, als auch theoretisch im Laufe des Projekts geklärt wurde.

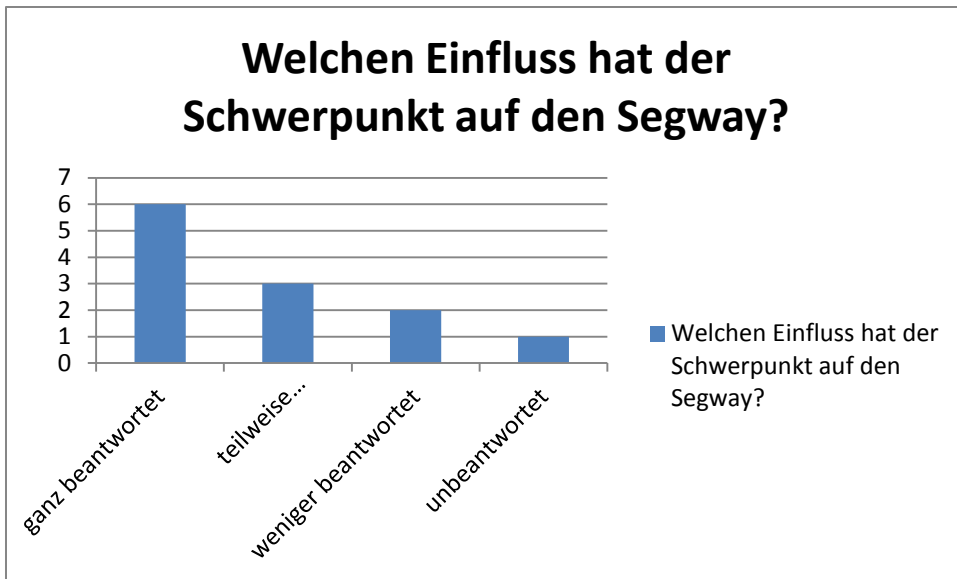


Abbildung 48: Frage 4: Der Einfluss des Schwerpunkts

Drei Viertel der SuS des Kurses gaben an, dass die Bedeutung des Schwerpunkts während des Projekts zumindest teilweise geklärt wurde. Im Abschnitt 2 wurde die Bedeutung des Schwerpunktes für die Stabilisierung dargelegt. Diese Bedeutung haben die meisten SuS theoretisch und praktisch während des Projektes ebenfalls nachvollziehen können.

In Abschnitt 3.2. wurde geklärt, dass die maximale Geschwindigkeit des Segways weder theoretisch, noch praktisch im Projekt angeschnitten wurde. Dies belegt ebenfalls Abbildung 49.

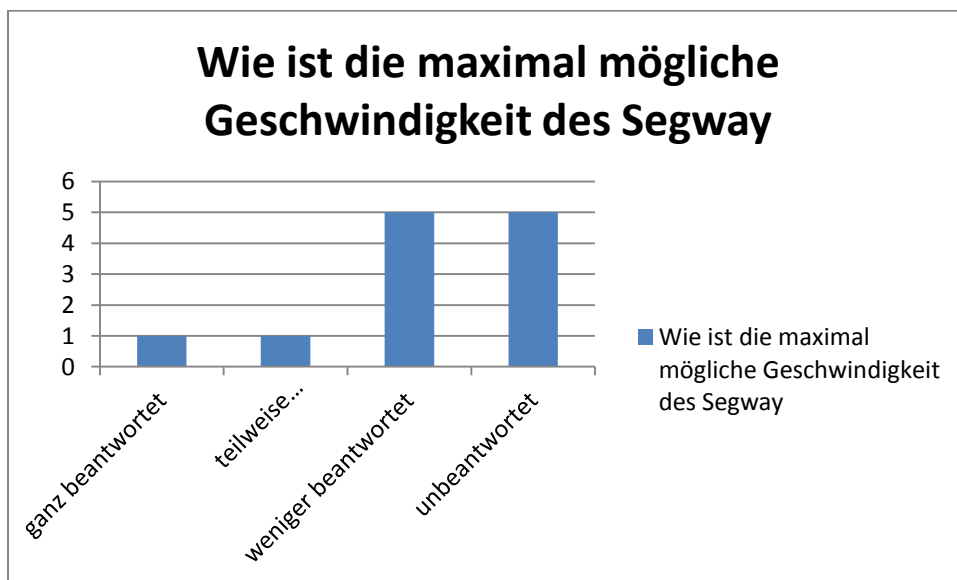


Abbildung 49: Frage 5: Die maximale Geschwindigkeit des Segways

4.3. Analyse des mathematischen Lernzuwachses

Um den mathematischen Lernzuwachs der SuS zu untersuchen, wurden zehn geschlossene Fragen konzipiert, wovon die ersten vier Fragen Inhalte abdecken, die während des Projektunterrichts vermittelt wurden. Die restlichen sechs Fragen sind auf Inhalte abgezielt, die während der dreitägigen Projektphase in den Gruppen Mathematik und Simulation vermittelt wurden. Dennoch sollten möglichst alle SuS jede Frage beantworten, um auch den mathematischen Lernzuwachs der SuS der Gruppe Lego-Mindstorms zu untersuchen. Dabei wird zwischen den Untergruppen „Lego“ (den SuS die den Segway über die Lego-Software angesteuert haben) und „Java“ (den SuS die den Segway über lejosEV3 angesteuert haben) differenziert. Der Auswertungsbogen wurde den SuS am 22.02.2016, also gut eine Woche nach der Abschlusspräsentation, zur Verfügung gestellt.

Bemerkung 4.1: Legende der Auswertungstabellen:

Der Tabellenkopf beinhaltet die Fragestellung, die die SuS beantworten sollen. In der ersten Spalte der Tabelle sind die Antwortmöglichkeiten aufgelistet. Dabei sind die korrekten Antwortmöglichkeiten farblich gelb markiert. Die Tabelle ergänzt sich um die Spalten „Gruppe Java“, „Gruppe Lego“, „Gruppe Mathematik“ und „Gruppe Simulation“. Die Zahlen in der so entstehenden Matrix geben an, wie viele SuS aus der jeweiligen Gruppe die entsprechende Antwortmöglichkeit ausgewählt haben. In der letzten Zeile der Tabelle wird der relative Anteil korrekter Antworten schließlich dargelegt.

Tabelle 1: Die Komponenten des Zustandsvektors:

1. Nennen Sie die physikalischen Größen, die sich zur Steuerung und Stabilisierung eines Segways eignen (Mehrfachnennung möglich):				
	Gruppe Java	Gruppe Lego	Gruppe Ma- thematik	Gruppe Simu- lation
<input type="checkbox"/> Neigung (Winkel) des Segway	3	3	3	3
<input type="checkbox"/> Masse des Segway	3	3	0	1
<input type="checkbox"/> Länge des Segway	2	3	0	0
<input type="checkbox"/> Position des Segway	0	1	3	0
Richtige Antworten/teilweise richtige Antworten (in %)	0/100	33,33/100	100/100	0/100

Bei der mathematischen Modellierung des Segways wurden im Unterricht die physikalischen Zustandsgrößen Neigung des Segways, sowie der Ort des Segways und die zugehörigen Ableitungen der Größen im Zustandsvektor zusammengefasst. Mit Hilfe dieser Größen lässt sich ein Segway theoretisch und praktisch (Gyro-Sensor; Beschleunigungs-

sensor) steuern und stabilisieren. Lediglich die SuS der Gruppe Mathematik konnten diese beiden Größen als Richtgrößen der Steuerung und Stabilisierung detektieren. Dass sich die aktuelle Neigung, sowie die aktuelle Winkelgeschwindigkeit zur Steuerung und Stabilisierung eignen, konnte von jedem SuS erfasst werden. Diese Tatsache kann damit erklärt werden, dass die SuS der beiden Gruppen, die den Segway praktisch gesteuert haben, den Gyro-Sensor zur Steuerung verwendet haben. Die SuS der Gruppen Simulation und Mathematik haben sich hingegen die theoretische Steuerung eines Segways über eine Winkelsteuerung (PD-Kontrolle) angeeignet. Somit hat jeder SuS eine Steuerung (theoretisch, oder praktisch) eines Segways über eine Steuerung des Winkels während der Projekttag vertieft. Lediglich die SuS der Gruppe Mathematik haben in einer Modellierung des Segways die Steuerung eines solchen, über die Position des Schwerpunkts und der Räder kennen gelernt und konnten daher diese Größe als weitere Regelgröße eines Segways angeben. Sofern die SuS der Gruppe Lego-Mindstorms den Beschleunigungssensor zur Verfügung gehabt hätten, wäre eine Steuerung des Segways über den aktuellen Ort und die horizontale Geschwindigkeit des Segways ebenfalls möglich gewesen, sodass dann diese Größe auch von den SuS, die den Segway praktisch angesteuert haben, als Regelgröße erkannt worden wäre. In der praktischen Steuerung machten sich die SuS insbesondere über die Lage des Schwerpunkts zur Steuerung des Segways Gedanken (vergleiche Abschnitt 3.4. und 3.5.). Der Schwerpunkt jedoch ist abhängig von den Größen Länge und Masse des Segways, sodass gerade die SuS, die den Segway praktisch angesteuert haben, diese Auswahl getroffen haben. Hierbei zeigt sich, dass dieser Fehlvorstellung durch eine engere Verzahnung der Gruppen, die an einer theoretischen Stabilisierung des Segways (Mathematik und Simulation), sowie an einer praktischen Stabilisierung des Segway (Gruppe Lego-Mindstorms) gearbeitet haben, entgegen gewirkt hätte müssen. Dies wird in Abschnitt 4.4. nochmals näher erläutert. Zunächst wird jedoch die Analyse des mathematischen Lernzuwachses mit Frage 2 fortgesetzt.

Tabelle 2: Die Überführung des physikalischen Modells:

2. Nennen Sie den mathematischen Prozess welches die Überführung des physikalischen Modells in ein mathematisches möglich gemacht hat:				
	Gruppe Java	Gruppe Lego	Gruppe Mathematik	Gruppe Simulation
<input type="checkbox"/> Ableiten der Größen Winkel und Position	2	2	3	3
<input type="checkbox"/> Integrieren der Größen Winkel und Position	0	0	0	0
<input type="checkbox"/> Ableiten der Größe Länge	1	0	0	0
Richtige Antworten (in %)	66,67	66,67	100	100

Der Übergang der physikalischen Beschreibung des Segways zu einer mathematischen Modellierung gelingt über das Ableiten der Größen Position und Neigung des Segways, da hierdurch die Komponenten des Zustandsvektors für das mathematische System festgelegt werden. Diesen Gedankengang konnten zehn SuS (83,67 %) rekapitulieren. Lediglich ein Schüler aus der Gruppe Java gab die falsche Antwort, dass das Ableiten der Länge des Segways zu einem mathematischen Modell führen würde. Ein Schüler aus der Gruppe Lego hat diese Frage nicht beantwortet. An Hand Tabelle 2 erkennt man, dass der Übergang einer physikalischen Beschreibung des Segways hin zu einem mathematischen Modell durch das Ableiten der Regelgrößen Neigung und Position des Segways von nahezu allen SuS nachvollzogen werden konnte. Ein Lernzuwachs ist bezüglich diesem Modellierungsprozess deutlich zu erkennen. Ebenso ist dieser Lernzuwachs bei der mathematischen Modellierung durch ein lineares zeitinvariantes System zu beobachten, was durch Tabelle 3 verdeutlicht wird.

Tabelle 3: Die mathematische Modellierung über ein lineares zeitinvariantes System:

3. Nennen Sie das Modell, welches zur mathematischen Darstellung eines Segway erarbeitet wurde:				
	Gruppe Java	Gruppe Lego	Gruppe Mathematik	Gruppe Simulation
<input type="checkbox"/> Das System $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$ diente zur Modellierung des Segway	3	2	3	3
<input type="checkbox"/> Die Differentialgleichung $\dot{x} = A \cdot x$ diente zur Modellierung des Segway	1	0	0	0
Richtige Antworten (in %)	66,67	66,67	100	100

Frage 3 beantworteten ebenfalls zehn der zwölf SuS richtig, indem sie das lineare zeitinvariante System als korrekte Lösungsmöglichkeit zur mathematischen Beschreibung eines Segways angaben. Bereits bei der Auswertung von Frage 3 ist zu erkennen, dass im Rahmen eines motivierenden und kontextorientierten Modellierungsunterricht nicht nur die Einführung der Begriffe Differentialgleichung (im Lehrplan Mathematik als Pflichtbaustein vorhanden) und System (weiterführend: Vorlesung „System- und Kontrolltheorie“), sondern auch deren Abgrenzung zueinander gelingen kann. Frage 3 gibt weiterhin Aufschluss darüber, dass durch Modellierungsprojekte Inhalte von SuS erschlossen werden können, die im Lehrplan nicht vorgesehen sind, sondern die erst im zweiten bis dritten Studienjahr Mathematik eingeführt werden. Dies zeigt die Chancen auf, die Modellierungsprojekte im Unterricht den SuS bieten. Um im Unterricht den Begriff des Systems zu erarbeiten, war neben der Einführung des Zustandsvektors auch die Diskussion von

Linearisierungen notwendig. Die Begründung für die Vereinfachungen der nichtlinearen Terme konnten, bis auf einen Schüler, alle SuS korrekt wiedergeben.

Tabelle 4: Die Begründung für vereinfachte Annahmen:

4. Begründen Sie weshalb die Linearisierungen $\sin \varphi = \varphi, \cos \varphi = 1, \ddot{\varphi} = 0$, in der mathematischen Modellierung zulässig waren:				
	Gruppe Java	Gruppe Lego	Gruppe Mathematik	Gruppe Simulation
<input type="checkbox"/> Der Winkel wurde als hinreichend klein für die Modellierung des Segway angenommen	3	2	3	3
<input type="checkbox"/> Der Winkel wurde als ausreichend groß für die Modellierung des Segway angenommen	0	0	0	0
<input type="checkbox"/> Diese Linearisierungen sind allgemein für die Modellierung eines Segway gültig	0	0	0	0
Richtige Antworten (in %)	100	66,67	100	100

Tabelle 4 gibt Aufschluss, dass die SuS sehr gut erkannt haben, dass die vereinfachten Annahmen, die in der Fragestellung aufgelistet sind, nur für kleine Winkel gültig sind. Formal entsprechen die vereinfachten Annahmen den Taylorentwicklungen vom Grad 1 der nichtlinearen Terme um den Entwicklungspunkt 0. Die Analyse der Fragestellung 4 zeigt somit, dass die SuS zwischen einer linearisierten und nichtlinearisierten Modellierung des Segways unterscheiden können. Diese These wird damit begründet, dass andernfalls SuS auch Antwortmöglichkeit 3 hätten angeben müssen. Alle SuS haben die Diskussion der Vereinfachung der nichtlinearen Terme für kleine Winkel verstanden, denn der Schüler (aus der Gruppe Lego), der diese Frage nicht beantwortet hat, war während des Projektunterrichts erkrankt und hat auf Grund dessen, bis auf Frage 1, keine der mathematischen Fragen beantwortet. Demzufolge kann dem gesamten Kurs bei der Diskussion von Linearisierungen, unter der Bedingung kleiner Winkel, ein Lernzuwachs attestiert werden. In einem ersten Zwischenfazit des mathematischen Lernzuwachses bleibt festzuhalten, dass jeder SuS der Gruppe Mathematik die ersten vier Fragen richtig beantworten

konnte. Die SuS der Gruppe Simulation konnten die Fragen 2 bis 4 richtig lösen. Bis auf Frage 1, sind alle Fragen, die Inhalte des Projektunterrichts abgedeckt haben, von jeweils mehr als 83 % der SuS richtig beantwortet wurden. Dem Kurs kann also ein gutes, bis teilweise sehr gutes Verständnis der Inhalte des Projektunterrichts bescheinigt werden. Die folgenden sechs Fragen decken nun die Inhalte ab, die die Gruppen Mathematik und, in Abstrichen, Simulation, während der dreitägigen Projektphase sich aneignen konnten. Die SuS der Gruppe Lego-Mindstorms wurden jedoch auch angehalten, diese Fragen zu beantworten, um die Interdisziplinarität der Gruppen zu untersuchen. Hierbei wird zunächst das Verständnis für die Transformation einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung, am Beispiel des harmonischen Oszillators, analysiert.

