

KOMMS Reports Nr. 15 (2021)

Reports zur Mathematischen Modellierung
in MINT-Projekten in der Schule



Mathematische Modellierungswoche Februar 2021

Matthias Andres, Martin Bracke, Patrick Capraro, Gregor Corbin,
Isabelle Fiedler, Lynn Knippertz, Lena Leiß



1 Die Felix-Klein-Modellierungswoche

Seit 1993 veranstaltet der Fachbereich Mathematik der TU Kaiserslautern jährlich die mathematischen Modellierungswochen. Die Veranstaltung erwuchs parallel zu der steigenden Relevanz angewandter mathematischer Forschungsgebiete, wie der Technomathematik und der Wirtschaftsmathematik. Sie soll dazu dienen, Schülerinnen und Schülern die Bedeutung mathematischer Arbeitsweisen in der heutigen Berufswelt, insbesondere in Industrie und Wirtschaft, begreifbar zu machen. Darüberhinaus bietet die Modellierungswoche den teilnehmenden Lehrkräften einen Einblick in die Projektarbeit mit offenen Fragestellungen im Rahmen der mathematischen Modellierung.

1.1 Partner und Finanzierung

Seit 2014 wird die Modellierungswoche vom Kompetenzzentrum für Mathematische Modellierung in MINT-Projekten in der Schule (KOMMS) organisiert, welches im selben Jahr gegründet wurde. Seit 2015 ist die Veranstaltung ein Teil des Projekts [Schulentwicklung für mathematische Modellierung in MINT-Fächern \(SchuMaMoMINT\)](#) und wird durch den Europäischen Sozialfonds (ESF), das Fraunhoferinstitut für Techno- und Wirtschaftsmathematik (ITWM), die TU Kaiserslautern sowie den Fachbereich Mathematik der TU Kaiserslautern finanziert. In diesem Zusammenhang gab es auch eine inhaltliche Weiterentwicklung der Modellierungswoche, innerhalb dessen der Aspekt einer Lehrkräftefortbildung stärker in den Vordergrund rückte.

Bereits zuvor war das Fraunhofer ITWM ein wichtiger Kooperationspartner und war an der Gestaltung der mathematischen Modellierungswoche wesentlich beteiligt. Im Jahr 2008 gründeten der Fachbereich Mathematik der TUK und das ITWM den Verein *Felix-Klein-Zentrum für Mathematik*, um die gemeinsamen Aktivitäten besser steuern zu können. Die Modellierungswoche wurde daraufhin in [Felix-Klein-Modellierungswoche](#) umbenannt.

1.2 Zielgruppe und Intention

Die Veranstaltung richtet sich an Schülerinnen und Schüler der gymnasialen Oberstufe in Rheinland-Pfalz, die ein außerordentliches Interesse an Mathematik und MINT-interdisziplinärem Arbeiten haben. Begleitet werden diese von Lehrkräften oder Referendaren ihrer Schule, welche die Projektarbeit beobachten und die Projektleiter bei der fachlichen Betreuung der Gruppen unterstützen.

Ziel ist es, sowohl bei den Schülerinnen und Schülern, als auch bei den Lehrkräften ein Bewusstsein dafür zu schaffen, wie das Arbeiten mit offenen Fragestellungen gelingen kann. Das KOMMS möchte dabei Wege aufzeigen, wie der Unterricht in den MINT-Fächern durch Konzepte wie *Forschendes Lernen* und *Eigenverantwortliche Projektarbeit* weiterentwickelt und bereichert werden kann.

1.3 Format und Durchführung

Die Modellierungswoche findet üblicherweise in Jugendherbergen in Rheinland-Pfalz statt. Zu Beginn werden am Sonntag Abend die Teilnehmer auf die verschiedenen Projektthemen aufgeteilt. Von Montag Morgen bis Donnerstag Abend wird inhaltlich gearbeitet. Am Freitag endet die Veranstaltung mit der Präsentation der Ergebnisse.

Meist wird jede Projektgruppe von einer Mitarbeiterin oder einem Mitarbeiter der TU Kaiserslautern sowie einer Lehrkraft betreut. Dabei haben die Schülerinnen und Schüler jedoch viele Freiheiten, sich selbst zu organisieren und auch den Arbeitsrhythmus zu gestalten.

Eine wesentliche Komponente dabei ist die Arbeitsumgebung in der Jugendherberge oder einer vergleichbaren Tagungseinrichtung:

- Jede Projektgruppe arbeitet in ihrem eigenen Seminarraum.
- In den Pausen trifft man sich mit den anderen Gruppen, so dass es einen inhaltlichen Austausch gibt.
- Es gibt wenige Faktoren, die vom Arbeitsthema ablenken; selbst abends arbeiten viele Gruppen noch an ihren Projekten weiter.

1.4 Digitale Durchführung in Pandemiezeiten

Wegen der andauernden Pandemie musste die Modellierungswoche zum zweiten Mal im digitalen Rahmen stattfinden. Mit der Lernumgebung Mattermost hatten die Schülerinnen und Schüler ebenso wie die Lehrenden jederzeit die Möglichkeit, Videokonferenzen zu starten und den Arbeitsraum zu wechseln. Das ermöglichte den Projektgruppen, völlig eigenverantwortlich zu agieren. Über private und öffentliche Textnachrichten konnte man sich zusätzlich austauschen, um nach Hilfe zu fragen oder wichtige Dinge anzukündigen.

Datenaustausch war über den Clouddienst Seafile des Landes Rheinland-Pfalz möglich. Gemeinsames Programmieren wurde wieder durch den Einsatz von CoCalc ermöglicht, so dass mehrere Mitglieder eines Teams gleichzeitig am selben Code arbeiten konnten.

Zwei Kollegen waren als Ansprechpartner für Programmierfragen im Einsatz und konnten damit flexibel auf die Bedürfnisse der Teilnehmer eingehen. Mit kurzen Programmierkursen, die sich allgemein an Neulinge in der Programmiersprache Python (bzw. generell an Programmieranfänger) richteten, war es prinzipiell allen Teilnehmern möglich, sich am Code zu beteiligen. Wenn bei den Projektgruppen spezielle Probleme aufkamen, konnten wir mit gezielten Lernimpulsen reagieren.

2 Programmieren in MINT-Projekten

In den meisten MINT-Projekten, die interdisziplinäre Fragestellungen behandeln und mit Methoden der mathematischen Modellierung bearbeitet werden, wirkt es sich vorteilhaft aus, wenn von den Teilnehmenden eigene, individuelle Programme entwickelt werden. Das kann zur passgenauen Verarbeitung von Daten sein, wenn Standardsoftware zu unflexibel ist oder viel manuelles Nacharbeiten erforderliche wäre. Oder die Teilnehmenden haben das Ziel, selbst entwickelte Algorithmen zu implementieren, um sie so durch den Computer automatisch ausführen zu lassen. Dies ist manchmal mit einer Tabellenkalkulation schon gut möglich, teilweise stößt man dort aber an Grenzen oder der Aufwand wird hoch.

Bisher haben wir bei der Einteilung der Projektgruppen bei unseren Modellierungswochen immer darauf geachtet, dass nach Möglichkeit in jedem Team Programmierkenntnisse vorhanden waren. Es ist auf diese Weise meist gelungen, 1-2 Schülerinnen und Schüler mit Programmiererfahrung in jeder Gruppe zu haben. Dies hat allerdings in vielen Fällen zur Konsequenz gehabt, dass genau diese Schülerinnen und Schüler auch für das Programmieren in ihrer Gruppe zuständig waren. Selten haben Teilnehmende ohne Vorkenntnisse

innerhalb einer Modellierungswoche einen Einstieg ins Programmieren gefunden.

2.1 Angebot während der Modellierungswoche

Bei der digitalen Durchführung dieser Modellierungswoche haben wir daher von Beginn an probiert, diese Problematik zu adressieren. Dazu haben wir

- die Programmieranfängerinnen und -anfänger gezielt angesprochen und ihnen die Möglichkeit angeboten, am ersten Tag der Woche an einem Workshop von 90-120 Minuten Dauer als Crashkurs für das Programmieren mit Python teilzunehmen,
- Material zum Crashkurs sowie auch weiterführendes Material zur Verfügung gestellt, so dass die Teilnehmenden nach Bedarf selbstgesteuert ihr Wissen erweitern können,
- optional weitere Mini-Workshops angeboten, die nach Bedarf von den Projektgruppen abgerufen werden konnten,
- individuelle Hilfestellung bei allen im Laufe der Modellierung auftretenden Fragen angeboten, die einen Bezug zum Programmieren haben. Die Anfragen kamen über das während der Veranstaltung genutzte Chat-Tool *Mattermost* und die Behandlung der dort gestellten Fragen oder kleine inhaltliche Einheiten wurden als Videokonferenzen individuell geplant und durchgeführt.