Tabelle 5: Die Transformation einer DGL 2.Ordnung in ein DGL-System 1.Ordnung:

5. Nennen Sie eine äquivalente Darstellung (1.Ordnung) für die Differentialgleichung (2.Ordnung) des harmonischen Oszillators $\ddot{y} = -\frac{D}{m} \cdot y$:				
	Gruppe Java	Gruppe Lego	Gruppe Mathematik	Gruppe Simulation
<input type="checkbox"/> $\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{D}{m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$	0	1	0	0
<input type="checkbox"/> $\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{D}{m} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$	2	1	3	3
<input type="checkbox"/> $\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{D}{m} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$	0	0	0	0
Richtige Antworten (in %)	66,67	33,33	100	100

Je ein Schüler der Gruppe Java und der bereits erwähnte Schüler der Gruppe Lego haben Frage 6 nicht beantwortet. Somit zeigt sich, dass die beiden SuS der Gruppe Java, die eine Antwort abgegeben haben, diese auch korrekt gegeben haben. An Hand dessen lässt sich festhalten, dass selbst SuS, die sich die mathematische Kompetenz des Überführens einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, in ein entsprechendes System 1.Ordnung nicht aktiv, sondern im Rahmen der Projekttag und während der Präsentationsvorbereitung inaktiv über die Ergebnisse der Mitschüler aus den entsprechenden Gruppen Simulation und Mathematik, aneignen konnten. Diese mathematische Kompetenz geht über den Kompetenzbereich eines Abiturienten mit Leistungskurs Mathematik hinaus, somit zeigt

sich auch bei der Auswertung von Frage 5 der Lernzuwachs, den die SuS im Rahmen eines solchen Projektes erreicht haben. Ebenso gibt Tabelle 5 Aufschluss darüber, dass alle SuS, die sich die Kompetenz der Überführung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung in ein System 1. Ordnung, aktiv angeeignet haben, diese an einem Beispiel korrekt wiedergeben können. Dies belegt somit den Lernzuwachs der SuS, die sich diese mathematische Technik während der Projektphase aneignen konnten. Im Zuge der Bearbeitung von Differentialgleichung und deren Lösungen, sowie deren Stabilität, haben die SuS sich die Lösung von linearen Differentialgleichungen angeeignet. Die Erarbeitung der Lösung von linearen eindimensionalen Differentialgleichungen wird im Lehrplan als Pflichtbaustein eingefordert. Tabelle 6 zeigt auf, dass diese geforderte Kompetenz eines Abiturienten mit Mathematik Leistungskurs von drei Viertel der SuS, im Rahmen des Projekts, erreicht wurde.

Tabelle 6: Die Lösung des linearen eindimensionalen Anfangswertproblems:

6. Nennen Sie die Lösung der eindimensionalen Differentialgleichung $\dot{x} = 2 \cdot x, x(0) = 1$:				
	Gruppe Java	Gruppe Lego	Gruppe Mathematik	Gruppe Simulation
<input type="checkbox"/> $x(t) = e^{2t}$	2	1	3	3
<input type="checkbox"/> $x(t) = \sin(t) \cdot e^t$	0	0	0	0
<input type="checkbox"/> $x(t) = e^{2t} \cdot \cos(t)$	0	1	0	0
Richtige Antworten (in %)	66,67	33,33	100	100

Tabelle 6 zeigt, dass die SuS ein lineares eindimensionales Anfangswertproblem lösen können. Die SuS der Gruppen Simulation und Mathematik, die sich diese Kompetenz innerhalb der Projektstage erarbeitet haben, konnten diese an einem Beispiel wiedergeben. Der Lernerfolg kann auch bei den SuS der Gruppe Java festgestellt werden, denn beide SuS, die diese Frage beantwortet haben, konnten eine korrekte Antwort geben. Somit zeigt sich die bereits erwähnte These bestätigt, dass der vergleichsweise sehr hohe mathematische Lernzuwachs, im Rahmen eines interdisziplinären Modellierungsprojekts, auch bei SuS festzustellen ist, die sich die mathematischen Kompetenzen, über die Kommunikation mit den Mitschülern, die sich diese Kompetenzen aktiv erarbeitet haben, ebenfalls aneignen konnten. Neben der Fähigkeit die Lösung der linearen eindimensionalen Differentialgleichung bestimmen zu können, konnten sich die SuS den Zusammenhang zwischen Eigenwerten und der Lösung der homogenen Differentialgleichung $\dot{x} = A \cdot x$ erarbeiten. Dies belegt Tabelle 7.

Tabelle 7: Eigenwerte und die Lösung der homogenen Differentialgleichung:

<p>7. Die Lösung der homogenen Differentialgleichung</p> $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, x(0) = x_0 \text{ lautet } x(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t}. \text{ Nennen Sie die Bedeutung der Parameter } \lambda_1 \text{ und } \lambda_2:$				
	Gruppe Java	Gruppe Lego	Gruppe Mathematik	Gruppe Simulation
<input type="checkbox"/> λ_1 und λ_2 entsprechen den Diagonaleinträgen a_{11} beziehungsweise a_{22} .	0	0	0	0
<input type="checkbox"/> λ_1 und λ_2 entsprechen den Eigenwerten der Matrix A	2	2	2	3
<input type="checkbox"/> λ_1 und λ_2 entsprechen den Determinanten der Matrix A	0	0	0	0
Richtige Antworten (in %)	66,67	66,67	66,67	100

Im Abschnitt 3.4., sowie 3.5. war bereits zu erkennen, dass die SuS das Eigenwertkonzept im Rahmen eines nichtgeometrischen Kontexts kennen gelernt haben. Drei SuS, jeweils einzeln aus den Gruppen Mathematik, Lego und Java, haben keine Antwort auf diese Frage gegeben. Somit hat jeder SuS, der diese Frage beantwortet hat, auch die richtige Antwort angegeben. Hierbei zeigt sich, dass, obwohl die SuS zuvor jeweils keine Vorkenntnisse bezüglich Eigenwerten und Differentialgleichungen hatten, mit einem interdisziplinären Modellierungsprojekt nicht nur diese beiden (Wahl-)Pflichtbausteine des Lehrplans unterrichtet werden können, sondern die beiden Konzepten aus dem Bereich Analysis (Differentialgleichungen) und linearer Algebra (Eigenwerte) vernetzt werden, um den SuS mathematische Fähigkeiten näher zu bringen, die eigentlich erst im 2.Studienjahr eines Mathematikstudiums zu erwarten sind. Dies gelingt jedoch durch die Kontextorientierung eines Modellierungsprojektes, da den SuS im Rahmen eines solchen Projektes auf Grund der Anwendungsorientierung die Transparenz der zu lernenden Inhalte viel klarer wird und somit die Vermittlung der Inhalte erleichtert wird. Sofern sich die SuS die Lösung der homogenen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten erarbeiten konnten, war ein Vermitteln der Stabilitätseigenschaft von Lösungen in Abhängigkeit des Spektrums der Matrix A leicht möglich. So konnten auch bei dieser Frage drei Viertel aller SuS das korrekte Kriterium für die asymptotische Stabilität der Lösung der homogenen Differentialgleichung 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten angeben.

Tabelle 8: Stabilität von Lösungen homogener Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

8. Nennen Sie das Entscheidungskriterium, welches die asymptotische Stabilität der Lösung der homogenen Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten $\dot{x} = A \cdot x, x(0) = x_0$ garantiert:				
	Gruppe Java	Gruppe Lego	Gruppe Mathematik	Gruppe Simulation
<input type="checkbox"/> Sofern die Determinante der Matrix A negativ ist, ist die Lösung asymptotisch stabil.	1	0	0	0
<input type="checkbox"/> Sofern ein Eigenwert der Matrix positiv ist, ist die Lösung asymptotisch stabil.	0	0	0	0
<input type="checkbox"/> Sofern ein Eigenwert der Matrix 0 ist, ist die Lösung asymptotisch stabil.	1	0	0	0
<input type="checkbox"/> Sofern alle Eigenwerte der Matrix negativ sind, ist die Lösung asymptotisch stabil.	1	2	3	3
Richtige Antworten (in %)	33,33	66,67	100	100

Tabelle 8 spiegelt relativ gut, die vorherigen Ergebnisse der Analyse, wider. Die SuS der Gruppen Mathematik und Simulation konnten diese Frage richtig beantworten, sie haben somit einen Lernzuwachs bezüglich der Stabilitätsbedingung der Lösung der linearen Differentialgleichung $\dot{x} = A \cdot x$ in Abhängigkeit der Eigenwerte der Matrix A, erworben. Dieser Lernzuwachs ist in Teilen auch bei den SuS der Gruppen Lego und Java vorhanden. Fasst man die Ergebnisse der Tabellen 5-8 zusammen, so bleibt festzuhalten, dass sich die SuS der Gruppen Simulation und Mathematik, die wesentlichen Ergebnisse der linearen Differentialgleichungstheorie im Rahmen der dreitägigen Projektumsetzung erarbeiten konnten. Damit konnten sich diese SuS ein mathematisches Wissen aneignen, welches zum einem im Lehrplan der gymnasialen Oberstufe für den Leistungskurs vorge-

sehen ist, jedoch zum anderem größtenteils im zweiten Studienjahr des Mathematikstudiums vermittelt wird. Diese Wissensaneignung gelingt auch bei SuS, die sich in dem interdisziplinären Projekt nicht direkt mit der gesamten, im Projekt vermittelten, Differentialgleichungstheorie beschäftigt haben, sondern im Rahmen von praktischen Anwendungen bei der Stabilisierung des Segways, sowie im Rahmen der Präsentationsaufbereitung, die vermittelten Inhalte gelernt haben. So haben auch diese SuS in Teilen ein mathematisches Wissen, oder besser gesagt mathematische Kompetenzen entwickelt, die über das Anforderungsprofil eines Abiturienten mit Leistungskurs Mathematik, hinausgehen.

Die letzten beiden Fragen zur Analyse des mathematischen Lernzuwachses betreffen nun konkret die PD-Kontrolle, sowie das Prinzip der Feedback-Stabilisierung. Beide Fragen zielen auf die Stabilisierung des Segways ab und können inhaltlich in die Vorlesung der System- und Kontrolltheorie zugeordnet werden. An Hand der Tabellen 9 und 10 wird aufgezeigt, dass die SuS sich ebenfalls diese mathematischen Inhalte aneignen konnten.

Tabelle 9: Die PD-Kontrolle:

9. Nennen Sie die (theoretischen) Auswirkung einer PD-Kontrolle (bezüglich des Winkels) auf die Stabilisierung des Segway. (Mehrfachnennungen möglich):				
	Gruppe Java	Gruppe Lego	Gruppe Ma- thematik	Gruppe Simu- lation
<input type="checkbox"/> Bereits eine proportionale Kontrolle führt zu einer asymptotischen Stabilität des Segway.	1	0	0	0
<input type="checkbox"/> Eine proportionale Kontrolle kann lediglich Stabilität durch Oszillationen bei geeigneten Einschränkungen an den Parameter α garantieren, jedoch keine asymptotische Stabilität.	1	2	3	1
<input type="checkbox"/> Eine proportional-derivative Kontrolle führt immer zu einer asymptotischen Stabilität des Segway.	0	0	0	0

<input type="checkbox"/> Bei geeigneten Einschränkungen an die Parameter α und β führt die proportional-derivative Kontrolle zur asymptotischen Stabilität des Segway.	3	2	3	3
Richtige Antworten/ teilweise richtige Antworten (in %)	33,33/100	66,67/66,67	100/100	33,33/100

Jeder SuS, der diese Frage beantwortet hat, hat eine der beiden korrekten Antworten genannt, dass geeignete Einschränkungen an die Parameter α und β bei der PD-Kontrolle zu einer asymptotischen Stabilität des Segways führen. Dieses Wissen haben sich die SuS der Gruppen Simulation und Mathematik in den Projekttagen angeeignet, wobei die SuS der Gruppe Mathematik dieses Wissen gar am letzten Projekttag praktisch angewendet haben, indem sie versucht haben den SuS der Gruppe lejosEV3/Java bei der Implementierung der PD-Kontrolle mit ihrem Wissen zu helfen. Dadurch haben auch die SuS der Gruppe Java sich das Wissen angeeignet, dass eine PD-Kontrolle nur unter Einschränkungen an die Parameter zu einer Stabilisierung führt. Es zeigt sich, dass die PD-Kontrolle sehr gut verstanden wurde, denn der bereits angedeutete Aspekt, dass eine PD-Kontrolle nicht für jede beliebige Wahl der Parameter zur Stabilität des Segways führt, wurde von jedem SuS erkannt, da die Antwortmöglichkeiten 3 (0 gegebene Antworten) und 4 (11 gegebene Antworten) klar von den SuS differenziert wurden. Die Auswertung von Tabelle 9 zeigt auch, dass die SuS der Gruppe Lego, die diese Frage beantwortet haben, beide korrekten Antworten wiedergeben konnten. Dies belegt, dass der Aspekt der PD-Kontrolle sehr gut interdisziplinär in diesem Projekt eingebunden wurde. Im Grunde genommen haben auch die SuS der Gruppe Lego, durch ihre Programmierung eine PD-Kontrolle angewendet, indem sie auf Grundlage der Daten (Gyro-Daten: Neigung und Winkelgeschwindigkeit des Segway) eine Steuerung realisiert haben, indem sie diese Daten geschickt gewichten. Wie bereits in Abschnitt 3.2. erwähnt, haben die SuS propädeutisch die PD-Kontrolle in ihre eigenständige Modellierung eingebunden. Es zeigte sich an dieser Stelle des Projekts bereits, dass die SuS das notwendige Vorwissen haben, um die PD-Kontrolle theoretisch und praktisch nachvollziehen zu können. Neben der Tatsache, dass 11 SuS die korrekte Antwort 4 angegeben haben, zeigt sich, dass knapp zwei Drittel aller SuS auch diese Frage vollständig korrekt beantwortet haben. 7 SuS haben Antwortmöglichkeit 2 ebenfalls angegeben. Hierbei zeigt sich, dass die SuS der Gruppe Mathematik, die durch das aktive Erarbeiten des Wissens, dass eine proportionale Kontrolle maximal nur zu Oszillationen des Segways führen, Frage 9 vollständig korrekt beantworten konnten. Neben den SuS der Gruppe Mathematik konnten auch die zwei SuS der Gruppe Lego Frage 9 korrekt beantworten. Da diese beiden SuS sich die theoretischen

Grundlagen nicht aktiv erarbeitet haben, sondern praktisch angewendet haben, zeigt sich, dass die PD-Kontrolle im Rahmen des Projektes sehr gut, sowohl praktisch, als auch theoretisch vermittelt werden konnte. Bedenkt man, dass die PD-Kontrolle mathematisch inhaltlich der Vertiefungsvorlesung System- und Kontrolltheorie zugeordnet werden kann, so zeigt sich erneut welche mathematischen Kompetenzen sich SuS der gymnasialen Oberstufe durch ein interdisziplinäres Modellierungsprojekt aneignen können. Dies wird ebenso durch Tabelle 10 belegt.

Tabelle 10: Das Prinzip der Feedback-Stabilisierbarkeit:

10. Beschreiben Sie den Einfluss der Feedback-Stabilität auf das Systems $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$				
	Gruppe Java	Gruppe Lego	Gruppe Ma- thematik	Gruppe Simu- lation
<input type="checkbox"/> Für die Feed- back-Stabilität wählt man den Ansatz $u = F \cdot x$ derart, um das System in einer Differentialgleichung $\dot{x} = (A + B \cdot F) \cdot x$ zu überführen, sodass die Eigenwerte der Matrix A alle negativ sind.	0	0	1	0
<input type="checkbox"/> Für die Feed- back-Stabilität wählt man den Ansatz $u = F \cdot x$ derart, um das System in einer Differentialgleichung $\dot{x} = (A + B \cdot F) \cdot x$ zu überführen, sodass die Eigenwerte der Matrix A+B·F alle negativ sind.	1	1	2	3
<input type="checkbox"/> Für die Feed- back-Stabilität wählt man den Ansatz $u = F \cdot x$ derart, um das System in einer Differentialgleichung $\dot{x} = (A + B \cdot F) \cdot x$ zu überführen, sodass die Eigenwerte der Matrix A+B·F alle positiv sind.	0	0	0	0

<input type="checkbox"/> Man wählt den Ansatz $u=0$, um die Differentialgleichung $\dot{x} = A \cdot x$ zu erhalten, deren Lösung dann asymptotisch stabil ist.	1	1	0	0
Richtige Antworten (in %)	33,33	33,33	66,67	100

Das Prinzip der Feedback-Stabilisierung, oder auch Stabilisierung durch Zustandsrückführung genannt, ist eines der zentralen Aspekte der Vorlesung System- und Kontrolltheorie. 7 SuS haben das Prinzip dieser Stabilisierungsform verstanden. Demnach haben diese sieben SuS sich mathematische Kompetenzen aneignen können, die im dritten Studienjahr eines Mathematikstudiums vermittelt werden. An dieser Stelle der Auswertung zeigt sich, dass man sehr guten Leistungskursschüler im Rahmen eines Modellierungsprojekts, welches für SuS kontextgebunden und motivierend ist, innerhalb weniger Tage ein mathematisches Fundament vermitteln kann, welches sie umfangreich auf ein Mathematikstudium vorbereitet. Dies zeigt erneut, welche Chancen zur Kompetenzaneignung, durch Modellierungsprojekte im Mathematikunterricht ermöglicht werden. Der mathematische Kompetenzgewinn gelingt insbesondere auch dann, wenn SuS die Möglichkeit gegeben wird, mathematische Theorien praktisch an einem realen Objekt (wie es in diesem Projekt der Segway war) anzuwenden. Die Tabellen 1 bis 10 zeigen, dass durch die Kommunikation der SuS untereinander während der Projektphase, sowie durch die Aufbereitung der Ergebnisse der einzelnen Gruppen zu einer Abschlusspräsentation, auch SuS, die sich in der Projektphase mit der praktischen Umsetzung des Segways beschäftigt haben, sich ebenfalls mathematische Inhalte, die teilweise über die im Lehrplan geforderten Inhalte hinausgehen, aneignen können. Dies belegt, dass dieses interdisziplinäre Projekt einen großen mathematischen Lernzuwachs bei nahezu allen SuS innerhalb einer kurzen Zeit erzielt hat. Zum Abschluss der Analyse des mathematischen Lernzuwachs werden kurz die Ergebnisse der SuS, jeweils den Gruppen zugeordnet, präsentiert, um den individuellen Lernerfolg zu beleuchten. Insgesamt konnten die SuS in den 10 Fragen 12 korrekte Antwortmöglichkeiten angeben. Die Fragebögen werden so ausgewertet, dass jede korrekte Antwortmöglichkeit einen Punkt ergibt. Bei den Fragen 1 und 9, die Mehrfachnennungen enthalten, wird pro korrekter Teillösung ein Punkt verteilt. Falsche Antwortmöglichkeiten, die angekreuzt wurden, ergeben keinen Abzug. Mit diesem Bewertungsraster ergibt sich folgende Auswertungstabelle des individuellen Lernerfolgs:

Tabelle 11: Auswertung des individuellen Lernerfolgs:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
Gruppe Java	1/2	0/1	1/1	1/1	1/1	1/1	1/1	0/1	2/2	0/1	8/12
	1/2	1/1	1/1	1/1	0/1	0/1	0/1	0/1	1/2	0/1	5/12
	1/2	1/1	0/1	1/1	1/1	1/1	1/1	1/1	1/2	1/1	9/12
Gruppe Lego	1/2	1/1	1/1	1/1	1/1	0/1	1/1	1/1	2/2	1/1	10/12
	1/2	1/1	1/1	1/1	0/1	1/1	1/1	1/1	2/2	0/1	9/12
	2/2	0/1	0/1	0/1	0/1	0/1	0/1	0/1	0/2	0/1	2/12
Gruppe Mathematik	2/2	1/1	1/1	1/1	1/1	1/1	0/1	1/1	2/2	0/1	10/12
	2/2	1/1	1/1	1/1	1/1	1/1	1/1	1/1	2/2	1/1	12/12
	2/2	1/1	1/1	1/1	1/1	1/1	1/1	1/1	2/2	1/1	12/12
Gruppe Simulation	1/2	1/1	1/1	1/1	1/1	1/1	1/1	1/1	1/2	1/1	10/12
	1/2	1/1	1/1	1/1	1/1	1/1	1/1	1/1	1/2	1/1	10/12
	1/2	1/1	1/1	1/1	1/1	1/1	1/1	1/1	2/2	1/1	11/12

Tabelle 11 belegt ebenfalls den herausragenden Lernzuwachs der SuS durch das interdisziplinäre Projekt. Lediglich zwei SuS haben weniger als die Hälfte der Maximalpunktzahl erreicht. Grund hierfür ist, dass diese beiden SuS nur sehr wenige Fragen überhaupt beantwortet haben. Alle weiteren SuS haben mehr als zufriedenstellende Ergebnisse erzielt. Tabelle 11 gibt ebenso Aufschluss, dass die SuS die sich aktiv die mathematischen Inhalte erarbeitet haben (Gruppe Mathematik und Simulation) allesamt sehr gute Ergebnisse erzielt haben. Wie der mathematische Lernzuwachs der gesamten Klasse, also auch der Gruppen Lego und Java, optimiert werden könnte, gibt die Analyse des Schülerfeedback im kommenden Abschnitt wieder.

4.4. Schülerfeedback an das Projekt

4.4.1. Schülerfeedback vom 22.01.2016

In einem ersten Schülerfeedback, unmittelbar nach den drei Projekttagen, sind die SuS aufgefordert worden ihre persönlichen Eindrücke an das Projekt an Hand von vier Leitfragen nieder zu schreiben. Zunächst sollten die SuS kommentieren, was ihnen am Projekt gefallen hat. Tabelle 12 zeigt die Kommentare der SuS auf.

Tabelle 12: Positive Aspekte des Projekts:

Was hat dir am Lego-Segway-Projekt gefallen:

- Die Herausforderung in völlig unbekannte Gebiete im MINT-Bereich vorzustoßen.
- Den Umgang mit Differentialgleichungen und mathematischer Modellierung durch solches zu lernen
- Das Arbeitsklima: Das macht sehr viel aus
- Keine genauen Lösungsvorgaben
- Freie Arbeit
- Interessantes Thema
- Ablauf, d.h. zum einem die Vorstellung des Themas im Unterricht und das Arbeiten am Projekt drei Tage am Stück
- Man war nicht an eine „Schiene/festen Weg“ beim Erarbeiten der Arbeitsaufträge gebunden.
- Freie Arbeits- und Pauseneinteilung
- Freie Projektgestaltung
- Wir haben viel gelernt
- Angenehme Atmosphäre
- Sehr selbstständiges Arbeiten
- Sehr Realitätsnah
- Einbringung eigener Ideen
- Gruppenarbeit
- Hohe Herausforderung
- Die Aufgaben waren anspruchsvoll und ich habe viel gelernt
- Sich die Zeit (Pausen etc.) selbst einteilen zu können macht das Arbeiten einfacher.
- Ich wurde gefordert und wir haben etwas neues gelernt
- Längeres Bearbeiten eines Problems
- Freie Herangehensweise
- Komplexe Mathematik, die weit über Schulmathe hinaus geht.

Die SuS haben insbesondere die Arbeitsatmosphäre der Projekttage gelobt. Fernerhin wurden der große Realitätsbezug des Projekts, sowie die erhobenen mathematischen Anforderungen positiv bewertet. Demgegenüber werden nun die Defizite des Projekts skizziert.

Tabelle 13: Negative Aspekte des Projekts:

Was hat dir am Lego-Segway-Projekt nicht gefallen?

- Anfängliche Unklarheit bei Aufgabenstellung (Fehlendes Wissen über Fachbegriffe, etc.)
- Dass man auf Grund der knappen Zeit manches „einfach hinnehmen“ musste.
- Mangelnde Zeit
- Die Gruppen haben nicht so gut zusammen gearbeitet, dies wurde gegen Ende aber besser.
- 1 Woche Bearbeitungszeit hätte bessere Ergebnisse geliefert.
- Wenn man kein Physik mehr hat, waren die Anforderungen an das physikalische Verständnis zu hoch.
- Gruppenbildung war vielleicht nicht optimal.
- Etwas zu viel Arbeit auf zu wenig Zeit.
- Vorbereitung in Bezug auf mangelnde Beschaffung der Arbeitsmaterialien.
- Es gab Probleme, die nur sehr schwer (bzw. gar nicht) lösbar waren, unter anderem wegen eines fehlenden Sensors.
- Vorgabe von Herleitungen
- Arbeitsmaterial (Mindstorms)
- Arbeitsverteilungen in den Gruppen nicht optimal
- Heftiger Einstieg in die Physik
- Lösungen standen von vorherein fest
- Eigener Lösungsweg konnte zunächst nicht verfolgt werden.
- Teilweise waren die Aufgaben zu schwer
- Zu großer Zeitdruck
- Eine anfängliche Einführung in „Differentialgleichungen“ hat gefehlt.
- Beschränkung durch vorgegebene Aufgabenblätter.
- Der Zweck der Aufgabenbearbeitung war nicht immer ersichtlich.

Die SuS bemängelten insbesondere den Zeitdruck, den sie im Projekt verspürt haben. Dieser Aspekt ist sicherlich wichtig, jedoch schwierig abzuändern, bedenkt man, dass die SuS sich drei Schultage ausschließlich dem Projekt gewidmet haben und den Unterricht der restlichen Fächer nacharbeiten mussten. Eine Ausdehnung des Projekts auf eine Schulwoche ist zwar gegen Ende eines Schuljahres im Rahmen von Projektwochen umsetzbar, jedoch während des Schuljahres nur schwer zu realisieren. Fernerhin, wie es bereits in Abschnitt 4.1.2. erörtert wurde, waren die physikalischen Verständnisschwierigkeiten teilweise zu hoch. In einer erneuten Planung des Projekts sollte dieser Umstand, durch eine Reduktion der Erarbeitung der physikalischen Kräfte berücksichtigt werden. Außerdem haben die SuS angegeben, dass die Gruppenbildung nicht optimal gewesen sei. In einem persönlichen Abschlussgespräch haben die SuS diesen Umstand konkretisiert, indem sie angegeben haben, dass die Gruppen am Ende eines Arbeitstages sich in einem kleinen Abschlussgespräch über ihre Ergebnisse gegenseitig hätten informieren sollen, um die erworbenen Kompetenzen innerhalb der SuS besser zu vernetzen. Dieser Aspekt ist sicherlich bei einer erneuten Durchführung des Projekts zu berücksichtigen. In einer dritten Leitfrage waren die SuS angehalten den Projektunterricht mit einem, ihnen be-

kannten Regelunterricht, zu vergleichen. Dabei haben die SuS folgende Kommentare abgegeben.

Table 14: Vergleich Projektunterricht vs. Regelunterricht:

Kommentiere und vergleiche den Projektunterricht bezüglich eines regulären Unterrichts:

- Im regulären Unterricht hängen die Themen alle zusammen, während es sich hier sehr um etwas komplett neues Konzept handelt. Man springt hier sozusagen ins kalte Wasser, während das Wasser im Unterricht immer lauwarm ist.
- Freie Arbeitszeiten waren schön
- Es war eine größere Herausforderung und hat mehr Spaß gemacht
- Kreative Lösungen
- Mehr Zeit für ein Thema am Stück, man kann sich besser fokussieren.
- Dieses Projekt war definitiv besser als normaler Unterricht, weil er sich nicht daran orientiert hat einen Plan durch zu arbeiten und anschließend zu kontrollieren ob die Schüler alles auswendig gelernt haben, sondern das Projekt war zielorientiert, alle haben selbstständig gearbeitet, man konnte sich falls nötig immer Hilfe holen. Es war durch den Zeitdruck allerdings auch anstrengender.
- Eigenes Erkennen und Erarbeiten von komplexen Sachverhalten in frei gewählten Gruppen in denen man sich die Arbeit selbst einteilen konnte.
- Selbstständiges Erarbeiten komplexer Sachverhalte
- Man kann sich aussuchen, was man macht, eigene Lösungen suchen.
- Sehr viel freiere Arbeit; wesentlich entspannter; Zeit zum Aufarbeiten von fehlenden Kenntnissen
- Realitätsnahe Arbeit
- Höherer Lernerfolg
- Aufgabenverteilung nach Fähigkeit
- Geschlossene Arbeitsgruppen
- Selbst wählbare Arbeits- und Pausenzeiten.
- Die freie Zeiteinteilung und die anspruchsvollen Aufgaben machen das Projekt gleichzeitig entspannter und lehrreicher als den Schulunterricht.
- Unabhängiges Arbeiten.
- Freies Arbeiten
- Kein ständiger Themenwechsel
- Hohe Komplexität

Der hohe mathematische Lernerfolg durch das Projekt wurde bereits erörtert. Liest man die Kommentare der SuS, so fällt auf, dass der Projektunterricht im Vergleich zum regulären Unterricht als sehr positiv bewertet wird. Dabei kristallisiert sich erneut heraus, dass ein freies und eigenständiges Arbeiten an einer realen Problemstellung für die SuS motivierend ist und sie dadurch einen größeren Lernerfolg verzeichnen können, als im Regelunterricht, der auf maximal 90 Minuten beschränkt ist. Das eigenständige Arbeiten, die freie Zeiteinteilung, der Alltagskontext, sowie die offene Problemstellung motiviert die SuS und es stellt sich ein höherer Lernerfolg ein. Es zeigt sich, dass ein Modellierungsunterricht, eingebunden in ein interdisziplinäres Projekt zum einem dem im Rahmenlehrplan geforderten Prozess des Modellbildens wunderbar ausfüllt und der erreichte Lernerfolg

höher, als in einem regulären Unterricht, zu bewerten ist. Die Kompetenzen des mathematischen Argumentierens (K 1), des mathematischen Problemlösens (K 2), des mathematischen Modellierens (K 3), der Verwendung mathematischer Darstellungsformen (K 4), der Umgang mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik (K 5), sowie der mathematischen Kommunikation (K 6), also alle von der Kultusministerkonferenz geforderten Kompetenzen sind in verschiedenen Phasen des Projekts gefördert worden. An Hand dessen kann demnach ebenso argumentiert werden, dass dieses und weitere interdisziplinäre Modellierungsprojekte in der Schule unbedingt umgesetzt werden sollten. Daran anschließend wurde noch untersucht, inwiefern das Lego-Segway-Projekt die SuS animiert hat Überlegungen über ein Studium im MINT-Bereich anzuregen.

Tabelle 15: Anregung des Projekts zu einem MINT-Studium:

Gib einen kurzen Kommentar ab, ob das Lego-Segway-Projekt dich für ein Mathematik-, Ingenieurwesen-, Physik-, oder Informatikstudium motiviert hat?

- Da mir schon von Anfang an klar war, dass ich etwas aus dem MINT-Bereich studieren möchte, hat das Projekt die eigentliche Entscheidung nicht beeinflusst. Es hat allerdings das präferierte Fach im MINT-Bereich weiter in Richtung Mathe gelenkt.
- Da ich schon viel mit EV3/NXT Robotern gearbeitet habe, hat das Projekt meine Meinung nicht geändert: Es macht Spaß, aber ich kann es mir aber nicht als Beruf vorstellen.
- Das Projekt hat mich bei meiner Berufs-/Studienwahl nicht beeinflusst, trotzdem interessant.
- Ich bin bereits an einem Studienfach in Richtung Ingenieurwesen, Physik, oder Informatik interessiert, dies wurde durch das Projekt wahrscheinlich noch gestärkt.
- Das Projekt hat meine Berufs- und Studienwahl nicht (sonderlich) beeinflusst, da ich vorher schon geplant habe etwas in dieser Richtung zu machen.
- Hat mich nicht beeinflusst
- Hat mich marginal beeinflusst
- Keine Auswirkung
- Ich persönlich habe schon an mehreren Modellierungsprojekten teilgenommen. Dieses hat mich insofern in meiner Entscheidung für die Wahl eines Studiengangs beeinflusst, als das es mich in meinen Plänen „Technomathematik“, oder „Ingenieurwesen“ zu studieren bestätigt hat.
- Ich habe sowieso vor Informatik, oder Mathematik zu studieren, dieses Projekt spielt dabei für mich bei der Entscheidungsfindung eher eine untergeordnete Rolle.
- Bestätigung des geplanten Studiums

Zwei Schüler hat dieses Modellierungsprojekt dazu angeregt einen Studiengang im Fach Mathematik, beziehungsweise Technomathematik, anzustreben. Dies ist die Hoffnung eines jeden Lehrers, dass der gehaltene Unterricht die SuS motiviert, ein entsprechendes Studium zu belegen. Auch an dieser Stelle ist der Erfolg des Projekts ersichtlich.

4.4.2. Schülerfeedback vom 22.02.2016

Um das gesamte Projekt zu bewerten, wurden die SuS nach der Präsentation des Projekts gebeten, ein Fazit an das Projekt zu stellen. Dies wurde gewählt, damit die SuS die Präsentation und die Aufbereitung dessen mit in ihr Fazit einbeziehen können. Hierbei erfolgt eine Differenzierung bezüglich der einzelnen Gruppen.

Table 16: Das Fazit der SuS der Gruppe Java:

Gruppe Java:

- Die Gruppen hätten ihre Ergebnisse mehr untereinander austauschen können. Dadurch habe ich wenig Ahnung vom mathematischen Teil des Projekts
- Eine Besprechung, oder Vergleich für das Verständnis der Ergebnisse der anderen Gruppen am Ende des Projekts, oder nach der Präsentation wäre sinnvoll gewesen. Von den Ergebnissen der Gruppe Simulation und Mathematik habe ich keine Ahnung. Im Allgemeinen fand ich, dass das Projekt eine gute Idee war und auch gut umgesetzt wurde. In der ersten Arbeitsphase hätte ich mich darüber gefreut nicht von Anfang an, den gewollten Weg vorgegeben zu bekommen. Insgesamt jedoch ein gelungenes Projekt.
- Die Gruppen zu trennen mag für die Arbeitsphase sinnvoll gewesen sein, aber eine Präsentation untereinander (vor allem von Seiten der Mathematik-Gruppe) wäre sehr sinnvoll gewesen! Die Lego-Gruppen haben quasi keine Mathematik benötigt und waren (sind) demnach mit dieser nicht vertraut. Für den Erfolg zukünftiger Projekte sehe ich das Verständnis nicht nur der mathematischen Grundlagen, sondern der gesamten Mathematik, als unabdingbar an. Wir hatten außerdem den Vorteil bereits auf langjährige Erfahrung mit der Mindstormsplattform zurückgreifen zu können. Ohne diese hätte sich auch die Programmierung der Roboter als schwierig, im Sinne von „zeitaufwändig“, oder „unwirtschaftlich“, erwiesen.

In der Analyse des mathematischen Lernerfolgs stellte sich bereits heraus, dass die SuS der Gruppen Mathematik und Simulation bessere Ergebnisse erzielen konnten, als die SuS der Gruppen Java und Lego. An Hand der Kommentare ist zu erkennen, dass der Lernerfolg dieser SuS optimiert werden kann, sofern die SuS ihre Ergebnisse untereinander austauschen. Dieser Aspekt sollte bei einer erneuten Planung des Projekts unbedingt umgesetzt werden. Fernerhin wird klar, dass auf Grund der hohen Erfahrung der SuS im Umgang mit Lego-Mindstorms, die praktische Stabilisierung des Segways erleichtert wurde.