Dieses Angebot wurde von zwei Wissenschaftlern betreut, die auch in den letzten Jahren für die im Mathematikstudium an der TU Kaiserslautern grundlegende Veranstaltung *Einführung in wissenschaftliches Programmieren* verantwortlich waren. Da dieser Kurs schon erfolgreich auf ein *Flipped Classroom Konzept* und die digitale Durchführung umgestellt wurde, sind entsprechendes Material und die Erfahrungen für einen flexible, individuelle Durchführung bereits vorhanden gewesen.

2.2 Erfahrungen

Die mit der ersten Umsetzung des skizzierten Angebots gesammelten Erfahrungen können durchweg als positiv bezeichnet werden. So gab es eine komplette Projektgruppe, in der keine Programmiererfahrung vorhanden war. Die Mitglieder dieser Gruppe haben am beschriebenen Crashkurs teilgenommen und sich dann im Laufe der Woche mit der konkreten Frage gemeldet, wie extern vorliegende Daten in Python eingelesen werden könnten. Anschließend hat diese Gruppe die im Rahmen des eigenen Modells implementierten Algorithmen selbstständig in einem Pythonprogramm umgesetzt, welches bei der abschließenden Ergebnispräsentation auch vorgestellt und erklärt wurde. Die innerhalb so kurzer Zeit erreichte Programmierfähigkeit kann dabei als sehr überraschend hoch angesehen werden und es war offensichtlich, dass die eigene Beschäftigung mit der neuen Tätigkeit des Programmierens und der dabei erzielte Erfolg deutlich zur Motivation der Teilnehmenden beigetragen haben.

Auch aus anderen Teams, in denen schon Programmiererfahrung vorhanden war, kamen im Laufe der Woche eine Reihe von speziellen Fragen, die dann individuell mit der jeweiligen Gruppe diskutiert und beantwortet wurden. Aufgefallen ist dabei, dass es zumindest zu Beginn noch Schwierigkeiten mit der Art und Weise, präzise Fragen zu stellen bzw. konkret Hilfe anzufordern, gab. Ein Beispiel aus dem Chat: „Frage: Zuordnung in verschiedenen Datenbanken“ – hier kann man ohne Rückfrage nicht herauslesen, was genau die Anforderung ist und wie man darauf am besten reagiert. Dies hat sich aber relativ schnell durch die passenden Rückfragen der Betreuer weiter entwickelt, so dass die Kommunikation im

Laufe der Zeit zielgerichteter und effizienter wurde. Damit wurde zumindest bei dieser Durchführung beobachtet, dass durch die vorgestellte Art der Betreuung durchaus auch die Kompetenz einer zielführenden interdisziplinären Kommunikation gefördert werden kann.

2.3 Fazit und Ausblick

Insgesamt können wir feststellen, dass unser Experiment, ein separates Angebot zur Unterstützung beim Programmieren während der Modellierungswoche sehr gut angenommen wurde und der Erfolg erkennbar war. Durch die Auslagerung an ein separates Team müssen zum einen nicht alle Projektbetreuenden eine hohe Kompetenz im Programmieren bzw. in der Vermittlung von Programmierfähigkeiten haben, zum anderen wird als Nebeneffekt wie angedeutet auch die Kompetenz der Teilnehmenden, interdisziplinär und zielgerichtet zu kommunizieren, adressiert. Somit wird durch dieses für uns neue Element der Veranstaltung eine ganzheitliche Arbeitsweise gefördert und auf das selbständige universitäre Arbeiten vorbereitet.

Eine Idee, die wir für die Zukunft haben, ist die optionale Einführung des Konzepts des *Pair Programming*, das in der Arbeitswelt schon länger als sehr effektives Instrument erfolgreich eingesetzt wird und zukünftig auch in die eingangs erwähnte Lehrveranstaltung der TU Kaiserslautern als Teil der Grundausbildung integriert werden soll.

3 Themenauswahl

Statt eines Themenschwerpunkts wurde dieses Mal wieder auf eine große Vielfalt der Inhalte gesetzt. Zwei der Projekte behandelten Fragestellungen im Kontext der Coronapandemie. Die Titel der Projekte lauteten

1. Identifizierung von gefährdeten Routen
2. Filmabend – die Qual der Wahl
3. Preispraktiken in Zeiten von COVID-19 auf der Spur
4. Modellierung von Krankheitsausbreitung mit zellulären Automaten
5. Spielstrategien im Billard

Beim Thema **Identifizierung von gefährdeten Routen** ging es darum, Routenplanung robust gegen unerwartete Ereignisse zu machen, die das Straßennetzwerk stören können. Mathematisch ist das Thema im Bereich der Optimierung angesiedelt.

Das Projekt **Filmabend – die Qual der Wahl** nutzte Daten aus dem MovieLens-Datensatz, um Vorhersagen treffen zu können, welcher Film aus einer Datenbank einem bestimmten Nutzer gefallen könnte. Hier spielt das Arbeiten mit großen Datenmengen eine Rolle. Um die Daten auszuwerten sind sowohl Methoden aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung denkbar, wie auch Verfahren des maschinellen Lernens.

Im Projekt **Modellierung von Krankheitsausbreitung mit zellulären Automaten** wurde den Teilnehmern ein Pythonprogramm zur Verfügung gestellt, mit dem Experimente zum Thema Krankheitsausbreitung gemacht werden konnten. Die Modelle sind sehr abstrakt, erlauben es aber, die räumliche Dimension einer Epidemie zu erfassen.

Bei der Aufgabe **Preispraktiken in Zeiten von COVID-19 auf der Spur** ging es darum, die Preisentwicklung eines Produkts zu analysieren und Kriterien zu finden, um Wucherpreise

von natürlichen Preisfluktuationen zu unterscheiden.

Die Gruppe **Spielstrategien im Billard** schließlich befasste sich damit, wie man ausgehend von einer gegebenen Spielsituation im Billard die weiteren Spielzüge plant, um möglichst gute Erfolgsaussichten für den weiteren Verlauf der Partie zu erhalten. Neben der offensichtlichen (Vektor-)Geometrie spielen auch die Gesetze der Kinematik eine große Rolle.

4 Ergebnisse der Projektgruppen

4.1 Identifizierung von gefährdeten Routen

4.1.1 Problemstellung

Bei der Verteilung von beispielsweise Gütern über ein Straßennetz wird im Vorfeld eine Route ermittelt, welche für die gegebenen Ansprüche - womöglich die Güter so schnell wie möglich zu transportieren - optimal ist. Nun ist eine Frage, die bei einem solchen Setup aufkommt, was passiert, wenn einzelne Teile von Routen ausfallen. Dies könnte zum einen passieren, wenn Naturkatastrophen auftreten, wie zum Beispiel starke Überschwemmungen, Erdbeben oder ähnliche Ereignisse, die die Benutzung von Routenabschnitten unmöglich machen. Es könnte allerdings auch dann passieren, wenn in Krisengebieten gezielt Versorgungswege angegriffen werden. Diese Fragestellung hat dazu geführt, mathematisch zu erarbeiten, welche Routenabschnitte besonders wichtig für die geplanten Verteilungswege sind. Die „Wichtigkeit“ eines Abschnitts wird daran gemessen, wie viel schlechter die neue Transportdauer im Gegensatz zur ursprünglich optimalen wird, sollte ebendieser Abschnitt ausfallen. Darauf aufbauend kann man untersuchen, welche Strategien es gibt, um gegen mögliche Ausfälle von Routenteilen gewappnet zu sein.

4.1.2 Vorüberlegungen

Modelliert man die verfügbaren Straßen, über die die Güter transportiert werden können, als Netzwerk, sucht man, gemessen an einer Kantenbewertung, als Transporteur den kürzesten Weg durch das Netzwerk. Im Szenario von Krisengebieten wäre der Gegenspieler ein Interdiktor, der denjenigen Streckenabschnitt angreifen möchte, welcher bei Ausfall den schlechtesten möglichen neuen Zielfunktionswert für die Länge der Transportstrecke bedeutet. Mathematisch betrachtet birgt diese Fragestellung also ein sogenanntes Interdiction-Problem, bei dem der Interdiktor Kanten aus dem Netzwerk entfernen kann, bevor der Gegenspieler seinen Weg durch das Netzwerk plant. Hierbei ist es wichtig, eine Einschränkung bezüglich der Löschung der Kanten vorzunehmen, da der Interdiktor sich sonst natürlich dafür entscheiden würde, alle Kanten zu löschen.

Hat man herausgefunden, welche Kanten besonders wichtig für die Erreichung einer guten Routenzeit sind, ergibt sich die Frage, ob, und wenn ja wie, man diese schützen kann. Alternativ kann man sich eine robuste Version der Findung des kürzesten Weges durch das Netzwerk betrachten. Hier möchte man „stabile“ Wege finden, die selbst dann noch gut sind, wenn verschiedene Teile der Route ausfallen. Der so gefundene kürzeste Weg ist dann oft zwar nicht optimal, aber gegen viele Unwägbarkeiten, die eintreten können, geschützt und liefert auch in diesen Fällen immer noch akzeptable Routenzeiten.

Beide Betrachtungen können in der Bearbeitung der Aufgabe verknüpft, und die gewonnenen Ergebnisse zusammengeführt werden. Den vorgestellten mathematischen Hintergrund

kann man allerdings auch in andere Szenarien einbetten.

4.1.3 Ergebnisse

Die drei Schüler haben ein anderes Szenario gewählt, als ursprünglich von der Aufgabenstellung beabsichtigt. Sie haben sich überlegt, wie Demonstrationen in einem Stadtgebiet geleitet werden sollen. Hierbei haben sie die Straßen der Stadt als Netzwerk modelliert. Außerdem haben sie angenommen, dass der Demonstrationzug und die Polizei als regulierende Einheit unterschiedliche Kantenbewertungen der Straßen vornehmen. Die Demonstranten richten ihre Bewertung im Modell nach der Attraktivität der entsprechenden Straßenabschnitte aus. Die Polizei orientiert sich an der Wichtigkeit des Abschnitts für den Verkehrsfluss in der Stadt, der durch die Demonstration nicht in zu großem Maße gestört werden soll. Sie haben also folgende Fragen definiert:

- Wie können Straßen identifiziert werden, die für den alltäglichen Verkehr besonders wichtig sind?
- Welche Straßen müssen gesperrt werden, sodass die Demonstration so umgeleitet wird, dass diese in Punkt 1 gefundenen Straßen möglichst wenig beeinträchtigt werden?
- Wie kann das Verhalten einer Demonstration modelliert werden?

Um diese Fragestellungen im Modell eines Netzwerkes zu beantworten, mussten die Schüler zunächst einige Recherchen zu grundlegenden Konzepten der Graphentheorie anstellen. Hierbei haben sie sich zunächst mit dem Konstruieren des Graphes beschäftigt, der ein Stadtgebiet modellieren sollte.

Für den Fall der Polizei haben sie zunächst verschiedene Kriterien definiert, die in die Kantenbewertung der Straßenabschnitte einfließen sollen:

- Länge
- Breite
- Anzahl der Spuren
- Verkehrsaufkommen

Eine additive Verrechnung dieser Faktoren hat dann letztendlich zur Kantenbewertung für die Polizei geführt. Die Demonstranten orientieren sich bei der Erstellung ihrer Route allerdings an anderen Faktoren.

Die Schüler haben angenommen, dass die erste Frage mit der Frage nach kürzesten Wegen beantwortet werden kann. Um kürzeste Wege in Netzwerken zu finden, kann der Dijkstra-Algorithmus verwendet werden. Darauf aufbauend haben sich die Schüler dafür entschieden, minimale Spannbäume auf den reduzierten Graphen mit den gefundenen wichtigen Kanten zu erstellen. Somit soll sicher gestellt sein, dass der allgemeine Verkehrsfluss noch möglich ist. Alle Kanten, die nicht in den Spannbaum aufgenommen wurden, stehen den Demonstranten als Streckenabschnitte zur Verfügung. Daher wurde in einem zweiten Schritt überprüft, ob es einen Weg vom Start- zum Zielknoten der Demonstranten gibt. Ist dies nicht der Fall, werden manuell Streckenabschnitte nachgewählt, die ebenfalls von den Demonstranten genutzt werden durften. Diese in verschiedenen Schritten gewählten Kanten wurden anschließend als verschieden relevant gelabelt.

Für die Sperrung der Straßen haben sich die Schüler verschiedene Ansätze überlegt:

- Geringste Anzahl von gesperrten Straßenabschnitten
- Geringste Anzahl von gesperrten Straßenabschnitten der verschiedenen Kategorien,

die die Relevanz von Abschnitten angeben

Um zu entscheiden, welche Kanten die Polizei aus dem Netzwerk löschen sollte, haben die Schüler als Strategie vorgegeben, für jeden Knoten zu überprüfen, wie viele Kanten gelöscht werden müssen, sodass der kürzeste Weg des Demonstrationszuges von diesem Knoten aus nicht über den Spannbaum zum Ziel verläuft.

An einem kleinen Beispiel haben die Schüler versucht, ihre Ergebnisse anzuwenden.

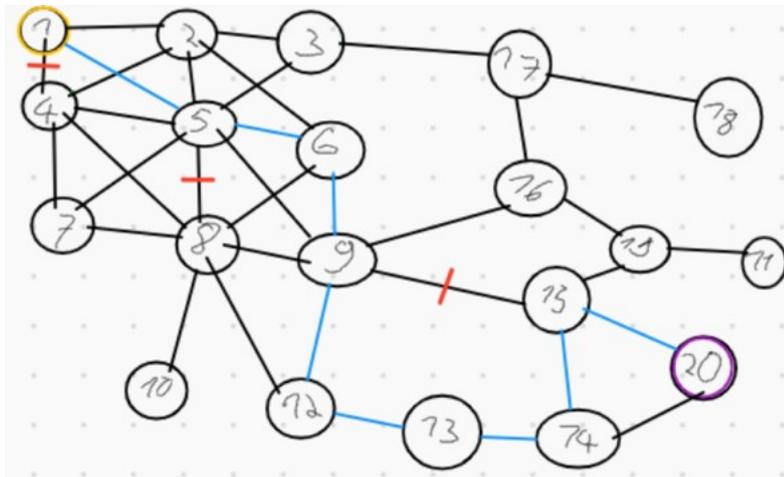


Abbildung 1: Beispielgraph mit Startknoten 1, Zielknoten 20, gesperrten Abschnitten (1, 4), (5, 8), (9, 15) und Demonstrationsroute in blau

4.2 Wie erzeugt man personalisierte Vorschläge für Filme?

4.2.1 Problemstellung

In diesem Projekt soll eine Methode entwickelt werden, mit der man einer Person aus einer großen Anzahl an Filmen diejenigen vorschlägt, die sie vermutlich am besten bewerten würde. Diese Aufgabe ist beispielhaft für eine Reihe ähnlicher Anwendungen, z.B. bei Streaming Seiten, Social-Media oder Online-Versandhäusern. Dabei wird sich die Methode des kollaborativen Filterns zunutze gemacht. Die Eingaben vieler Nutzer:innen werden zusammengefügt um dann die Vorschläge anhand von Ähnlichkeiten zu anderen Nutzer:innen zu generieren.

Die Forschungsgruppe *GroupLens* bietet auf der Seite movielens.org einen Service an, der auf Basis bisheriger Bewertungen Vorschläge für Filme generiert. Wir wollen einen ähnlichen Algorithmus entwickeln und verwenden dabei die Forschungsdaten dieser Gruppe.

4.2.2 Vorüberlegungen

Das Thema ist auf mehreren Ebenen spannend und bietet zahlreiche Vertiefungs-möglichkeiten, je nach Zusammensetzung der Projektgruppe. Mögliche Aufgabenfelder sind zum Beispiel:

- *Programmieren/Arbeiten mit Daten*: Das Einlesen und Handhaben großer Datenmengen mit Hilfe von geeigneter Software. Zum leichteren Einstieg sind die Daten in menschenlesbaren .csv Dateien gespeichert.

- *Mathematik / Datenreduktion*: Es gibt in der gesamten Datenbank etwa 20 Millionen Bewertungen von 100000 Nutzer:innen zu 600000 Filmtiteln. Kann die Datenmenge durch geeignete Modellierung reduziert werden? Welche mathematischen Verfahren gibt es, um Zusammenhänge und Strukturen aus diesen Daten abzuleiten?
- *Modellierung / praktische Fragen*: Welche Eigenschaften eines solchen Algorithmus sind wünschenswert für die Nutzer:innen? Wie verhindert man zu allgemeine Vorschläge oder zu ähnliche Vorschläge? Wie viel Kontrolle/Feineinstellung lassen wir den Nutzer:innen? Was könnte problematisch an dem Algorithmus sein?