Table 17: Das Fazit der SuS der Gruppe Lego:

Gruppe Lego:

- Die Interdisziplinarität des Projekts, ein sehr positiver Anteil, sollte mehr mit eingebunden werden, damit interdisziplinär zwischen den Gruppen gearbeitet wird. Es hat mir sehr gut gefallen.
- Da ich Physik abgewählt habe, habe ich größtenteils überhaupt nichts verstanden. Beim „Herumprobieren“ mit dem Segway habe ich absolut nichts gelernt. Für mich war dieses Projekt Zeitverschwendung, auch wenn die anderen Schüler si-

cherlich etwas gelernt haben.

Leider waren die Anforderungen des Projekts für einen Schüler zu groß. Dabei muss aber der Umstand bedacht werden, dass jener Schüler, nur die dreitägige Projektumsetzung begleitet hat und an der Einführung, dem Projektunterricht, sowie der Abschlusspräsentation und deren Vorbereitung nicht mitgewirkt hat. Nichtsdestotrotz zeigt der Kommentar des Schülers, dass dieses Projekt nicht nur Vorteile birgt. Es muss darauf geachtet werden, die SuS nicht kollektiv zu überfordern, sodass so kein Lernerfolg vorhanden ist. Dies ist eine wichtige Erkenntnis. Fernerhin beklagte auch ein Schüler in dieser Gruppe, dass die Ergebnisse der einzelnen Gruppen besser hätten ausgetauscht werden sollen. Die Kommentare der Gruppen Mathematik und Simulation wurden bereits an verschiedenen Stellen der Arbeit aufgegriffen, daher werden diese Kommentare, ohne weitere Erörterung kurz skizziert:

Tabelle 18: Die SuS der Gruppe Mathematik:

Gruppe Mathematik:

- Trotz, oder auch gerade weil wir an unsere Grenzen gehen (und ich mit meinem mathematischem Verständnis kämpfen) musste, war das Projekt überaus lehrreich, auch in Hinsicht auf persönliche Kapazitäten.
- Eine gute Grundlage (Sensoren, Motoransteuerung) sollte da sein, um die Mathematik besser in einen funktionierenden Segway umzusetzen. Bei Schülern (ausschließlich) ist das wichtig für die Motivation, da viele ein Erfolgserlebnis brauchen, um am Ball zu bleiben. Man muss aber nicht zu viel Vorarbeit leisten, da die Schüler auch selbst diese Probleme lösen sollten → Eine Alternative wäre mehr Zeit einzuplanen.
- 3 Tage waren zu wenig für die Erarbeitung und die Implementierung der Ergebnisse. Mehr Zeit um sich in die Mathematik einzuarbeiten wäre sinnvoll gewesen, genauso wie eine Phase, in welcher sich die Gruppen zusammen tun und ihre Ergebnisse kombinieren und anwenden.

Tabelle 19: Die SuS der Gruppe Simulation:

Gruppe Simulation:

- Letztlich lässt sich sagen, dass mir das Projekt einen sehr guten Einblick in einen Modellierungsprozess gegeben hat. Die eigenständige Arbeit in kleinen Gruppen hat uns die Möglichkeit eröffnet, spezifischer auf unseren Arbeitsauftrag einzugehen und so produktiver zu arbeiten. Die Produktivität in den Gruppen wurde vor allem durch eine bessere Teamarbeit auf Grund der eigenständigen Einteilung in die Gruppen gefördert.
- Die Arbeitsatmosphäre war interessant, da sie einen Kontrast zum Schulalltag darstellte. Dadurch konnte man sich länger auf den gleichen Aufgabenbereich konzentrieren. Dies stellte eine gute Vorbereitung auf den späteren möglichen Beruf eines Mathematikers dar. Insgesamt war das Projekt eine anspruchsvolle Herausforderung.

4.5. Fazit und Ausblick

Die Analyse des Lernerfolgs, sowie des Schülerfeedbacks zeigt, dass das interdisziplinäre Projekt die SuS gefordert, aber auch mathematisch gefördert hat. Das Prinzip der Forderung und Förderung trifft jedoch nicht nur auf die SuS, sondern auch auf das Lehrerteam zu. So mussten mathematische, physikalische und technische Anforderungen gemeistert werden, um den Erfolg des Projektes zu garantieren. Die weitere Schwierigkeit bestand darin, dass es keine Erfahrungswerte für die Durchführung dieses Modellierungsprojektes gab, welches mathematische Inhalte abdeckt, die sich Lehrkräfte teilweise erst im Masterstudium Mathematik aneignen. Somit sollte mit diesem Projekt abgetastet werden, welche mathematischen Inhalte und Kompetenzen im Rahmen dieses Modellierungsprojektes zu vermitteln sind. Dass dies am Ende des Projektes nahezu alle Inhalte und Kompetenzen sind, die zuvor für als maximal möglich betrachtet wurden, zeigt, dass die SuS besonders leistungsstark an den Aufgaben des Projektes gearbeitet haben. Die mathematische Leistungsstärke zeigte sich insbesondere bei der Darlegung der Projektergebnisse in der Abschlusspräsentation. Sofern dieses Projekt mit einem anderem Leistungskurs wiederholt werden sollte, wäre es eine interessante Beobachtung, ob allein die Leistungsstärke der SuS zum Projekterfolg geführt hat, oder ob die Konzeption des Projektes einen großen Teil zum mathematischen, physikalischen und technischen Lernerfolg der SuS beiträgt. Um dies zu messen, kann für die nochmalige Durchführung ein Katalog erstellt werden, der die Mindestanforderungen abdeckt, die durch dieses Projekt erfüllt werden sollte. Dieser Katalog kann anschließend um optionale Arbeitsaufträge ergänzt werden, um die Leistungsstärke der SuS genau zu bemessen. Dass dieses Modellierungsprojekt durch den Lehrplan legitimiert ist, wurde bereits in Abschnitt 3.1. erörtert. Im Fazit werden nun nochmals die sechs Schritte des Modellierungsprozess des Lehrplans Rheinland-Pfalz, mit den Phasen des Projektes verknüpft, um anschließend die sechs mathematischen Kompetenzen aufzulisten, die durch das Projekt gefördert wurden.

1. Erfassen des Problem des Anwenders: Diese Phase erfolgte zu Beginn des Projekts durch die Einführung über zwei Videos. Das erste Video zeigte, dass die Steuerung eines Segways schwierig ist und das zweite Video zeigte den SuS das Ziel des Projekts, durch die Stabilisierung des Lego-Segway, auf.
2. Eindeutige Beschreibung des Problems: Diese Phase erfolgte unmittelbar nach der Präsentation der Videos, als die SuS die offenen Fragen und Anregungen an das Projekt stellen konnten und auf Basis dessen das Ziel der theoretischen und praktischen Stabilität eines Segways formuliert wurde.
3. Modellierung des Problems: Die Modellierungsphase erfolgte bereits in der Einführung des Projekts durch die eigenständige Modellierung der SuS. Die drei Modellierungen wurden anschließend in der Unterrichtsphase zusammengefasst, um das lineare zeitinvariante System als mathematische Modellierung zu erschließen.

4. Mathematische Lösung in dem gewählten Modell: Die Erarbeitung der mathematischen Lösung der Stabilisierung des Segways konnten sich die SuS der Gruppen Mathematik und Simulation im Rahmen der dreitägigen Projektarbeit aneignen.

5. Überprüfung und Bewertung der Lösung: Die theoretische Stabilisierung des Segways über eine PD-Kontrolle, sowie über eine lineare Zustandsrückführung haben die Gruppen Java und Lego praktisch umgesetzt, um praktische Stabilisierungsergebnisse zu erhalten.

6. Interpretation in der Sprache des Anwenders: Durch die Präsentation der Projektergebnisse sind die SuS aufgefordert worden, ihre Ergebnisse adressatengerecht zu vermitteln, sodass auch diese Phase des Modellierungszyklus durch das Projekt erfüllt wurde.

An Hand der Auflistung wird belegt, dass dieses Projekt sich als ein Beispiel für einen Modellierungsunterricht, wie er im Lehrplan Rheinland-Pfalz gefordert ist, anbietet. Durch dieses Projekt sind weiterhin alle sechs Kompetenzen des Mathematikunterrichts gefördert worden.

- Mathematisch argumentieren (K 1): Diese Kompetenz wurde insbesondere bei den SuS der Gruppe Mathematik gefördert, indem diese ein Stabilitätskriterium für lineare Differentialgleichungen über Eigenwerte entwickelt haben. Fernerhin haben sich die SuS die Lösung der eindimensionalen linearen Differentialgleichung $\dot{x} = \lambda \cdot x$ herleiten können. Doch nicht nur bei den SuS der Gruppe Mathematik wurde die Kompetenz K 1 gefördert. An Hand der Auswertung von Tabelle 9 zeigte sich, dass die SuS abwägen konnten, dass eine PD-Kontrolle nur unter gewissen Bedingungen zur Stabilität des Segways führt. Weiterhin wurde im Projektunterricht bei der Diskussion der Linearisierungen, die Kompetenz des mathematischen Argumentierens bei allen SuS gefördert.
- Probleme mathematisch lösen (K 2): Die Lösung eines realen Problems mit mathematischen Mitteln wurde über das gesamte Projekt gefördert, da das Ziel des Projektes darin bestand einen Segway mathematisch und praktisch zu stabilisieren. Um dieses gesamte Problem zu lösen, mussten die SuS an Hand von Arbeitsaufträgen Teilprobleme lösen, die sie letztendlich zu einer Lösung des Gesamtproblems geführt haben. Diese Problemlösung fand dabei zu großen Teilen in freien und eigenständigen Arbeitsphasen statt.
- Mathematisch modellieren (K 3): Die mathematische Modellierung war ein Kernaspekt des Projekts, da mit den SuS ein mathematisches Modell für einen Segway erstellt wurde. Fernerhin haben die SuS der Gruppen Mathematik und Simulation weitere Modellierungen des Segways, während der Projektphase erarbeitet und auf Basis dieser Modelle sich mathematische Fachkompetenzen angeeignet.

- Mathematische Darstellungsformen verwenden (K 4): Die SuS bereiteten ihre Ergebnisse in eine Abschlusspräsentation auf. Hierzu erstellten sie beispielsweise Diagramme für die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators. Weiterhin wurde durch die eigenständige Modellierung diese Kompetenz gestärkt.
- Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K 5): Da die SuS sich ein mathematisches System zur Modellierung eines Segways erarbeiten konnten, wurde auch diese Kompetenz gefördert. Bei den SuS der Gruppe Mathematik wurde auf den Umgang mit symbolischen und formalen Elementen, beispielsweise bei der Einführung des Eigenwertkonzepts, oder der PD-Kontrolle, sowie der Lösung von Differentialgleichungen, ein Schwerpunkt gesetzt.
- Kommunizieren (K 6): Durch die Präsentation der eigenständigen Modellierung des Segways vor Mitschülern, sowie der Abschlusspräsentation der Ergebnisse wurden die SuS aufgefordert die Fachsprache adressatengerecht anzuwenden. Dabei haben sie ihre eigenen Lösungswege anschaulich präsentieren können.

Die Förderung der sechs mathematischen Kompetenzen belegt die Legitimation der Durchführung dessen im Mathematikunterricht. Jedoch zeigte das Projekt, dass die Umsetzung an einigen Stellen verbesserungswürdig gewesen ist. So haben sich die SuS mehr Zeit, während der Projekttag gewünscht, um die Arbeitsaufträge bearbeiten zu können. Den SuS standen nur drei Tage für die theoretische und mathematische Stabilisierung des Segways, inklusive der Erstellung von entsprechenden Simulationen zur Verfügung. Eine Modellierungswoche hätte den knappen Zeitplan für die SuS ein wenig entstraft. Diese sollte, sofern es von Seiten der Schulleitung möglich ist, bei einer erneuten Umsetzung als Zeitfenster für die Projektumsetzung eingeplant werden. Fernerhin kann bei einer erneuten Durchführung des Projekts ein zusätzlicher Beschleunigungssensor die praktische Stabilität des Segways optimieren. Dieser konnte, wie bereits erwähnt, aus versandtechnischen Gründen den SuS nicht zur Verfügung gestellt werden. Doch neben bürokratischen Hürden, die die Gestaltung des Projekts behindert haben, zeigte sich, dass ein engerer Austausch der Gruppen, beispielsweise durch ein Abschlussgespräch am Ende des Projekttag dazu geführt hätte, dass die Interdisziplinarität des Projekts gefördert worden wäre, um so die erworbenen mathematischen Kompetenzen besser zu vernetzen. Diese Maßnahme hätte den Lernerfolg der SuS der Gruppen Lego und Java optimiert. Es zeigte sich weiterhin, dass der physikalische Exkurs, während des Projektunterrichts, für viele SuS zu großen Verständnisschwierigkeiten geführt hat. Bei einer erneuten Durchführung, sollte man die Anzahl der Terme und der entsprechenden physikalischen Beschreibung, reduzieren, um die SuS nicht durch physikalische Verständnisschwierigkeiten zu überfordern. Ein letzter Kritikpunkt bestand darin, dass die SuS der Gruppe Simulation sich, analog zu den SuS der Gruppe Lego-Mindstorms, mehr Freiheiten bei der Simulation des Segways gewünscht haben.

Dennoch kann die Umsetzung des Projekts als äußerst gelungen bezeichnet werden. Durch das interdisziplinäre Projekt wurde der im Oberstufenlehrplan geforderte Modellierungsunterricht an dem realen Problem des sich stabilisierenden Segways umgesetzt. Dabei wurden alle im Lehrplan aufgelisteten mathematischen Kompetenzen bei den SuS gefördert. Das Projekt war handlungs- und, durch das reale Problem des Segways, kontextorientiert, da die SuS sich die Sachverhalte größtenteils eigenständig erarbeiten konnten. Dabei ist es dennoch essentiell, dass die SuS bei Fragen und Problemen sich an das Lehrerteam wenden können, sodass diese bei Bedarf weitere Schritte der Erkenntnisgewinnung ermöglichen. Es zeigte sich, während des Projekts, sowie bei der Analyse, dass lehrerzentrierte Phasen den Fortgang und die Ergebnisse des Projekts optimieren. Dennoch waren die SuS durch den realen Bezug des Segways motiviert, sodass sie sich nicht von technischen, oder mathematischen Schwierigkeiten, vom Fortgang des Projekts haben abbringen lassen. Diese Motivation, in Verbindung mit einer freien und eigenständigen Arbeitsphase ermöglichte so das Erarbeiten von mathematischen Fachkompetenzen, die teilweise erst für das 2. und 3. Studienjahr im Fach Mathematik vorgesehen sind. Somit zeigt sich, dass durch einen interdisziplinären Modellierungsunterricht, die mathematische Leistungsfähigkeit von Oberstufenschüler enorm erhöht werden kann. Die gezeigten Fachkompetenzen, die durch die Analyse des Lernerfolgs transparent dargelegt werden konnten, beruhen auf dem Konzept ein reales Problem in einem interdisziplinären Modellierungsprojekt einzubauen und einen so für SuS modernen Unterricht mit freien Arbeitsphasen zu ermöglichen. Dadurch wird die Kompetenz des Problemlösens gefördert, sowie das Erarbeiten von mathematisch komplexen Sachverhalten ermöglicht.