4.2.3 Ergebnisse

Am ersten Tag, verschafften sich die Schüler:innen sich einen Überblick über die vorhandenen Daten und machten einen Grundkurs im Einlesen von .csv Dateien in Python. Am Ende des Tages gabe es schon mehrere Ideen, wie man die Daten verwenden könnte um Vorschläge zu generieren. Es wurde beschlossen, die Aufgaben in zwei Kleingruppen zu bearbeiten. Eine Gruppe sollte einen funktionierenden Prototyp für einen möglichen Ansatz implementieren. Die andere Gruppe sollte relativ unabhängig davon weitere Ideen entwickeln und verschiedene Ansätze modellieren.

Weil der volle Datensatz zu groß ist, beschloss die Programmiergruppe, nur einen Teil der Daten zu verwenden, nämlich nur 10% der Bewertungen für Filme aus einem einzigen Genre. Die Programmiergruppe beschränkte sich auf den Ansatz, die Nutzer:innen anhand ihre durchschnittlichen Bewertung für sogenannte tags miteinander zu vergleichen. Tags sind Schlagworte, mit denen Filme noch einmal genauer beschrieben werden können, als nur anhand ihres Genres. In der Datenbank sind jedem Film alle tags mit unterschiedlichen Gewichten zugeordnet: Je höher das Gewicht, desto relevanter ist der tag für den Film. In einem ersten Schritt wurde für alle Nutzer:innen die durchschnittliche Bewertung für jeden tag ermittelt. So können auch zwei Nutzer:innen miteinander verglichen werden, die nur verschiedene Filme bewertet haben. Um konkrete Filmvorschläge für eine Nutzerin zu erzeugen, werden zunächst deren Nachbarn im tag-Raum ermittelt. Dazu wird der tag-Vektor in der 2-Norm mit den tag-Vektoren aller anderen Nutzer:innen verglichen. Dann werden Filme vorgeschlagen, die von den Nachbarn im Schnitt am besten bewertet wurden. Zum Schluss ließen sich die Schüler:innen von ihrem Programm Vorschläge generieren, um es zu testen:

```
# test user:
test_user_id = 'Lennart'
test_user_ratings_by_name = [('Madagascar (2005)', 4.),
                              ('Home Alone (1990)', 5.),
                              ('Toy Story (1995)', 4.5),
                              ('Jumanji (1995)', 3.5),
                              ('Jungle Book, The (1994)', 3.5),
                              ('Lion King, The (1994)', 4.5),
                              ('Richie Rich (1994)', 2.)]

# .... Berechnungen ....
for i in range(5):
    print(movie_titles_for_ids[best_candidates[i]])

# Ergebnisse:
# Up (2009)
```

```
# Mary Poppins (1964)
# Wizard of Oz, The (1939)
# Toy Story (1995)
# Toy Story 2 (1999)
# Lion King, The (1994)
```

Weitergehende Methoden zur Datenreduktion mittels *principal component analysis (PCA)* oder *Clustering* (z.B. *k-means*) wurden zwar vom Betreuer vorgestellt, konnten aber wegen der knappen Zeit nicht mehr umgesetzt werden.

Die Modellierungsgruppe erarbeitete parallel dazu weitere Algorithmen und befasste sich mit verschiedenen Problemen, die auftreten können. Um eine ausgewogene Auswahl vorzuschlagen, wurde sich darauf geeinigt, mehrere Methoden/Algorithmen zu kombinieren, z.B.:

- Lieblingsgenres eines Users bestimmen und Filme aus diesen Genres vorschlagen.
- Top-tags eines Users bestimmen und Filme vorschlagen, in denen diese Tags mit hoher Relevanz vorkommen.
- Der Ansatz der Programmiergruppe.
- Generell beliebte Filme vorschlagen.

Ein Problem ist auch, wie man mit neuen Filmen vorgeht, die noch keine Bewertungen haben. Der Algorithmus sollte neue Filme speziell Nutzer:innen vorschlagen, die das jeweilige Genre mögen, um so erste Bewertungen zu generieren. Außerdem sind durchschnittliche Bewertungen nicht aussagekräftig, wenn nur wenige Bewertungen vorliegen. So würde ein Film mit einer einzelnen 5-Sterne Bewertung höher eingestuft als ein sehr beliebter Film mit hunderten Bewertungen. Deshalb sollte bei der Berechnung des Mittelwertes auch der allgemeine Mittelwert mit einer gewissen Gewichtung einfließen. Abschließend überlegte die Gruppe noch, wie man neuen Nutzer:innen gezielt Fragen stellen kann, um möglichst schnell relevante Vorschläge zu machen.

4.3 Preispraktiken in Zeiten von COVID-19 auf der Spur

Während die Welt darum kämpft, die Coronavirus-Krankheit COVID-19 einzudämmen, scheinen einige Leute dies als Gelegenheit zu nutzen, essenzielle Artikel zu Wucherpreisen anzubieten. In vielen Ländern gab es vor allem zu Beginn der Pandemie Berichte über massive Engpässe bei der Versorgung mit Masken.

Ein umfangreicher Bericht¹ der Organisation für wirtschaftliche Zusammenarbeit und Entwicklung (OECD) analysiert Ursachen für diese Engpässe und nennt hierbei die Unterbrechung der Lieferketten und die steigende Nachfrage von Produkten zur Pandemiebekämpfung. Diese Engpässe beeinflussen das Verhalten der Unternehmen und haben in einigen Fällen zu potenziell ausbeuterischen Preisen geführt. Die Unterscheidung zwischen legitimen und illegitimen Preisbildungspraktiken sowie die Frage, wie man am besten mit letzteren umgeht, stellt die Wettbewerbsbehörden vor erhebliche Herausforderungen.

¹OECD (2020), Exploitative pricing in the time of COVID-19, www.oecd.org/competition/Exploitative-pricing-in-the-time-of-COVID-19.pdf (abgerufen am 29.03.2021)

4.3.1 Problemstellung

Wir möchten Preispraktiken von Verkäufern während COVID-19 näher untersuchen. Als mögliche Grundlage steht ein realer Datensatz der Amazon-Plattform von Anfang März 2020 zur Verfügung. Der Datensatz enthält Informationen über Produktbewertungen, Rabatte und Zeitpunkte der Listung von Produkten.

Anhand folgender Leitfragen und Anregungen möchten wir den vorherrschenden Preispraktiken auf den Grund gehen:

- Falls der Amazon-Datensatz als Grundlage verwendet wird: Wie sehen die aktuellen Regeln zu Preispraktiken von Amazon aus?
- Ab wann ist ein Preis ein Wucherpreis?
- Wie sollte ein Warnsystem konstruiert sein, das rechtzeitig vor Wucherpreisen mahnt und derartige Entwicklungen nicht mehr zulässt?
- Wie sollte ein staatliches Regelwerk zur Eindämmung „unfairer“ Preispraktiken aussehen?

Die Gruppe wurde darüber hinaus auch angehalten, eigenen interessanten Fragestellungen nachzugehen.

4.3.2 Datensatz

Der Datensatz enthält Produktdaten über chirurgische Masken vom 09.03.2021 und entstammt der Datenextraktionsplattform von Amazon. Der Datensatz kann online abgerufen werden².

Zum Zeitpunkt der Datenextraktion sind 350 Produkte auf Amazon gelistet, wobei 141 Produkte keine Preisdaten enthalten, weil sie nicht mehr auf Lager waren. Die Daten zeigen Informationen zu Produktbewertungen, Rabatten und Zeitpunkten der Listung von Produkten.

4.3.3 Vorüberlegungen

Die Regelungen zu Amazons Preispraktiken sind nicht klar formuliert und lassen deshalb viel Spielraum zu. Es darf z.B. kein Referenzpreis für ein Produkt angegeben werden, der den Kunde täuscht³. Allerdings wird ein „täuschender“ Referenzpreis nicht weiter charakterisiert.

Die Verbraucherzentrale definiert Wucherpreise wie folgt⁴:

- Um einen Preis als Wucher zu bezeichnen, muss er mindestens doppelt so hoch sein wie marktüblich.
- Außerdem muss der Anbieter eine Notlage ausnutzen.
- Ob Wucher vorliegt, muss in jedem Einzelfall juristisch geprüft werden.