5. Literatur

- [1.] Markwig, Grundlagen der Mathematik, Vorlesungsskript Fachbereich Mathematik, TU Kaiserslautern, Sommer- und Wintersemester 2011/12
- [2.] Deuffhard/Homann: Numerische Mathematik 1 – Eine algorithmisch orientierte Einführung – Band 4. De Gruyter Verlag Berlin.2008
- [3.] Wilke/Prüss: Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme. Band 1. Birkhäuser Verlag Basel. 2010
- [4.] Knobloch H.W./ Kwakernaak H.: Lineare Kontrolltheorie. Band 1. Springer-Verlag Berlin.1985
- [5.] Trentelman, Harry L. / Storvogel Anton A. / Hautus Malo: Control Theory for Linear Systems. Band 1. Springer-Verlag London.2001
- [6.] Sontag, Eduardo: Mathematical Control Theory – Deterministic Finite Dimensional Systems – Second Edition. Band 2. Springer-Verlag New York.1998
- [7.] Lehrplangergänzung_Mathematik_MBWWK_März 2015: [http://lehrplaene.bildung-rp.de/lehrplaene-nach-fae-chemn.html?tx_abdownloads_pi1\[category_uid\]=101&tx_abdownloads_pi1\[cid\]=5786&cHash=e30c0085e9e2caa67bf2784df8a3988f](http://lehrplaene.bildung-rp.de/lehrplaene-nach-fae-chemn.html?tx_abdownloads_pi1[category_uid]=101&tx_abdownloads_pi1[cid]=5786&cHash=e30c0085e9e2caa67bf2784df8a3988f) (zuletzt abgerufen am 28.04.2016)
- [8.] Beschlüsse der Kultusministerkonferenz: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss – Beschluss vom 04.03.2013: http://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf (zuletzt abgerufen am 10.05.2016)
- [9.] Müller, Kai: Entwurf robuster Regelungen. Band 1. Teubner-Verlag Stuttgart.1996
- [10.] Geering Hans P.: Regelungstechnik – Mathematische Grundlagen, Entwurfsmethoden, Beispiele – 4.Auflage. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 1996
- [11.] Lunze Jan: Regelungstechnik 2 – Mehrgrößensysteme, Digitale Rechnung – 4.Auflage. Springer-Verlag Berlin-Heidelberg. 2006
- [12.] Ackermann Jürgen et al.: Robust Control – Systems with Uncertain Physical Parameters. 3.Auflage. Springer-Verlag London. 1997
- [13.] Segway - Wikipedia-Artikel:
https://de.wikipedia.org/wiki/Segway_Personal_Transporter (zuletzt abgerufen am 22.03.2016)

[14.] Stefan Raab – Segway: https://www.youtube.com/watch?v=_m3YBSQYGuw (zuletzt abgerufen am 02.05.2015)

[15.] Lego-Segway: <https://www.youtube.com/watch?v=TStjy-RHPDw> (zuletzt abgerufen am 02.05.2015)

6. Abbildungsverzeichnis und deren Quellen

Abbildung 1: Der Segway, modelliert als inverses Pendel auf einem Wagen	- 4 -
Abbildung 2: Der Segway, modelliert als inverses Pendel auf einem Wagen	- 24 -
Abbildung 3: Das inverse Pendel	- 26 -
Abbildung 4: Gebiet für die Eigenwerte des geregelten Systems	- 42 -
Abbildung 5: Spezifikation eines Polgebietes Γ , welches Dämpfung, Begrenzung der Reglerverstärkung und einen negativen Realteil der Eigenwerte garantiert.	- 43 -
Abbildung 6: Der Prozess der Modellbildung	- 47 -
Abbildung 7: Modellierung eines Segway – Gruppe 1	- 50 -
Abbildung 8: Modellierung eines Segway – Gruppe 2	- 51 -
Abbildung 9: Modellierung eines Segway – Gruppe 3	- 52 -
Abbildung 10: Offene Fragen und Anregungen für das Segway-Projekt	- 53 -
Abbildung 11: Aufstellen der Gleichung der horizontalen Beschleunigung	- 57 -
Abbildung 12: Das Aufstellen und Festhalten des Systems	- 58 -
Abbildung 13: Tafelbild zur Erarbeitung des Arbeitsauftrag 1 der Gruppe Simulation	- 61 -
Abbildung 14: Der Lego-Segway mit hohem Schwerpunkt, sowie 2 Gyro-Sensoren	- 62 -
Abbildung 15: Das Tafelbild zur Bearbeitung der Arbeitsaufträge der Gruppe Simulation	- 63 -
Abbildung 16: Die Steuerung des Segways über die Lego-Software	- 65 -
Abbildung 17: Aufstellen des linear zeitinvariantem Systems	- 66 -
Abbildung 18: Das Eigenwertkonzept	- 67 -
Abbildung 19: Herleitung der Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = A \cdot x$	- 67 -
Abbildung 20: Definition der Stabilität	- 68 -
Abbildung 21: PD-Kontrolle	- 69 -
Abbildung 22: Der Versuch der PD-Kontrolle	- 70 -
Abbildung 23: Projekteinstieg: Videos	- 71 -
Abbildung 24: Projekteinstieg: Eigenständige Modellierung	- 72 -
Abbildung 25: Projekteinstieg: Offene Fragen und Anregungen	- 73 -
Abbildung 26: Projektunterricht: Physikalische Betrachtung des Segway	- 74 -
Abbildung 27: Projektunterricht: Kräftegleichungen	- 75 -
Abbildung 28: Projektunterricht: Aufstellen des mathematischen Systems	- 76 -
Abbildung 29: Projektunterricht: Linearisierungen	- 76 -
Abbildung 30: Projektumsetzung: Die Aufteilung in Gruppen	- 78 -
Abbildung 31: Projektumsetzung: Eigenständiges Arbeiten	- 78 -
Abbildung 32: Projektumsetzung: Gruppe Mathematik (1)	- 79 -
Abbildung 33: Projektumsetzung: Gruppe Mathematik (2)	- 80 -
Abbildung 34: Projektumsetzung: Gruppe Mathematik (3)	- 81 -

Abbildung 35: Projektumsetzung Gruppe Mathematik (4)	- 82 -
Abbildung 36: Projektumsetzung: Gruppe Simulation (1)	- 83 -
Abbildung 37: Projektumsetzung: Gruppe Simulation (2)	- 84 -
Abbildung 38: Projektumsetzung: Gruppe Simulation (3)	- 84 -
Abbildung 39: Projektumsetzung: Simulation (4)	- 85 -
Abbildung 40: Projektumsetzung: Gruppe Lego-Mindstorms (1)	- 85 -
Abbildung 41: Projektumsetzung: Gruppe Lego-Mindstorms (2)	- 86 -
Abbildung 42: Projektumsetzung: Gruppe Lego-Mindstorms (3)	- 87 -
Abbildung 43: Präsentation: Das Aufarbeiten der Ergebnisse	- 88 -
Abbildung 44: Die Abschlusspräsentation	- 89 -
Abbildung 45: Frage 1: Bauteile des Segways	- 90 -
Abbildung 46: Frage 2: Stabilisierung des Segways	- 90 -
Abbildung 47: Frage 3: Die Bedeutung des EV3-Steins	- 91 -
Abbildung 48: Frage 4: Der Einfluss des Schwerpunkts	- 92 -
Abbildung 49: Frage 5: Die maximale Geschwindigkeit des Segways	- 92 -

Quellen:

- ❖ Abbildungen 1 und 2 sind der Modellierung der Schülerpräsentation entnommen. Diese ist im Anhang als Verlinkung hinterlegt.
- ❖ Abbildung 3: Sontag, Eduardo: Mathematical Control Theory – Deterministic Finite Dimensional Systems – Second Edition. Band 2. Springer-Verlag New York. 1985. S.3
- ❖ Abbildung 4: Lunze, Jan: Regelungstechnik 2 – Mehrgrößensystem und Digitale Rechnung – 4.Auflage. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.2006. S.228
- ❖ Abbildung 5: Ackerman Jürgen et al.: Robust Control – Systems with Uncertain Physical Parameters. Springer-Verlag London. 1997. S.63.
- ❖ Abbildung 6: Lehrplangergänzung_Mathematik_MBWWK_März 2015: [http://lehrplaene.bildung-rp.de/lehrplaene-nach-fae-
chern.html?tx_abdownloads_pi1\[category_uid\]=101&tx_abdownloads_pi1\[cid\]=5786&cHash=e30c0085e9e2caa67bf2784df8a3988f](http://lehrplaene.bildung-rp.de/lehrplaene-nach-fae-chern.html?tx_abdownloads_pi1[category_uid]=101&tx_abdownloads_pi1[cid]=5786&cHash=e30c0085e9e2caa67bf2784df8a3988f) (zuletzt abgerufen am 28.04.2016). S.15
- ❖ Abbildungen 7-13, sowie Abbildung 14 entsprechen Tafelbildern, die während der Umsetzung des Projekts entstanden sind.
- ❖ Abbildung 14, sowie die Abbildungen 16-22 sind der Schülerpräsentation entnommen.
- ❖ Abbildungen 23-49 sind Excel-Graphiken, die auf Basis des Auswertungsbogens, der ebenfalls im Anhang hinterlegt ist, erstellt wurden.

Anhang

1. Konzipierte Arbeitsblätter (zum Teil mit Lösungen)

A) Projektunterricht:

Lego-Segway-Projekt

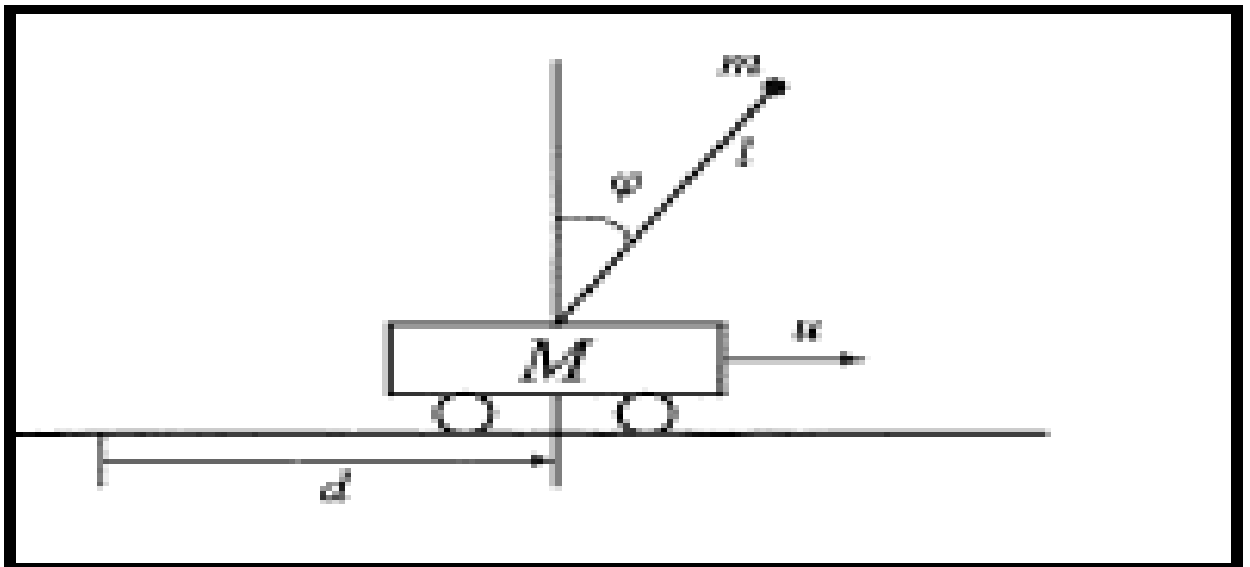
18.12.2015

Physikalische Beschreibung und mathematische Modellierung

Kurs 12 h

Heinrich-Heine-Gymnasium Kaiserslautern

Aufgabe 1:



Die oben angegebene Abbildung skizziert ein weiteres Modell eines Segway. Unser Ziel ist es nun, die wirkenden Kräfte in diesem Modell möglichst gut zu erfassen. So wirken zum einen horizontale Kraftkomponenten, die durch die Motorleistung generiert werden und zum anderen wirken Kräfte auf den Schwerpunkt.

Ordnen Sie die Kräftebeschreibungen den entsprechenden physikalischen Termen zu und stellen sie anschließend zwei Kräftegleichungen (eine für die horizontalen Kraftkomponenten und eine für die wirkenden Radialkräfte auf den Schwerpunkt) auf.

Beschreibung	Term
2. newtonsches Gesetz (Beschleunigungskraft auf die Räder und den Schwerpunkt)	$-m \cdot l \cdot \omega^2 \sin(\varphi)$
Kraft der Winkelbeschleunigung auf den Schwerpunkt	$m \cdot l \cdot \omega'$
Rücktreibende Kraft	$m \cdot l \cdot \cos(\varphi) \cdot \omega'$
Kraft der Winkelbeschleunigung	$(M+m) \cdot a$
Kraft der Winkelbeschleunigung auf den Schwerpunkt, basierend auf der Beschleu-	$m \cdot g \cdot \sin(\varphi)$

nigung des Wagens	
Gravitationskraft auf den Schwerpunkt	$m \cdot \cos(\varphi) \cdot a$

Legende: a ...Beschleunigung der Räder, ω ... Winkelgeschwindigkeit,
 ω' ...Winkel-(Radial-)beschleunigung, m ...Masse der Räder, M ...Masse des Schwer-
punktes, l ...Distanz Räder – Schwerpunkt, g ...Erdbeschleunigung, φ ...Winkel

Kräftegleichungen:

Sei u die Zusammenfassung der horizontalen Kraftkomponenten. So gilt:

$$u =$$

Für die wirkenden Radialkräfte auf den Schwerpunkt gilt folgender Zusammenhang:

$$0 =$$

Aufgabe 2:

Erörtern Sie weshalb das durch die physikalischen Kräfte ergänzte Modell einen Segway
passend modelliert. Nennen sie exemplarisch Vor- und Nachteile der Modellierung.

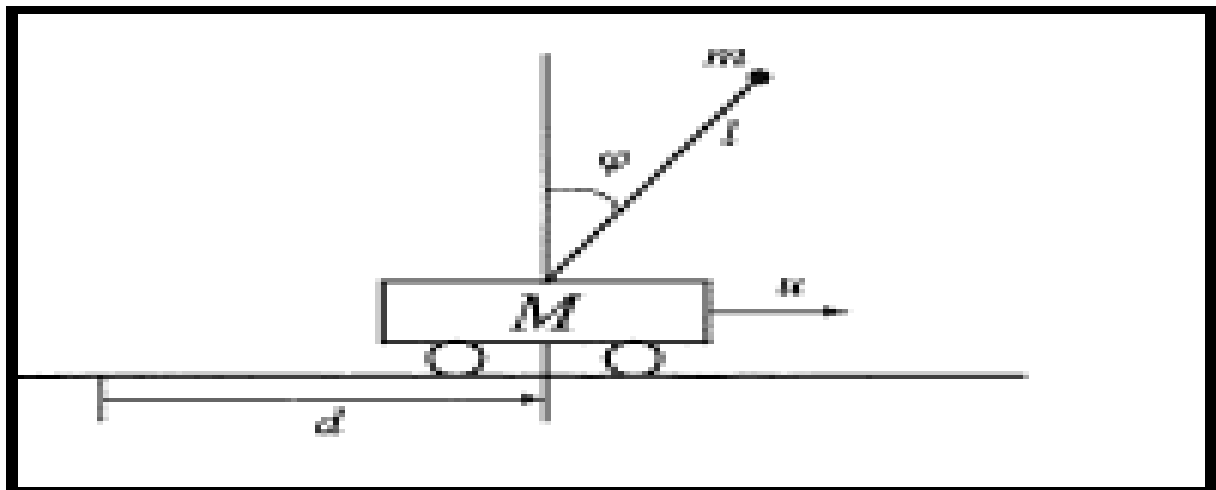
Vorteile der Modellierung	Nachteile der Modellierung

Physikalische Beschreibung und mathematische Modellierung

Kurs 12 h

Heinrich-Heine-Gymnasium Kaiserslautern

Aufgabe 1:



Die oben angegebene Abbildung skizziert ein weiteres Modell eines Segway. Unser Ziel ist es nun, die wirkenden Kräfte in diesem Modell möglichst gut zu erfassen. So wirken zum einen horizontale Kraftkomponenten, die durch die Motorleistung generiert werden und zum anderen wirken Kräfte auf den Schwerpunkt.

Ordnen Sie die Kräftebeschreibungen den entsprechenden physikalischen Termen zu und stellen sie anschließend zwei Kräftegleichungen (eine für die horizontalen Kraftkomponenten und eine für die wirkenden Radialkräfte auf den Schwerpunkt) auf.

Beschreibung	Term
2. newtonsches Gesetz (Beschleunigungskraft auf die Räder und den Schwerpunkt)	$(M+m)*a$
Kraft der Winkelbeschleunigung auf den Schwerpunkt	$m*l*cos(phi)*\omega'$
Rücktreibende Kraft	$-m*l*\omega^2*sin(phi)$
Kraft der Winkelbeschleunigung	$m*l*\omega'$
Kraft der Winkelbeschleunigung auf den Schwerpunkt, basierend auf der Beschleunigung des Wagens	$m*cos(phi)*a$
Gravitationskraft auf den Schwerpunkt	$m*g*sin(phi)$

Legende: a...Beschleunigung der Räder, ω ... Winkelgeschwindigkeit, ω' ... Winkel-(Radial-)beschleunigung, m...Masse der Räder, M...Masse des Schwerpunktes, l...Distanz Räder – Schwerpunkt, g...Erdbeschleunigung, ϕ ...Winkel

Kräftegleichungen:

Sei u die Zusammenfassung der horizontalen Kraftkomponenten. So gilt:

$$u = (M+m)*a + m*l*cos(\varphi)*\omega' - m*l*\omega^2*sin(\varphi)$$

Für die wirkenden Radialkräfte auf den Schwerpunkt gilt folgender Zusammenhang:

$$0 = m*l*\omega' + m*cos(\varphi)*a - m*g*sin(\varphi)$$

Aufgabe 2:

Erörtern Sie weshalb das durch die physikalischen Kräfte ergänzte Modell einen Segway passend modelliert. Nennen sie exemplarisch Vor- und Nachteile der Modellierung.

Vorteile der Modellierung	Nachteile der Modellierung
<ul style="list-style-type: none">-Berücksichtigung der Komponenten Räder und Schwerpunkt des Segway-Berücksichtigung der Länge, des Winkels, sowie der Massen der Räder und des Schwerpunktes-Die Kraft der Motoren zur Steuerung werden berücksichtigt- Der Wagen im Modell entspricht der Plattform beim Segway und der Stab im Modell entspricht der Lenkstange in der Realität	<ul style="list-style-type: none">-Konzentrierung des Masseschwerpunktes- Vernachlässigung von Reibung

Differentialgleichung und Eigenwerte

Kurs 12 h

Heinrich-Heine-Gymnasium Kaiserslautern

Aufgabe 1:

Im Rahmen der physikalischen Beschreibung des Segways wurden folgende Kräftegleichungen erarbeitet:

Kräftegleichungen:

Sei u die Zusammenfassung der horizontalen Kraftkomponenten. So gilt:

$$u = (M+m)*a + m*l*cos(\varphi)*\dot{\omega} - m*l*\omega^2*sin(\varphi) \quad (1)$$

Für die wirkenden Radialkräfte auf den Schwerpunkt gilt folgender Zusammenhang:

$$0 = m*l*\dot{\omega}' + m*cos(\varphi)*a - m*g*sin(\varphi) \quad (2)$$

Wir wollen nun den Übergang von den physikalischen Gleichungen hin zu einem Differentialgleichungssystem leisten. Dazu führen wir folgende Beziehungen ein.

Sei s der Weg des Segway, so gilt: $v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$ $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s}$	Sei φ der gemessene Winkel, so gilt: $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$ $\dot{\omega} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$
--	--

Für kleine Winkel φ treffen wir nun folgende Vereinfachungen:

- $\sin(\varphi) = \varphi$
- $\cos(\varphi) = 1$
- $\ddot{\varphi} = 0$

a) Lösen Sie die Gleichungen (1) und (2) nach den Variablen \ddot{s} und $\ddot{\varphi}$ auf und berücksichtigen sie anschließend die oben angegebenen Vereinfachungen.

$$\ddot{s} =$$

$$=$$

$$\ddot{\varphi} =$$

$$=$$

Nun wollen wir aus den Informationen aus Aufgabenteil a) ein Differentialgleichungssystem aufstellen. Dazu wählen wir uns den Zustandsvektor $x = (s \quad \dot{s} \quad \varphi \quad \dot{\varphi})$.

b) Stellen Sie mit Hilfe von Aufgabenteil a) ein (linearisiertes) System auf, indem sie folgende Differentialgleichung passend ergänzen:

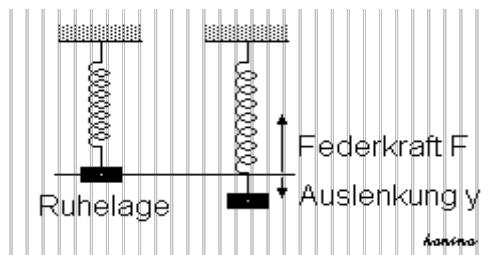
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot u$$

Allgemein gilt für ein System, dass es sich schreiben lässt als $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$

Aufgabe 2:

Ein wichtiges Ziel der Projektarbeit ist es für das linearisierte System eine Lösung zu finden, die den Segway stabilisiert. Zunächst einmal interessieren wir uns aber für die Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = A \cdot x$

Um diese zu verstehen, betrachten wir einen weiteren Schwingungsvorgang, den des harmonischen Oszillators.



a) Bestimmen Sie über das Hook'sche Gesetz die Federkraft der Feder. Beachten Sie anschließend das Prinzip Aktionsprinzip (actio = reactio) und leiten Sie über das zweite Newtonsche Gesetz eine zweite Kraft her, die sie in Zusammenhang mit der Federkraft bringen:

$$F = = $$

b) Leiten Sie aus dieser Kräftegleichung, analog zu Aufgabe 1 eine Differentialgleichung her.

$$\ddot{y} = $$

c) Aus dieser Differentialgleichung 2.Ordnung, wollen wir nun ein Differentialgleichungssystem 1.Ordnung generieren, indem wir den Vektor $x = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$ einführen. Stellen Sie analog zu Aufgabe 1 b) eine Differentialgleichung der Form $\dot{x} = A \cdot x$ auf:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3:

Das nächste Ziel besteht nun darin eine Herleitung der Lösung der linearen Differentialgleichung $\dot{x} = A \cdot x$ zu finden. Dazu suchen wir Zahlen λ , die die Gleichung $\dot{x} = A \cdot x = \lambda \cdot x$ erfüllen. Wir nennen eine solche Zahl λ Eigenwert der Matrix A. Der zugehörige Vektor x heißt Eigenvektor zum Eigenwert λ

a) Leiten Sie eine Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = \lambda x$ her. Schreiben Sie dafür zunächst $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \lambda \cdot x$. Erörtern Sie anschließend, weshalb es nützlich ist, die Eigenwerte der Matrix für die Lösung der Differentialgleichung zu bestimmen.

b) Um die Eigenwerte der Matrix A zu berechnen, bestimmt man die Nullstellen der Determinante $\det(A - \lambda \cdot E)$, wobei E die Einheitsmatrix ist. Begründen Sie weshalb dieser Algorithmus korrekt ist, also weshalb die Eigenwerte der Matrix über dieses Verfahren berechnet werden können. Beginnen Sie ihren Ansatz mit der Überlegung $A \cdot x = \lambda \cdot x$ um anschließend über Äquivalenzoperationen zu $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$ zu gelangen.

c) Berechnen Sie über Eigenwerte die Lösung des harmonischen Oszillators. Der Startvektor soll hierbei die Ruhelage des Feder $y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sein. Beachten Sie dabei das Superpositionsprinzip, das besagt, dass die Summe der beiden Lösungen ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung ist.

Differentialgleichung und Eigenwerte

Kurs 12 h

Heinrich-Heine-Gymnasium Kaiserslautern

Aufgabe 1:

Im Rahmen der physikalischen Beschreibung des Segways wurden folgende Kräftegleichungen erarbeitet:

Kräftegleichungen:

Sei u die Zusammenfassung der horizontalen Kraftkomponenten. So gilt:

$$u = (M+m) \cdot a + m \cdot l \cdot \cos(\varphi) \cdot \dot{\omega} - m \cdot l \cdot \omega^2 \sin(\varphi) \quad (1)$$

Für die wirkenden Radialkräfte auf den Schwerpunkt gilt folgender Zusammenhang:

$$0 = m \cdot l \cdot \dot{\omega} + m \cdot \cos(\varphi) \cdot a - m \cdot g \cdot \sin(\varphi) \quad (2)$$

Wir wollen nun den Übergang von den physikalischen Gleichungen hin zu einem Differentialgleichungssystem leisten. Dazu führen wir folgende Beziehungen ein.

Sei s der Weg des Segway, so gilt: $v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$ $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s}$	Sei φ der gemessene Winkel, so gilt: $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$ $\dot{\omega} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$
--	--

Für kleine Winkel φ treffen wir nun folgende Vereinfachungen:

- $\sin(\varphi) = \varphi$
- $\cos(\varphi) = 1$
- $\ddot{\varphi} = 0$.

a) Lösen Sie die Gleichungen (1) und (2) nach den Variablen \ddot{s} und $\ddot{\varphi}$ auf und berücksichtigen sie anschließend die oben angegebenen Vereinfachungen.

$$\begin{aligned} \ddot{s} &= \frac{1}{M+m} \cdot u - \frac{m \cdot l \cdot \cos(\varphi) \cdot \ddot{\varphi}}{M+m} + \frac{m \cdot l \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin(\varphi)}{M+m} \approx \frac{1}{M+m} \cdot u \\ &= \frac{m \cdot g \cdot \sin(\varphi)}{m \cdot \cos(\varphi)} - \frac{m \cdot l \cdot \ddot{\varphi}}{m \cdot \cos(\varphi)} \approx g \cdot \varphi \end{aligned}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{m \cdot l \cdot \cos \varphi} \cdot u + \frac{m \cdot l \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin \varphi}{m \cdot l \cdot \cos \varphi} - \frac{(M+m) \cdot \ddot{s}}{m \cdot l \cdot \cos \varphi} \approx \frac{1}{m \cdot l} \cdot u - \frac{(M+m) \cdot g}{m \cdot l} \cdot \varphi \quad | \text{Einsetzen von } \ddot{s}$$

$$= \frac{-m \cdot \cos \varphi \cdot \ddot{s}}{m \cdot l} + \frac{m \cdot g \cdot \sin \varphi}{m \cdot l} \approx \frac{-g \cdot \varphi}{l} + \frac{g \cdot \varphi}{l} = 0 \quad | \text{Einsetzen von } \ddot{s}$$

Nun wollen wir aus den Informationen aus Aufgabenteil a) ein Differentialgleichungssystem aufstellen. Dazu wählen wir uns den Zustandsvektor $x = (s \quad \dot{s} \quad \varphi \quad \dot{\varphi})$.

b) Stellen Sie mit Hilfe von Aufgabenteil a) ein (linearisiertes) System auf, indem sie folgende Differentialgleichung passend ergänzen:

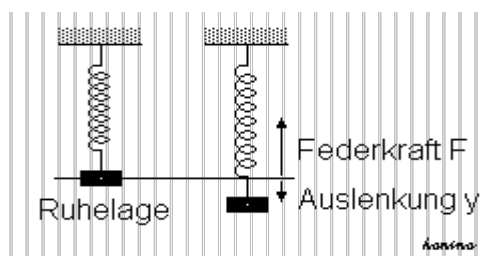
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \ddot{s} \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{g}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-(M+m) \cdot g}{m \cdot l} & 0 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2 \cdot (M+m)} \\ 0 \\ \frac{1}{m \cdot l} \end{pmatrix} \cdot u$$

Allgemein gilt für ein System, dass es sich schreiben lässt als $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$

Aufgabe 2:

Ein wichtiges Ziel der Projektarbeit ist es für das linearisierte System eine Lösung zu finden, die den Segway stabilisiert. Zunächst einmal wollen interessieren wir uns aber für die Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = A \cdot x$

Um diese zu verstehen, betrachten wir einen weiteren Schwingungsvorgang, den des harmonischen Oszillators.



a) Bestimmen Sie über das Hook'sche Gesetz die Federkraft der Feder. Beachten Sie anschließend das Prinzip Aktionsprinzip (actio = reactio) und leiten Sie über das zweite Newtonsche Gesetz eine zweite Kraft her, die sie in Zusammenhang mit der Federkraft bringen:

$$F = D \cdot y = -m \cdot \ddot{y}$$

b) Leiten Sie aus dieser Kräftegleichung, analog zu Aufgabe 1 eine Differentialgleichung her.

$$\ddot{y} = -\frac{D}{m} \cdot y$$

c) Aus dieser Differentialgleichung 2.Ordnung, wollen wir nun ein Differentialgleichungssystem 1.Ordnung generieren, indem wir den Vektor $x = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$ einführen. Stellen Sie analog zu Aufgabe 1 b) eine Differentialgleichung der Form $\dot{x} = A \cdot x$ auf:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{D}{m} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3:

Das nächste Ziel besteht nun darin eine Herleitung der Lösung der linearen Differentialgleichung $\dot{x} = A \cdot x$ zu finden. Dazu suchen wir Zahlen λ , die die Gleichung $\dot{x} = A \cdot x = \lambda \cdot x$ erfüllen. Wir nennen eine solche Zahl λ Eigenwert der Matrix A. Der zugehörige Vektor x heißt Eigenvektor zum Eigenwert λ

a) Leiten Sie eine Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = \lambda x$ her. Schreiben Sie dafür zunächst $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \lambda \cdot x$. Erörtern Sie anschließend, weshalb es nützlich ist, die Eigenwerte der Matrix für die Lösung der Differentialgleichung zu bestimmen.

$$\dot{x} = A \cdot x = \lambda \cdot x$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = \lambda \cdot x$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{x} = \lambda dt$$

$$\Leftrightarrow \ln(|x|) = \lambda \cdot t + c$$

$$\Leftrightarrow x = c_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

Sobald man die Eigenwerte einer Matrix bestimmt hat, kann man die Lösung der linearen Differentialgleichung $\dot{x} = A \cdot x$ leicht bestimmen, sie lauten $x = x_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$, wobei x_0 der Startwert der Differentialgleichung ist.

b) Um die Eigenwerte der Matrix A zu berechnen, bestimmt man die Nullstellen der Determinante $\det(A - \lambda \cdot E)$, wobei E die Einheitsmatrix ist. Begründen Sie weshalb dieser Algorithmus korrekt ist, also weshalb die Eigenwerte der Matrix über dieses Verfahren berechnet werden können. Beginnen Sie ihren Ansatz mit der Überlegung $A \cdot x = \lambda \cdot x$ um anschließend über Äquivalenzoperationen zu $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$ zu gelangen.

$$\begin{aligned}
A \cdot x &= \lambda \cdot x \\
\Leftrightarrow A \cdot x - \lambda \cdot x &= 0 \\
\Leftrightarrow (A - \lambda \cdot E) \cdot x &= 0 \\
\Leftrightarrow \det(A - \lambda \cdot E) &= 0
\end{aligned}$$

Es ergibt sich ein Polynom von Grad n, dessen Nullstellen genau die Eigenwerte der Matrix A sind.

c) Berechnen Sie über Eigenwerte die Lösung des harmonischen Oszillators. Der Startvektor soll hierbei die Ruhelage des Feder $y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sein. Beachten Sie dabei das Superpositionsprinzip, das besagt, dass die Summe der beiden Lösungen ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung ist.

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{D}{m} & 0 \end{pmatrix} \\
A - \lambda \cdot E &= \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{D}{m} & -\lambda \end{pmatrix} \\
\det(A - \lambda E) &= \lambda^2 + \frac{D}{m} \\
\lambda_{1,2} &= \pm i \cdot \sqrt{\frac{D}{m}} \\
L &= \{e^{i\sqrt{\frac{D}{m}}t}, e^{-i\sqrt{\frac{D}{m}}t}\} = \{\cos(\sqrt{\frac{D}{m}}t) + i\sin(\sqrt{\frac{D}{m}}t), \cos(\sqrt{\frac{D}{m}}t) - i\sin(\sqrt{\frac{D}{m}}t)\} \\
\text{Superposition: } x(t) &= c_1 \cdot e^{i\sqrt{\frac{D}{m}}t} + c_2 \cdot e^{-i\sqrt{\frac{D}{m}}t} \\
x_0 &= c_1 + c_2 = 1 \\
v_0 &= i \cdot \sqrt{\frac{D}{m}}(c_1 - c_2) = 0 \\
\Rightarrow c_1 &= c_2 = 0.5 \\
\Rightarrow x(t) &= \cos(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t)
\end{aligned}$$

B: Projektstage:

Lego-Segway-Projekt

20.01.2016

Stabilität des Segway-Abhängigkeit von Eigenwerten

Kurs 12 h

Heinrich-Heine-Gymnasium Kaiserslautern

Aufgabe 1:

Rekapitulieren Sie das System $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$, welches wir für die Modellierung des Segway auf zwei verschiedene Weisen hergeleitet haben. In unserem ersten System, welches vor den Weihnachtsferien erarbeitet wurde, hatte der Zustandsvektor x folgende Gestalt:

$x = \begin{pmatrix} s \\ \dot{s} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$. In der vereinfachten Modellierung war es das Ziel die Position der Räder und

des Schwerpunktes zu steuern, man erhält folgenden Zustandsvektor: $x = \begin{pmatrix} s \\ \dot{s} \\ d \\ \dot{d} \end{pmatrix}$.

a) Geben Sie für beide Modellierungen des Segways die Koordinaten des Zustandsvektors an, für die der Segway stabil ist. Konkret bedeutet dies, dass sie für jede Variable (Komponente) des Zustandsvektors einen konkreten Wert angeben, die die Stabilität des Segways symbolisiert.

$$1. \quad x = \begin{pmatrix} s \\ \dot{s} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \phantom{\dot{s}} \\ \\ \phantom{\dot{\varphi}} \end{pmatrix}$$

$$2. \quad x = \begin{pmatrix} s \\ \dot{s} \\ d \\ \dot{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \phantom{\dot{s}} \\ \\ \phantom{\dot{d}} \end{pmatrix}$$

b) Um zu verstehen, wie die Stabilität des Systems $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$ erreicht wird, betrachten wir zunächst wieder die homogene lineare Differentialgleichung $\dot{x} = A \cdot x$ mit dem Startvektor $x(0) = x_0$ und interessieren uns dafür, wann die Lösung dieser Differentialgleichung stabil ist.

b) Entwerfen Sie zunächst eine für Sie intuitive Definition von Stabilität. Gerne können Sie in ihren Überlegungen Rücksicht darauf nehmen, was es für den Segway bedeutet, „stabil“ zu sein.

Definition Stabilität:

Aufgabe 2:

Nachdem eine Definition für Stabilität erstellt wurde, befassen wir uns in dieser Aufgabe mit der Stabilität der Lösung der linearen homogenen eindimensionalen Differentialgleichung $\dot{x} = \lambda \cdot x$ mit Startwert $x(0) = x_0$.

a) Berechnen Sie die Lösung der oben angegebenen Differentialgleichung und geben Sie Kriterien an, für die die Lösung in Abhängigkeit von λ (asymptotisch) stabil bzw. instabil ist.

Lösung: $x(t) =$
Fall 1: λ
Fall 2: λ
Fall 3: λ

b) Geben Sie für jeden der drei Fälle ein Anwendungs-/Alltagsbeispiel an, also eine Alltagsphänomen, welches durch die Differentialgleichung $\dot{x} = \lambda \cdot x$ mit Startwert $x(0) = x_0$ bei verschiedenen Werten von λ beschrieben wird.

- Fall 1:

- Fall 2:

- Fall 3:

Aufgabe 3:

Leiten Sie aus Aufgabe 2 und aus der Definition von Aufgabe 1.b Kriterien für die (asymptotische) Stabilität und die Instabilität der Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $\dot{x} = A \cdot x, x(0) = x_0$ her. Für diese Aufgaben liegen auch Hilfekärtchen bereit, die Sie bei Bedarf auch gerne verwenden dürfen.