²Predatory Pricing data from amazon - dataset by datahut (2019), <https://data.world/data-hut/predatory-pricing-data-from-amazon> (abgerufen am 29.03.2021)

³Amazon Marketplace Fair Pricing Policy (2021), https://sellercentral.amazon.com/gp/help/external/G5TUVJKZHUVMN77V?language=en_US (abgerufen am 29.03.2021)

⁴Wucher – Wann ist ein Preis zu hoch? (2021), <https://www.verbraucherzentrale.de/wissen/vertraege-reklamation/kundenrechte/wucher-wann-ist-ein-preis-zu-hoch-51981>

Neben dem hohen Produktpreis spielen demnach auch noch die Ausnutzung einer Notlage eine Rolle. Da im Rahmen dieses Projekts keine juristischen Prüfungen möglich sind, können die ersten beiden Punkte für dieses Projekt als ausreichend betrachtet werden.

Ein Warnsystem zu Wucherpreisen generiert nach Eingabe von Produktinformationen Hinweise und Warnungen. Es agiert auf einer vorher festgelegten Datengrundlage und kann darüber hinaus Expertenwissen miteinbeziehen. Der zur Verfügung stehende Datensatz kann als Datengrundlage genutzt werden. Basierend auf einer umfassenden Datensatzanalyse können Kriterien für Warnmeldungen generiert und verfeinert werden. Hierzu kann es hilfreich sein, sich die Informationen im Datensatz in Histogrammen zu veranschaulichen, um zugrundeliegende Strukturen zu finden. Dabei kann ein erster Umgang mit Datensätzen geübt und Programmierkenntnisse genutzt werden. Um unterschiedliche Produkte miteinander vergleichen zu können, müssen zahlreiche Faktoren zunächst identifiziert und dann mathematisch beschreiben werden. Hierzu zählen z.B. die Angebots- und Nachfragelage, aber auch Transportkosten und Materialkosten. Die hierbei gewonnenen Kenntnisse können als Basis für ein staatliches Regelwerk dienen.

4.3.4 Ergebnisse der Projektgruppe

Die Projektgruppe analysierte zunächst Preisentwicklungen verschiedener Maskenprodukte, die auf dem Online-Preisvergleichsportal Idealo gelistet sind und sammelte Faktoren, die Produktpreise beeinflussen. Darauf basierend wurde der Produktpreis P definiert als

$$P = \frac{N}{A} \cdot (f_1 k + f_2 t) \cdot 1,19 + v, \quad (4.1)$$

mit von Material- und Lagerkosten abhängigen Produktionskosten k , Transportkosten t , Angebot A , Nachfrage N , Steuern (und Zölle) s , Verkauf v , variablen Faktoren f_1 und f_2 und einer Größe z , die CE-Zertifikate und sonstige Lizenzen berücksichtigt. Das Angebot und die Nachfrage werden auf einer Skala zwischen eins und zehn definiert, wobei hohe Werte eine hohe Angebots- und Nachfragelage und niedrige Werte eine entsprechend niedrige Angebots- und Nachfragelage repräsentieren.

Die Gruppe definierte den Wucherpreis über die Angaben der Verbraucherzentrale, (vgl. Abschnitt 4.3.3).

Ein „ideales“ Warnsystem sollte alle Daten zu Maskenprodukten beinhalten und einzelne Produktpreise mit allen anderen Produktpreisen vergleichen können. Als mögliche Vergleichskriterien arbeitete die Gruppe Stückzahl, Währung und Qualität heraus. Ein Wucherpreis liegt vor, wenn der Preis des Produkts mindestens doppelt so hoch wie der aus den restlichen Produktpreisen gebildeter Mittelwert ist. Das System soll den Verbraucher über Wucherpreise informieren und so verhindern, dass sich dieser Produkte kauft, die zu Wucherpreisen angeboten werden.

Basierend auf diesen Vorüberlegungen konstruierte die Gruppe einen eigenen Datensatz bestehend aus Daten zu 15 OP-Masken, die zu 50 Stück auf Idealo zum Zeitpunkt des Projekts seit mindestens drei Monaten gelistet sind. Neben den aktuellen Produktpreisen wurde auch Preise zu früheren Zeitpunkten aufgeführt und Mittelwerte berechnet. Abbildung 2 zeigt ein Diagramm, das alle wichtigen Informationen des generierten Datensatzes enthält.

Dieser Datensatz bildete die Grundlage eines eigenständig programmierten Warnsystems. Das Programm liest zunächst die generierten Daten ein und berechnet den Mittelwert über

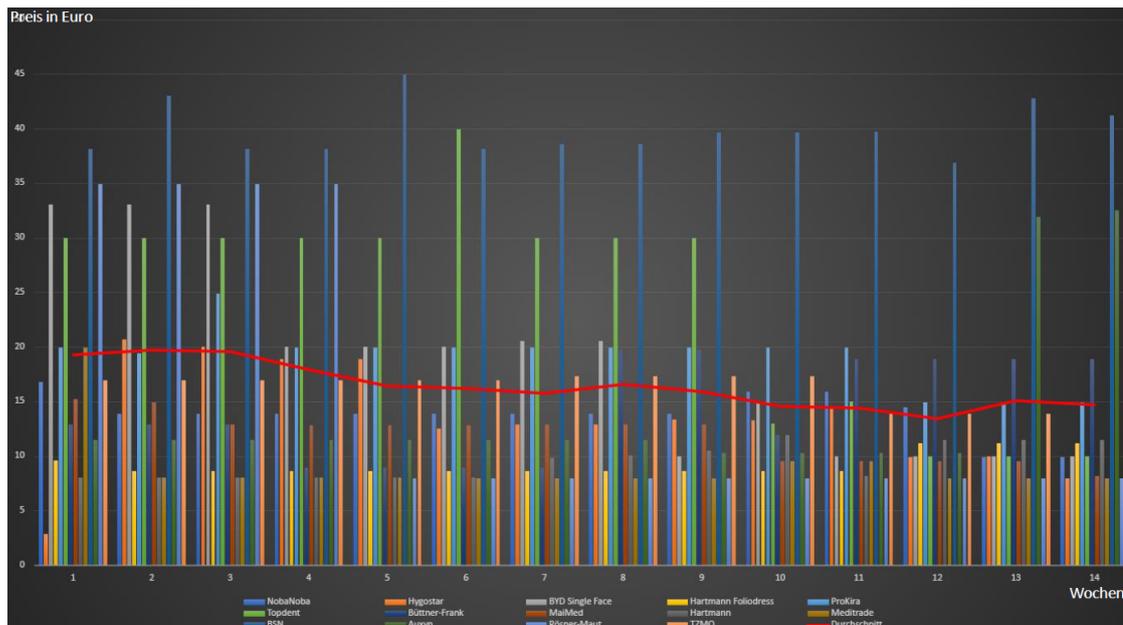


Abbildung 2: Produktdaten zu gelisteten OP-Masken auf Idealo.

alle eingespeisten Preise. Der Verbraucher kann nun einen Produktpreis und Informationen zur Angebots- und Nachfragerlage in das System eingeben. Das Programm vergleicht den eingegebenen Preis mit dem intern berechneten Mittelwert und gibt entsprechend Hinweise aus. Ein Flussdiagramm des Programms ist in Abbildung 3 gezeigt.

Überlegungen der Gruppe zu einem staatlichen Regelwerk berücksichtigten das Eingreifen des Staats ausschließlich in einer vorsätzlich ausgenutzten Notlage. Außerhalb dieser Notlage habe der Kunde ein Recht auf freie Auswahl und der Anbieter ein Recht auf freie Preiswahl. Sonderregelungen bei staatlicher Gesetzgebung, wie z.B. FFP2-Maskenpflicht wurden ebenfalls berücksichtigt. Die Gruppe diskutierte außerdem den Einfluss von Festpreisen auf die Marktfreiheit.

Die Projektgruppe identifizierte darüber hinaus Verbesserungsmöglichkeiten, wie eine ständige und automatische Aktualisierung des Datensatzes, eine Ausweitung der Datenlage, die Berücksichtigung aktueller Regelungen zum Tragen von OP- und FFP2-Masken, aktueller CE-Zertifikate und Mengenrabatten.

Zusammenfassend erarbeitete die Projektgruppe ein funktionierendes Warnsystem, gestaltete Überlegungen zu einem staatlichen Regelwerk und bezog dabei zahlreiche Modellimitierungen und aktuelle Marktparameter mit ein.