Hilfekarten für Aufgabe 3 Arbeitsblatt „Stabilität des Segway-Abhängigkeit von Eigenwerten“

Tipp 1: Überlegen Sie, mit welchem mathematischen Konzept, welches Sie bereits in der Projektphase kennen gelernt haben, von der mehrdimensionalen Differentialgleichung $\dot{x} = A \cdot x, x(0) = x_0$ hin zu mehreren eindimensionalen Differentialgleichungen der Form $\dot{x} = \lambda \cdot x, x(0) = x_0$ gelangen können.

Tipp 2: Sie erhalten über den Tipp 1 mehrere homogene lineare eindimensionale Differentialgleichungen der Form $\dot{x} = \lambda \cdot x, x(0) = x_0$. Wenden Sie auf deren Lösungen anschließend das Superpositionsprinzip an.

Tipp 3: Überlegen Sie sich, wie Sie eine Aussage über die (asymptotische) Stabilität der Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $\dot{x} = A \cdot x, x(0) = x_0$ über alle Eigenwerte der Matrix A treffen können.

Stabilität des Segway-Abhängigkeit von Eigenwerten

Kurs 12 h

Heinrich-Heine-Gymnasium Kaiserslautern

Aufgabe 1:

Rekapitulieren Sie das System $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$, welches wir für die Modellierung des Segway auf zwei verschiedene Weisen hergeleitet haben. In unserem ersten System, welches vor den Weihnachtsferien erarbeitet wurde, hatte der Zustandsvektor x folgende Gestalt:

$$x = \begin{pmatrix} s \\ \dot{s} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}. \text{ In der vereinfachten Modellierung war es das Ziel die Position der Räder und}$$

des Schwerpunktes zu steuern, man erhält folgenden Zustandsvektor: $x = \begin{pmatrix} s \\ \dot{s} \\ d \\ \dot{d} \end{pmatrix}.$

a) Geben Sie für beide Modellierungen des Segways die Koordinaten des Zustandsvektors an, für die der Segway stabil ist. Konkret bedeutet dies, dass sie für jede Variable (Komponente) des Zustandsvektors einen konkreten Wert angeben, die die Stabilität des Segways symbolisiert.

$$2. \quad x = \begin{pmatrix} s \\ \dot{s} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 2.$$

$$x = \begin{pmatrix} s \\ \dot{s} \\ d \\ \dot{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Um zu verstehen, wie die Stabilität des Systems $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$ erreicht wird, betrachten wir zunächst wieder die homogene lineare Differentialgleichung $\dot{x} = A \cdot x$ mit dem Startvektor $x(0) = x_0$ und interessieren uns dafür, wann die Lösung dieser Differentialgleichung stabil ist.

b) Entwerfen Sie zunächst eine für Sie intuitive Definition von Stabilität. Gerne können Sie in ihren Überlegungen Rücksicht darauf nehmen, was es für den Segway bedeutet, „stabil“ zu sein.

Definition Stabilität:

- Eine Lösung der Differentialgleichung heißt stabil, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass für alle \tilde{x}_0 mit $d(x_0, \tilde{x}_0) < \delta$ gilt, dass $d(x(t), \tilde{x}(t)) < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0, \forall t \geq 0$
- Eine Lösung der Differentialgleichung heißt asymptotisch stabil, falls gilt, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0$$

Hinweis: Es ist nicht mein Ziel, die mathematisch exakten und operationalisierten Definitionen mit den SuS zu erarbeiten. Die erstellten Definitionen der SuS sollen derart verändert/verbessert/erweitert werden, sodass diese sich mit den Definitionen aus der Literatur möglichst gut abdecken.

Aufgabe 2:

Nachdem eine Definition für Stabilität erstellt wurde, befassen wir uns in dieser Aufgabe mit der Stabilität der Lösung der linearen homogenen *eindimensionalen* Differentialgleichung $\dot{x} = \lambda \cdot x$ mit Startwert $x(0) = x_0$.

a) Berechnen Sie die Lösung der oben angegebenen Differentialgleichung und geben Sie Kriterien an, für die die Lösung in Abhängigkeit von λ (asymptotisch) stabil bzw. instabil ist.

Lösung: $x(t) = x_0 \cdot e^{\lambda t}$
Fall 1: $\lambda > 0$: Die Lösung ist instabil
Fall 2: $\lambda = 0$: Die Lösung ist konstant x_0 , also stabil
Fall 3: $\lambda < 0$: Die Lösung ist asymptotisch stabil.

b) Geben Sie für jeden der drei Fälle ein Anwendungs-/Alltagsbeispiel an, also eine Alltagsphänomen, welches durch die Differentialgleichung $\dot{x} = \lambda \cdot x$ mit Startwert $x(0) = x_0$ bei verschiedenen Werten von λ beschrieben wird.

- Fall 1: Unbegrenzttes Bakterienwachstum.
- Fall 2: Herzstillstand, (oder ein passenderes Beispiel, welches mir zur Zeit nicht eingefallen ist ;))

➤ Fall 3: Radioaktiver Zerfall.

Aufgabe 3:

Leiten Sie aus Aufgabe 2 und aus der Definition von Aufgabe 1.b Kriterien für die (asymptotische) Stabilität und die Instabilität der Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $\dot{x} = A \cdot x, x(0) = x_0$ her. Für diese Aufgaben liegen auch Hilfekärtchen bereit, die Sie bei Bedarf auch gerne verwenden dürfen.

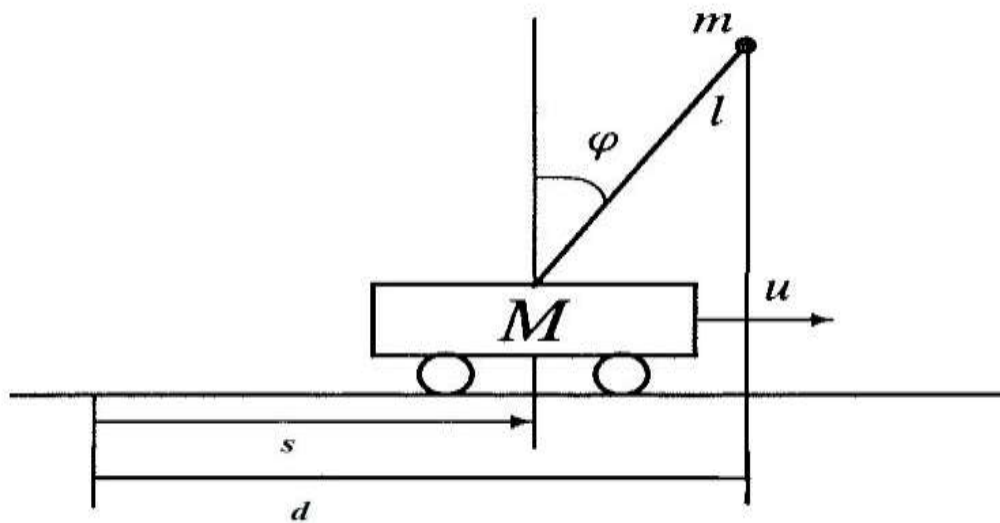
Lösung: Da wir die Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = A \cdot x, x(0) = x_0$ (noch) nicht kennen, müssen wir die Eigenwerte der Matrix A bestimmen, denn für diese gilt der Zusammenhang $\dot{x} = A \cdot x = \lambda \cdot x$, für die wir die Lösung einer jeden Komponente des Vektors x bestimmen können. Für eine Matrix der Dimension nxn, erhalten wir n Eigenwerte und somit auch n Lösungen (Vergleiche Harmonischer Oszillator, Dimension von A war hier 2x2). Durch das Superpositionsprinzip ist auch $x(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \cdot e^{\lambda_n t}$ eine Lösung der Differentialgleichung und die ist genau dann (asymptotisch) stabil, wenn für alle Eigenwerte der Matrix A gilt: $\lambda < 0$, oder $\text{Re}(\lambda) < 0$, bei komplexen Eigenwerten.

Vereinfachte und Linearisierte Modellierung

Kurs 12 h

Heinrich-Heine-Gymnasium Kaiserslautern

Aufgabe 1:



a) Eine weitere Möglichkeit für die Modellierung des Segway besteht darin, die Bewegungsgleichungen der Räder und des Schwerpunktes getrennt zu betrachten. Auf diese Weise werden einige Kräfte vernachlässigt und man erhält lediglich folgende zwei Gleichungen:

$$(1) \quad u = M \cdot \ddot{s}$$

$$(2) \quad m \cdot \ddot{d} = m \cdot g \cdot \tan(\varphi)$$

Leiten Sie Gleichung (2) über ein Kräfteparallelogramm her und nennen Sie kurz welche vereinfachten Annahmen an dieses Modell des Segway getroffen werden. Vergleichen Sie diese Modellierung mit der Modellierung die vor den Weihnachtsferien erarbeitet wurde.

b) Leiten Sie aus diesen beiden Gleichungen das System $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$ her, wobei der

Zustandsvektor x wie folgt definiert wird: $x = \begin{pmatrix} s \\ \dot{s} \\ d \\ \dot{d} \end{pmatrix}$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \ddot{s} \\ \dot{d} \\ \ddot{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phantom{\dot{s}} \\ \phantom{\ddot{s}} \\ \phantom{\dot{d}} \\ \phantom{\ddot{d}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ \dot{s} \\ d \\ \dot{d} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phantom{\dot{s}} \\ \phantom{\ddot{s}} \\ \phantom{\dot{d}} \\ \phantom{\ddot{d}} \end{pmatrix} \cdot u$$

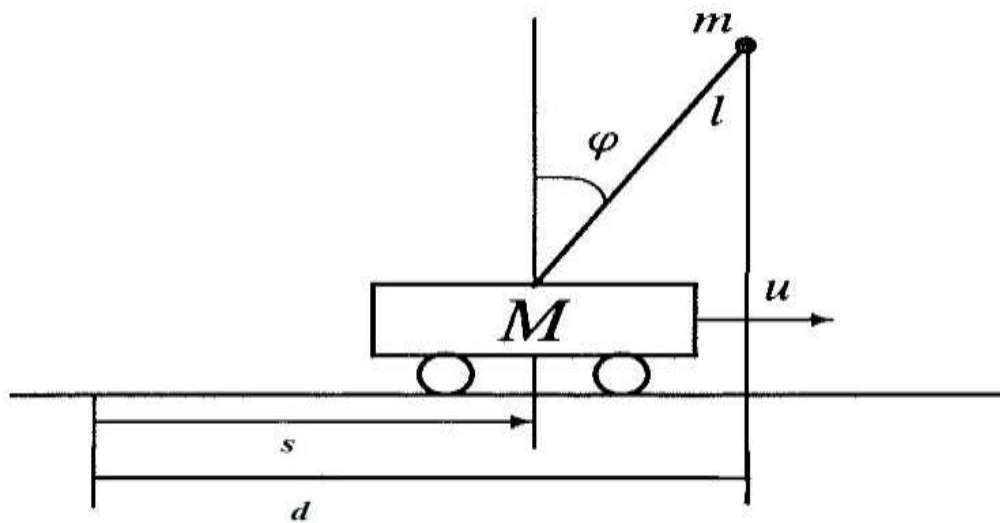
Beachten Sie dabei, wie Sie $\tan(\varphi)$ für kleine Winkel nur in Abhängigkeit von s und d ausdrücken können.

Vereinfachte und Linearisierte Modellierung

Kurs 12 h

Heinrich-Heine-Gymnasium Kaiserslautern

Aufgabe 1:



a) Eine weitere Möglichkeit für die Modellierung des Segway besteht darin, die horizontalen Bewegungsgleichungen der Räder und des Schwerpunktes getrennt zu betrachten. Auf diese Weise werden einige Kräfte vernachlässigt und man erhält lediglich folgende zwei Gleichungen:

$$(1) \quad u = M \cdot \ddot{s}$$

$$(2) \quad m \cdot \ddot{d} = m \cdot g \cdot \tan(\varphi)$$

Leiten Sie Gleichung (2) über ein Kräfteparallelogramm her und nennen Sie kurz welche vereinfachten Annahmen an dieses Modell des Segway getroffen werden. Vergleichen Sie diese Modellierung mit der Modellierung die vor den Weihnachtsferien erarbeitet wurde.



Die Gewichtskraft G entspricht dem Term $G = m \cdot g$. Die Kraft der horizontalen Bewegung des Schwerpunktes entspricht nach dem 2.Newtonschem Gesetz dem Term $m \cdot \ddot{d}$. Über das Kräftedreieck, welches in der Skizze symbolisiert wird kann über die Beziehung des Tangens Gleichung 2 hergeleitet werden, denn es gilt: $\tan(\varphi) = \frac{m \cdot \ddot{d}}{m \cdot g}$. In dieser Modellierung werden jegliche Radialkräfte und rückwirkende Kräfte nicht berücksichtigt, ebensowenig wird auf die Reibung Acht gegeben. Ziel dieser Modellierung (vgl. Aufgabe 1b) ist es den Segway bezüglich der Komponenten s und d , also den Ortskomponenten der Räder und des Schwerpunktes zu stabilisieren.

b) Leiten Sie aus diesen beiden Gleichungen das System $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$ her, wobei der

Zustandsvektor x wie folgt definiert wird: $x = \begin{pmatrix} s \\ \dot{s} \\ d \\ \dot{d} \end{pmatrix}$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \ddot{s} \\ \dot{d} \\ \ddot{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-g}{l} & 0 & \frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ \dot{s} \\ d \\ \dot{d} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/M \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot u$$

Beachten Sie dabei, wie Sie $\tan(\varphi)$ für kleine Winkel nur in Abhängigkeit von s und d ausdrücken können.

Es wird kurz die Gleichung für \ddot{d} erläutert. Es gilt für kleine Winkel φ : $\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} \approx \sin(\varphi) = \frac{d-s}{l}$. Ersetzt man diesen Ausdruck in guter Näherung für den Tangens in Gleichung 2, so erhält man über einfache Termumformungen das gewünschte Ergebnis.

Feedback-Stabilisierbarkeit

Kurs 12 h

Heinrich-Heine-Gymnasium Kaiserslautern

Aufgabe 1:

Der Segway wurde auf zwei Arten durch ein System $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$ modelliert. Unser Ziel ist es den Segway in beiden Modellierungen zu stabilisieren. Bisher haben wir jedoch nur die (asymptotische) Stabilität der homogenen linearen Differentialgleichung $\dot{x} = A \cdot x$ untersucht.

Geben Sie an, wie das System $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$ in ein System $\dot{x} = \tilde{A} \cdot x$ überführt werden kann. Geben Sie konkret \tilde{A} an und entwerfen Sie Kriterien, für die das System $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$ über die geeignete Überführung stabilisierbar ist.

Aufgabe 2:

Recherchieren Sie den Begriff „Feedback-Stabilisierbarkeit“ und erörtern Sie den Zusammenhang zwischen Feedback-Stabilisierbarkeit und dem Lego-Segway. Recherchieren Sie ebenfalls wie man mit Hilfe von Programmen Feedback-Matrizen berechnen kann.

Feedback-Stabilisierbarkeit

Kurs 12 h

Heinrich-Heine-Gymnasium Kaiserslautern

Aufgabe 1:

Der Segway wurde auf zwei Arten durch ein System $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$ modelliert. Unser Ziel ist es den Segway in beiden Modellierungen zu stabilisieren. Bisher haben wir jedoch nur die (asymptotische) Stabilität der homogenen linearen Differentialgleichung $\dot{x} = A \cdot x$ untersucht.

Geben Sie an, wie das System $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$ in ein System $\dot{x} = \tilde{A} \cdot x$ überführt werden kann. Geben Sie konkret \tilde{A} an und entwerfen Sie Kriterien, für die das System $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$ über die geeignete Überführung stabilisierbar ist.

Lösung: Wenn wir $u = F \cdot x$ wählen, so kann man das System $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$ schreiben als $\dot{x} = (A + B \cdot F) \cdot x = \tilde{A} \cdot x$. Dieses System ist genau dann (asymptotisch) stabil, wenn gilt, dass $\sigma(A + B \cdot F) \subseteq \mathbb{C}_-$.

Aufgabe 2:

Recherchieren Sie den Begriff „Feedback-Stabilisierbarkeit“ und erörtern Sie den Zusammenhang zwischen Feedback-Stabilisierbarkeit und dem Lego-Segway. Recherchieren Sie ebenfalls wie man mit Hilfe von Programmen Feedback-Matrizen berechnen kann.

Lösung: Unter der Feedback-Stabilisierbarkeit versteht man im groben die Herleitung von Aufgabe 1. In Matlab kann man Feedback-Matrizen über den Befehl „lqr“ erzeugen. Das System des Lego-Segway ist feedback-stabilisierbar, also insbesondere auch stabilisierbar (Überprüfung erfolgt über MATLAB).

Arbeitsaufträge „Simulationsgruppe“

Kurs 12 h

Heinrich-Heine-Gymnasium Kaiserslautern

Allgemeiner Hinweis: Speichern Sie die Ergebnisse der Aufgaben geeignet ab, um anschließend aus ihren Erkenntnissen der Simulationsaufgaben eine kleine Präsentation zu gestalten.

Aufgaben:

1. Lösen Sie die Differentialgleichung $\dot{x} = A \cdot x$ der Aufgabenstellung 1b) des Arbeitsblattes „Differentialgleichungen und Eigenwerte“. Beachten Sie, dass hier bewusst die Kontrolle vernachlässigt wird. Was bedeutet dies für die Stabilität des Segway? Stellen Sie den Ort s , sowie den Winkel φ als Lösung dieser DGL in einem Diagramm übersichtlich dar.