4.4 Krankheitsausbreitung mit zellulären Automaten

4.4.1 Problemstellung

Viele mathematische Modelle, die man verwendet, um Krankheitsausbreitung zu beschreiben, beruhen hauptsächlich auf der Anzahl der Kranken und der Größe der Population. Räumliche Aspekte einer Pandemie, beispielsweise lokale Hotspots, und Maßnahmen wie Reisebeschränkungen werden in diesen Modellen nicht berücksichtigt.

Eine naive Herangehensweise an dieses Problem stellen zelluläre Automaten dar. Naiv des-

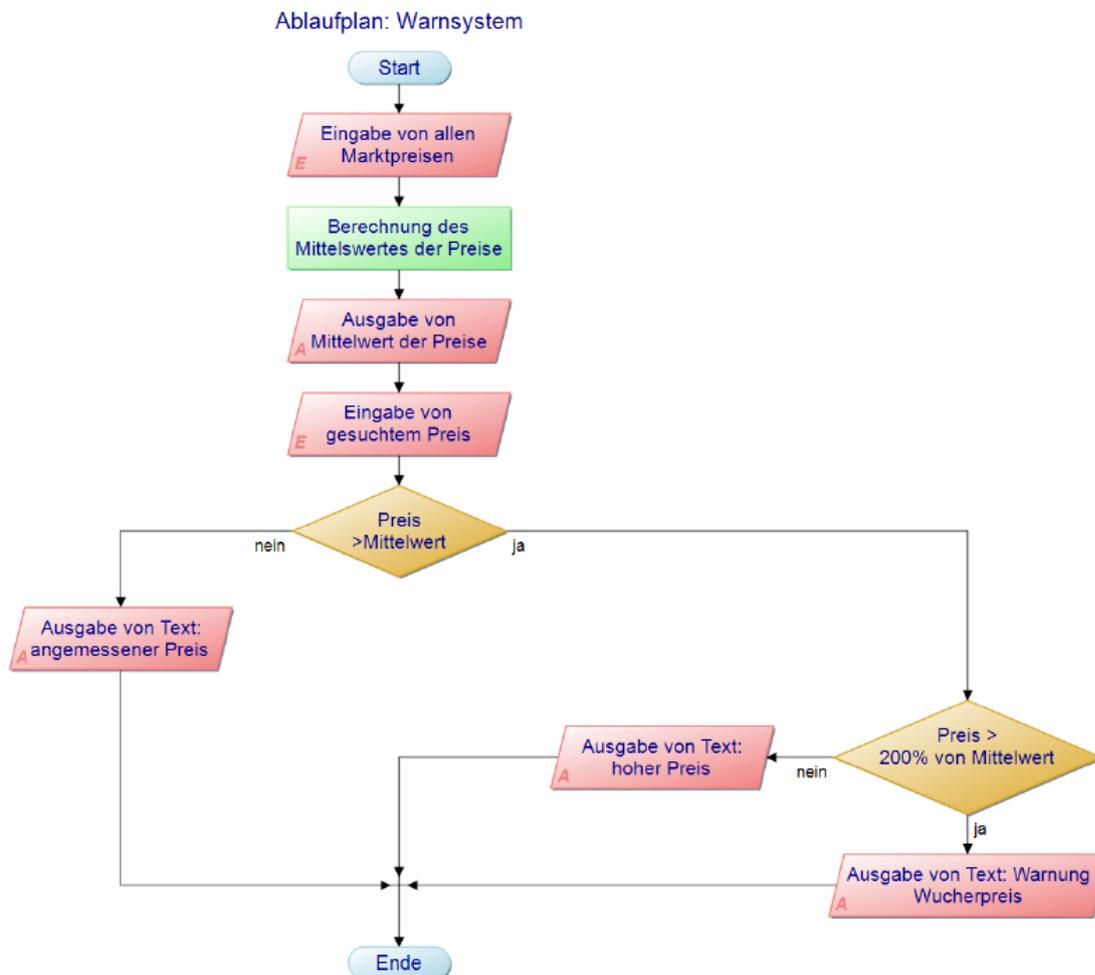


Abbildung 3: Flussdiagramm des konstruierten Warnsystems.

wegen, weil die modellierte Welt stark vereinfacht und damit äußerst unrealistisch ist. Dennoch hat man ein sehr simples Hilfsmittel zur Hand, um wichtige mathematische Prinzipien abzuleiten, die man möglicherweise auf komplexere Systeme übertragen kann.

Wir wollen Simulationen mit zellulären Automaten nutzen, um zu ergründen, inwiefern sich solche räumlichen Modelle von jenen unterscheiden, die nur mit der Gesamtzahl der gesunden, erkrankten und genesenen Population arbeiten.

4.4.2 Vorüberlegungen

Die Grundidee hinter einem zellulären Automaten ist, dass sowohl die zeitliche als auch die räumliche Dimension diskretisiert werden. Die Welt wird in sogenannte Zellen (hier Quadrate) unterteilt, die Zeit in einzelne Zeitschritte. Jede Zelle hat einen bestimmten Zustand. In unserem Fall sind die Zustände gegeben als

- 0 (oder weiß): die Zelle ist leer
- 1 (oder blau): eine gesunde Person befindet sich in der Zelle
- 2 (oder rot): eine kranke Person befindet sich in der Zelle

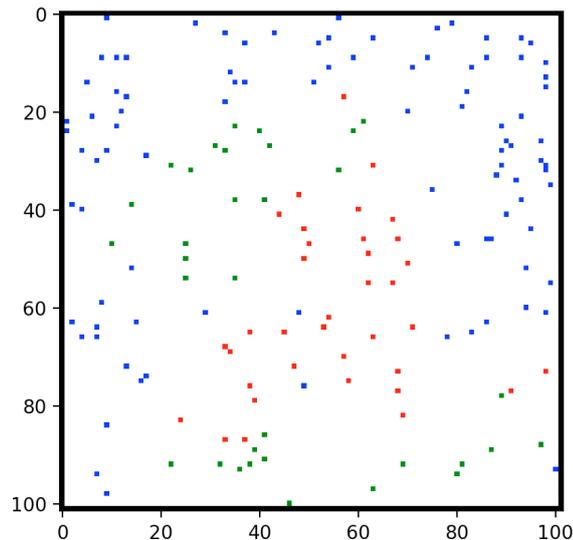


Abbildung 4: Ein zellulärer Automat mit vier Zuständen: blau (gesunde Person), rot (infizierte Person), grün (genesene Person) und weiß (leeres Feld).

- 3 (oder grün): eine genesene Person befindet sich in der Zelle

Die zeitliche Entwicklung wird dadurch gewährleistet, dass sich die Zustände der Zellen bei jedem Zeitschritt ändern können. In aller Regel sind für die Änderung des Zustandes einer Zelle die Zustände der Nachbarzellen maßgeblich. In unserem Modell sind folgende Dinge zu beachten:

- Die Personen können durch einen zufallsgesteuerten Prozess durch die Welt laufen (in unserem Fall: eine *zufällige Irrfahrt*). Dabei achten sie auch auf die Nachbarzellen, um Kollisionen mit anderen Personen oder dem Rand der Welt zu vermeiden.
- Kranke Personen werden nach einer gewissen Anzahl an Zeitschritten wieder gesund.
- Gesunde Personen können krank werden, wenn sich in ihrer Nachbarschaft kranke befinden.

Es standen mehrere Varianten der Simulation zur Verfügung, die unterschiedliche Besonderheiten hatten:

- Es kann social Distancing berücksichtigt werden, d.h. die Individuen versuchen, Abstand voneinander zu nehmen.
- Nach dem Prinzip *Identify and Isolate* konnten erkrankte Individuen – ebenso wie deren Kontakte – isoliert werden.
- Die Welt konnte in zwei getrennte Bereiche mit einer reduzierten Grenzdurchlässigkeit aufgeteilt werden.

Mit solchen Modellen sind nun verschiedene Fragestellungen denkbar. Zunächst lassen sich bestimmte Größen aus dem Modell berechnen, zum Beispiel die Zahl der Kranken in Abhängigkeit vom Zeitschritt oder der R-Wert der Krankheit (d.h. die Zahl der Personen, die ein Erkrankter im Schnitt infiziert). Hier sind ein paar Ideen, welche Fragen man mit einem solchen Modell beantworten könnte:

- Man vergleicht qualitative Unterschiede im Verlauf der Infektionszahl gegen die Zeit zwischen dem Modell mit den zellulären Automaten und einem klassischen SIR-Modell ohne Berücksichtigung räumlicher Ausbreitung.