2. Lösen Sie ebenfalls die nichtlineare Differentialgleichung (Vereinfachen, oder Linearisieren Sie also NICHT die Terme der physikalischen Herleitung). Stellen Sie dafür (gerne auch mit Hilfe des Computers) zunächst das nichtlinearisierte System $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$ auf und untersuchen Sie anschließend die Lösung und Stabilität der Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = A \cdot x$. Sofern das Programm diese nichtlineare Differentialgleichung nicht exakt lösen kann, recherchieren Sie nach numerischen Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen. Visualisieren Sie auch hier ihre Ergebnisse in einer passenden Animation/Diagramm.

3. Lösen Sie die (linearisierte) Differentialgleichung $\dot{x} = A \cdot x$ der Aufgabe 1b) des Arbeitsblatt „Vereinfachte und Linearisierte Modellierung“, also die DGL zum zugehörigen System $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$. Vergleichen Sie die Lösung des linearisierten Systems, mit dem des nichtlinearisierten Systems (Linearisierung: $\tan(\varphi) \approx \varphi$, für kleine Winkel φ). Hinweis: Das System $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$ sollten ihre Kollegen der Gruppe der „Mathematiker“ bereits aufgestellt haben. Greifen Sie auf dieses zurück.

4. Untersuchen Sie die Stabilität von Lösungen homogener Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten in Relation zu den Eigenwerten der zugehörigen Matrix A. Betrachten Sie dazu die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen (Gehen Sie vom Startwert $x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aus):

hen Sie vom Startwert $x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aus):

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\ddot{x}} \\ \dot{\ddot{\ddot{x}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix},$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\ddot{x}} \\ \dot{\ddot{\ddot{x}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \\ 1 & 5 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix},$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\ddot{x}} \\ \dot{\ddot{\ddot{x}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix},$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\ddot{x}} \\ \dot{\ddot{\ddot{x}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix}$$

□

5. Das Arbeitsblatt „PD-Kontrolle“ für die Gruppe der Mathematiker untersucht einen weiteren Ansatz der Kontrolle des Segway. Konkret soll in diesem Fall der Winkel, die Winkelgeschwindigkeit, sowie die Winkelbeschleunigung gesteuert werden. Im Zuge dessen wurde die Differentialgleichung $\ddot{\varphi} = -\frac{\beta}{m} \cdot \dot{\varphi} + (g - \frac{\alpha}{m}) \cdot \varphi$ erarbeitet, wobei m der

Schwerpunkt des Segway ist. Lösen Sie diese Gleichung mit Startwert $\varphi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

verändern Sie die Konstanten $\alpha, \beta > 0$, so dass sich die Lösung der DGL recht schnell stabilisiert. Vielleicht hat die Gruppe der Mathematiker bereits einige Hinweise/Einschränkungen an die Konstanten für Sie herausgearbeitet. □

6. Recherchieren Sie nach dem Begriff „Feedback-Stabilisierbarkeit“, oder „Zustandsrückführung“ und berechnen Sie Feedbackmatrizen F für die Systeme $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$, die in den Arbeitsblättern „Physikalische Beschreibung und mathematische Modellierung“, sowie „Vereinfachte und Linearisierte Modellierung“ aufgestellt wurden. Versuchen Sie die so erhaltene Stabilität des Segway in einer Animation zu verdeutlichen. Greifen Sie hierzu auf die erstellten Simulationen und Diagramme der Aufgaben 1,2 und 3 zurück.

2: Auswertungsbogen:

Lego-Segway-Projekt

16.02.2016

Auswertungsbogen Lego-Segway-Projekt

Kurs 12 h

Heinrich-Heine-Gymnasium Kaiserslautern

Geben Sie zunächst die Gruppe an, in der Sie während des Projekts gearbeitet haben:

Mathematik Simulation Segway (Lego) Segway (Java)

Der folgende Fragebogen dient zur Evaluierung des Lego-Segway-Projekts. Es werden dabei Fragen zum mathematischen Teil des Projekts, zur Projektgestaltung, sowie zur Beantwortung der offenen Fragen und Anregungen, während des Projekts, gestellt. Diese Fragen werden im Multiple-Choice-Modus gestellt. Abschließend haben Sie noch die Möglichkeit ein abschließendes schriftliches Feedback für das Projekt zu geben.

1. Mathematisch inhaltliche Fragen

Die mathematisch-inhaltlichen Fragen umfassen zum einem Inhalte, die während der Unterrichtsphase (18.12.2015 und 21.12.2015) erarbeitet wurden (Fragen 1-4), als auch Inhalte, die die Gruppe der Mathematiker und, in Abstrichen, die Gruppe Simulation erarbeitet haben (Fragen 5-10). Sofern Sie Teil einer der Segway-Gruppen waren, versuchen Sie trotzdem die Fragen zu beantworten. Dadurch wird untersucht, inwiefern Sie in diesem Projekt von dem Wissen der Mathematiker und Simulierer profitieren konnten.

11. Nennen Sie die physikalischen Größen, die sich zur Steuerung und Stabilisierung eines Segways eignen (Mehrfachnennung möglich):

- Neigung (Winkel) des Segway
- Masse des Segway
- Länge des Segway
- Position des Segway

12. Nennen Sie den mathematischen Prozess welches die Überführung des physikalischen Modells in ein mathematisches möglich gemacht hat:

- Ableiten der Größen Winkel und Position
- Integrieren der Größen Winkel und Position
- Ableiten der Größe Länge

13. Nennen Sie das Modell, welches zur mathematischen Darstellung eines Segway erarbeitet wurde:

- Das System $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$ diene zur Modellierung des Segway
- Die Differentialgleichung $\dot{x} = A \cdot x$ diene zur Modellierung des Segway

14. Begründen Sie weshalb die Linearisierungen $\sin \varphi = \varphi, \cos \varphi = 1, \ddot{\varphi} = 0$, in der mathematischen Modellierung zulässig waren:

- Der Winkel wurde als hinreichend klein für die Modellierung des Segway angenommen
- Der Winkel wurde als ausreichend groß für die Modellierung des Segway angenommen
- Diese Linearisierungen sind allgemein für die Modellierung eines Segway gültig

15. Nennen Sie eine äquivalente Darstellung (1.Ordnung) für die Differentialgleichung (2.Ordnung) des harmonischen Oszillators $\ddot{y} = -\frac{D}{m} \cdot y$:

$\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{D}{m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{D}{m} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{D}{m} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$

16. Nennen Sie die Lösung der eindimensionalen Differentialgleichung $\dot{x} = 2 \cdot x, x(0) = 1$:

- $x(t) = e^{2t}$
- $x(t) = \sin(t) \cdot e^t$
- $x(t) = e^{2t} \cdot \cos(t)$

17. Die Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\ddot{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}, x(0) = x_0 \text{ lautet } x(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t}. \text{ Nennen Sie die Bedeutung der Parameter } \lambda_1 \text{ und } \lambda_2:$$

- λ_1 und λ_2 entsprechen den Diagonaleinträgen a_{11} beziehungsweise a_{22} .
- λ_1 und λ_2 entsprechen den Eigenwerten der Matrix A
- λ_1 und λ_2 entsprechen den Determinanten der Matrix A

18. Nennen Sie das Entscheidungskriterium, welches die asymptotische Stabilität der Lösung der homogenen Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten $\dot{x} = A \cdot x, x(0) = x_0$ garantiert:

- Sofern die Determinante der Matrix A negativ ist, ist die Lösung asymptotisch stabil.
- Sofern ein Eigenwert der Matrix positiv ist, ist die Lösung asymptotisch stabil.
- Sofern ein Eigenwert der Matrix 0 ist, ist die Lösung asymptotisch stabil.
- Sofern alle Eigenwerte der Matrix negativ sind, ist die Lösung asymptotisch stabil.

19. Nennen Sie die (theoretischen) Auswirkung einer PD-Kontrolle (bezüglich des Winkels) auf die Stabilisierung des Segway. (Mehrfachnennungen möglich):

- Bereits eine proportionale Kontrolle führt zu einer asymptotischen Stabilität des Segway.
- Eine proportionale Kontrolle kann lediglich Stabilität durch Oszillationen bei geeigneten Einschränkungen an den Parameter α garantieren, jedoch keine asymptotische Stabilität.
- Eine proportional-derivative Kontrolle führt immer zu einer asymptotischen Stabilität des Segway.
- Bei geeigneten Einschränkungen an die Parameter α und β führt die proportional-derivative Kontrolle zur asymptotischen Stabilität des Segway.

20. Beschreiben Sie den Einfluss der Feedback-Stabilität auf das Systems $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$:

Für die Feedback-Stabilität wählt man den Ansatz $u = F \cdot x$ derart, um das System in einer Differentialgleichung $\dot{x} = (A + B \cdot F) \cdot x$ zu überführen, sodass die Eigenwerte der Matrix A alle negativ sind.

Für die Feedback-Stabilität wählt man den Ansatz $u = F \cdot x$ derart, um das System in einer Differentialgleichung $\dot{x} = (A + B \cdot F) \cdot x$ zu überführen, sodass die Eigenwerte der Matrix A+B·F alle negativ sind.

Für die Feedback-Stabilität wählt man den Ansatz $u = F \cdot x$ derart, um das System in einer Differentialgleichung $\dot{x} = (A + B \cdot F) \cdot x$ zu überführen, sodass die Eigenwerte der Matrix A+B·F alle positiv sind.

Man wählt den Ansatz $u=0$, um die Differentialgleichung $\dot{x} = A \cdot x$ zu erhalten, deren Lösung dann asymptotisch stabil ist.

2. Fragen zur Gestaltung des Projekts

Bewerten Sie im Folgenden Aufgabenblock, wie sinnvoll Sie die jeweiligen Phasen des Projektes empfunden haben.

2.1. Projekteinstieg (03.12.2015):

a) Die Einführung des Projekts über zwei Videos war...

sehr sinnvoll sinnvoll weniger sinnvoll nicht sinnvoll

b) Die eigenständige Modellierung und deren Präsentation des Segways war...

sehr sinnvoll sinnvoll weniger sinnvoll nicht sinnvoll

c) Das Aufstellen von offenen Fragen und Anregungen an das Projekt war...

sehr sinnvoll sinnvoll weniger sinnvoll nicht sinnvoll

2.2 .Unterrichtsphase (18.12.2015 & 21.12.2015)

a) Die Vorgabe von physikalischen Kräften, die zu entsprechenden Termen bei der Modellierung des Segway zugeordnet werden mussten, war...

sehr sinnvoll sinnvoll weniger sinnvoll nicht sinnvoll

b) Die anschließende Hinführung der Modellierung des Segway über zwei physikalische Kräftegleichungen war...

sehr sinnvoll sinnvoll weniger sinnvoll nicht sinnvoll

c) Die Überführung von physikalischen Gleichungen hin zu einem mathematischen System war...

sehr sinnvoll sinnvoll weniger sinnvoll nicht sinnvoll

d) Die Vorgabe von Vereinfachungen (Linearisierungen) für Winkelterme, um ein linearisiertes System zu erhalten, war...

sehr sinnvoll sinnvoll weniger sinnvoll nicht sinnvoll

2.3. Projektphase (18.01.2016 – 20.01.2016)

a) Die Aufteilung in die Gruppen der Mathematiker-, Simulierer- und der Lego-Segway-Umsetzer war...

sehr sinnvoll sinnvoll weniger sinnvoll nicht sinnvoll

b) Das größtenteils eigenständige Arbeiten in den einzelnen Gruppen war...

sehr sinnvoll sinnvoll weniger sinnvoll nicht sinnvoll

Die folgenden Fragen betreffen nun die einzelnen Gruppen der Mathematiker-, Simulierer und der Lego-Segway-Umsetzungsgruppe. Beantworten Sie bitte nur die Fragen ihrer jeweiligen Gruppe:

2.3.1 Gruppe Mathematiker:

- a) Die Erarbeitung von zwei weiteren mathematischen Modellierungen, sowie den Konzepten von Differentialgleichungen, Eigenwerten, homogene lineare Differentialgleichungen und deren Stabilität, PD-Kontrolle und Feedback-Stabilisierbarkeit zur theoretischen Stabilisierung eines Segway war...

sehr sinnvoll sinnvoll weniger sinnvoll nicht sinnvoll

- b) Die Hinführung zu den oben genannten mathematischen Konzepten und Modellierungen über Arbeitsblätter war...

sehr sinnvoll sinnvoll weniger sinnvoll nicht sinnvoll

- c) Das Erarbeiten der theoretischen (mathematischen) Stabilisierung eines Segway über vorgegebene Arbeitsaufträge war...

sehr sinnvoll sinnvoll weniger sinnvoll nicht sinnvoll

- d) Die begleitenden Hilfen und Ergänzungen am Smartboard während der Bearbeitung der Arbeitsaufträge durch Herrn Lantau waren...

sehr sinnvoll sinnvoll weniger sinnvoll nicht sinnvoll

2.3.2. Gruppe Simulierer:

- a) Die Vorgabe von konkreten Arbeitsaufträgen zur Simulation des Segway war...

sehr sinnvoll sinnvoll weniger sinnvoll nicht sinnvoll

- b) Die freie Auswahl eines Programms zur Bearbeitung der Aufträge war...

sehr sinnvoll sinnvoll weniger sinnvoll nicht sinnvoll

- c) Die ergänzenden Hinweise zur mathematischen Theorie hinter den Arbeitsaufträgen durch Herrn Lantau war...

sehr sinnvoll sinnvoll weniger sinnvoll nicht sinnvoll

d) Die Verknüpfung der Simulationsaufträgen zu den entsprechenden mathematischen Konzepten und Modellierungen war...

sehr sinnvoll sinnvoll weniger sinnvoll nicht sinnvoll

2.3.3. Gruppe Segway-Umsetzer:

a) Der selbstständige Bau des Lego-Segway, aus Bauteilen eines Lego-Mindstorm-Set, ohne weitere Vorgaben durch das Lehrerteam war...

sehr sinnvoll sinnvoll weniger sinnvoll nicht sinnvoll

b) Die freie Wahl der Software/Programmierung zur Steuerung des Segway war...

sehr sinnvoll sinnvoll weniger sinnvoll nicht sinnvoll

c) Die Steuerung des Segway allein über den Gyro-Sensor war...

sehr sinnvoll sinnvoll weniger sinnvoll nicht sinnvoll

2.4. Die Präsentation der Ergebnisse (16.02.2016):

a) Das Aufarbeiten der Ergebnisse der Projektphase in eine Präsentation war...

sehr sinnvoll sinnvoll weniger sinnvoll nicht sinnvoll

b) Die Präsentation des Projekts vor Mitschülern, Lehrern, Lehramtsstudierenden und Mitarbeitern der TU Kaiserslautern war...

sehr sinnvoll sinnvoll weniger sinnvoll nicht sinnvoll

3. Rückgriff auf die offenen Fragen und Anregungen an das Projekt

Geben Sie im Folgenden Rückmeldung, inwiefern Sie glauben, dass die von Ihnen gestellten Fragen und Anregungen an das Projekt, in der Projektphase beantwortet wurden.

1) Welche Bauteile eignen sich zur Stabilität des Segway?

ganz beantwortet teilweise beantwortet weniger beantwortet unbeantwortet

2) Wie stabilisiert sich ein Segway?

ganz beantwortet teilweise beantwortet weniger beantwortet unbeantwortet

3) Inwiefern eignet sich der EV3-Stein zur Steuerung?

ganz beantwortet teilweise beantwortet weniger beantwortet unbeantwortet

4) Welchen Einfluss hat der Schwerpunkt auf die Stabilisierung des Segway?

ganz beantwortet teilweise beantwortet weniger beantwortet unbeantwortet

5) Wie ist die maximal mögliche Geschwindigkeit des Segway?

ganz beantwortet teilweise beantwortet weniger beantwortet unbeantwortet

4. Fazit:

Sofern Sie noch ein zusätzliches Feedback, als Ergänzung an die bereits gegebenen Rückmeldungen vom 20.01.2016, für das Lego-Segway-Projekt geben möchten, so können Sie dieses in dem dafür angelegtem Feld gerne eintragen.

3: Abschlusspräsentation der Schülerinnen und Schüler:

Unter folgendem Hyperlink kann die Abschlusspräsentation der SuS eingesehen werden:

[Präsentation Gesamt_Schülerpräsentation.pptx](#)

4: Impressionen der Projektstage (Segway Videos):

Unter folgenden Hyperlinks sind Videos des Segways hinterlegt, der im Projekt umgesetzt wurde:

[..\..\..\Dropbox\Masterarbeit\Segway-Videos\Lego_segway_1.mp4](#)

[..\..\..\Dropbox\Masterarbeit\Segway_Video1.mp4](#)

[..\..\..\Dropbox\Masterarbeit\Segway-Video_2.mp4](#)

[..\..\..\Dropbox\Masterarbeit\Segway-Video_3.mp4](#)

[..\..\..\Dropbox\Masterarbeit\Segway-Video_4.mp4](#)

[..\..\..\Dropbox\Masterarbeit\Segway-Video_5.mp4](#)

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, Jean-Marie Lantau, Matrikel-Nummer 379470, dass ich die vorliegende Masterarbeit selbstständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe. Alle Stellen, die im Wortlaut, oder dem Sinn nach anderen Werken entnommen sind, habe ich durch Angaben der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht.

Kaiserslautern, den 01.06.2016

Jean-Marie Lantau