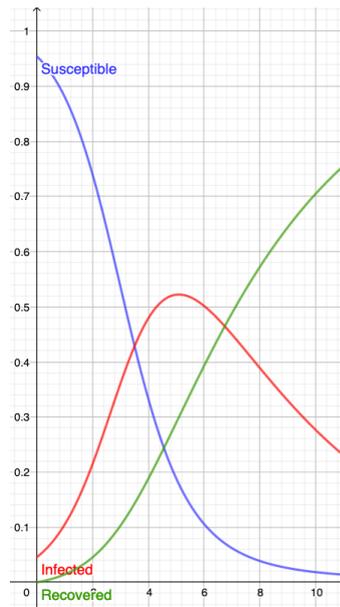


Abbildung 5: Infektionsverlauf nach einem klassischen SIR-Modell.

- Man untersucht die R-Werte in Abhängigkeit von bestimmten Modellparametern.
- Man untersucht die Krankheitsausbreitung in verschiedenen Bereichen der simulierten Welt, wenn für diese Bereiche unterschiedliche Bedingungen herrschen (z.B. unterschiedliche Regeln für social Distancing). Je nach Grenzdurchlässigkeit wird man könnte untersucht werden, inwiefern es eine Rolle spielt, ob in einer Region schärfere Regeln gelten als anderswo.

Bei der Projektdurchführung wurde es der Gruppe freigestellt, welche Fragen sie mit der Simulation beantworten wollen.

4.4.3 Ergebnisse

Einige der Schüler in dem Projekt hatten ein großes Interesse daran, einen Blick in den bereitgestellten Code zu werfen und die Simulation zu erweitern. Nach einer Kurzeinführung in die Programmiersprache Python und einem intensiven Vormittag, in welchem sie gemeinsam mit dem Projektbetreuer den Code inspiziert haben, teilten sie sich in Teams von schwankender Größe ein, um an verschiedenen Fronten zu arbeiten: Eine Gruppe beschäftigte sich damit, die simulierte Welt in verschiedene Zonen einzuteilen, zwischen denen spontane Reisen möglich sind und wo auch unterschiedliche mathematische Regeln für die Krankheitsausbreitung gelten. Eine andere Gruppe beschäftigte sich mit dem Prinzip von `csv`-Dateien, um die generierten Daten exportieren zu können und damit die Auswertung zu automatisieren. Parallel wurde auch die Abschlusspräsentation vorbereitet.

Die Gruppe hatte zahlreiche Ideen, welche Erweiterungen an der Simulation vorgenommen werden können. Allerdings zeigte sich bald, dass in der kurzen Zeit nur ein Bruchteil der Ideen realisiert werden konnte. Sie hatten sich dann bald darauf geeinigt, die Welt in mehrere Bereiche aufzuteilen, welche die Interpretation von Bundesländern oder Landkreisen haben sollten. Die Modellparameter sollten in diesen Bereichen individuell eingestellt werden können, um unterschiedliche Infektionswahrscheinlichkeiten (aufgrund von unterschiedlichen Lockdownmaßnahmen) zu realisieren. Zusätzlich sollten sowohl die Rei-

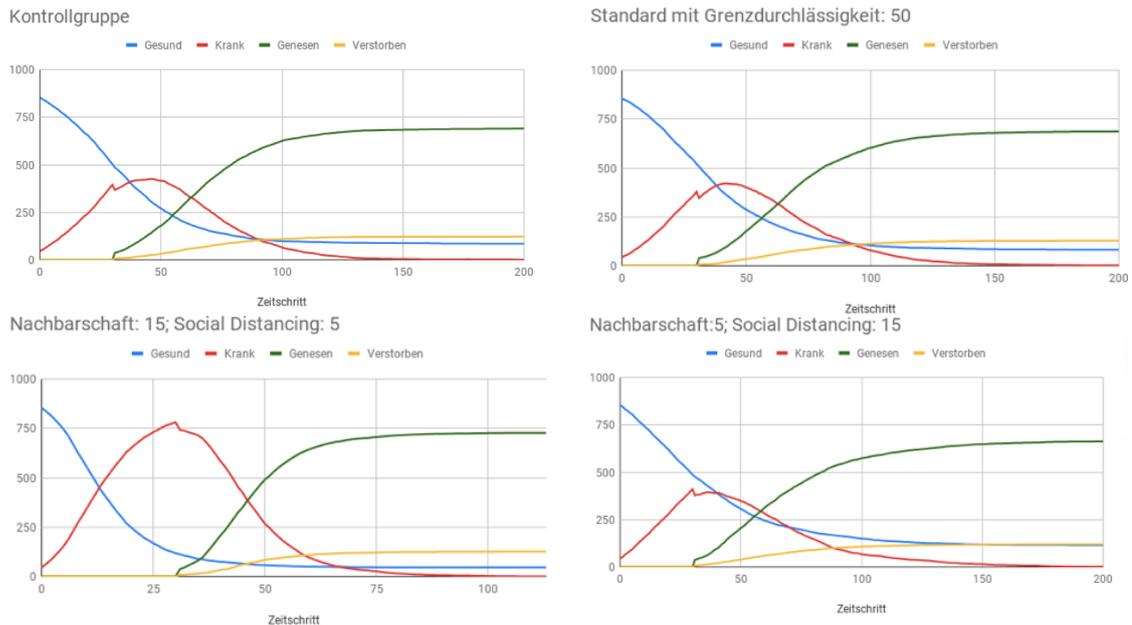


Abbildung 6: Vier Simulationen mit unterschiedlichen Parametern.

sewahrscheinlichkeit zwischen den einzelnen Bereichen, sowie die Anzahl der Individuen pro Bereich variabel gewählt werden können.

Am Ende blieb leider nur wenig Zeit, um die fertige Simulation für Experimente einzusetzen. Es wurden Verlaufskurven der Krankheitszahlen erfasst, und dabei wurden bei den Durchführungen unterschiedliche Parameter im Vergleich zu einer Referenzsimulation verändert. In den Kurven (siehe Abbildung 6), die dabei entstehen, lässt sich der charakteristische Verlauf einer Epidemie erkennen: Die Kurve der Infektionszahlen steigt recht steil an und fällt danach etwas flacher wieder ab. Ebenso erkennt man den Effekt der Herdenimmunität, weil sich ab einer gewissen Zeit die Zahl der gesunden Individuen stabilisiert. Die geringe Zahl an Experimenten ließ jedoch nur schwer eine weiterführende Interpretation der Ergebnisse zu. Bei einer Fortführung dieses Projektes wären weitere Wiederholungen mit den gleichen Parametern angebracht, um im Sinne einer Monte-Carlo-Simulation den Effekt von statistischen Schwankungen auf die Ergebnisse zu reduzieren. Ebenso hätte die Forschungsfrage, der man hätte nachgehen wollen, präzisiert werden müssen.

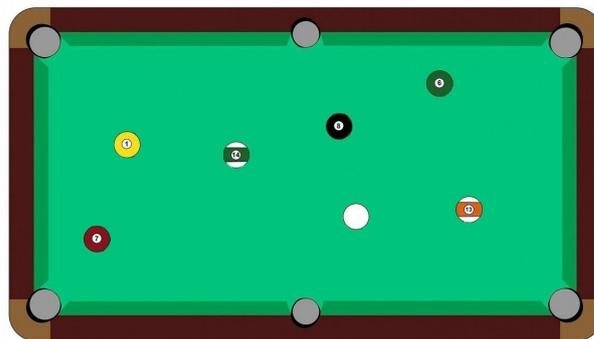
Denkbar wäre bei diesem Modell etwa die Frage, ob die einzelnen Bereiche durch Schutzmaßnahmen (Reduktion der Infektionswahrscheinlichkeit) ihre Krankenzahlen tatsächlich selbstbestimmt steuern können, oder ob die Abhängigkeit mit den Nachbarn die Werte zu stark beeinflusst. Dabei hätte man gezielt die relevanten Parameter, wie etwa die Größe der Bereiche, die Grenzdurchlässigkeit, die Infektionsrate oder die Anzahl der Individuen, die sich frei bewegen, variieren können.

Auch ein Vergleich der Verlaufskurven aus klassischen SIR Modellen (siehe Abbildung 5) mit den hier generierten Verläufen wäre interessant gewesen. Man hätte damit untersuchen können, wie sehr die Verläufe voneinander abweichen, um zu entscheiden, ob diese Modelle tatsächlich zu unterschiedlichen oder eher zu den gleichen Ergebnissen führen.

4.5 Spielstrategien im Billard

4.5.1 Problemstellung

Auch wenn man beim Billard natürlich einfach nur beliebig mit dem Queue Kugeln anspielen kann, sind für ein erfolgreiches und korrektes Spiel einige Überlegungen hilfreich. Eine mathematische Umsetzung dieser unter Betrachtung physikalischer Gegebenheiten, die das Spiel beeinflussen, vereinfacht ein gezieltes Spiel. Je näher die Modellierung der Realität entspricht, desto erfolgreicher und realistischer ist die entsprechende Umsetzung beim Spielen. Der Spielstand, zu dem ihr den besten nächsten Spielzug bestimmen sollt, ist folgender:



Dafür benötigt ihr ein paar grundlegende Informationen:

Maße im Billard

- Tisch: 2540 mm · 1270 mm (Länge · Breite)
- Kugeln: 57,2 mm (Durchmesser)
- Ecktaschen: 130 mm (vorne), 110 mm (hinten)
- Mitteltaschen: 140 mm (vorne), 115 mm (hinten)

Vereinfacht lautet die Spielweise beim Billard folgendermaßen: Ziel des Spiels ist es, zunächst die eigenen und anschließend die schwarze Kugel in den Taschen zu versenken. Dabei spielt ein Spieler mit den voll gefärbten und einer mit den halb gefärbten Kugeln. Alle Kugeln müssen mit der weißen Kugel angespielt werden. Versenkt man im Spiel eine Kugel des Gegners oder die weiße Kugel oder tritt mit der weißen Kugel keine eigene, so ist der Gegner an der Reihe. Wird die schwarze Kugel zu früh versenkt, so ist das Spiel verloren.

4.5.2 Vorüberlegungen

Zur Bearbeitung des Problems sind Kenntnisse aus der Mechanik sehr hilfreich. Insbesondere die Bewegung der weißen Kugel nach dem Stoß hängt wesentlich von den Sätzen über Impuls- und Energieerhaltung ab.

Impulserhaltung Die Summe der Impulse aller Kugeln vor dem Stoß und die Summe der Impulse aller Kugeln nach dem Stoß sind gleich.

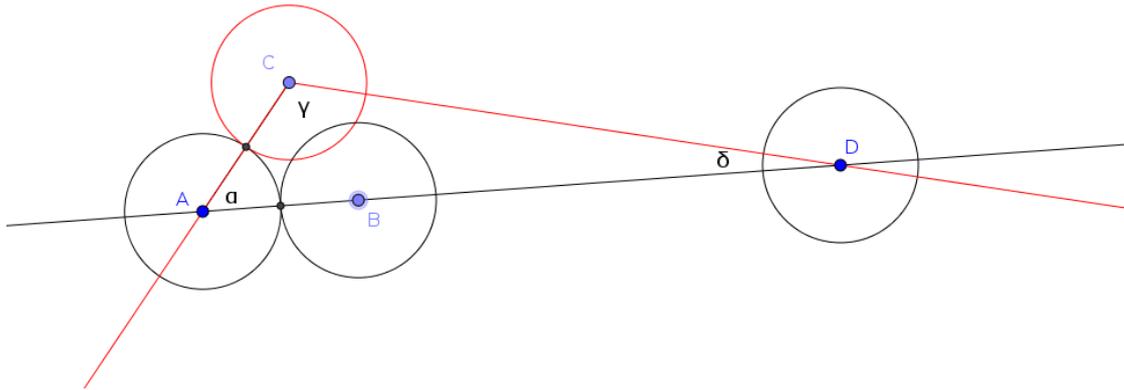


Abbildung 7: Die weiße Kugel im Punkt D kann zentral auf die angespielte Kugel in A gespielt werden (Kollision im Punkt B) oder unter einem Winkel δ (Kollision im Punkt C).

Der Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$ ist dabei als eine vektorielle Größe zu betrachten, damit die Bewegungsrichtungen berücksichtigt werden.

Energieerhaltung Die Summe der Energien aller Kugeln vor dem Stoß und die Summe der Energien aller Kugeln nach dem Stoß sind gleich.

Da (fast) keine Verformungsarbeit geleistet wird, geht man davon aus, dass wir es nur mit Bewegungsenergie zu tun haben, die sich aus $E = 0.5mv^2$ ergibt.

Wenn man Dralleffekte (und damit den Effekt der Kugeln) völlig vernachlässigt, kann man (unter Zuhilfenahme der Satzgruppe des Pythagoras, z.B. des Höhensatzes) zeigen, dass die Bewegungsrichtungen von der weißen Kugel und der angespielten Kugel nach dem Stoß einen rechten Winkel bilden (wird die Kugel zentral angespielt, dann ruht die weiße Kugel nach dem Stoß, wenn sie keinen Drall hat).

Man kann jedoch diesen Winkel komplett vernachlässigen und sich nur mit der Frage beschäftigen, in welchem Zusammenhang die Bewegungsrichtungen von der weißen Kugel vor dem Stoß und die Richtung der angespielten Kugel nach dem Stoß stehen. Der Zusammenhang erweist sich für viele Schülerinnen und Schüler als recht komplex, da oft der Fehler gemacht wird, die Kugeln als punktförmige Objekte zu behandeln. In Abbildung 7 sehen wir die geometrische Konstruktion der Richtung für die angespielte Kugel. Der funktionale Zusammenhang der Winkel δ und α ist nicht einfach und erfordert einen sicheren Umgang mit Trigonometrie. Jedoch lässt sich die Situation sehr gut in Geogebra nachbilden, wo man dann Messungen und Experimente durchführen kann.

Die Fragen, die man sich in diesem Projekt stellen kann, können recht unterschiedlich ausfallen, z.B.

- Kann man für eine gegebene Spielsituation bewerten, wie schwierig es ist, eine bestimmte Kugel in die Tasche zu spielen (es ist nicht unbedingt nötig, die Schwierigkeit als absolutes Maß zu berechnen; ein Ranking von *am leichtesten* bis *am schwersten* reicht aus)?
- Man kann sich auch darauf konzentrieren, eine Abfolge von mehreren Stößen hintereinander zu planen. Dann berücksichtigt man auch die Bewegungsrichtung der

weißen Kugel, um beim nächsten Spielzug eine besonders günstige Ausgangsposition zu haben. Es ist jedoch nicht ganz offensichtlich, wie man festlegt, wo die weiße Kugel zum Stehen kommt.

- Man könnte ganz gezielt Fragen zu bestimmten Spielsituationen stellen, um Faustregeln aufzustellen, z.B. *Was spielt eine größere Rolle: Der Abstand zwischen der weißen Kugel und der angespielten Kugel, oder der Abstand der angespielten Kugel zur Tasche?*

Die Komplexität der Aufgabe lässt sich etwas vereinfachen, wenn eine konkrete Spielsituation (z.B. in Form eines Bildes) vorgegeben wird.

4.5.3 Ergebnisse

Die Durchführung des Projekts war mit einer studentischen Abschlussarbeit verbunden, daher wich das Format ein wenig von der üblichen Durchführung der Felix-Klein-Modellierungswoche ab. Das Lernmaterial wurde in einem Padlet vorbereitet und bot den Schülerinnen daher einen angeleiteten Lernpfad durch das Thema.

Die Schülerinnen beschäftigten sich zunächst mit den Spielregeln des Poolbillard. Da nicht alle mit der Vektorrechnung vertraut waren, setzten sie sich am ersten Tag auch mit der vektoriellen Darstellung der relevanten physikalischen Größen auseinander. Sie erkannten, dass bei völliger Vernachlässigung der Reibungseffekte die Richtung der beiden auslaufenden Kugeln nach dem Stoß einen rechten Winkel bilden. Am zweiten Tag konnten sich die Teilnehmerinnen dann ausführlich mit den verschiedenen Kugeln in der gegebenen Spielsituation beschäftigen.

Sie übertrugen die gesamte Geometrie des Tisches und die Lage der Kugeln in ein Geogebra-Modell, um einfacher experimentieren zu können. Sie analysierten, wie die verschiedenen Kugeln gespielt werden können und in welche Richtung die weiße Kugel bei dem jeweiligen Spielzug rollen würde. Damit entwickelten sie dann einen idealisierten Spielablauf, der es ihnen ermöglichen würde, die verbleibenden Kugeln nacheinander einzulochen, um das Spiel schließlich zu gewinnen. Sie erzeugten eine Lösung für den Spieler mit den halbgefärbten Kugeln und eine Lösung für den Gegenspieler mit den voll gefärbten Kugeln. Die Schwierigkeit dieser Stöße blieb dabei unbeachtet. In der Lösung wurde davon ausgegangen, dass der Spieler die anvisierte Tasche trifft.